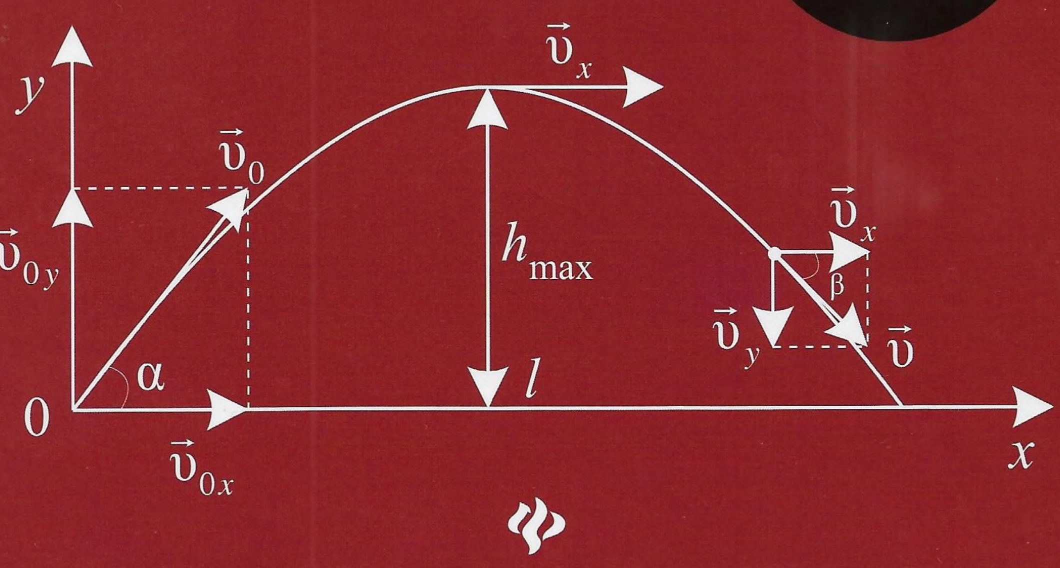
ЕГЭ. Высший балл

Физика

Задания высокой и повышенной сложности

Виталий Лях

На протяжении
10 лет средний
результат учеников
85-100 баллов



Серия «ЕГЭ. Высший балл»

В. В. Лях

ФИЗИКА

Задания высокой и повышенной сложности

Ростов-на-Дону
«Феникс»
2020

УДК 373.167.1:53
ББК 22.3я72
КТК 444
Л98

Лях В. В.

Л98 Физика : задания высокой и повышенной сложности / В. В. Лях. — Ростов н/Д : Феникс, 2020. — 200, [1] с. : ил. — (ЕГЭ. Высший балл).

ISBN 978-5-222-31745-7

Перед вами пособие по решению задач высокой и повышенной сложности в формате ЕГЭ по физике. Это не просто сборник интересных и сложных задач. Книга-репетитор, книга-путеводитель от школьной «четверки» до 100 баллов — вот что это такое. Здесь есть все: необходимая и достаточная теория, справочные материалы, тесты, репетиторские хитрости, секреты и рекомендации. И конечно, сами задачи — с решениями и образцовым оформлением. Ориентиром по уровню сложности задач в книге послужили задания части 2 ЕГЭ.

Пособие предназначено для абитуриентов, учителей и репетиторов.

УДК 373.167.1:53
ББК 22.3я72

ISBN 978-5-222-31745-7

Оглавление

От автора

Здравствуй, дорогой читатель!

Уже более 15 лет я занимаюсь подготовкой школьников к ЕГЭ по физике и математике, а также к школьным и вузовским олимпиадам.

За эти годы я провел огромное количество как индивидуальных, так и групповых занятий в аудитории и онлайн, обучая физике и математике школьников и студентов, школьных учителей и репетиторов. И из года в год я вижу одни и те же ошибки в решении классических задач и непонимание принципов решения задач повышенной сложности.

В этой книге я постарался в сжатой форме изложить краткий теоретический курс школьной физики, а также привел примеры наиболее часто встречающихся на экзамене задач с подробными решениями.

Конечно, в одной книге сложно уместить все свои знания и опыт. Тех, кому книги окажется мало, и всех тех, у кого после ее изучения остались вопросы, жду на своем сайте, посвященном подготовке к ЕГЭ, *ege911.ru* и в группе ВКОНТАКТЕ *https://vk.com/ege911ru*. Там же вы найдете и подробные решения к самостоятельным и контрольным работам из данной книги.

Искренне ваш

Виталий Владимирович Лях

https://vk.com/lyakhvv

https://www.facebook.com/lyakhvv

Как пользоваться книгой

Для получения большей пользы от изучения книги очень советую сначала внимательно изучить теорию, а затем разобраться с приведенными в параграфе задачами, после чего постараться решить их самостоятельно, не подсматривая в решение, и только потом переходить к самостоятельным работам.

Задачи в самостоятельных работах подобраны для закрепления теоретического материала и подготовки к решению сложных задач из контрольных работ.

В конце книги, перед итоговой контрольной работой, приведены все задачи, которые разбирались в тексте книги. Очень советую перерешать их перед итоговой контрольной работой и за пару недель до экзамена, чтобы еще раз повторить весь материал.

Рекомендации по решению задач

1. Внимательно прочитайте условие несколько раз. Более половины неправильно решенных задач связаны с неверно понятым или даже не дочитанным до конца условием.

2. Постарайтесь понять, что происходит в задаче, если это реально — представить себе происходящее. Выясните, какие величины даны в условии и что требуется найти.

3. Обязательно составьте рисунок, какой бы легкой ни казалась задача. Изобразите на рисунке тела, их скорости и направления движения, действующие на них силы и изменяющиеся величины.

4. Постройте систему координат, нарисуйте проекции векторов на эти оси.

5. Запишите уравнения движений для всех тел в проекциях на выбранные оси.

6. Решите полученную систему уравнений (или уравнение) в буквенном виде, проверьте его на размерность.

7. Подставьте числовые значения, предварительно переведя их в единую систему измерения.

8. Считайте, пусть и с частыми округлениями, сначала без калькулятора. Начиная считать на калькуляторе, вы уже должны примерно знать число, которое получится в ответе.

Раздел 1
МЕХАНИКА

Математические основы

Физические величины делятся на векторные и скалярные.

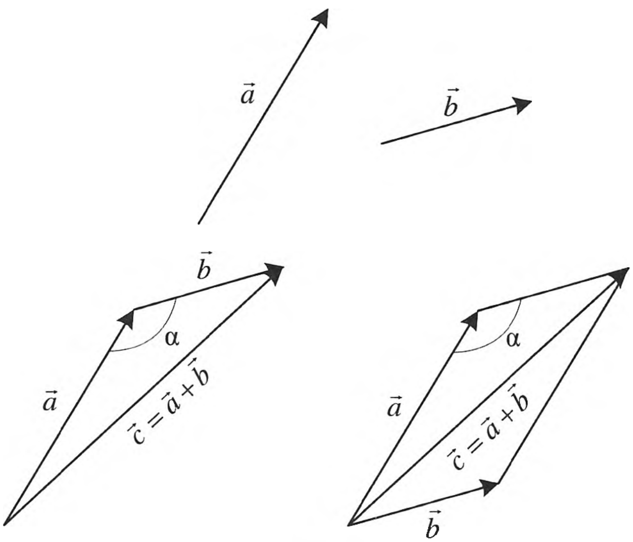
Величины, которые определяются только значением (числом), называются *скалярными* (путь, температура, время и т. д.).

Физические величины, которые кроме числового значения (его еще называют модулем или длиной вектора) имеют направление, называются *векторными* и обозначаются со стрелочкой сверху (например, перемещение $\vec{S}$, скорость $\vec{v}$, сила $\vec{F}$ и т. д.).

Соответственно и работают с векторными величинами, как с векторами.

Сложение векторов

Есть два правила сложения векторов: правило треугольника и правило параллелограмма.



Правило треугольника

Расположим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы начало вектора $\vec{b}$ совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор $\vec{c}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, и будет являться суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Правило параллелограмма

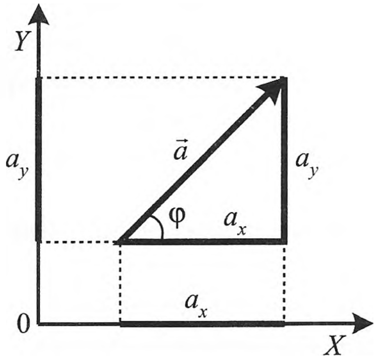
Не меняя направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложим их от одной точки (совместим их начала). Построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах параллелограмм. Тогда вектор $\vec{c}$, который будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, является диагональю этого параллелограмма, которая проведена из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Длину вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ можно найти по теореме косинусов из получившегося треугольника:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

где α — угол, лежащий напротив стороны c.

Проекция вектора на оси координат



Опустим из начала и конца вектора перпендикуляры на оси координат.

Отрезки между перпендикулярами a_x и a_y будут проекциями вектора на оси X и Y соответственно.

Проекция положительна, если от проекции начала вектора к проекции конца идти в положительном направлении оси. В противном случае она считается отрицательной.

Длина (модуль) вектора и длины его проекций в прямоугольной системе координат связаны с теоремой Пифагора:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},\ a_x = a\cos\varphi,\ a_y = a\sin\varphi.$$

Глава 1

Кинематика

Начнем с определений.

Кинематика — раздел механики, изучающий движение тел без учета причин, вызывающих это движение.

Тело отсчета — тело, относительно которого рассматривается движение других тел.

Система отсчета — тело отсчета, система координат и прибор для измерения времени.

Материальная точка — тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Траектория — линия, вдоль которой движется тело.

Путь — длина траектории. Путь — величина скалярная.

Перемещение — вектор, соединяющий начальное и конечное положения тела.

Скоростью тела при равномерном движении называют отношение перемещения тела ко времени, за которое это перемещение произошло. Значение скорости можно найти по формуле

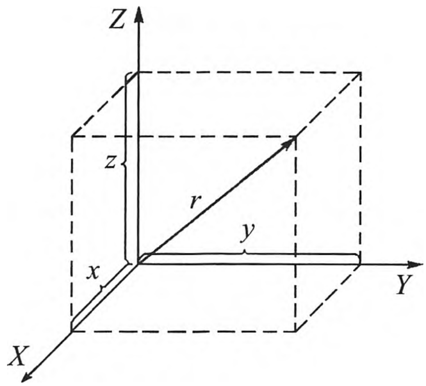
$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{S}}{t}.$$

В проекции на некоторую ось x

$$\upsilon_x = \frac{S_x}{t}.$$

Мгновенная скорость — скорость тела в данный момент времени.

Радиус-вектор $\vec{r}$ — вектор, соединяющий начало координат с положением точки.



Положение материальной точки в данный момент времени можно задать ее координатами или радиусом-вектором.

Перемещение точки можно выразить через изменение радиуса-вектора:

$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

В проекциях на выбранную ось x

$$s_x = x_2 - x_1.$$

Зависимость радиуса-вектора $\vec{r}$ от времени при равномерном движении x:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}t.$$

Зависимость координаты тела x от времени при равномерном движении вдоль оси x:

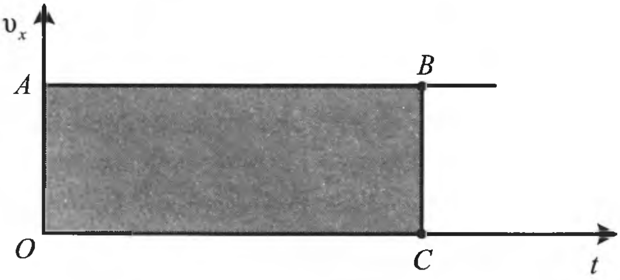
$$x = x_0 + s_x = x_0 + \upsilon_x t,$$

где x_0 — начальная координата тела. Это уравнение равномерного движения.

Графическое изображение равномерного движения

Площадь фигуры на графике зависимости скорости от времени равна перемещению за время движения.

На графике это площадь прямоугольника *OABC*.



§ 1. Средняя скорость

Средняя путевая скорость — отношение пройденного пути L ко времени движения t.

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{L}{t}.$$

Средняя скорость перемещения — отношение перемещения S ко времени движения t.

$$\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{S}{t}.$$

Задача 1

Велосипедист половину пути ехал со скоростью 8 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 12 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

Решение.

Обозначим скорость движения на первой половине пути υ_1, на второй половине пути — υ_2.

Многие решают эту задачу абсолютно неправильно, найдя среднее арифметическое значение скоростей:

$$\upsilon_{\text{ср.ар.}} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \frac{8+12}{2} = 10 \text{ км/ч}.$$

Это неправильно!

Вспомним определение средней скорости.

Средней путевой скоростью движения называется отношение пройденного пути ко времени движения.

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{S}{t}.$$

Да, но у нас не даны ни путь, ни время. Как быть?

Обозначим весь путь S. Путь на первом участке S_1 равен пути на втором участке S_2:

$$S_1 = S_2 = \frac{S}{2}.$$

Тогда время t_1, затраченное на первую половину пути, равно:

$$t_1 = \frac{S_1}{\upsilon_1} = \frac{S}{2\upsilon_1}.$$

Время t_2, затраченное на первую половину пути, равно:

$$t_2 = \frac{S_2}{\upsilon_2} = \frac{S}{2\upsilon_2}.$$

Общее время t:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{2\upsilon_1} + \frac{S}{2\upsilon_2} = \frac{S(\upsilon_2 + \upsilon_1)}{2\upsilon_1\upsilon_2}.$$

По формуле средней путевой скорости получим

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{S}{\frac{S(\upsilon_2 + \upsilon_1)}{2\upsilon_1\upsilon_2}} = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_2 + \upsilon_1} = \frac{2\cdot 8\cdot 12}{12+8} = 9{,}6 \text{ км/ч.}$$

Ответ: $\upsilon_{\text{ср}} = \dfrac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_2 + \upsilon_1} = 9{,}6$ км/ч.

Задача 2

Велосипедист половину времени ехал со скоростью 8 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 12 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

Решение.

Обозначим все время в пути t. Время на первом участке t_1 равно времени на втором участке t_2:

$$t_1 = t_2 = \frac{t}{2}.$$

Путь S_1 за время t_1:

$$S_1 = \upsilon_1 t_1.$$

Путь S_2 за время t_2:

$$S_2 = \upsilon_2 t_2.$$

Общий путь S:

$$S = S_1 + S_2 = \upsilon_1 t_1 + \upsilon_2 t_2 = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)t}{2}.$$

По формуле средней путевой скорости получим:

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)t}{2t} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \frac{8+12}{2} = 10 \text{ км/ч.}$$

Ответ: $\upsilon_{\text{ср}} = \dfrac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = 10$ км/ч.

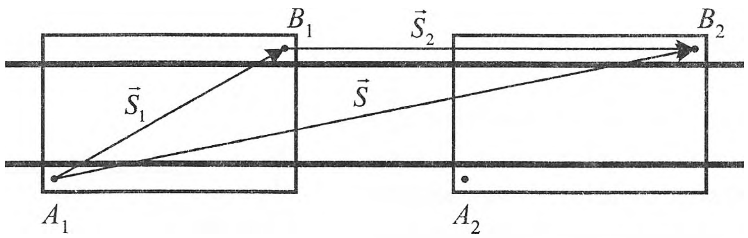
§ 2. Относительность движения. Сложение скоростей

Наверняка вам доводилось ездить в поезде или в автомобиле. Любой предмет, который лежит рядом с вами (на столе или рядом на сиденье), покоится относительно вас. Но относительно человека, стоящего на перроне или обочине, этот предмет двигается со скоростью транспортного средства.

Этот пример демонстрирует относительность движения в разных системах отсчета.

Давайте рассмотрим еще один пример.

Тележка двигается по рельсам с некоторой постоянной скоростью $\vec{\upsilon}_2$, а по ней из точки A_1 в точку B_1 двигается человек с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}_1$.



За время движения человека из точки A_1 в точку B_1, за которое его перемещение будет равно $\vec{S}_1 = \overline{A_1B_1}$, тележка сместится на $\vec{S}_2 = \overline{B_1B_2}$, и человек в итоге окажется в точке B_2, т. е. итоговый вектор перемещения человека относительно земли равен $\vec{S} = \overline{A_1B_2}$. Мы получили правило сложения перемещений $\overline{A_1B_2} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_2}$ или $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$.

Разделив обе части этого уравнения на время движения t, получим правило сложения скоростей:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2.$$

Скорость тела относительно неподвижной системы отсчета $\vec{\upsilon}$ равна геометрической (векторной) сумме скорости тела относительно подвижной системы отсчета $\vec{\upsilon}_1$ и скорости подвижной системы отсчета относительно неподвижной $\vec{\upsilon}_2$.

Задача 1

Рыболов, поднимаясь на лодке вверх по реке, уронил удочку и заметил это только спустя 2 минуты. Заметив потерю, он сразу же повернул обратно. На каком расстоянии от места потери он догонит удочку, если скорость течения реки 3 м/с? Собственная скорость рыболова (скорость рыболова относительно воды) постоянна.

Решение.

На первый взгляд, задача вообще не решается, так как не дана скорость рыболова.

Но это только на первый взгляд.

Перейдем в систему отсчета, связанную с удочкой (с водой).

В этой системе отсчета рыболов двигается со своей собственной скоростью, а удочка покоится. Значит, рыболов удаляется от удочки и догоняет ее с одинаковой относительно удочки скоростью.

Если он уплывает от удочки в течение времени $t = 2$ мин, значит, и возвращаться за ней он тоже будет $t = 2$ мин. Получается, что рыболов поднимет удочку через время $2t$ (4 минуты) после потери.

В неподвижной системе отсчета (например, относительно берега) удочка в течение 4 минут плыла со скоростью течения $u = 3$ м/с. Значит, путь S, пройденный удочкой, равен:

$$S = 2tu = 2 \cdot 2 \cdot 60 \cdot 3 = 720 \text{ м}.$$

Ответ: $S = 2tu = 720$ м.

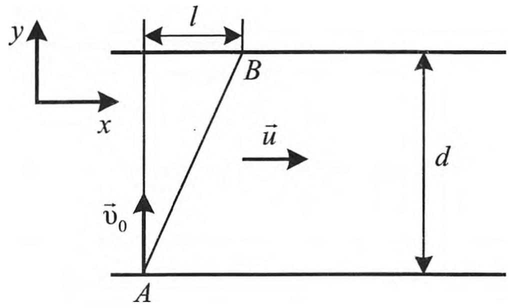
Задача 2

Переправляясь через реку шириной 400 метров, лодочник направил лодку строго на противоположный берег. На какое расстояние его снесет ниже по течению, если скорость течения реки 1,5 м/с, а собственная скорость лодки 4 м/с?

Решение.

Некоторые ученики сразу начинают искать скорость относительно берега. Не стоит так делать.

Сделаем рисунок. Введем обозначения: d — ширина реки, l — искомое расстояние, на которое течение сносит лодочника, υ_0 — скорость лодочника относительно воды, u — скорость течения реки.



Направим оси x и y, как показано на рисунке.

Перемещение лодочника в проекциях на оси x и y:

$$S_x = l = ut,$$

$$S_y = d = \upsilon_0 t.$$

Выразив из второго уравнения время движения t и подставив его в первое уравнение, получим

$$t = \frac{d}{\upsilon_0};$$

$$l = \frac{ud}{\upsilon_0} = \frac{1{,}5 \cdot 400}{4} = 150 \text{ м}.$$

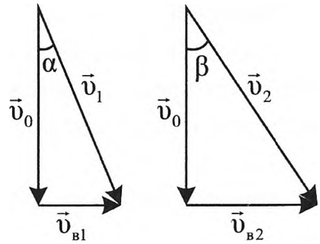
Ответ: $l = \dfrac{ud}{\upsilon_0} = 150$ м.

Задача 3

При скорости ветра, равной 10 м/с, капли дождя падают под углом 30° к вертикали. При какой скорости ветра капли будут падать под углом 60° к вертикали?

Решение.

Собственная скорость капель $\vec{\upsilon}_0$ в системе отсчета, связанной с воздухом, направлена вертикально вниз. Собственная скорость не зависит от скорости ветра.



Скорость капель относительно земли $\vec{\upsilon}_1$ состоит из суммы скоростей капель относительно воздуха $\vec{\upsilon}_0$ и скорости ветра $\vec{\upsilon}_{в1}$. Как видим из рисунка,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\upsilon_{в1}}{\upsilon_0}.$$

Тогда скорость капель относительно воздуха

$$\upsilon_0 = \frac{\upsilon_{в1}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

После увеличения скорости ветра $\vec{\upsilon}_{в2}$ скорость капель относительно воздуха остается неизменной:

$$\upsilon_0 = \frac{\upsilon_{в2}}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\upsilon_{в1}}{\operatorname{tg}\alpha},$$

откуда

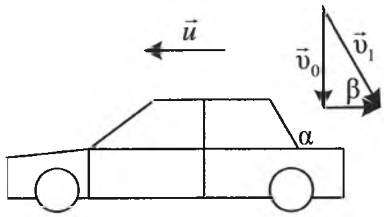
$$\upsilon_{в2} = \upsilon_{в1}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 30 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_{в2} = \upsilon_{в1}\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 30$ м/с.

Задача 4

Капли дождя падают относительно земли отвесно со скоростью 30 м/с. С какой наименьшей скоростью относительно земли должен ехать автомобиль, чтобы на заднем смотровом стекле, наклоненном под углом 60° к горизонту, не оставалось следов капель?

Решение.



Данная задача очень похожа на предыдущую. Перейдем в систему отсчета, связанную с автомобилем.

Скорость капель относительно земли $\vec{\upsilon}_0 = 30$ м/с и направлена вертикально вниз. Относительно автомобиля она будет направлена под углом к горизонту, и этот угол будет зависеть от скорости автомобиля $\vec{u}$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\upsilon_0}{u}.$$

Как видим из рисунка, минимальная скорость автомобиля, при которой капли дождя не будут попадать на заднее стекло, будет тогда, когда угол β (под которым падают капли дождя относительно автомобиля) будет равен углу наклона стекла α, откуда

$$u = \frac{\upsilon_0}{\operatorname{tg}\alpha} \approx 17 \text{ м/с}.$$

Ответ: $u = \dfrac{\upsilon_0}{\operatorname{tg}\alpha} \approx 17$ м/с.

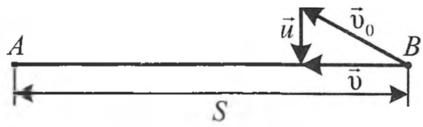
Задача 5

Вертолет, который летит со скоростью υ_0 из пункта A в пункт B и обратно, затрачивает на весь путь время t. Найдите расстояние S между A и B, если на протяжении всего обратного пути дул ветер со скоростью u перпендикулярно линии полета.

Решение.

Время t_1 полета из пункта A в пункт B равно:

$$t_1 = \frac{S}{\upsilon_0}.$$



Сделаем рисунок для обратного полета из пункта B в пункт A.

Чтобы оказаться в пункте A, вертолет должен двигаться вдоль линии BA, т. е. его итоговая скорость υ, которая является векторной суммой его собственной скорости и скорости ветра, должна быть направлена вдоль BA.

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{u}.$$

Модуль скорости υ можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника скоростей:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - u^2}.$$

Тогда время t_2, затраченное на обратный путь, равно:

$$t_2 = \frac{S}{\upsilon} = \frac{S}{\sqrt{\upsilon_0^2 - u^2}}.$$

Общее время движения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{\upsilon_0} + \frac{S}{\sqrt{\upsilon_0^2 - u^2}},$$

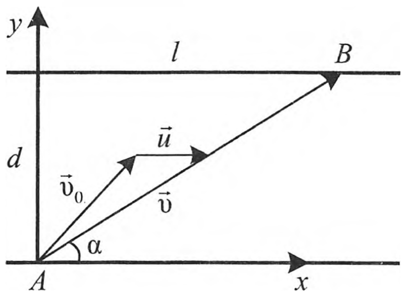
откуда найдем расстояние S:

$$S = \frac{\upsilon_0 t\sqrt{\upsilon_0^2 - u^2}}{\upsilon_0 + \sqrt{\upsilon_0^2 - u^2}}.$$

Ответ: $S = \dfrac{\upsilon_0 t\sqrt{\upsilon_0^2 - u^2}}{\upsilon_0 + \sqrt{\upsilon_0^2 - u^2}}$.

Задача 6

При переправе через реку шириной d = 60 м надо попасть в точку B, лежащую на l = 80 м ниже по течению реки, чем точка старта A. Лодочник управляет моторной лодкой так, что она движется точно к цели со скоростью υ = 8 м/с относительно берега. Какова при этом скорость лодки относительно воды, если скорость течения реки u = 2,8 м/с?



Решение.

Для того чтобы лодочник попал в точку B, необходимо чтобы его скорость $\vec{\upsilon}$ относительно земли была направлена вдоль прямой AB.

Скорость $\vec{\upsilon}$ является векторной суммой скорости лодки относительно воды $\vec{\upsilon}_0$ и скорости течения реки $\vec{u}$:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{u}.$$

Дальше возможны 2 способа решения.

1-й способ. Расстояние S, которое проходит лодка относительно берега, можно найти по теореме Пифагора:

$$S = \sqrt{d^2 + l^2}.$$

Время t, которое двигается лодка, равно:

$$t = \frac{S}{\upsilon} = \frac{\sqrt{d^2 + l^2}}{\upsilon}.$$

По оси y лодка двигается со скоростью υ_{0y} и проходит путь d, по оси x лодка двигается со скоростью $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + u$ и проходит путь l, т. е.

$$\upsilon_{0y} t = d,$$

$$(\upsilon_{0x} + u)t = l,$$

откуда

$$\upsilon_{0y} = \frac{d}{t} = \frac{\upsilon d}{\sqrt{d^2 + l^2}},$$

$$\upsilon_{0x} = \frac{l}{t} - u = \frac{l\upsilon}{\sqrt{d^2 + l^2}} - u.$$

По теореме Пифагора получим

$$\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon_{0x}^2 + \upsilon_{0y}^2} = \sqrt{\left(\frac{\upsilon d}{\sqrt{d^2 + l^2}}\right)^2 + \left(\frac{l\upsilon}{\sqrt{d^2 + l^2}} - u\right)^2} = \sqrt{\upsilon^2 + u^2 - \frac{2\upsilon u l}{\sqrt{d^2 + l^2}}} = 6 \text{ м/с}.$$

2-й способ. Рассмотрим треугольник скоростей. Угол напротив $\vec{\upsilon}_0$ равен α, и тогда по теореме косинусов получим

$$\upsilon_0^2 = \upsilon^2 + u^2 - 2\upsilon u \cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = \frac{l}{S} = \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}}$.

Тогда

$$\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon^2 + u^2 - \frac{2\upsilon u l}{\sqrt{d^2 + l^2}}} = 6 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon^2 + u^2 - \frac{2\upsilon u l}{\sqrt{d^2 + l^2}}} = 6$ м/с.

Самостоятельная работа 1

1. Турист половину пути прошел со скоростью 6 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 3 км/ч. Найдите среднюю скорость туриста на всем пути.

2. Турист половину времени прошел со скоростью 6 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 3 км/ч. Найдите среднюю скорость туриста на всем пути.

3. Спортсмен половину пути пробежал со скоростью 8 км/ч. С какой скоростью он двигался на второй половине пути, если средняя скорость на всем пути равна 6 км/ч?

4. Средняя скорость тела за 10 секунд движения составила 8 м/с. Средняя скорость этого же тела за последние 5 секунд движения составила 10 м/с. Определите среднюю скорость тела за первые 5 секунд движения.

5. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со средней скоростью 12 км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью 11 км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью 5 км/ч. Какова средняя скорость движения велосипедиста на всем пути?

6. Рыбак плыл по реке на лодке. Когда он проплывал под мостом, с него ветром сдуло шляпу. Через час рыбак спохватился, повернул обратно и подобрал шляпу на 6 км ниже моста. Какова скорость течения реки? Скорость лодки относительно воды оставалась неизменной по модулю.

§ 3. Ускорение

Движение тела, при котором за любые равные промежутки времени его скорость изменяется одинаково, называется *равноускоренным*.

Ускорение ($\vec{a}$) (при равноускоренном движении) — векторная физическая величина, равная отношению изменения скорости к промежутку времени, в течение которого это изменение произошло.

$$\vec{a} = \frac{\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0}{t},$$

где $\vec{a}$ — ускорение, $\vec{\upsilon}_0$ — начальная скорость, t — время движения, $\vec{\upsilon}$ — конечная скорость.

Говоря простыми словами, ускорение — это скорость (быстрота) изменения скорости.

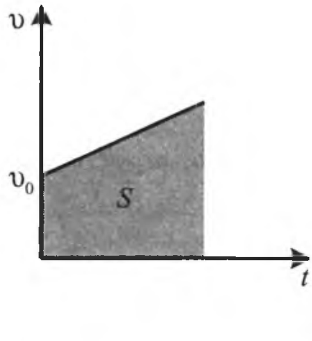
Из определения ускорения можем получить зависимость скорости от времени:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t.$$

Перемещение тела при равноускоренном движении:

$$\vec{S} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Перемещение можно найти и графически, как площадь фигуры под графиком $\upsilon(t)$.



Для изменения радиуса-вектора точки:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

В проекциях на ось x:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t,$$

$$s_x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$x = x_0 + s_x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

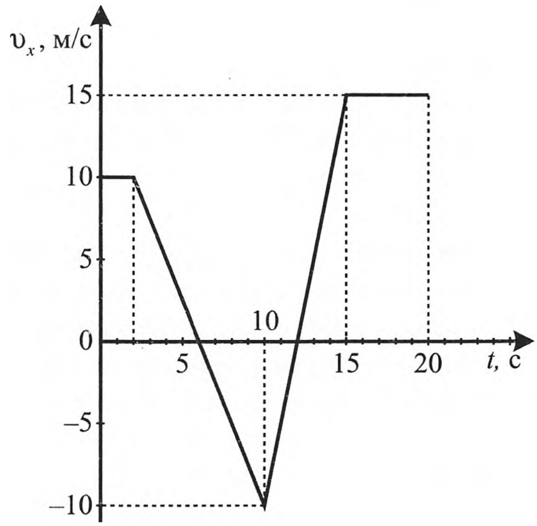
Мы получили основные уравнения кинематики.

Из них также легко можно вывести следующие формулы для перемещения:

$$s_x = \frac{\upsilon_{0x} + \upsilon_x}{2} \cdot t = \frac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a}.$$

Задача 1

Пользуясь графиком зависимости скорости тела от времени, найдите путь и перемещение тела за 20 секунд.



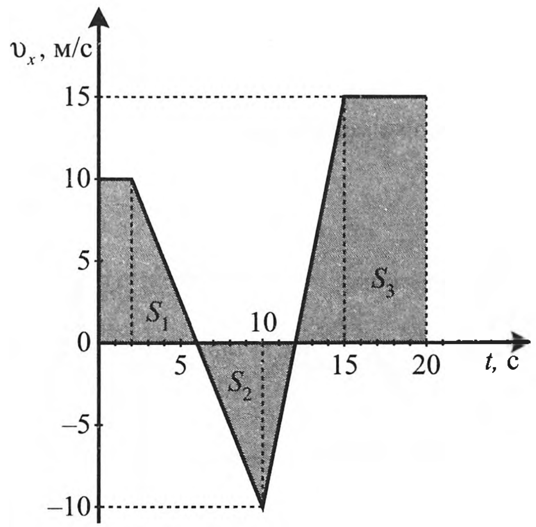
Решение.

Данную задачу большая часть учеников решает правильно, но очень долго и нерационально. Разбивают все движение на 4 участка, вычисляют ускорение на каждом участке, находят перемещения и так далее.

На самом деле эта задача решается быстро и легко.

Достаточно лишь вспомнить, что пройденный путь можно найти как площадь фигуры между графиком скорости и осью t.

На нашем графике можно выделить 3 фигуры (2 трапеции и 1 треугольник), как показано на рисунке.



Путь L_1 за первые 6 секунд равен модулю перемещения S_1 и площади первой трапеции:

$$L_1 = S_1 = \frac{2\text{ с} + 6\text{ с}}{2} \cdot 10\text{ м/с} = 40\text{ м}.$$

Перемещение на первом участке также равно 40 метрам.

На втором участке (с 6-й по 12-ю секунды) скорость тела отрицательна, значит, перемещение S_2 также отрицательно.

Путь тела L_2 равен площади треугольника (и также равен модулю перемещения):

$$L_2 = |S_2| = \frac{6c}{2} \cdot |-10| \text{ м/с} = 30\text{ м}.$$

На третьем участке (с 12-й по 20-ю секунды) перемещение снова положительное:

$$L_3 = S_3 = \frac{5\text{ с}+8\text{ с}}{2}\cdot 15\text{ м/с} = 97{,}5\text{ м}.$$

Тогда путь тела L за все время движения (за 20 с):

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 40 + 30 + 97{,}5 = 167{,}5\text{ м}.$$

Или можно сказать, что путь тела за все время движения равняется общей площади заштрихованной фигуры.

Перемещение тела S за все время движения (за 20 с):

$$S = S_1 + S_3 - S_2 = 40 + 97{,}5 - 30 = 107{,}5\text{ м}.$$

Перемещение тела за 20 секунд можно найти, складывая площади фигур, находящихся над осью абсцисс t (в нашем случае это S_1 и S_3), и вычитая из этой суммы площади фигур под осью абсцисс t (в нашем случае S_2).

Ответ: $L = 167{,}5$ м; $S = 107{,}5$ м.

Задача 2

Тело разгоняется из состояния покоя. Найдите путь, пройденный телом за девятую секунду движения, если за пятую секунду он составляет 90 метров. Движение считать равноускоренным.

Решение.

Задача простая, тем не менее часто вызывает затруднения.

Самое главное — заметить, что 90 метров — это путь не за пять секунд, а за **пятую**. То есть путь, пройденный телом за 1 секунду движения.

Начальная скорость тела равна нулю (по условию тело разгоняется из состояния покоя).

Введем обозначения: ускорение тела a, $t_1 = 1$ с, $t_4 = 4$ с, $t_5 = 5$ с, $t_8 = 8$ с, $t_9 = 9$ с, путь за пятую секунду s_{4-5}, путь за девятую секунду s_{8-9}.

Выразить пути за пятую и девятую секунды можно двумя способами.

1-й способ. Путь за пятую секунду — это разность пути, пройденного за пять секунд s_5, и пути за четыре секунды s_4, т. е.:

$$s_{4-5} = s_5 - s_4 = \frac{at_5^2}{2} - \frac{at_4^2}{2} = \frac{a\left(t_5^2 - t_4^2\right)}{2}.$$

Выразим ускорение:

$$a = \frac{2s_{4-5}}{\left(t_5^2 - t_4^2\right)}.$$

Аналогично

$$s_{8-9} = s_9 - s_8 = \frac{at_9^2}{2} - \frac{at_8^2}{2} = \frac{a\left(t_9^2 - t_8^2\right)}{2} = \frac{2s_{4-5}\left(t_9^2 - t_8^2\right)}{2\left(t_5^2 - t_4^2\right)} = \frac{s_{4-5}\left(t_9^2 - t_8^2\right)}{\left(t_5^2 - t_4^2\right)} = \frac{90(81-64)}{25-16} = 170\text{ м}.$$

Ответ: 170 м.

2-й способ. Можно решить по-другому.

Путь за пятую секунду движения можно найти по формуле

$$s_{4\text{-}5} = \upsilon_4 t_1 + \frac{at_1^2}{2},$$

где υ_4 — скорость тела после четырех секунд движения (в начале пятой секунды):

$$\upsilon_4 = at_4.$$

Тогда

$$s_{4\text{-}5} = at_4 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = at_1\left(\frac{2t_4 + t_1}{2}\right).$$

Выразим ускорение:

$$a = \frac{2s_{4\text{-}5}}{t_1\left(2t_4 + t_1\right)}.$$

Аналогично

$$s_{8\text{-}9} = \upsilon_8 t_1 + \frac{at_1^2}{2},$$

где $\upsilon_8 = at_8$ — скорость тела после восьми секунд движения (в начале девятой секунды).

Тогда

$$s_{8\text{-}9} = at_8 t_1 + \frac{at_1^2}{2} = at_1\left(\frac{2t_8 + t_1}{2}\right).$$

С учетом значения ускорения

$$s_{8\text{-}9} = \frac{2s_{4\text{-}5}}{t_1\left(2t_4 + t_1\right)} t_1\left(\frac{2t_8 + t_1}{2}\right) = \frac{s_{4\text{-}5}\left(2t_8 + t_1\right)}{2t_4 + t_1} = \frac{90\left(2\cdot 8 + 1\right)}{2\cdot 4 + 1} = 170 \text{ м.}$$

Ответ: 170 м.

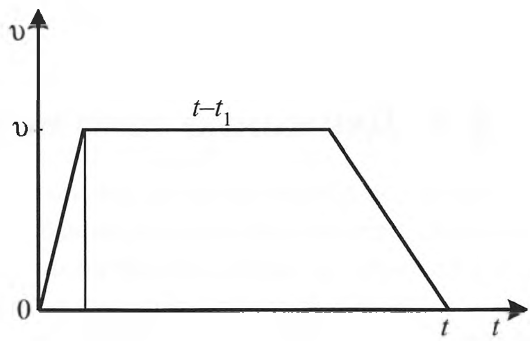
Задача 3

Расстояние между двумя городами автомобиль проехал со средней скоростью $\upsilon_{ср} = 60$ км/ч за $t = 30$ мин. Разгон и торможение вместе длились $t_1 = 10$ мин, а остальное время автомобиль двигался равномерно. Какой была скорость υ автомобиля при равномерном движении?

Решение.

Очень часто эту задачу решают неправильно, делая допущение, что время разгона и время торможения равны. Ответ получится правильным, но решение не засчитают. Это всего лишь частный случай, и в условии про равенство ускорений или времени не сказано.

Задачу удобно решить геометрически, построив график $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ и зная, что пройденный путь численно равен площади фигуры, ограниченной графиком и осью абсцисс.



С одной стороны, пройденный путь равен $S = \upsilon_{ср}t$, а с другой стороны, путь равен площади фигуры под графиком (а это площадь трапеции):

$$S = \frac{t + t - t_1}{2}\upsilon.$$

Тогда

$$\upsilon_{ср}t = \frac{t + t - t_1}{2}\upsilon,$$

откуда

$$\upsilon = \frac{2\upsilon_{ср}t}{2t - t_1} = 72 \text{ км/ч}.$$

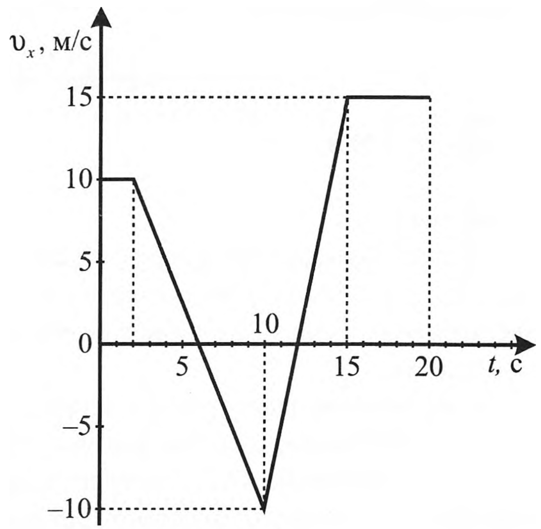
Ответ: $\upsilon = \dfrac{2\upsilon_{ср}t}{2t - t_1} = 72$ км/ч.

Самостоятельная работа 2

1. Тело разгоняется из состояния покоя. Найдите путь, пройденный телом за десятую секунду движения, если за пятую секунду он составляет 9 метров. Движение считать равноускоренным.

2. Тело, двигающееся равноускоренно, с некоторой начальной скоростью за пятую секунду движения проходит путь 10 метров, а за восьмую секунду — путь 16 метров. Найдите начальную скорость и ускорение.

3. Пользуясь графиком зависимости скорости тела от времени, найдите путь и перемещение тела за первые 15 секунд движения.



§ 4. Движение тела под действием силы тяжести

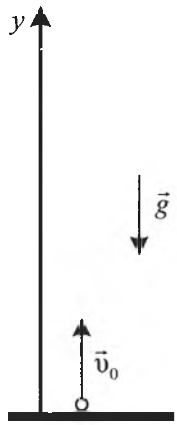
На тело, падающее в воздухе, действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Обычно силой сопротивления воздуха пренебрегают и рассматривают только действие силы тяжести. Сила тяжести направлена вертикально вниз и сообщает телу ускорение свободного падения $g \approx 9{,}8$ м/с^2, часто при решении задач предлагают округлить до 10 м/с^2. Мы также при решении задач будем считать $g = 10$ м/с^2.

Движение тела, брошенного вертикально

Рассмотрим движение тела, брошенного вертикально вверх, с некоторой начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$ на примере решения задачи.

Задача 1

Тело брошено вертикально вверх с некоторой начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Найдите время подъема тела до максимальной высоты t_1, время всего полета тела t_2 и максимальную высоту H, которую достигнет тело в процессе полета.



Решение.

Движение равноускорено, поэтому уравнения движения в векторном виде

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t,$$

$$\vec{s} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \text{ или } \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Направим ось y вертикально вверх, приняв за нулевой уровень поверхность земли. Тогда начальная координата по оси y равна нулю: $y_0 = 0$. Проекция начальной скорости на ось y $\upsilon_{0y} = \upsilon_0$, проекция ускорения $a_y = -g$ (знак «–» показывает, что проекция отрицательная, так как вектор ускорения направлен в сторону, противоположную оси).

Запишем в проекциях на ось y уравнения зависимости скорости от времени и координаты от времени:

$$\upsilon_y = \upsilon_0 - gt,$$

$$y = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

1) Как найти время подъема тела? Что означает, что тело перестало подниматься?

Ускорение свободного падения направлено в сторону, противоположную начальной скорости, поэтому в процессе подъема скорость тела уменьшается. Тело поднимается вверх, пока его скорость направлена вверх. Оно перестает подниматься, когда скорость становится равной нулю, т. е. $\upsilon_y(t_1) = 0$. Это и есть точка, в которой тело достигло максимальной высоты полета. Откуда $\upsilon_0 - gt_1 = 0$ и

$$t_1 = \frac{\upsilon_0}{g}.$$

2) Что означает, что тело упало на землю? (Нет, скорость тела не обязательно равна нулю, тело может проваливаться в землю, может начать отскакивать и так далее, мы об этом можем только догадываться, потому что в момент касания земли указанные выше уравнения движения перестают описывать движение из-за появления новых сил.)

В момент падения (касания земли) мы знаем не скорость (которую, кстати, можно найти), а координату тела по оси y: $y(t_2) = 0$.

$$\upsilon_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0.$$

Откуда $t_2 = 0$ (не подходит, так как соответствует моменту броска тела) или $t_2 = \dfrac{2\upsilon_0}{g}$.

3) Максимальная высота H достигается телом в момент времени t_1:

$$H = y(t_1) = \upsilon_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{g} - \frac{g\left(\frac{\upsilon_0}{g}\right)^2}{2} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}.$$

Ответ: $t_1 = \frac{\upsilon_0}{g}$; $t_2 = \frac{2\upsilon_0}{g}$; $H = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$.

Задача 2

Камень, свободно падающий с высоты, первый участок пути проходит за время $t_1 = 2$ с, а такой же последний участок — за время $t_2 = 1$ с. С какой высоты падало тело и сколько времени длилось падение?

Решение.

Перемещение тела на первом участке $S = \frac{gt_1^2}{2}$, на последнем — $S = \upsilon_0 t_2 + \frac{gt_2^2}{2}$, где υ_0 — скорость в начале второго участка, она равна $\upsilon_0 = gt_0$; t_0 — время падения до начала последнего участка, тогда общее время падения $t = t_0 + t_2$.

Так как пути первого и последнего участков равны, то

$$\frac{gt_1^2}{2} = gt_0 t_2 + \frac{gt_2^2}{2}.$$

Тогда

$$t_0 = \frac{t_1^2 - t_2^2}{2t_2}.$$

Общее время

$$t = \frac{t_1^2 - t_2^2}{2t_2} + t_2 = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_2} = 2{,}5 \text{ с}.$$

Высота, с которой падало тело:

$$H = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_2}\right)^2 = 31{,}25 \text{ м}.$$

Ответ: $H = \frac{g}{2}\left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_2}\right)^2 = 31{,}25$ м; $t = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_2} = 2{,}5$ с.

Движение тела, брошенного горизонтально

Если ускорение тела и начальная скорость направлены не вдоль одной прямой, то приходится вводить систему координат xOy и расписывать уравнения движения в проекциях на 2 оси:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t,$$

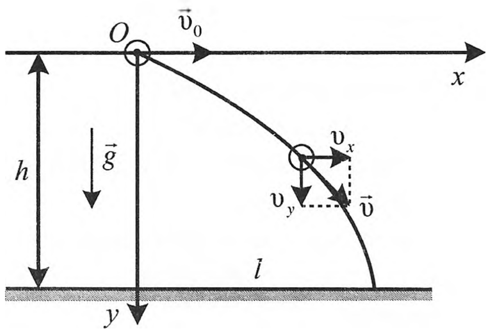
$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t,$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Задача 3

Тело брошено горизонтально с высоты h со скоростью $\vec{\upsilon}_0$.



Найдите время и дальность полета тела, а также скорость тела и высоту спустя время τ, которое меньше времени полета.

Решение.

Зададим систему координат, как показано на рисунке. Начало координат совместим с начальным положением тела, тогда $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Ось x направим горизонтально, по направлению скорости, ось y направим вертикально вниз. Тогда $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$, $\upsilon_{0y} = 0$, $a_x = 0$, $a = g$, и уравнения движения примут вид

$$\upsilon_x = \upsilon_0, \quad x = \upsilon_0 t,$$

$$\upsilon_y = gt, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

1) Найдем время полета t_2. В момент приземления координата по оси y равна h, т. е.

$$y(t_2) = \frac{gt_2^2}{2} = h,$$

откуда

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

2) Дальность полета l найдем из уравнения движения по оси x:

$$l = x(t_2) = \upsilon_0 t_2 = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3) В момент времени τ

$$h_\tau = h - s_y(\tau) = h - \frac{g\tau^2}{2},$$

$$\upsilon_{\tau x} = \upsilon_0, \upsilon_{\tau y} = g\tau.$$

Полную скорость вычислим по теореме Пифагора из треугольника скоростей: $\upsilon_\tau = \sqrt{\upsilon_{\tau x}^2 + \upsilon_{\tau y}^2}$, направление скорости также можно найти из этого прямоугольного треугольника:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\upsilon_{\tau y}}{\upsilon_{\tau x}} = \frac{g\tau}{\upsilon_0}.$$

Ответ: $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; $l = \upsilon_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$; $h_\tau = h - \frac{g\tau^2}{2}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{g\tau}{\upsilon_0}$.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Задача 4

Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Найдите:

1) время подъема тела t_1;

2) время всего полета t_2;

3) максимальную высоту полета h_{max};

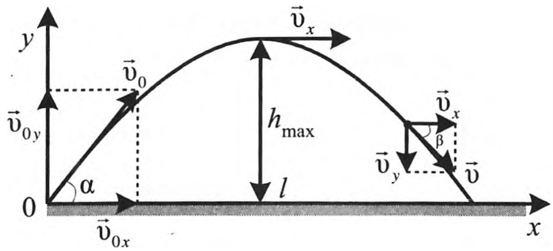
4) дальность полета l;

5) модуль и направление скорости спустя время $\tau < t_2$;

6) уравнение траектории.

Решение.

Зададим систему координат, как показано на рисунке. Тогда



$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$$
$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha, \quad \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha,$$
$$a_x = 0, \quad a_y = -g,$$

и уравнения движения примут вид:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha,$$
$$x = \upsilon_0 \cos\alpha t,$$
$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt,$$
$$y = \upsilon_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Из полученных уравнений видно, что по оси x тело двигается равномерно, а по оси y — с постоянным ускорением g, как тело, брошенное вертикально вверх.

1) Тело будет подниматься до тех пор, пока проекция скорости на ось y υ_y не станет равна нулю, т. е.

$$\upsilon_y(t_1) = 0, \text{ или } \upsilon_0 \sin\alpha - gt_1 = 0,$$

откуда

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}.$$

2) В момент касания телом земли его координата по оси y станет равна нулю:

$$y(t_2) = 0, \text{ или } \upsilon_0 \sin\alpha t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}.$$

3) Максимальная высота — это координата по оси y в момент времени t_1:

$$h_{max} = y(t_1) = \upsilon_0 \sin\alpha t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

4) Дальность полета — это координата тела по оси x в момент касания телом земли:

$$l = x(t_2) = \upsilon_0 \cos\alpha t_2 = \frac{2\upsilon_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

5) В момент времени τ:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha,$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - g\tau,$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - g\tau)^2},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha - g\tau}{\upsilon_0 \cos\alpha}.$$

Если тангенс положителен, то тело все еще двигается вверх (поднимается), если тангенс отрицателен, то тело уже падает вниз под углом β (случай показан на рисунке).

6) Уравнение траектории — это уравнение зависимости $y(x)$.

Для его нахождения из уравнения $x = \upsilon_0 \cos\alpha t$ выразим время:

$$t = \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha}.$$

И, подставив в уравнение $y = \upsilon_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}$, получим

$$y(x) = -\frac{g}{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \operatorname{tg}\alpha.$$

Мы получили уравнение параболы (которая показана на нашем рисунке), по которой и двигается тело.

Ответ: 1) $t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$; 2) $t_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$; 3) $h_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$; 4) $l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$;

5) $\operatorname{tg}\beta = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha - g\tau}{\upsilon_0 \cos\alpha}$; 6) $y(x) = -\frac{g}{\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \operatorname{tg}\alpha$.

Задача 5

Снаряд вылетает из пушки, стоящей у подножия горы, с начальной скоростью υ_0 под углом α к поверхности горы. Поверхность горы наклонена под углом β к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите дальность полета снаряда S вдоль склона и максимальную высоту H подъема над склоном.

Решение.

Выберем систему координат, как показано на рисунке. Проекции начальной скорости и ускорения на оси координат равны:

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha,\ \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha,\ a_x = -g\sin\beta,\ a_y = -g\cos\beta.$$

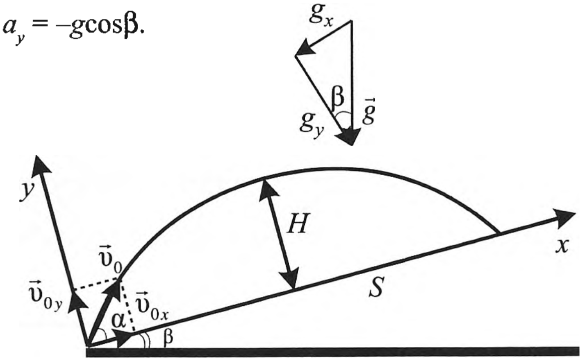
Тогда уравнения движения снаряда в проекциях на оси x и y:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha - gt\sin\beta,$$

$$x = \upsilon_0 t \cos\alpha - \frac{gt^2 \sin\beta}{2},$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt\cos\beta,$$

$$y = \upsilon_0 \sin\alpha - \frac{gt^2 \cos\beta}{2}.$$



В момент падения снаряда на плоскость (t_2) координата по оси y равна нулю:

$$y(t_2) = 0,$$

$$\upsilon_0 t_2 \sin\alpha - \frac{g t_2^2 \cos\beta}{2} = 0.$$

Отсюда найдем время полета снаряда t_2:

$$t_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

Тогда дальность полета S равна координате по оси x в момент времени t_2:

$$S = x(t_2).$$

$$S = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g\cos\beta}\upsilon_0\cos\alpha - \frac{g\sin\beta}{2}\left(\frac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g\cos\beta}\right)^2 = \frac{\upsilon_0^2\left(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\right)\sin 2\alpha}{g\cos\beta}.$$

В момент максимального подъема над плоскостью t_1 скорость тела по оси y будет равна нулю:

$$\upsilon_y(t_1) = 0,$$

$$\upsilon_0 \sin\alpha - g t_1 \cos\beta = 0.$$

Отсюда найдем время подъема снаряда относительно плоскости t_1:

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

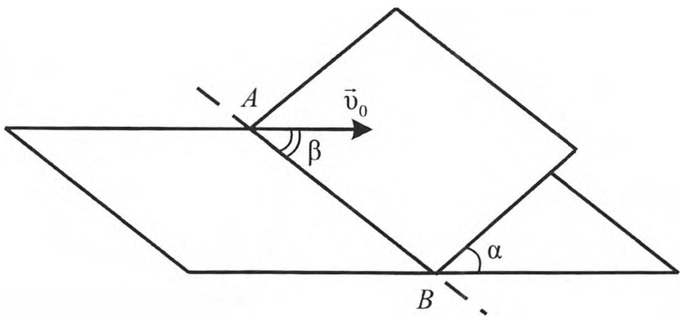
Тогда максимальная высота подъема — это координата тела по оси y в момент времени t_1:

$$H = y(t_1) = \frac{\upsilon_0\sin\alpha}{g\cos\beta}\upsilon_0\sin\alpha - \frac{g\sin\beta}{2}\left(\frac{\upsilon_0\sin\alpha}{g\cos\beta}\right) = \frac{\upsilon_0^2\sin^2\alpha}{2g\cos\beta}.$$

Ответ: $S = \dfrac{\upsilon_0^2\left(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\right)\sin 2\alpha}{g\cos\beta}$; $H = \dfrac{\upsilon_0^2\sin^2\alpha}{2g\cos\beta}$.

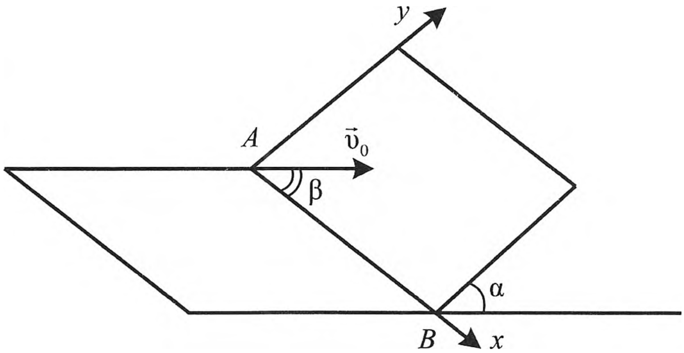
Задача 6

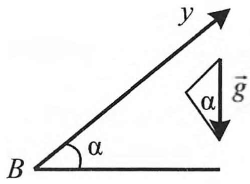
Небольшая шайба двигается по гладкой наклонной плоскости из точки A в точку B с начальной скоростью $\upsilon_0 = 4$ м/с, направленной под углом $\beta = 60°$ к прямой AB, как показано на рисунке. Угол наклона плоскости $\alpha = 30°$. Найдите максимальное удаление шайбы от прямой AB и расстояние от точки A до точки падения B.



Решение.

1) Направим ось x вдоль прямой AB, ось y — вверх по наклонной плоскости перпендикулярно AB, как показано на рисунке.





Чтобы проще было найти проекции ускорения свободного падения, можно сделать еще один рисунок — вид сбоку.

Легко видеть, что

$$g_x = 0,$$

$$g_y = -g\sin\alpha.$$

2) Движение шайбы равноускоренное. Запишем уравнения движения (зависимости скорости и координаты от времени) в проекциях на оси:

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_0 \cos\beta, \quad (1)$$

$$x(t) = \upsilon_0 \cos\beta \cdot t, \quad (2)$$

$$\upsilon_y(t) = \upsilon_0 \sin\beta - g\sin\alpha \cdot t, \quad (3)$$

$$\upsilon_y(t) = \upsilon_0 \sin\beta \cdot t - \frac{g\sin\alpha}{2}t^2. \quad (4)$$

3) Шайба перестанет удаляться от оси AB, когда проекция ее скорости на ось y станет равна нулю.

Тогда из уравнения (3) найдем время подъема шайбы t_1:

$$\upsilon_0 \sin\beta - g\sin\alpha \cdot t_1 = 0,$$

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g\sin\alpha}.$$

Максимальное удаление h от оси AB можно найти, подставив значение времени t_1 в уравнение (4):

$$h = y(t_1) = \upsilon_0 \sin\beta \cdot \frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g\sin\alpha} - \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{\upsilon_0 \sin\beta}{g\sin\alpha}\right)^2 = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g\sin\alpha} = 1{,}2\ \text{м}.$$

4) Для того чтобы найти расстояние до места падения (дальность полета), найдем сначала время всего полета.

В момент падения t_2 координата по оси y станет равна нулю. Из уравнения (4) имеем

$$\upsilon_0 t_2 \sin\beta - \frac{g t_2^2 \sin\alpha}{2} = 0,$$

откуда

$$t_2 = 0 \text{ или } t_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g \sin\alpha}.$$

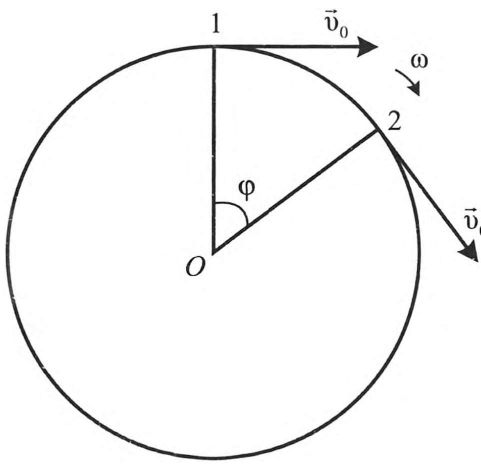
Время $t_2 = 0$ соответствует моменту броска, $t_2 = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g\sin\alpha}$ — моменту падения.

Дальность полета l равна координате по оси x в момент падения. Ее можно найти, подставив полученное значение времени в уравнение (2):

$$l = x(t_2) = \upsilon_0 \cos\beta \frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g\sin\alpha} = \frac{2\upsilon_0 \sin\beta\cos\beta}{g\sin\alpha} = \frac{\upsilon_0^2 \sin(2\beta)}{g\sin\alpha} \approx 2,77 \text{ м}.$$

Ответ: $h = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g\sin\alpha} = 1,2$ м; $l = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin(2\beta)}{g\sin\alpha} \approx 2,77$ м.

§ 5. Движение по окружности



Рассмотрим движение по окружности с постоянной по модулю скоростью.

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к окружности. Эту скорость движения мы будем называть **линейной скоростью.**

Угловая скорость (ω) — скорость изменения центрального угла.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Измеряется угловая скорость в радианах в секунду (рад/с).

Также для описания движения по окружности используют период вращения (T) и частоту вращения (ν).

Период вращения (T) — это время одного оборота (в секундах).

Частота вращения (ν) — число оборотов в единицу времени (выражается в $с^{-1}$).

Например, все точки катящегося колеса или диска двигаются с одинаковой угловой скоростью, одинаковой частотой и периодом, хотя линейные скорости у разных точек могут быть разными (чем дальше от центра колеса, тем больше).

Как же связаны между собой линейная и угловая скорости?

Рассмотрим движение точки, находящейся на расстоянии R от центра колеса, за время одного полного оборота. Пройденный путь равен длине окружности $l = 2\pi R$.

Линейная скорость — $\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T}$, а угловая — $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, откуда получим формулу для соотношения линейной и угловой скоростей:

$$\upsilon = \omega R.$$

Даже при движении по окружности с постоянной по модулю скоростью вектор скорости все равно изменяется, значит, движение происходит с ускорением. Это ускорение в каждый момент времени направлено к центру окружности (перпендикулярно линейной скорости) и называется **центростремительным** (или нормальным) **ускорением** (обозначается $a_ц$, или $a_н$, или a_n).

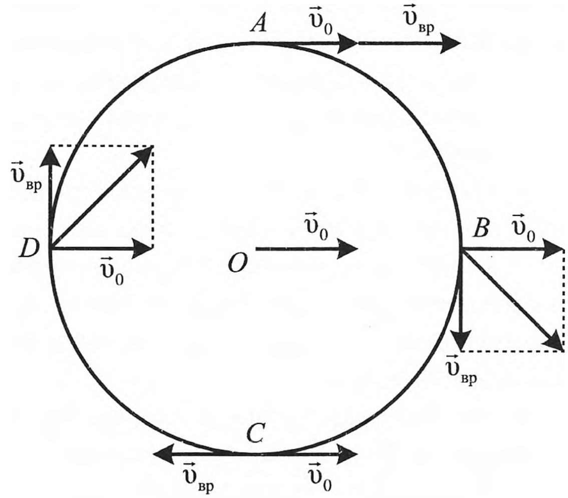
$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = \omega\upsilon.$$

Качение без проскальзывания

Часто в условиях задачи можно встретить словосочетания «колесо катится без проскальзывания» или «колесо катится без пробуксовки». Что это означает? Замечали ли вы, как после проезда автомобиля по мягкой земле на дороге остается рисунок протектора шины? Все это означает, что скорость нижней точки колеса, которая касается земли, при движении машины равна нулю.

Как же так? Машина едет, колесо катится, а скорость нижней точки при этом равна нулю? Чтобы это представить или даже увидеть, проще всего наблюдать за движением гусеничного трактора или танка. Там отчетливо видно, что нижняя часть гусеницы во время движения просто лежит на земле, а верхняя часть двигается, причем двигается быстрее корпуса самого транспортного средства.

То же самое верно и для катящегося колеса. Давайте разберемся, как же это происходит.



Рассмотрим движение точек на ободе катящегося колеса. Каждая из них одновременно участвует в двух движениях: вращательном вокруг центра колеса со скоростью вращения $\upsilon_{вр}$ и поступательном (вместе с центром колеса) со скоростью υ_0, направленной в сторону движения самого колеса. Итоговая скорость состоит из векторной суммы этих двух составляющих. На рисунке показаны эти скорости для точек *A*, *B*, *C* и *D*.

Видно, что в точке *C* эти скорости $\upsilon_{вр}$ и υ_0 направлены в разные стороны. Когда они равны по модулю, скорость точки *C* равна нулю: $\upsilon_C = 0$, и колесо катится без проскальзывания.

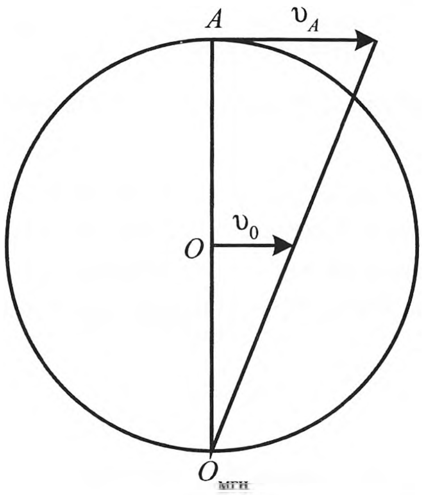
Тогда $\upsilon_A = 2\upsilon_0$.

Модули скоростей точек *B* и *D* можно найти по теореме Пифагора, $\upsilon_B = \upsilon_D = \sqrt{2}\upsilon_0$.

Также для определения скоростей точек тела, которое катится без проскальзывания, удобно пользоваться *мгновенной осью вращения*.

В некоторый момент времени катящееся колесо можно представить телом, которое поворачивается относительно оси $O_{мгн}$.

Тогда скорость точки $O_{мгн}$ относительно земли равна 0, скорость точки O равна υ_0, скорость любой другой точки можно найти, пользуясь тем, что все точки колеса двигаются относительно мгновенной оси с одинаковой угловой скоростью ω и линейная скорость любой точки $\upsilon_x = \omega r$, где r — расстояние от точки колеса до мгновенной оси вращения $O_{мгн}$.



Самостоятельная работа 3

1. Тело, свободно падающее с некоторой высоты, за последнюю секунду движения пролетает 65 метров. Найдите высоту, с которой падает тело.

2. Камень бросили с земли вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Найдите путь камня за первые 3 секунды движения.

3. Камень, свободно падающий с высоты, первый участок пролетает за время t_1 = 4 с, а такой же последний участок — за время t_2 = 1 с. С какой высоты падало тело и сколько времени длилось падение?

4. Ракета, запущенная вертикально вверх с поверхности земли, в течение 30 секунд двигается с ускорением 20 м/с^2. Через 30 секунд после начала движения двигатели ракеты отключаются. Какой максимальной высоты достигнет ракета за время своего движения?

5. Аэростат поднимается с аэродрома вертикально вверх с ускорением a = 2 м/с^2. Через τ = 5 с от начала его движения из него выпал предмет. Через какое время после старта аэростата этот предмет упадет на землю?

6. Найдите расстояние в тире от стрелков до мишени, если горизонтально выпущенная пуля попадает на 20 см ниже центра мишени. Начальная скорость пули — 300 м/с.

7. С вертолета, летящего горизонтально со скоростью 140 км/ч, сбрасывают груз на проплывающий внизу катер. Катер плывет по встречному курсу со скоростью 40 км/ч. На каком расстоянии от судна нужно сбросить груз, чтобы попасть в него? Высота вертолета над уровнем моря 20 метров.

8. На каком расстоянии упадет камень, брошенный с поверхности склона горизонтально со скоростью 20 м/с, если известно, что он упал ниже по склону от точки броска? Угол наклона склона составляет с горизонтом 30 градусов.

Глава 2

Динамика

§ 1. Законы Ньютона

Любое движение (как и покой) всегда относительно. Относительно некоторой выбранной системы отсчета.

Первый закон Ньютона (закон о существовании инерциальных систем): существуют системы отсчета, называемые *инерциальными*, относительно которых тело движется прямолинейно и равномерно или находится в покое, если на него не действуют другие тела или их действия скомпенсированы (сумма сил, с которыми они действуют на рассматриваемое тело, равна нулю).

К инерциальным системам можно отнести системы, которые покоятся или двигаются прямолинейно равномерно относительно других инерциальных систем.

Сила — векторная физическая величина, которая является мерой взаимодействия между телами.

Сила характеризуется модулем (величиной), направлением и точкой приложения.

Равнодействующая сила — векторная сумма всех сил, действующих на тело:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...$$

Второй закон Ньютона: в инерциальной системе отсчета ускорение $\vec{a}$ тела прямо пропорционально равнодействующей $\vec{F}$ всех приложенных к телу сил и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Или в более привычной форме:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Третий закона Ньютона: силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю, противоположны по направлению и приложены к взаимодействующим телам.

$$\vec{F} = -\vec{F}.$$

Причем силы равны независимо от масс и скоростей взаимодействующих тел.

В механике мы чаще всего будем иметь дело с силами тяготения, упругости и сопротивления (трения).

§ 2. Силы

Сила гравитационного притяжения (сила тяготения)

Силы тяготения между двумя точечными телами массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии R друг от друга, определяются законом всемирного тяготения:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$Н $\cdot$ м^2/кг^2 — гравитационная постоянная.

Все тела, находящиеся на Земле, испытывают на себе действие силы тяготения. Эту силу называют **силой тяжести**.

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

Сила тяжести всегда направлена к центру Земли.

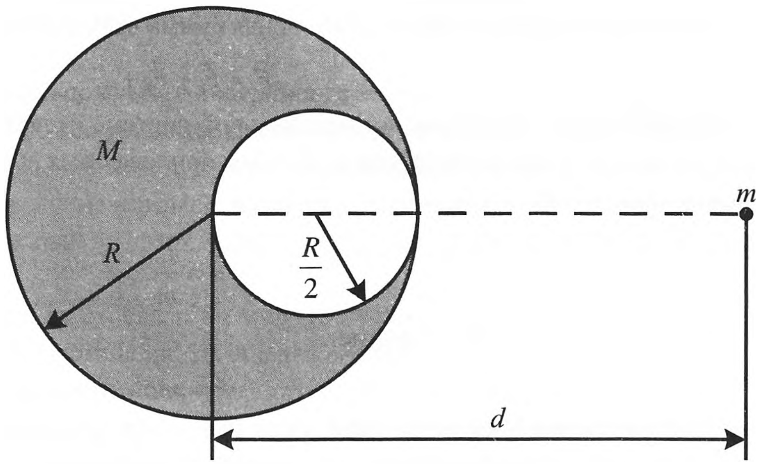
Ускорение свободного падения

$$g = G\frac{M_з}{R_з^2} \approx 9{,}8 \text{ м/с}^2,$$

где $M_з$ — масса Земли, $R_з$ — радиус Земли.

Задача 1

Найдите силу F притяжения маленького шарика массой m и большого однородного шара массой M, в котором имеется сферическая полость (см. рисунок).



Решение.

Сила, с которой притягиваются шары, будет равна разности сил, с которой притягивался бы большой шар, если бы в нем не было полости и силы, с которой притягивала бы полость, если бы она была заполнена.

Найдем сначала массу M_0, которую имел бы большой шар, если бы в нем не было полости, и массу, которую имела бы полость, если бы она была заполнена тем же материалом M_1:

$$M_1 = \frac{1}{8}M_0,$$

так как масса шара находится по формуле

$$M_0 = \frac{4}{3}\rho\pi R^3 \text{ и } M_1 = \frac{4}{3}\rho\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3.$$

Поэтому $M = M_0 - M_1 = \frac{7}{8}M_0$, откуда

$$M_0 = \frac{8}{7}M \text{ и } M_1 = \frac{1}{7}M.$$

Тогда по закону всемирного тяготения сила притяжения шаров равна:

$$F = F_0 - F_1 = G\frac{M_0 m}{d^2} - G\frac{M_1 m}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = G\frac{8Mm}{7d^2} - G\frac{Mm}{7\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = G\frac{Mm}{7}\left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right).$$

Ответ: $F = G\frac{Mm}{7}\left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right)$.

Вес и сила реакции опоры

Вес тела $\vec{P}$ — это сила, с которой тело действует на опору или подвес (неподвижные относительно тела).

Сила реакции опоры $\vec{N}$ — сила, с которой опора (или подвес) действует на тело.

По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}$.

В момент, когда тело отрывается от опоры, сила реакции опоры становится равна нулю (тело перестает давить на опору).

Для лучшего понимания веса тела рассмотрим пример тела, находящегося в лифте.

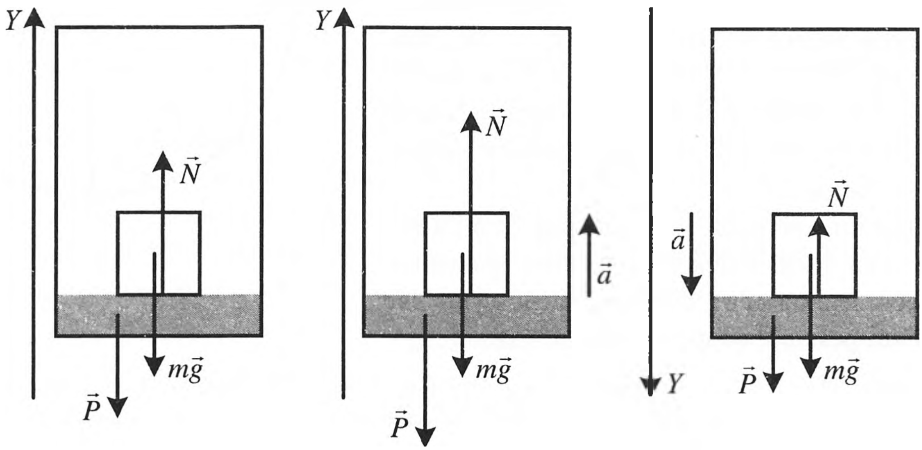
Задача 2

Определите вес тела массой m, лежащего на полу лифта, в трех случаях:

1) лифт покоится;

2) лифт двигается с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх;

3) лифт двигается с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз.



Решение.

По третьему закону Ньютона вес тела $\vec{P}$ равен по модулю силе реакции опоры со стороны лифта:

$$P = N.$$

Запишем для тела второй закон Ньютона:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Вес тела действует на лифт со стороны тела, поэтому во второй закон Ньютона, записанный для тела, он не входит.

Теперь запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось y для трех случаев:

1) $N - mg = 0$, откуда $N = mg$, т. е. вес тела равен по модулю его силе тяжести;

2) $N - mg = ma$, откуда $N = mg + ma = m(g + a)$, т. е. вес тела больше его силы тяжести;

3) $-N + mg = ma$, откуда $N = mg - ma = m(g - a)$, т. е. вес тела меньше его силы тяжести.

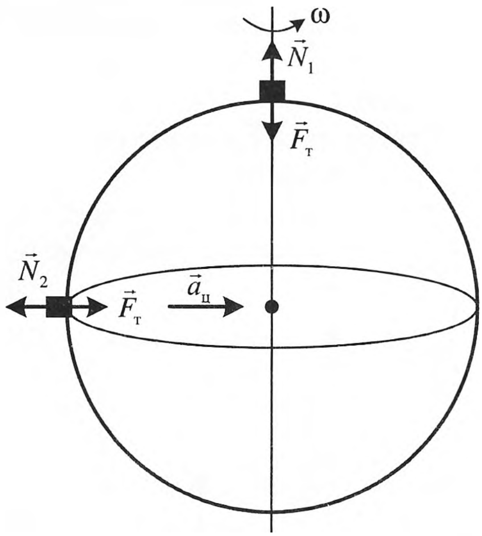
Ответ: 1) $P = mg$; 2) $P = m(g + a)$; 3) $P = m(g - a)$.

Причем, как видно из ответа, если ускорение лифта в третьем случае будет равно ускорению свободного падения (лифт свободно падает), то вес тела будет равен нулю, т. е. тело будет находиться в невесомости.

Вес тела может отличаться от силы тяжести не только для тела, двигающегося с ускорением. Рассмотрим еще один пример.

Задача 3

На экваторе некоторой планеты тела весят втрое меньше, чем на полюсе. Период обращения этой планеты вокруг своей оси равен: $T = 55$ мин. Определите среднюю плотность планеты. Планету считать однородным шаром.



Решение.

Для начала давайте разберемся, почему значения веса тела на полюсе и на экваторе отличаются.

По третьему закону Ньютона вес тела $\vec{P}$ равен силе реакции опоры $\vec{N}$. По условию $P_1 = 3P_2$, значит, $N_1 = 3N_2$. (Где P_1 и P_2 — вес тела на полюсе и экваторе соответственно, а N_1 и N_2 — силы реакции планеты, действующие на тело на полюсе и экваторе соответственно.)

Запишем второй закон Ньютона для тела на полюсе. Тело на полюсе покоится (только вращается вокруг собственной оси), и на него действуют две силы — сила реакции опоры и сила тяготения:

$$F_т = G\frac{Mm}{R^2},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса планеты, m — масса тела, R — радиус планеты.

$$F_т - N_1 = 0,$$

тогда $N_1 = F_т$, а $N_2 = \frac{1}{3}F_т$.

Тело, которое находится на экваторе, вращается по окружности радиуса R (радиус планеты) с периодом вращения T. Запишем второй закон Ньютона:

$$F_т - N_2 = ma.$$

С учетом значения N_2 получим:

$$\frac{2}{3}F_т = ma,$$

$$\frac{2}{3}G\frac{Mm}{R^2} = ma.$$

Подставим в это уравнение значения для массы планеты и ускорения.

Масса планеты $M = \rho V = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$, а ускорение $a = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(2\pi R)^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}G\frac{\rho\pi R^3}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

откуда

$$\rho = \frac{9\pi}{2GT^2} = \frac{9\cdot 3{,}14}{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(55\cdot 60)^2} \approx 19\ 450 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho = \frac{9\pi}{2GT^2} \approx 19\ 450$ кг/м^3.

Сила трения

Сила трения — сила, возникающая при соприкосновении двух тел и препятствующая их относительному движению.

Выделяют силу трения покоя, силу трения скольжения и силу трения качения.

Сила трения покоя возникает между двумя еще неподвижными поверхностями и равна равнодействующей внешних сил, которые пытаются вызвать движение.

Рассмотрим на примере. Возьмем кирпич или тяжелую книгу, поместим на стол и попробуем передвинуть вдоль стола (толкая в горизонтальном направлении), медленно увеличивая приложенную силу. Предмет начнет двигаться не сразу. Сначала ему мешает двигаться сила трения покоя. В какой-то момент сила трения покоя достигает своего максимального значения, и при дальнейшем увеличении внешней силы тело будет двигаться.

Максимальное значение силы трения покоя незначительно больше, чем сила трения скольжения, которая действует при движении тела. Сила трения скольжения зависит от материала соприкасающихся поверхностей (в частности, их гладкости) и веса тела:

$$F_{тр.макс} = \mu N,$$

где μ — коэффициент трения; N — модуль силы нормальной реакции со стороны опоры.

При медленном поступательном движении твердого тела в жидкости или газе сила сопротивления среды пропорциональна скорости, а при быстром движении — квадрату скорости.

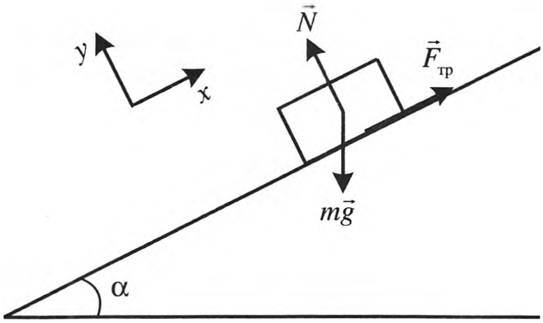
Задача 4

Тело массой m покоится на наклонной плоскости с углом наклона α. Найдите вес тела.

Решение.

По третьему закону Ньютона вес тела $\vec{P}$ равен по модулю силе реакции опоры со стороны наклонной плоскости:

$$P = N.$$



Так как тело покоится, то второй закон Ньютона имеет вид

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} = 0.$$

Направим оси x и y, как показано на рисунке.

Тогда второй закон Ньютона в проекциях на ось y:

$$N - mg\cos\alpha = 0,$$

откуда

$$N = mg\cos\alpha.$$

Ответ: $P = mg\cos\alpha$.

Кстати, если бы тело двигалось вдоль плоскости с некоторым ускорением, то ускорение все равно не повлияло бы на вес и он также был бы равен $mg\cos\alpha$.

Сила упругости

Силы упругости появляются при упругой деформации тел.

Закон Гука: модуль силы упругости $F_{упр}$ прямо пропорционален изменению длины тела x (пружины, троса, шнура, нити).

$$F_{упр} = kx,$$

где k — коэффициент упругости тела.

Силы упругости появляются в телах, способных восстанавливать свою форму.

Задача 5

Пружины одинаковой длины жесткостями k_1 и k_2 соединили:

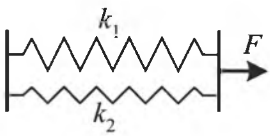
а) параллельно;

б) последовательно.

Пружиной какой жесткости можно заменить такую систему пружин?

Решение.

При параллельном соединении удлинение пружин будет одинаково, а сумма их сил упругости F_1 и F_2 равна приложенной силе F. При замене ее одной пружиной у нее должно быть такое же удлинение. То есть $F_1 + F_2 = F$, откуда $k_1x + k_2x = kx$, или $k = k_1 + k_2$.



При последовательном соединении

$$F = F_1 = F_2.$$

Тогда удлинение первой пружины — x_1, удлинение второй пружины — x_2. Удлинение системы равно

$x_1 + x_2$. При замене этой системы одной пружиной ее удлинение должно быть равно удлинению системы, т. е. $x = x_1 + x_2$.

По закону Гука:

$$x = \frac{F}{k},\ x_1 = \frac{F}{k_1},\ x_2 = \frac{F}{k_2},$$

тогда

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}.$$

Откуда

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

и

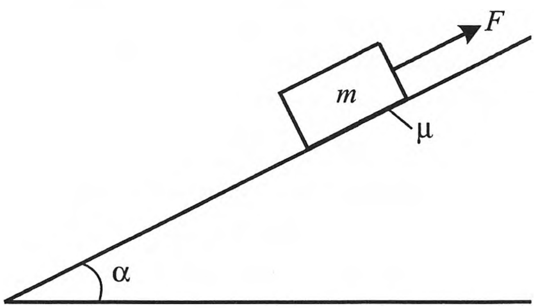
$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Ответ: а) $k = k_1 + k_2$; б) $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Если на тело действуют силы, направленные не по одной прямой, то одной координатной оси нам, скорее всего, не хватит.

Задача 6

При каких значениях силы F, приложенной к ящику вдоль наклонной плоскости, он будет находиться в равновесии? Масса ящика 50 кг, угол наклонной плоскости 30°, коэффициент трения скольжения равен 0,2.



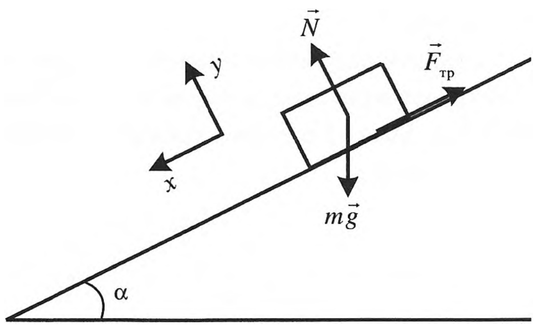
Решение.

Задача на первый взгляд кажется простой. На самом деле бо́льшая часть школьников редко решает ее правильно с первой попытки.

Давайте разберемся.

Сначала сделаем рисунок и укажем на нем все силы, кроме силы F, чтобы понять, как будет (и будет ли вообще) двигаться тело без приложенной силы.

Направим оси x (вниз, вдоль наклонной плоскости) и y (вверх, перпендикулярно наклонной плоскости), как показано на рисунке.



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma, \quad (1)$$

$$N - mg\cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) получим

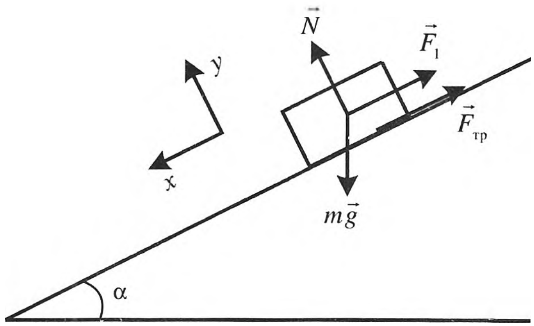
$$N = mg\cos\alpha.$$

Тогда сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha \approx 86{,}6\ \text{Н}.$$

Проекция силы тяжести вдоль оси x:

$$mg\sin\alpha = 250\ \text{Н}.$$



Так как $mg\sin\alpha > F_{тр}$, то в отсутствие приложенной силы F тело будет скатываться вниз вдоль наклонной плоскости с ускорением. Чтобы тело не скатывалось, мы должны приложить минимальную силу F_1. Такую, что:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} - F_1 = 0.$$

Тогда

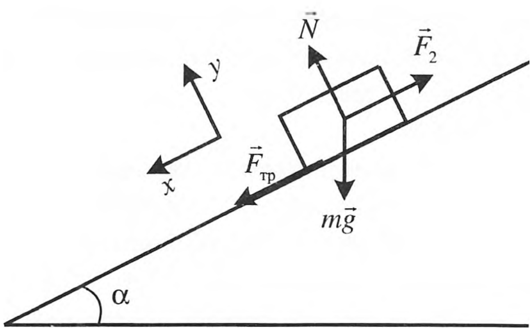
$$F_1 = mg\sin\alpha - F_{тр} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \approx 163{,}4\ \text{Н}.$$

И если бы нас просили найти минимальное значение силы F, то задачу можно было бы считать решенной. А многие в этом месте останавливаются и пишут ответ.

Что произойдет, если мы немного увеличим силу F (например, на 20–30 Н)? Тело начнет двигаться вверх? Нет, конечно. По мере увеличения силы F будет уменьшаться сила трения.

При значении силы $F = mg\sin\alpha = 250$ Н сила трения будет равна нулю, при дальнейшем увеличении силы F сила трения поменяет направление на противоположное и будет мешать нам тащить тело вверх, увеличиваясь по модулю от нуля до значения силы трения скольжения $\mu mg\cos\alpha$. Найдем максимальное значение приложенной силы F_2, при котором тело еще будет находиться в покое.

Сделаем новый рисунок и покажем направление сил.



В проекциях на ось x

$$mg\sin\alpha + F_{тр} - F_2 = 0,$$

откуда максимальное значение силы

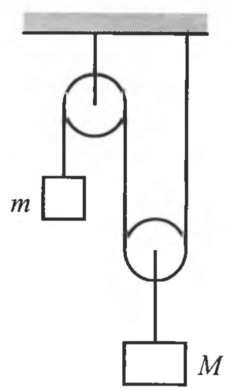
$$F_2 = mg\sin\alpha + F_{тр} = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \approx 336{,}6\ \text{Н}.$$

Значит, тело будет находиться в равновесии при значениях приложенной силы в диапазоне от 163,4 Н до 336,6 Н.

Ответ: $163{,}4\ \text{Н} \le F \le 336{,}6\ \text{Н}$.

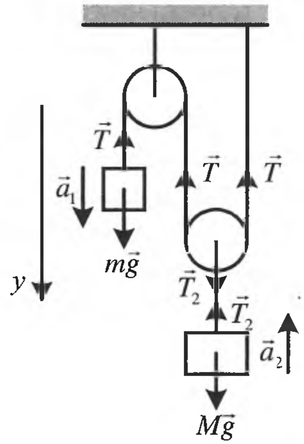
Задача 7

Найдите силу натяжения нити, перекинутой через блоки, и ускорения грузов в системе, изображенной на рисунке. Массы грузов $m = 2$ кг, $M = 3$ кг. Массой блоков и трением пренебречь. Нить считать идеальной и невесомой.



Решение.

Сделаем рисунок и покажем силы, действующие на грузы и на подвижный блок.



Подвижный блок дает выигрыш в силе в 2 раза, поэтому груз массой 2 кг будет двигаться вниз, а груз массой 3 кг — подниматься вверх.

Очевидно, что грузы будут двигаться с разными скоростями и ускорениями.

Направим ось y вниз и запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось y для груза массой m:

$$mg - T = ma_1, \qquad (1)$$

для груза массой M:

$$T_2 - Mg = Ma_2, \qquad (2)$$

где T — сила натяжения нити, перекинутой через блоки (так как нить невесома, то сила одинакова в любой точке нити), T_2 — сила натяжения нити, соединяющей груз массой M с подвижным блоком, a_1 и a_2 — ускорения грузов массами m и M соответственно.

Записав второй закон Ньютона для обоих грузов, мы получили 2 уравнения и 4 неизвестных. Что делать?

Во-первых, нужно понять, как связаны ускорения грузов. Силы, действующие на грузы, постоянны, значит, движение грузов равноускоренное.

За одно и то же время груз массой m проходит в 2 раза большее расстояние (при опускании груза m на расстояние l груз массой M поднимется на расстояние $\frac{l}{2}$), следовательно,

$$a_1 = 2a_2. \qquad (3)$$

Запишем еще одно уравнение без новых неизвестных — второй закон Ньютона в проекциях на ось y для подвижного блока:

$$2T - T_2 = m_0 a_2,$$

где m_0 — масса подвижного блока.

Так как массой подвижного блока можно пренебречь, то $m_0 a_2 = 0$, значит,

$$2T - T_2 = 0. \qquad (4)$$

Решая полученную систему из четырех уравнений (1) – (4), получим:

$$T = \frac{3mMg}{M+4m} \approx 16{,}4 \text{ Н},$$

$$a_1 = \frac{2g(2m-M)}{M+4m} \approx 1{,}8 \text{ м/с}^2,$$

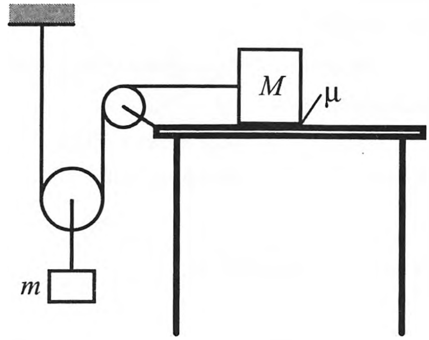
$$a_2 = \frac{g(2m-M)}{M+4m} \approx 0{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $T = \frac{3mMg}{M+4m} \approx 16{,}4$ Н; $a_1 = \frac{2g(2m-M)}{M+4m} \approx 1{,}8$ м/с^2; $a_2 = \frac{g(2m-M)}{M+4m} \approx 0{,}9$ м/с^2.

Самостоятельная работа 4

1. Доска массой 10 кг лежит на гладкой горизонтальной поверхности стола. На доске находится брусок массой 2 кг. Коэффициент трения между доской и бруском равен 0,3. Какую минимальную силу нужно приложить к доске, чтобы брусок начал скользить по ней?

2. Найдите ускорение груза массой $m = 1$ кг в системе, показанной на рисунке. Масса груза на столе $M = 4$ кг, коэффициент трения между грузом и столом 0,1. Подвижный блок можно считать невесомым, трения в блоке нет.



3. При какой продолжительности суток тела на экваторе будут весить в 2 раза меньше, чем на полюсе Земли?

4. Тело пущено вверх вдоль наклонной плоскости с углом наклона α. Через время t_1 тело достигло верхней точки. Найдите начальную скорость тела и время, через которое тело вернется к подножию склона (время спуска).

Глава 3

Статика

§ 1. Условие равновесия тел

Равновесие твердого тела — такое состояние, при котором все точки данного тела остаются неподвижными в инерциальной системе отсчета.

Для того чтобы твердое тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы выполнялись два условия.

Первое условие равновесия тел следует из законов Ньютона: равнодействующая всех приложенных к телу сил должна быть равна нулю.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = 0.$$

При выполнении только первого условия тело может двигаться с постоянной скоростью и даже совершать вращательные движения.

Второе условие равновесия твердого тела (правило моментов): алгебраическая сумма моментов сил относительно любой оси должна быть равна нулю (или сумма моментов сил, вращающих тело по часовой стрелке, должна быть равна сумме моментов сил, вращающих тело против часовой стрелки):

$$M_1 + M_2 + ... = 0.$$

Момент силы M относительно оси вращения — скалярная физическая величина, равная произведению силы F на плечо силы l.

$$M = Fl.$$

Плечо силы l — расстояние от оси вращения до линии действия силы (перпендикуляр из оси вращения на линию действия силы).

Будем считать момент силы F положительным, если в отсутствие других сил она вызывает поворот тела против часовой стрелки, и отрицательным – если по часовой стрелке.

Центр масс тела — это воображаемая точка, через которую проходят направления действия всех сил, каждая из которых сообщает только поступательное ускорение.

Центр тяжести тела — точка приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на каждый элемент тела (можно сказать, что относительно центра тяжести алгебраическая сумма моментов всех сил тяжести равна нулю).

В однородном поле тяготения центр масс и центр тяжести тела совпадают.

Понятия центра масс и центра тяжести могут применяться и для системы тел.

В отсутствие внешних сил либо если равнодействующая внешних сил, действующая на тело (систему тел), равна нулю — центр масс тела (системы тел) остается неподвижен.

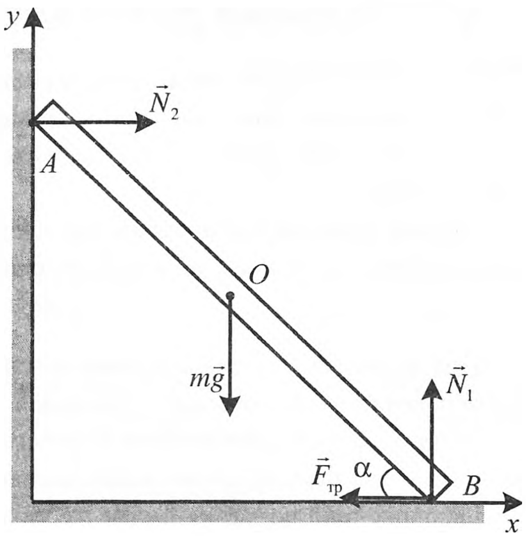
Разберем на примере.

Задача 1

Лестница массой $m = 30$ кг прислонена к гладкой вертикальной стене под некоторым углом к полу. Коэффициент трения между лестницей и полом $\mu = 0{,}3$. Определите наименьший угол наклона лестницы к полу, при котором она может оставаться в равновесии, и силу, с которой лестница давит на стену, когда скользит.

Решение.

Направим оси x и y, как показано на рисунке.



На лестницу действуют сила тяжести, сила реакции опоры со стороны стены и пола и сила трения между лестницей и полом.

Максимальное значение силы трения покоя — это сила трения скольжения $F_{тр\,max} = \mu N_1$.

Второй закон Ньютона в проекциях на ось x:

$$N_2 - F_{тр} = 0.$$

Второй закон Ньютона в проекциях на ось y:

$$N_1 - mg = 0.$$

Так как $N_1 = mg$, то $N_2 = F_{тр} \le F_{тр.\ max}$.

То есть $N_2 \le \mu mg$.

Запишем правило моментов относительно оси, проходящей через точку B (перпендикулярно плоскости рисунка):

$$N_2 l \sin\alpha = mg\frac{l\cos\alpha}{2},$$

откуда

$$N_2 = \frac{mg\ \mathrm{ctg}\ \alpha}{2}.$$

Получим

$$\frac{mg\ \mathrm{ctg}\ \alpha}{2} \le \mu mg,$$

откуда

$$\alpha \ge \mathrm{arctg}\frac{1}{2\mu} \approx 59°.$$

Сила давления лестницы на стену при движении по третьему закону Ньютона равна N_2:

$$F = N_2 = \mu mg = 88{,}2\ \text{Н}.$$

Ответ: $\alpha \ge \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2\mu} \approx 59°$; $F = \mu mg = 88{,}2$ Н.

Глава 4

Импульс. Работа. Энергия

§ 1. Импульс тела. Закон сохранения импульса

Импульсом тела называется векторная физическая величина $\vec{p}$, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Импульсом системы тел называют векторную сумму импульсов всех тел, из которых состоит система.

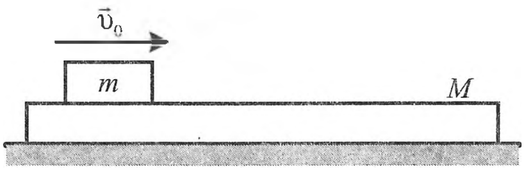
Импульсом силы называется векторная физическая величина, равная произведению силы $\vec{F}$ на промежуток времени Δt, в течение которого она действует.

Закон изменения импульса тела: $\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{\upsilon}$.

Закон сохранения импульса тела (системы тел): если на тело (систему тел) не действуют внешние силы или импульс их равнодействующей равен 0, то импульс тела (системы тел) сохраняется (не изменяется).

Задача 1

На гладкой горизонтальной плоскости находится длинная доска. На доску помещают брусок массой $m = 1$ кг и сообщают ему скорость $\upsilon_0 = 3$ м/с. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}4$. В начальный момент времени доска покоится. В момент $\tau = 0{,}5$ с брусок перестает скользить по доске. Чему равна масса доски M?



Решение.

1. То, что брусок перестает скользить по доске, совсем не значит, что он остановится.

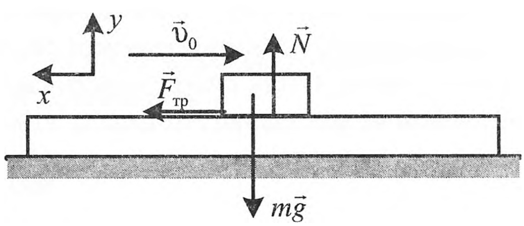
Перестанет скользить по доске означает, что они будут двигаться вместе, как одно целое.

Так как по горизонтали на систему брусок — доска не действуют внешние силы, а сумма сил, действующих по вертикали, равна нулю, то импульс системы остается постоянным и общую скорость можно найти с помощью закона сохранения импульса:

$$m\upsilon_0 = (M + m)u,$$

где M — масса доски, u — скорость доски с бруском после того, как брусок перестал скользить по доске.

2. Сделаем рисунок и укажем силы, действующие на брусок. Направим оси, как показано на рисунке.



3. Распишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси x и y:

$$\begin{aligned} F_{тр} &= ma, \\ N - mg &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg.$$

С учетом уравнения (1) получим

$$\mu mg = ma.$$

Ускорение бруска при скольжении по доске

$$a = \mu g. \qquad (2)$$

4. Зависимость скорости бруска от времени:

$$\upsilon = \upsilon_0 - a\tau.$$

В момент времени τ

$$u = \upsilon_0 - a\tau. \qquad (3)$$

Так как из закона сохранения импульса следует

$$u = \frac{m\upsilon_0}{M+m}, \qquad (4)$$

то с учетом формул (2), (3) и (4) получим

$$\frac{m\upsilon_0}{M+m} = \upsilon_0 - \mu g\tau. \qquad (5)$$

Выразив из формулы (5) массу доски M, получим

$$M = \frac{m\upsilon_0}{\upsilon_0 - \mu g\tau} - m = \frac{m\mu g\tau}{\upsilon_0 - \mu g\tau} = 2 \text{ кг}.$$

Ответ: $M = \dfrac{m\mu g\tau}{\upsilon_0 - \mu g\tau} = 2$ кг.

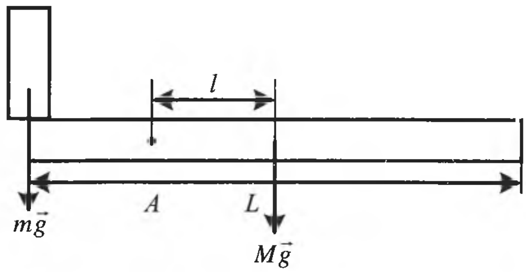
Задача 2

Человек массой $m = 70$ кг сидит на корме лодки, находящейся в озере. Длина лодки $L = 5$ м и масса ее $M = 280$ кг. Человек переходит на нос лодки. На какое расстояние переместится человек относительно дна озера? Сопротивлением воды пренебречь.

Решение.

Возможны 2 способа решения этой задачи.

1-й способ. При системе тел лодка–человек равнодействующая внешних сил равна нулю. Поэтому центр масс этой системы неподвижен в системе отсчета, связанной с водой. Центр масс совпадает с центром тяжести системы. Найдем его положение.

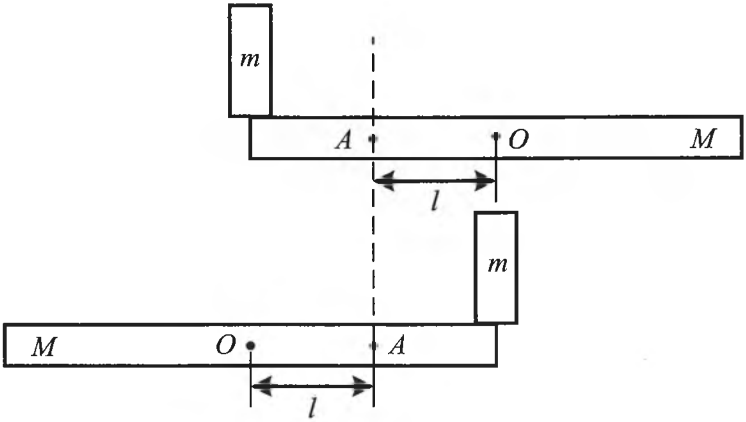


Мы знаем, что относительно центра тяжести алгебраическая сумма моментов всех сил тяжести равна нулю. Пусть центр тяжести системы находится в точке A между центром лодки и человеком на расстоянии l от центра лодки. Тогда по правилу моментов

$$mg\left(\frac{L}{2} - l\right) = Mgl,$$

откуда

$$l = \frac{mL}{2(m+M)}.$$



При движении человека по лодке последняя будет двигаться в противоположную сторону так, чтобы центр тяжести системы оставался неподвижен. Как видим из рисунка, центр лодки сместится на расстояние $2l$. Тогда человек переместится относительно дна на расстояние

$$s = L - 2l = L - \frac{mL}{m+M} = \frac{ML}{m+M} = 4 \text{ м}.$$

2-й способ. При системе тел лодка–человек равнодействующая внешних сил равна нулю, значит, импульс системы остается неизменным.

Пусть υ — скорость человека относительно лодки, u — скорость лодки относительно воды, тогда скорость человека относительно воды $(\upsilon - u)$.

Закон сохранения импульса:

$$m(\upsilon - u) = Mu,$$

откуда

$$u = \frac{M}{m+M}\upsilon.$$

Человек и лодка двигаются в течение одного и того же времени t.

Умножив обе части полученного выражения на время движения t, получим

$$ut = \frac{M}{m+M}\upsilon t.$$

С учетом того, что $\upsilon t = L$, а $ut = s$, имеем

$$s = \frac{ML}{m+M} = 4 \text{ м}.$$

Ответ: $s = \dfrac{ML}{m+M} = 4$ м.

§ 2. Работа силы. Мощность. КПД

Работа A **силы** $\vec{F}$ **на малом перемещении** $\vec{S}$ — это скалярная физическая величина, равная скалярному произведению векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{S}$:

$$A = \vec{F}\vec{S} = FS\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$.

Мощность — величина, равная отношению работы к промежутку времени, за который эта работа совершена:

$$N = \frac{A}{\Delta t}.$$

Коэффициент полезного действия (КПД) η — отношение полезной работы $A_п$ (двигателя, механизма и т. д.) ко всей совершенной работе $A_з$ или полученной энергии W.

Проще говоря, КПД показывает, какую часть полученной энергии двигатель или механизм превращает в полезную работу.

$$\eta = \frac{A_п}{A_з} \cdot 100\% = \frac{A_п}{W} \cdot 100\% = \frac{N_п}{N_з} \cdot 100\%.$$

Задача 1

Подъемный кран поднял со дна озера глыбу массой 2 т и объемом 0,5 м^3. Сколько времени длился подъем, если глубина озера 12 м, а кран развивал мощность 3 кВт? Считать, что скорость глыбы во время подъема постоянна.

Решение.

При подъеме на глыбу действуют 3 силы: сила тяжести глыбы mg (тянет глыбу вниз), сила Архимеда $F_А$ (выталкивает глыбу вверх) и подъемная сила крана F (направлена вертикально вверх). Так как движение равномерно, то подъемная сила крана равна разности силы тяжести и силы Архимеда:

$$F = mg - F_А.$$

Так как мощность крана N равна произведению подъемной силы F на скорость подъема глыбы υ, то можно найти скорость, с которой кран поднимает глыбу:

$$\upsilon = \frac{N}{F} = \frac{N}{mg - F_А} = \frac{N}{mg - \rho_в g V},$$

где $\rho_в = 1000$ кг/м^3 — плотность воды.

Тогда, зная глубину озера h, найдем время:

$$t = \frac{h}{\upsilon} = \frac{hg\left(m - \rho_в V\right)}{N} = 60 \text{ с} = 1 \text{ мин}.$$

Ответ: 1 мин.

§ 3. Механическая энергия. Закон сохранения и превращения энергии

Механическая энергия состоит из **кинетической** энергии (энергия движущихся тел) $E_к$ и **потенциальной** энергии $E_п$.

Кинетическая энергия зависит от скоростей тел и выбора системы отсчета:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Потенциальная энергия тела связана с работой консервативных (потенциальных) сил.

Консервативные силы — это силы, работа которых не зависит от траектории движения (например, сила тяжести и сила трения).

Потенциальная энергия зависит от расстояния между телами и выбора нулевого уровня отсчета энергии.

Потенциальная энергия, связанная с силой тяжести, $E_п = mgh$ (где h — высота, на которую поднято тело относительно «нулевого» уровня), и $E_п = \frac{kx^2}{2}$ — потенциальная энергия упруго деформированного тела (например, пружины).

Закон сохранения и превращения энергии

Величина полной энергии в замкнутой системе остается неизменной.

В *изолированной системе*, в которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется: $E = E_к + E_п = \text{const}$.

В остальных случаях энергия может переходить из одного вида в другой. Механическая энергия может переходить во внутреннюю и наоборот.

В *незамкнутой системе* энергия может увеличиваться или уменьшаться за счет работы внешних сил (например, уменьшаться под действием силы трения).

Изменение кинетической энергии тела равно сумме работ всех сил, действующих на тело (теорема об изменении кинетической энергии):

$$\Delta E_к = A.$$

Если силы, действующие в изолированной системе, консервативны, то работа этих сил равна изменению потенциальной энергии системы, взятому с противоположным знаком:

$$A = -\Delta E_п.$$

Задача 1

Санки массой 10 кг скатились с горы высотой 5 м и остановились на горизонтальном участке. Какую минимальную работу совершит мальчик, возвращая санки по линии скатывания на вершину горки?

Решение.

В этой простой, практически устной задаче делают ошибки примерно 90% решающих ее впервые.

Возьмем за нулевой уровень потенциальной энергии уровень земли. Тогда санки на вершине горы обладают потенциальной энергией

$$E_п = mgh.$$

По мере скатывания санок часть потенциальной энергии переходит в кинетическую, а часть тратится на работу против сил трения. После того как санки выехали на горизонтальный участок, оставшаяся при этом кинетическая энергия также будет уменьшаться до нуля из-за работы силы трения. Обозначим суммарную работу силы трения на всем пути — $A_{тр}$, тогда

$$mgh = A_{тр}. \qquad (1)$$

Причем нам совершенно не важно, одинаковый ли коэффициент трения на горке и на горизонтальной плоскости, нам не важны силы трения на каждом отдельном участке пути и так далее, поскольку обратно мальчик возвращает санки по линии скатывания, и, следовательно, при движении санок обратно сила трения совершит такую же по модулю работу.

Тогда, чтобы затащить санки на горку, мальчик должен совершить работу против сил трения да еще и сообщить телу первоначальную потенциальную энергию, т. е.

$$A = A_{тр} + mgh, \tag{2}$$

где A — минимальная работа мальчика. Тогда с учетом уравнения (1) получим

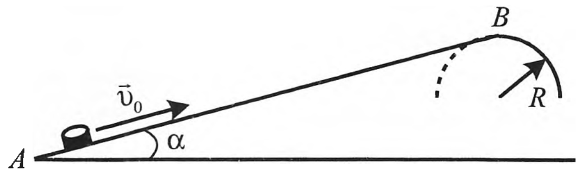
$$A = 2mgh = 1000 \text{ Дж}.$$

Если мальчик совершит бóльшую работу, то на вершине горы санки будут обладать еще и кинетической энергией.

Ответ: $A = 2mgh = 1000$ Дж.

Задача 2

Камень после удара скользит вверх по наклонной плоскости из точки A (см. рисунок). Наклонная плоскость без излома в точке B переходит в наружную поверхность трубы радиусом $R = 0{,}5$ м. Какую минимальную скорость υ_0 нужно сообщить камню в точке A, чтобы в точке B камень оторвался от поверхности? Длина наклонной плоскости $AB = L = 2$ м, угол $\alpha = 30°$. Коэффициент трения между камнем и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}1$.



Решение.

Что означает фраза «камень отрывается от поверхности»? Это означает, что его вес в точке B становится равным нулю, а значит, и сила реакции опоры $\vec{N}_B$ равна нулю.

Сделаем рисунок. Направим ось x вдоль наклонной плоскости вниз, а ось y — вниз перпендикулярно наклонной плоскости, как показано на рисунке.

Покажем силы, действующие на камень в точке B.

В момент отрыва камня действует только сила тяжести, полное ускорение камня в этот момент равно ускорению свободного падения.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось y:

$$mg\cos\alpha = ma_n,$$

откуда

$$a_n = g\cos\alpha.$$

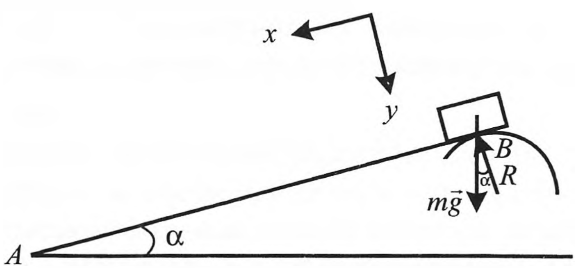
Так как тело в точке B двигается по окружности, то проекция ускорения на ось y является центростремительным ускорением, а значит,

$$a_n = \frac{\upsilon_B^2}{R}.$$

Найдем скорость камня в точке B в момент его отрыва:

$$\upsilon_B^2 = a_n R = gR\cos\alpha.$$

Далее эту задачу можно решать двумя способами.



1-й способ. Запишем закон сохранения энергии для перемещения камня из точки A в точку B:

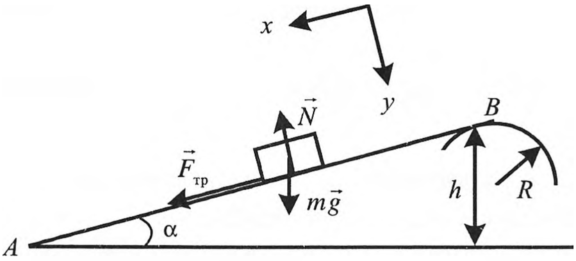
$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon_B^2}{2} + mgh + A_{тр}, \qquad (1)$$

где $A_{тр}$ — работа силы трения при движении камня, $h = L\sin\alpha$ — высота камня в точке B.

$$A_{тр} = F_{тр}L = \mu NL,$$

где N — сила реакции опоры, действующая на камень при движении из точки A в точку B.

Чтобы ее найти, сделаем еще один рисунок, направим оси и укажем силы.



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось y:

$$mg\cos\alpha - N = 0,$$

откуда

$$N = mg\cos\alpha.$$

Тогда

$$A_{тр} = \mu mgL\cos\alpha.$$

Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon_B^2}{2} + mgL\sin\alpha + \mu mgL\cos\alpha.$$

Разделив обе части уравнения на m и подставив значение υ_B^2, получим

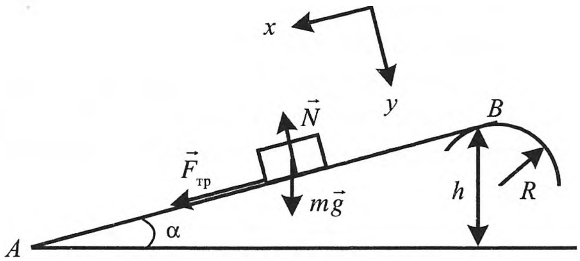
$$\frac{\upsilon_0^2}{2} = \frac{gR\cos\alpha}{2} + gL\sin\alpha + \mu gL\cos\alpha,$$

откуда

$$\upsilon_0 = \sqrt{gR\cos\alpha + 2gL(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 5 \text{ м/с}.$$

2-й способ. Рассмотрим движение камня из точки A в точку B.

Сделаем рисунок, направим оси и укажем силы.



Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y:

$$mg\sin\alpha + F_{тр} = ma, \qquad (1)$$
$$mg\cos\alpha - N = 0.$$

Тогда:

$$N = mg\cos\alpha,$$
$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

Следовательно, уравнение (1) запишем в виде

$$mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = ma,$$

откуда

$$a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

С другой стороны:

$$\upsilon_B = \upsilon_0 - at, \qquad (2)$$
$$L = \upsilon_0 t - \frac{at^2}{2}. \qquad (3)$$

Выразив из уравнений (2) и (3) ускорение, получим

$$a = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon_B^2}{2L} = \frac{\upsilon_0^2 - gR\cos\alpha}{2L},$$

то есть

$$\frac{\upsilon_0^2 - gR\cos\alpha}{2L} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Выразив скорость, получим

$$\upsilon_0 = \sqrt{gR\cos\alpha + 2gL(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 5 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = \sqrt{gR\cos\alpha + 2gL(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 5$ м/с.

Столкновение (удар) — кратковременное взаимодействие соприкасающихся тел, вызывающее изменение их движения.

Кинетическая энергия во время удара частично преобразуется в энергию деформации, а затем перераспределяется между телами. Удар может быть центральным или нецентральным, упругим, неупругим и абсолютно неупругим. Разберемся более подробно на примерах.

Рассмотрим задачу на центральный удар для двух случаев.

Задача 3

Шары одинакового размера массой m_1 и m_2 двигаются навстречу друг другу со скоростями υ_1 и υ_2 соответственно. Поверхности шаров гладкие. Найдите скорости шаров после центрального соударения, если известно, что

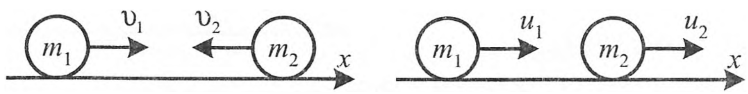
а) удар абсолютно упругий,

б) удар абсолютно неупругий.

Решение.

Удар называется центральным, если скорости тел до удара направлены вдоль линии, соединяющей центры масс тел.

а) То, что удар упругий, означает, что общая кинетическая энергия шаров не изменилась (кстати, многие считают, что в случае абсолютно упругого удара тела обязательно разлетаются в разные стороны — это не так). Обозначим скорости шаров после удара u_1 и u_2 соответственно.



Запишем закон сохранения импульса и энергии:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Если бы нам были даны числовые значения масс и скоростей шаров до удара, ось Ox удобно было бы направить в сторону движения шаров с бóльшим импульсом. В данном случае направим ось Ox по линии движения шаров в направлении $\vec{\upsilon}_1$. Перепишем закон сохранения импульса в проекции на ось Ox. Чтобы не запутаться потом со знаками, будем считать, что после удара скорости u_1 и u_2 направлены в положительном направлении Ox. Если при решении получим знак «–» перед скоростью u_1, значит, шар массой m_1 будет двигаться в обратном направлении; если обе скорости будут отрицательны, значит, оба шара двигаются в направлении, противоположном оси Ox. А вот если u_1 получится положительной, а u_2 — отрицательной, то мы где-то ошиблись, так как шары не могли пройти сквозь друг друга.

Итак, перепишем закон сохранения импульса в проекции на ось Ox:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \qquad (2)$$

Заметьте, в законе сохранения импульса мы учитываем направление скоростей, так как работаем с векторными величинами и их проекциями, в законе сохранения энергии направления скоростей нам не важны.

Решая систему уравнений (1) и (2), получим конечный ответ. Давайте рассмотрим простое решение этой системы (способ лучше запомнить):

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2}, \\ m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на 2 и сгруппируем (1) и (2) уравнения так, чтобы в левых частях были значения, связанные с первым шаром, а в правой — со вторым.

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1^2 - m_1u_1^2 = m_2u_2^2 - m_2\upsilon_2^2, \\ m_1\upsilon_1 - m_1u_1 = m_2u_2 + m_2u_2. \end{cases}$$

Разделив левые и правые части полученных уравнений, получим

$$\frac{m_1\upsilon_1^2 - m_1u_1^2}{m_1\upsilon_1 - m_1u_1} = \frac{m_2u_2^2 - m_2\upsilon_2^2}{m_2u_2 + m_2\upsilon_2}.$$

Выполнив преобразования, имеем:

$$\frac{m_1\left(\upsilon_1^2 - u_1^2\right)}{m_1\left(\upsilon_1 - u_1\right)} = \frac{m_2\left(u_2^2 - \upsilon_2^2\right)}{m_2\left(u_2 + \upsilon_2\right)};$$

$$\frac{\upsilon_1^2 - u_1^2}{\upsilon_1 - u_1} = \frac{u_2^2 - \upsilon_2^2}{u_2 + \upsilon_2}.$$

Откуда, вспомнив формулу разности квадратов, получим

$$\upsilon_1 + u_1 = u_2 - \upsilon_2.$$

Выразим u_2:

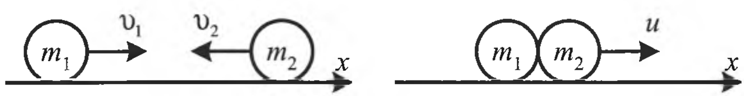
$$u_2 = \upsilon_1 + u_1 + \upsilon_2.$$

Подставив u_2 в уравнение (2), получим

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2(\upsilon_1 + u_1 + \upsilon_2).$$

И выразим $u_1 = \dfrac{m_1\upsilon_1 - 2m_2\upsilon_2 - m_2\upsilon_1}{m_1 + m_2}$, тогда $u_2 = \dfrac{2m_1\upsilon_1 + m_1\upsilon_2 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$.

б) Рассмотрим случай абсолютно неупругого удара. В этом случае оба шара будут двигаться вместе, как одно целое, — «слипнутся».



Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

В проекции на ось Ox:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u,$$

откуда

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон сохранения энергии будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + \Delta E,$$

где ΔE — выделившаяся в процессе соударения энергия (может перейти во внутреннюю энергию, выделиться в виде тепла и т. д.).

Ответ: а) $u_1 = \dfrac{m_1\upsilon_1 - 2m_2\upsilon_2 - m_2\upsilon_1}{m_1 + m_2}$, $u_2 = \dfrac{2m_1\upsilon_1 + m_1\upsilon_2 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$; б) $u = \dfrac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$.

Задача 4

Легкий шарик начинает свободно падать и, пролетев расстояние l, сталкивается упруго с тяжелой плитой, движущейся вверх со скоростью u. На какую высоту h подскочит шарик после удара?

Решение.

Скорость шарика при столкновении с плитой можно найти из закона сохранения энергии (его потенциальная энергия переходит в кинетическую):

$$mgl = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

откуда

$$\upsilon = \sqrt{2gl}.$$

Дальше задачу удобно решать в системе отсчета, связанной с плитой. Так как плита тяжелая (особенно по сравнению с легким шариком), то ее скорость при ударе меняется пренебрежимо мало, и тогда эту систему отсчета можно считать инерциальной. В инерциальной системе отсчета при упругом ударе скорость шарика после удара будет равна по модулю скорости шарика перед ударом, только поменяет направление на противоположное.

В системе отсчета, связанной с плитой, скорость шарика перед ударом $\upsilon_{01} = \sqrt{2gl} + u$ (можно сказать, что это скорость шарика относительно плиты перед ударом). Тогда после удара шарик будет иметь скорость $\upsilon_{02} = -\left(\sqrt{2gl} + u\right)$ (напоминаю: это скорость шарика после удара в системе отсчета, связанной с плитой, а знак «минус» означает, что теперь эта скорость направлена вверх).

Тогда скорость шарика относительно земли после удара будет равна:

$$\upsilon_2 = \upsilon_{02} - u = -\left(\sqrt{2gl} + u\right) - u = -\sqrt{2gl} - 2u.$$

Запишем снова закон сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = mgh.$$

Откуда

$$h = \frac{\upsilon_2^2}{2g} - \frac{\left(-\sqrt{2gl} - 2u\right)^2}{2g} = \frac{\left(\sqrt{2gl} + 2u\right)^2}{2g}.$$

Ответ: $h = \dfrac{\left(\sqrt{2gl} + 2u\right)^2}{2g}.$

Задача 5

Легкая пружина, жесткость которой равна k, а длина L, стоит вертикально на столе. С высоты H над столом на нее падает небольшой шарик, масса которого равна m. Найдите максимальную скорость υ_{max}, которую будет иметь шарик при своем движении вниз, и максимальное сжатие пружины. Трением пренебречь.

Решение.

Бóльшая часть учеников, вместо того чтобы проанализировать движение шарика, внимательно рассмотреть момент, когда шарик коснется пружины, рассмотреть действующие силы и так далее, почему-то решают для себя, что «скорость будет максимальна, когда шарик коснется пружины» — это неправильно. Пока шарик находится в свободном падении, на него действует лишь сила тяжести, и он двигается с ускорением свободного падения. Что происходит, когда шарик касается пружины? На него начинает действовать сила упругости, которая растет по мере сжатия пружины. Направим ось y вертикально вниз и запишем второй закон Ньютона:

$$mg - kx = ma.$$

Из данного уравнения видно, что, когда шарик только начинает сжимать пружину и сила упругости еще мала (меньше силы тяжести), ускорение шарика направлено также вниз (как и скорость). А раз ускорение и скорость направлены в одну и ту же сторону, то шарик продолжает разгоняться и после касания пружины (медленно, но разгоняется). И разгоняется он до тех пор, пока сила тяжести не станет равна силе упругости. В этот момент скорость и будет максимальной:

$$mg = kx_0.$$

Вычислим сжатие пружины, при котором скорость максимальна:

$$x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Записав закон сохранения энергии для системы шарик–пружина и взяв за нулевой уровень потенциальной энергии поверхность стола, получим

$$mgH = mg\left(L - x_0\right) + \frac{m\upsilon_{max}^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2},$$

откуда

$$\upsilon_{max} = \sqrt{2g\left(H - L\right) + \frac{mg^2}{k}}.$$

Осталось найти максимальное сжатие пружины x_{max}, для этого нам понадобится записать закон сохранения энергии. В какой момент сжатие будет максимально? Когда шарик остановится в своей нижней точке:

$$mgH = mg\left(L - x_{max}\right) + \frac{kx_{max}^2}{2}.$$

Решая данное уравнение, найдем искомое сжатие:

$$x_{max} = \frac{mg + \sqrt{mg\left(mg + 2k\left(H - L\right)\right)}}{k}.$$

Ответ: $\upsilon_{max} = \sqrt{2g\left(H - L\right) + \frac{mg^2}{k}}$, $x_{max} = \frac{mg + \sqrt{mg\left(mg + 2k\left(H - L\right)\right)}}{k}$.

Задача 6

Один грузик подвешен на нерастяжимой нити длиной l, а другой — на жестком невесомом стержне такой же длины. Какие минимальные скорости нужно сообщить этим грузикам, чтобы они вращались в вертикальной плоскости?

Решение.

На первый взгляд кажется, что скорости в обоих случаях будут одинаковы, но это заблуждение.

1) В случае со стержнем достаточно записать закон сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon_с^2}{2} = mg \cdot 2l.$$

Тогда минимальная скорость для груза на стержне в нижней точке

$$\upsilon_с = 2\sqrt{gl}.$$

А вот в случае с нерастяжимой нитью этого будет недостаточно.

2) Нить все время движения до верхней точки должна быть натянута. Скорость будет минимальной, если лишь в верхней точке сила натяжения нити станет равной нулю, при этом, естественно, у груза будет некоторая горизонтальная скорость. Найдем ее из второго закона Ньютона для верхнего положения груза на нити. Так как груз двигается по окружности и сила натяжения в верхней точке равна нулю, то центростремительное ускорение сообщается грузу силой тяжести:

$$mg = \frac{m\upsilon_{н2}^2}{l}.$$

Откуда скорость груза в верхней точке:

$$\upsilon_{н2}^2 = gl.$$

Закон сохранения энергии для груза на нити:

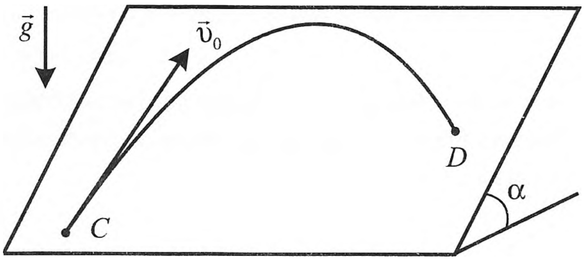
$$\frac{m\upsilon_{н1}^2}{2} = mg \cdot 2l + \frac{m\upsilon_{н2}^2}{2}.$$

Откуда:

$$\upsilon_{н1} = \sqrt{5gl}.$$

Ответ: 1) $\upsilon_с = 2\sqrt{gl}$; 2) $\upsilon_{н1} = \sqrt{5gl}$.

Задача 7



Монета скользит по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α и имеет в точке C скорость υ_0. Через некоторое время монета оказалась в точке D наклонной плоскости, пройдя путь S и поднявшись по вертикали на высоту H. Коэффициент трения скольжения между монетой и наклонной плоскостью μ. Вычислите скорость монеты в точке D.

Решение.

При движении по наклонной плоскости на монету действуют сила реакции опоры $\vec{N}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$.

Направим ось y перпендикулярно плоскости вверх, тогда по второму закону Ньютона в проекции на ось y

$$N = mg\cos\alpha.$$

Работу сила реакции опоры не совершает.

Закон сохранения энергии для монеты:

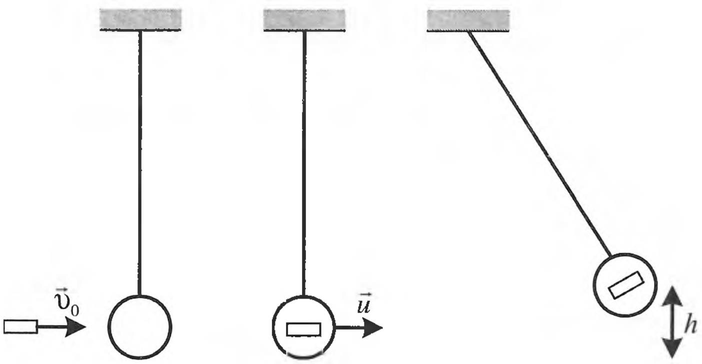
$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgH + \mu mgS\cos\alpha.$$

Выполнив преобразования, получим

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2g\left(H + \mu S\cos\alpha\right)}.$$

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2g\left(H + \mu S\cos\alpha\right)}$.

Задача 8



В шар массой 500 г, висящий на невесомом стержне, попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально, и застревает в нем. После этого шар с пулей поднимается на высоту 5 см относительно начального положения шара. Найдите скорость пули.

Решение.

Одна из самых частых ошибок, которую делают при решении этой задачи, — это приравнивание кинетической энергии пули потенциальной энергии системы пуля–шар. Так делать нельзя, эти энергии не равны.

Так как пуля пробивает шар и застревает в нем, то мы имеем дело с абсолютно неупругим взаимодействием, поэтому часть механической энергии при взаимодействии пули и шара теряется.

Запишем закон сохранения импульса для момента пробивания шара пулей в проекции на ось x, направленной вдоль скорости пули:

$$m\upsilon_0 = (m + M)u, \tag{1}$$

где m и M — массы пули и шара соответственно, υ_0 — скорость пули до попадания в шар, u — скорость шара с пулей сразу после застревания в нем пули.

Тогда

$$\upsilon_0 = \frac{(m+M)u}{m}. \tag{2}$$

После взаимодействия полная механическая энергия остается постоянной, а значит, закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh,$$

откуда

$$u = \sqrt{2gh}.$$

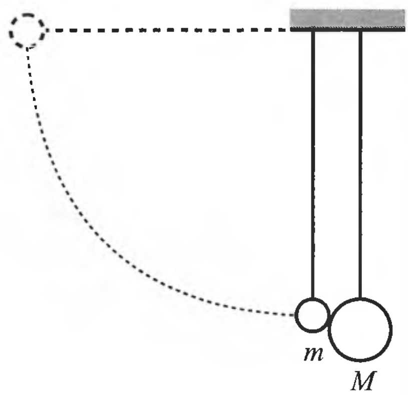
Подставив u в уравнение (2), получим

$$\upsilon_0 = \frac{(m+M)\sqrt{2gh}}{m} = 51 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = \dfrac{(m+M)\sqrt{2gh}}{m} = 51$ м/с.

Задача 9

Два шарика, массы которых $m = 1$ кг и $M = 3$ кг, висят, соприкасаясь, на нитях длиной 80 см каждая. Шарик меньшей массы отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости. Какое количество теплоты выделится в результате абсолютно неупругого удара шариков?



Решение.

Найдем скорость υ маленького шарика перед столкновением.

Для этого запишем закон сохранения энергии для меньшего шарика от момента отпускания его до момента соударения, взяв за нулевой уровень потенциальной энергии начальное положение шариков:

$$mgl = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

откуда

$$\upsilon = \sqrt{2gl}. \tag{1}$$

Так как удар шаров абсолютно неупругий, то в момент удара часть кинетической энергии маленького шарика выделится в виде тепла, а шарики «слипнутся» и будут двигаться как одно целое:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2} + Q, \tag{2}$$

где Q — выделившееся количество теплоты, u — скорость шариков после удара.

Скорость шариков после удара можно найти из закона сохранения импульса при ударе:

$$m\upsilon = (m+M)u,$$

откуда

$$u = \frac{m\upsilon}{(m+M)}.$$

Подставив в уравнение (2), получим

$$Q = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m^2\upsilon^2}{2(m+M)} = \frac{mM\upsilon^2}{2(m+M)}.$$

С учетом уравнения (1) получим

$$Q = \frac{2glmM}{2(m+M)} = \frac{glmM}{(m+M)} = 6 \text{ Дж}.$$

Ответ: $Q = \dfrac{glmM}{(m+M)} = 6$ Дж.

Взрывы снарядов

При взрывах и разрывах снарядов механическая энергия системы увеличивается (за счет уменьшения внутренней энергии), а импульс снаряда до взрыва будет равен суммарному импульсу осколков после взрыва.

Рассмотрим на примере решения задач.

Задача 10

Снаряд массой m = 10 кг, летящий горизонтально со скоростью υ_0 = 200 м/с, разрывается на две равные части, одна из которых летит в направлении снаряда, а вторая — в противоположную сторону. Найдите скорости осколков, если известно, что при взрыве механическая энергия E увеличилась на 900 кДж.

Решение.

Обозначим скорость снаряда υ_0, скорость осколка, который летит в направлении снаряда — υ_1, скорость другого осколка — υ_2, массу каждого осколка — m.

Запишем закон сохранения импульса в проекциях на ось x, совпадающую по направлению со скоростью снаряда:

$$2m\upsilon_0 = m\upsilon_1 - m\upsilon_2. \quad (1)$$

И закон сохранения энергии:

$$\frac{2m\upsilon_0^2}{2} + E = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{2}. \quad (2)$$

Выразим υ_1 из уравнения (1) и подставим его в уравнение (2):

$$2m\upsilon_0^2 + 2E = m(2\upsilon_0 + \upsilon_2)^2 + m\upsilon_2^2.$$

Приведем подобные члены и упростим выражение (постарайтесь внимательно разобрать каждое действие, возможно, то же самое придется проделать самостоятельно на экзамене):

$$2m\upsilon_0^2 + 2E = 4m\upsilon_0^2 + 4m\upsilon_0\upsilon_2 + m\upsilon_2^2 + m\upsilon_2^2,$$

$$2E = 2m\upsilon_0^2 + 4m\upsilon_0\upsilon_2 + 2m\upsilon_2^2,$$

$$E = m(\upsilon_0^2 + 2\upsilon_0\upsilon_2 + \upsilon_2^2),$$

$$E = m(\upsilon_0 + \upsilon_2)^2.$$

Тогда

$$\upsilon_0 + \upsilon_2 = \sqrt{\frac{E}{m}},$$

откуда

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{E}{m}} - \upsilon_0 = 100 \text{ м/с}.$$

Подставив в уравнение (1), найдем υ_1:

$$2\upsilon_0 = \upsilon_1 - \sqrt{\frac{E}{m}} + \upsilon_0,$$

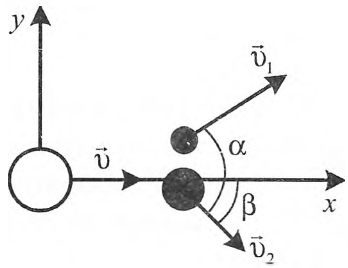
тогда

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \sqrt{\frac{E}{m}} = 500 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_1 = \upsilon_0 + \sqrt{\frac{E}{m}} = 500$ м/с; $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{E}{m}} - \upsilon_0 = 100$ м/с.

Задача 11

Летящий снаряд разорвался на два осколка. Угол между скоростями осколков 60°. Первый осколок массой $m_1 = 40$ кг имеет скорость $\upsilon_1 = 100$ м/с. Второй осколок массой $m_2 = 60$ кг имеет скорость $\upsilon_2 = 25$ м/с. Чему равна энергия ΔE, выделенная при разрыве снаряда?



Решение.

1-й способ. Чаще всего данную задачу пытаются решить классическим способом, записав закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в проекциях на оси x и y.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} + \Delta E = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2},$$

где υ — скорость снаряда перед взрывом.

Закон сохранения импульса в векторной форме:

$$(m_1 + m_2)\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2. \qquad (1)$$

Направим ось x по направлению скорости снаряда, а ось y — перпендикулярно оси x, как показано на рисунке.

Тогда закон сохранения импульса в проекциях на оси x и y:

$$(m_1 + m_2)\upsilon = m_1\upsilon_1\cos(\alpha - \beta) + m_2\upsilon_2\cos\beta, \qquad (2)$$

$$0 = m_1\upsilon_1\sin(\alpha - \beta) + m_2\upsilon_2\sin\beta, \qquad (3)$$

где β — угол между скоростью второго осколка и осью x.

А дальше приходится решать систему из трех уравнений (1), (2), (3). Решение совсем не быстрое. Можете попробовать сами.

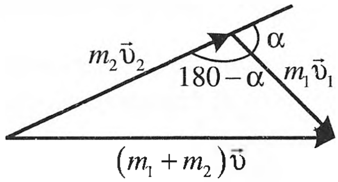
2-й способ. Разберем более простой способ. Закон сохранения энергии (1) перепишем без изменений:

$$\frac{(m_1+m_2)\upsilon^2}{2}+\Delta E=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Закон сохранения импульса распишем в векторной форме:

$$(m_1+m_2)\vec{\upsilon}=m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2.$$

Покажем его на рисунке.



Теорема косинусов для получившегося треугольника:

$$(m_1+m_2)^2\,\upsilon^2=m_1^2\upsilon_1^2+m_2^2\upsilon_2^2-2(m_1\upsilon_1)(m_2\upsilon_2)\cos(180-\alpha).$$

Выразим отсюда υ^2, учитывая, что $\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$, из этого уравнения получим

$$\upsilon^2=\frac{m_1^2\upsilon_1^2+m_2^2\upsilon_2^2+2(m_1\upsilon_1)(m_2\upsilon_2)\cos\alpha}{(m_1+m_2)^2}$$

и подставим в уравнение (1):

$$\frac{(m_1+m_2)}{2}\frac{m_1^2\upsilon_1^2+m_2^2\upsilon_2^2+2(m_1\upsilon_1)(m_2\upsilon_2)\cos\alpha}{(m_1+m_2)^2}+\Delta E=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2},$$

откуда

$$\Delta E=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{\left(\upsilon_1^2+\upsilon_2^2-2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha\right)}{2}=97\ 500\text{ Дж}=97{,}5\text{ кДж}.$$

Ответ: $\Delta E=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dfrac{\left(\upsilon_1^2+\upsilon_2^2-2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha\right)}{2}=97\ 500\text{ Дж}=97{,}5\text{ кДж}.$

Самостоятельная работа 5

1. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть на 20 см две пружины, жесткости которых равны 500 Н/м и 1500 Н/м, если они соединены последовательно?

2. Маленькая шайба соскальзывает без трения с вершины неподвижной полусферы радиусом 3 м. На какой высоте шайба оторвется от поверхности полусферы?

3. Санки массой 10 кг скатываются с горки высотой 15 метров и длиной 25 метров. Съехав с горы и проехав некоторый путь по горизонтальной поверхности, санки останавливаются. Найдите расстояние от основания горки до места остановки санок. Коэффициент трения на всем пути одинаков и равен 0,2.

4. Два бруска, соединенные пружиной, лежат на горизонтальной плоскости. Масса первого бруска — 2 кг, масса второго — 6 кг. Какую минимальную горизонтальную постоянную силу нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинуть второй брусок? Коэффициент трения между брусками и поверхностью 0,4.

5. В шар, висящий на длинном легком горизонтальном стержне, попадает пуля и застревает в нем. После этого шар с пулей поднимается на высоту 80 см от начального положения. Найдите скорость пули перед попаданием в шар, если масса шара — 1 кг, масса пули — 10 г.

Глава 5

Гидростатика

§ 1. Давление. Закон Паскаля

Давление (p) — скалярная физическая величина, численно равная отношению силы, действующей перпендикулярно поверхности, к площади поверхности, на которую эта сила действует.

$$p = \frac{F}{S}.$$

Единица измерения давления — паскаль (Па): 1 Па = 1 Н/м^2.

Соответственно, чем больше площадь взаимодействия, тем меньшее давление создает одна и та же сила (именно поэтому, стоя на лыжах, мы гораздо меньше проваливаемся в снег).

Давление создают не только твердые тела, но и жидкости и газы.

Закон Паскаля: давление, производимое на жидкость или газ, передается в любую точку без изменений во всех направлениях.

Вы наверняка знакомы с понятием «атмосферное давление». Что же оно означает? Наша Земля окружена воздушной оболочкой — *атмосферой* (простирается на несколько тысяч километров от поверхности Земли). Верхние слои действуют на нижние, придавливая их к Земле. Соответственно, чем ближе к Земле, тем больше атмосферное давление. Чем выше мы поднимаемся, тем меньше атмосферное давление (иногда говорят «разреженный воздух»).

Давление столба жидкости

$$p = \rho g h,$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, h — высота столба жидкости.

Нормальным атмосферное давление на поверхности Земли принято считать p_0 = 760 мм рт. ст. = = 101 300 Па $\approx 10^5$ Па (при нормальных условиях на поверхности Земли).

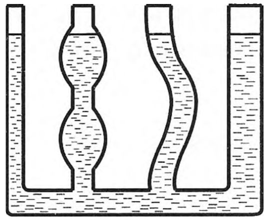
Можно сказать, что атмосфера создает такое же давление на поверхности Земли, которое создавал бы столб ртути высотой 76 см или столб воды высотой более 10 метров.

Проще говоря, окружающий нас воздух на каждый квадратный метр поверхности давит с силой 10^5 Н (с такой же силой давит гиря массой 10 000 кг, имеющая площадь 1 м^2).

§ 2. Сообщающиеся сосуды. Гидравлический пресс

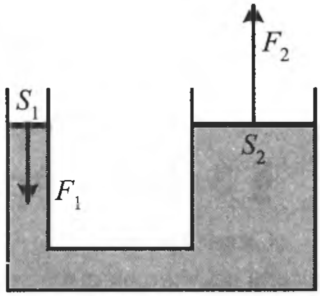
Сообщающиеся сосуды — это сосуды, которые соединены между собой снизу так, что жидкость может перетекать из одного сосуда в другой.

Если в сообщающихся сосудах налита одна и та же жидкость, то во всех сосудах жидкость будет находиться на одной высоте независимо от формы и размера сосуда.



Если в сосуды налиты жидкости с различной плотностью, то жидкости будут распределяться в сосудах так, чтобы давление на дно (а значит, и на самом нижнем уровне раздела жидкостей, ниже которого в обоих сосудах находится одна и та же жидкость) в каждом сосуде было одинаково.

Гидравлический пресс



Гидравлический пресс — устройство, состоящее из двух сообщающихся цилиндров разного диаметра и дающее выигрыш в силе.

Если на левый поршень площадью S_1 подействуем силой F_1, тогда под малым поршнем появится дополнительное давление

$$p = \frac{F_1}{S_1}.$$

Вспомним закон Паскаля: давление, производимое на жидкость или газ, передается в любую точку без изменений во всех направлениях.

Следовательно, такое же давление возникнет по всей жидкости, в том числе и под большим поршнем, и, значит, на него начнет действовать сила

$$F_2 = pS_2 = F_1\frac{S_2}{S_1}.$$

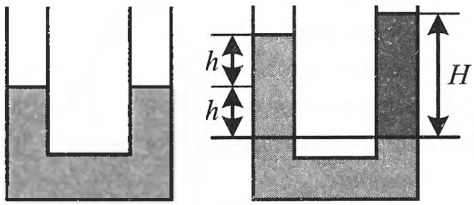
Или по свойству пропорции:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

То есть сила F_2 во столько раз больше силы F_1, во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого.

На приведенном рисунке диаметр большого поршня больше диаметра малого в пять раз, значит, площадь большого поршня в 25 раз больше малого и, соответственно, сила, с которой будет действовать большой поршень, будет в 25 раз больше силы, приложенной к малому. Это и есть выигрыш в силе.

Задача 1



В одинаковых сообщающихся сосудах трубки частично заполнены водой. Насколько повысится уровень воды в левой трубке, если в правую налить столб керосина высотой H = 30 см? Плотность керосина $\rho_к$ = 800 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3.

Решение.

Так как вода — это несжимаемая жидкость, то общий ее объем не изменился. Если в правом сосуде уровень воды уменьшится на h, то в левом сосуде он повысится тоже на h. Рассмотрим давление на границе воды и керосина. Ниже этого уровня в обоих сосудах будет находиться вода, которая будет создавать одинаковое давление, а значит, и на этом уровне давление в обоих сосудах должно быть одинаково. Запишем это:

$$\rho_в g 2h = \rho_к g H,$$

откуда

$$h = \frac{\rho_к H}{2\rho_в} = \frac{800 \cdot 0,3}{2 \cdot 1000} = 0,12 \text{ см.}$$

Ответ: $h = \dfrac{\rho_к H}{2\rho_в} = 0,12$ см.

§ 3. Сила Архимеда

Сила Архимеда $F_А$ — сила, выталкивающая тело из жидкости или газа. Сила Архимеда равна весу жидкости в объеме погруженной части тела:

$$F_А = \rho_ж g V_т.$$

Сила Архимеда может иметь не только вертикальное направление, но и горизонтальную составляющую.

Максимальное значение сила Архимеда принимает при полном погружении тела. Если она больше, чем сила тяжести, то тело всплывает и плавает, частично погрузившись в жидкость (т. е. если плотность воды больше, чем плотность тела).

Если сила Архимеда при полном погружении равна силе тяжести (при равенстве плотностей тела и жидкости), тело плавает (полностью погрузившись в жидкость, не тонет и не всплывает).

Если сила Архимеда при полном погружении меньше силы тяжести (плотность воды меньше плотности тела), тело тонет.

Говорят, когда-то давным-давно царь Гиерон поручил Архимеду проверить ювелирного мастера, изготовившего золотую корону, на честность.

Корона весила столько, сколько было выделено золота, но царь сомневался, что мастер не добавил в нее другие металлы, оставив часть золота себе. Архимед должен был, не ломая корону, определить, есть ли в ней примеси.

Давайте и мы решим сейчас эту задачу.

Задача 1 (Задача Гиерона)

Предположим, что золотая корона царя Гиерона в воздухе весит 20 Н, а в воде — 18,75 Н. Вычислите плотность вещества короны, полагая, что к золоту было подмешано только серебро. Определите, сколько в короне было золота, а сколько — серебра. При решении задачи плотность золота считайте равной 20 000 кг/м^3, плотность серебра — 10 000 кг/м^3.

Решение.

Вес короны в воздухе P_1 равен ее силе тяжести $m_к g$. А вес тела в жидкости P_2 меньше силы тяжести на величину силы Архимеда $F_А = \rho_ж g V_к$, т. е.

$$P_1 - P_2 = \rho_в g V_к,$$

где $\rho_в$ — плотность воды, а $V_к$ — объем короны.

Выразим объем короны:

$$V_к = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g}.$$

Тогда плотность короны

$$\rho_к = \frac{m_к}{V_к} = \frac{P_1}{g} : \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g} = \frac{P_1}{P_1 - P_2}\rho_в = 16\ 000\ кг/м^3.$$

Как видим, плотность короны меньше, чем плотность золота. Значит, в короне есть примеси.

Предположив, что к золоту было добавлено только серебро, найдем массу золота $m_з$ и массу серебра $m_с$ в короне:

$$m_к = m_з + m_с,$$
$$V_к = V_з + V_с.$$

Тогда объем серебра $V_с = V_к - V_з$, и значит, $m_с = \rho_с (V_к - V_з) = \rho_с \left(\frac{m_к}{\rho_к} - \frac{m_з}{\rho_з}\right)$.

Откуда

$$\rho_с \left(\frac{m_к}{\rho_к} - \frac{m_з}{\rho_з}\right) = m_к - m_з.$$

Выразив массу золота, получим

$$m_з = \frac{m_к \rho_з (\rho_к - \rho_с)}{\rho_к (\rho_з - \rho_с)} = \frac{\rho_з (\rho_к - \rho_с) P_1}{\rho_к (\rho_з - \rho_с) g} = 1{,}5\ кг.$$

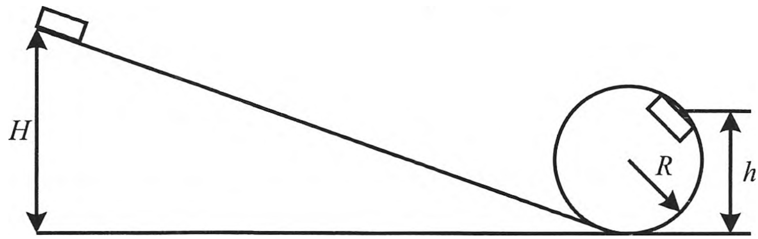
Тогда масса серебра

$$m_с = m_к - m_з = 0{,}5\ кг.$$

Ответ: $\rho_к = 16\ 000\ кг/м^3$, $m_з = 1{,}5$ кг, $m_с = 0{,}5$ кг.

Контрольная работа 1

1. Маленькая шайба массой 500 г соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки, которая переходит в мертвую петлю радиусом 1 м. Найдите высоту горки, если на высоте 2 метра от нижней точки петли шайба давит на стенку с силой 4 Н.



2. Брусок массой 1 кг соскальзывает по гладкой наклонной плоскости, которая плавно переходит в горизонтальную, с высоты 5 м и, оказавшись на горизонтальной поверхности, сталкивается с неподвижным бруском массой 3 кг. Найдите скорость брусков после абсолютно неупругого удара.

3. Два одинаковых шарика висят, соприкасаясь, на нитях длиной 1 м. Один из них отводят на угол 90° и отпускают. Найдите высоту, на которую поднимутся шары после абсолютно неупругого удара.

4. Мячик падает с высоты 5 м на длинную наклонную плоскость с углом наклона 30°. Найдите расстояние между первым и вторым ударами мяча о плоскость. Считать удары шарика о плоскость абсолютно упругими.

5. Железный кубик плавает на границе несмешивающихся воды и ртути. Какая часть объема кубика погружена в ртуть, если верхняя часть кубика находится под водой?

Раздел 2
МКТ. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ. ТЕРМОДИНАМИКА

Глава 1
МКТ

§ 1. Основные положения молекулярно-кинетической теории

- Все тела состоят из молекул (или атомов).
- Между молекулами на малых расстояниях (сравнимых с размерами молекул) действуют силы отталкивания, а на больших — силы притяжения.
- Молекулы участвуют в хаотичном тепловом движении.

Массы молекул очень малы, а их число в больших телах очень велико. Для удобства вместо абсолютных значений масс молекул и их количества используются относительные величины.

Относительной атомной (молекулярной) массой называют отношение массы атома (молекулы) к $\frac{1}{12}$ массы атома углерода: $M_r = \dfrac{m_0}{\frac{1}{12} m_{0C}}$.

За единицу числа молекул взяли величину 1 моль.

Моль — количество вещества, содержащее столько же молекул, сколько содержится атомов в углероде массой 0,012 кг. Это значение назвали *постоянной Авогадро*.

Постоянная Авогадро — число молекул в моле вещества: $N_A \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль.

Количество вещества ν — физическая величина, равная отношению числа молекул N в теле к постоянной Авогадро: $\nu = \dfrac{N}{N_A}$.

Молярной массой называется масса одного моля вещества: $M = m_0 N_A$.

В *газах* расстояние между молекулами намного больше размеров молекул, поэтому газы легко смешиваются и занимают весь предоставленный им объем.

В *жидкостях* молекулы (или атомы) находятся непосредственно друг возле друга. Поэтому жидкости практически несжимаемы. Расположены молекулы неупорядоченно, и жидкость может легко менять свою форму (обладает *текучестью*).

В *твердых телах* атомы расположены в строгом порядке и совершают колебания около положения равновесия.

§ 2. Идеальный газ

Идеальный газ — газ, размеры молекул которого намного меньше расстояний между ними и взаимодействием молекул которого можно пренебречь.

По большому счету любой реальный сильно разреженный газ можно считать идеальным.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории для идеального газа: давление газа пропорционально произведению концентрации молекул (n) на среднюю кинетическую энергию $(\bar{E})$ поступательного движения молекул:

$$p = \frac{2}{3} n\bar{E},$$

где $\bar{E} = \frac{m\bar{\upsilon}^2}{2}$, а $\bar{\upsilon}^2$ — среднее значение квадрата скорости молекул.

Концентрация молекул газа n — число молекул в единице объема:

$$n = \frac{N}{V}.$$

Состояние газа характеризуют: давление, объем, температура.

Температура идеального газа связана со средней скоростью движения его молекул, а значит, и с кинетической энергией:

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT,$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура (измеряется в Кельвинах и связана с градусами по Цельсию следующим соотношением: $T(K) = t(°C) + 273$ °С, где t — температура по шкале Цельсия).

Минимально возможная температура — абсолютный 0 $K = -273$ °С.

Средняя квадратичная скорость молекул газа вычисляется по формуле

$$\bar{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где m_0 — масса одной молекулы газа, T — температура газа в Кельвинах, M — молярная масса газа, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, $R = kN_A = 8{,}31$ Дж/ (моль · К) — универсальная газовая постоянная.

Глава 2

Газовые законы

§ 1. Уравнение состояния идеального газа

Связь между давлением, концентрацией и температурой газа:

$$p = nkT.$$

Равновесное состояние некоторой массы идеального газа характеризуется тремя параметрами (их также называют термодинамическими): давлением, объемом и температурой.

Между термодинамическими параметрами (p, V и T) существует связь, показанная **уравнением состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона)**:

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT,$$

где p — давление, V — объем, m — масса газа, M — молярная масса; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура, ν — количество вещества.

Причем $R = kN_A$.

Для газа постоянной массы выполняется уравнение Клапейрона:

$$\frac{pV}{T} = \text{const, или } \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

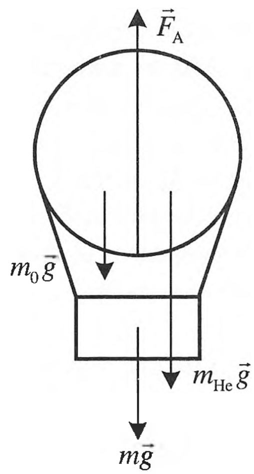
Задача 1

Воздушный шар с тонкой газонепроницаемой оболочкой заполнен гелием. Масса оболочки 300 кг. Масса гелия внутри оболочки 100 кг. Температура окружающего воздуха 7 °С. Какой груз сможет удерживать в воздухе воздушный шар? Считать, что оболочка шара не оказывает сопротивления изменению объема шара. Атмосферное давление воздуха 10^5 Па.

Решение.

Фраза «оболочка шара не оказывает сопротивления изменению объема шара» означает, что давление внутри шара всегда будет равно атмосферному давлению, т. е. давление гелия внутри шара равно давлению окружающего шар воздуха (атмосферному давлению).

Условие равновесия шара (шар удерживает груз в воздухе) — сумма всех сил, действующих на шар, равна нулю.



Сделаем рисунок, укажем силы, запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + m_0\vec{g} + m_{He}\vec{g} = 0,$$

где $\vec{F}_A$ — сила Архимеда, действующая на шар, m — масса груза, которую нам нужно найти, m_0 — масса оболочки, m_{He} — масса гелия.

$$F_A = \rho_в gV = m_в g,$$

где $\rho_в$ — плотность окружающего воздуха, V — объем шара, $m_в$ — масса воздуха в объеме шара.

Так как оболочка шара тонкая, то объем гелия можно считать равным объему шара.

Второй закон Ньютона в проекциях на ось x:

$$m_{в}g - mg - m_0 g - m_{He}g = 0.$$

Выразим массу груза:

$$m = m_{в} - m_0 - m_{He}. \qquad (1)$$

Найдем массу воздуха в объеме шара.

Уравнение Менделеева--Клапейрона для гелия и окружающего воздуха в объеме шара:

$$pV = \frac{m_{He}}{M_{He}}RT, \qquad (2)$$

$$pV = \frac{m_{в}}{M_{в}}RT, \qquad (3)$$

где M_{He} и $M_{в}$ — молярные массы гелия и воздуха соответственно, T — температура воздуха (и температура гелия), p — атмосферное давление.

Приравняв правые и левые части уравнений (1) и (2), получим

$$\frac{m_{He}}{M_{He}}RT = \frac{m_{в}}{M_{в}}RT,$$

тогда

$$\frac{m_{He}}{M_{He}} = \frac{m_{в}}{M_{в}}.$$

Откуда найдем массу воздуха:

$$m_{в} = \frac{M_{в}m_{He}}{M_{He}}.$$

Подставив значение $m_{в}$ в уравнение (1), получим

$$m = \frac{M_{в}m_{He}}{M_{He}} - m_0 - m_{He} = m_{He}\left(\frac{M_{в}}{M_{He}} - 1\right) - m_0 = 100\left(\frac{29}{4} - 1\right) - 300 = 325 \text{ кг}.$$

Мы нашли массу груза, которую может удерживать в воздухе воздушный шар, — 325 кг.

При этом нам не понадобились значения температуры и давления окружающего воздуха, которые были даны в условии. Это нормально. Пусть вас это не смущает.

Мы не знали объем шара, хотя нам и пришлось ввести эту переменную для решения задачи. Она все равно сократилась в процессе решения, но если бы мы решали задачу не в общем виде, а по действиям, пытаясь найти сразу численные значения величин (массы воздуха или силы Архимеда), — это могло бы стать проблемой.

Нам понадобились значения молярных масс воздуха и гелия, которых не было в условии, — это справочные данные, они предоставляются как на ЕГЭ, так и в конце книги. Ими можно пользоваться.

Ответ: $m = m_{He}\left(\frac{M_{в}}{M_{He}} - 1\right) - m_0 = 325$ кг.

Задача 2

Воздух в воздушном шаре нагревается горелкой через отверстие снизу воздушного шара. Объем шара $V = 1000$ м^3, масса тонкой оболочки шара $m_0 = 350$ кг, масса корзины, в которую залезает человек, $m_к = 200$ кг. Температура окружающего воздуха 17 °С, температура, до которой нагревается воздух внутри шара, 37 °С. Человека какой массы m может поднять данный воздушный шар?

Решение.

Так как в шаре есть отверстие, то давление воздуха внутри шара равно давлению окружающего шар воздуха (атмосферному давлению).

Условие равновесия шара (шар удерживает груз в воздухе) — сумма всех сил, действующих на шар, равна нулю.

Решение похоже на решение задачи 1.

Запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F}_А + m\vec{g} + m_к\vec{g} + m_0\vec{g} + m_2\vec{g} = 0,$$

где $\vec{F}_A$ — сила Архимеда, действующая на шар, m — масса человека, которую нам нужно найти, m_0 — масса оболочки, m_2 — масса воздуха внутри шара.

$$F_А = \rho_1 gV = m_1 g,$$

где ρ_1 — плотность окружающего воздуха, V — объем шара, m_1 — масса холодного (окружающего шар) воздуха в объеме шара.

Так как оболочка шара тонкая, то объем воздуха внутри шара можно считать равным объему шара.

Второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось, направленную вверх:

$$m_1 g - mg - m_к g - m_0 g - m_2 g = 0.$$

Выразим массу человека:

$$m = m_1 - m_2 - m_0 - m_к. \quad (1)$$

Найдем массу воздуха в объеме шара снаружи и внутри.

Уравнение Менделеева–Клапейрона для воздуха внутри шара и окружающего воздуха в объеме шара:

$$pV = \frac{m_2}{M} RT_2, \quad (2)$$

$$pV = \frac{m_1}{M} RT_1, \quad (3)$$

где M — молярная масса воздуха, T_1 — температура окружающего шар воздуха, T_2 — температура внутри шара, p — атмосферное давление.

Из уравнений (1) и (2) получим

$$m_1 = \frac{MpV}{RT_1}, \quad m_2 = \frac{MpV}{RT_2}.$$

Подставив полученные значения m_1 и m_2 в уравнение (1), получим

$$m = \frac{MpV}{RT_1} - \frac{MpV}{RT_2} - m_0 - m_к = \frac{MpV}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) - m_0 - m_к \approx 95 \text{ кг}.$$

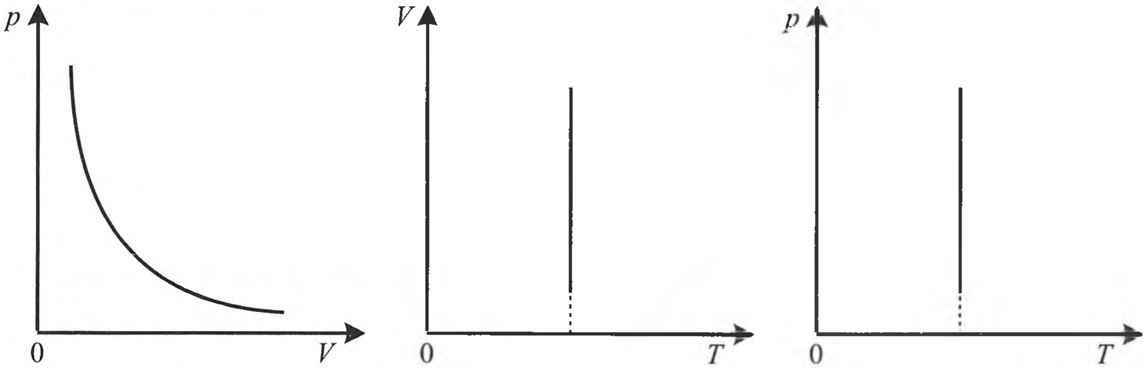
Ответ: $m = \dfrac{MpV}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right) - m_0 - m_к \approx 95$ кг.

§ 2. Изопроцессы

Процесс для постоянной массы газа, проходящий при постоянном значении одного из термодинамических параметров, называется **изопроцессом**.

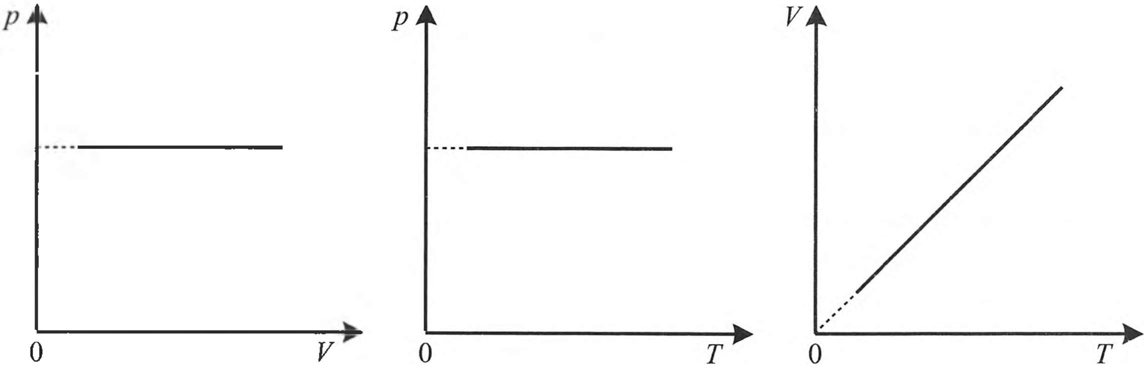
1. **Изотермический процесс:**

при $T = \text{const}$, $pV = \text{const}$ (закон Бойля–Мариотта)



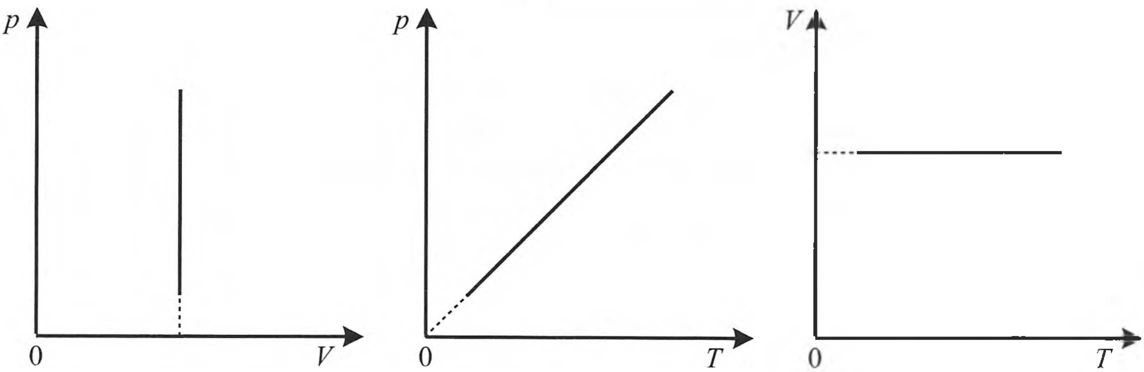
2. **Изобарный процесс:**

при $p = \text{const}$, $\dfrac{V}{T} = \text{const}$ (закон Гей-Люссака)



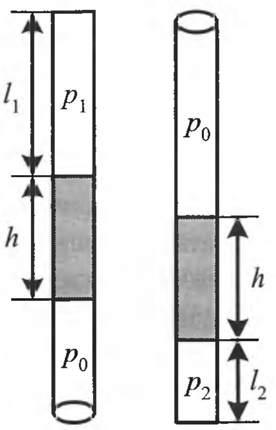
3. **Изохорный процесс:**

при $V = \text{const}$, $\dfrac{p}{T} = \text{const}$ (закон Шарля)



Задача 1

В трубке, закрытой с одного конца, столбик воздуха заперт столбиком ртути высотой $h = 19$ см. Если трубку повернуть открытым концом вниз, длина столбика воздуха будет $l_1 = 20$ см, а если открытым концом вверх, то $l_2 = 12$ см. Найдите атмосферное давление. Ответ выразите в мм рт. ст.



Решение.

Масса и температура газа, запертого в трубке столбиком ртути, остаются неизменными, значит, для него выполняется закон Бойля–Мариотта:

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Разделив обе части уравнения на площадь сечения трубки S, получим

$$p_1l_1 = p_2l_2. \qquad (1)$$

Столбик ртути находится в равновесии, если сумма действующих на него сил равна нулю. На ртуть действуют три силы: сила тяжести ртути mg, сила давления со стороны атмосферного воздуха и сила давления со стороны запертого в трубке воздуха. Сила давления находится по формуле $F = pS$. Масса ртути находится по формуле $m = \rho_{рт}V = \rho_{рт}hS$.

Тогда по второму закону Ньютона для первого и второго случаев запишем:

$$p_1S + mg - p_0S = 0,$$
$$p_2S - mg - p_0S = 0.$$

С учетом значения для массы ртути:

$$p_1 + \rho_{рт}hg - p_0 = 0,$$
$$p_2 - \rho_{рт}hg - p_0 = 0.$$

Откуда

$$p_1 = p_0 - \rho_{рт}hg,$$
$$p_2 = p_0 + \rho_{рт}hg.$$

Подставив значения p_1 и p_2 в уравнение (1), получим

$$(p_0 - \rho_{рт}hg)\,l_1 = (p_0 + \rho_{рт}hg)\,l_2.$$

Упростив уравнение, получим

$$p_0 = \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}\rho_{рт}hg.$$

Мы нашли атмосферное давление в паскалях. Чтобы перевести в миллиметры ртутного столба, необходимо разделить его на $\rho_{рт}g$. Тогда в миллиметрах ртутного столба давление h_0 равно:

$$h_0 = \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}h = \frac{20+12}{20-12}19 = 76 \text{ см} = 760 \text{ мм}.$$

Ответ: $h_0 = \dfrac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}h = 760$ мм рт. ст.

§ 3. Смесь газов

При смешивании нескольких газов каждый из них занимает весь предоставленный объем независимо от наличия других газов. Давление каждого газа в отдельности называют *парциальным давлением*. Общее давление смеси p будет равно сумме давлений всех газов в данном объеме — **закон Дальтона**:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_i.$$

Задача 1

Горизонтально расположенный теплоизолированный сосуд разделен пористой перегородкой на две равные части. В начальный момент в правой части сосуда находится $\nu_1 = 10$ моль гелия, а в левой — $\nu_2 = 6$ моль ксенона при одинаковой температуре. Атомы гелия могут проникать через перегородку, а атомы ксенона — нет. Найдите отношение давлений газов по разные стороны перегородки после установления термодинамического равновесия.

Решение.

Сосуд теплоизолированный, газы имеют одинаковую начальную температуру, значит, после установления равновесия температура в сосуде не изменится.

Так как перегородка проницаема для гелия, то этот газ равномерно распределится по всему сосуду.

Следовательно, после установления равновесия в правой части сосуда окажется $\nu_3 = \dfrac{\nu_1}{2} = 5$ моль гелия, а в левой — смесь гелия и ксенона количеством вещества $\nu_4 = \nu_2 + \dfrac{\nu_1}{2} = 11$ моль.

Обозначив конечное давление в правой части p_3, в левой — p_4, объем сосуда — V, запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для правой и левой частей:

$$\frac{p_3 V}{2} = \nu_3 RT, \qquad (1)$$

$$\frac{p_4 V}{2} = \nu_4 RT. \qquad (2)$$

Разделив уравнение (2) на уравнение (1), найдем отношение давления газа в левой части к давлению газа в правой части сосуда:

$$\frac{p_4}{p_3} = \frac{\nu_4}{\nu_3} = \frac{\nu_2 + \dfrac{\nu_1}{2}}{\dfrac{\nu_1}{2}} = \frac{2\nu_2 + \nu_1}{\nu_1} = \frac{12+10}{10} = 2,2.$$

Ответ: 2,2.

Самостоятельная работа 6

1. В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный газ. Поршень может двигаться без трения. Груз какой массы нужно положить на поршень, чтобы он оставался в прежнем положении, если температуру газа увеличить в 3 раза? Площадь поршня 10 см^2. Атмосферное давление 10^5 Па.

2. В горизонтальной трубке постоянного сечения один конец запаян, а другой открыт. В трубке находится столбик ртути высотой 20 см, который отделяет воздух в трубке от атмосферного. Температура воздуха в трубке равна окружающей температуре воздуха 27 °C. Трубку переворачивают запаянным концом вниз. На сколько градусов нужно нагреть воздух, запертый в трубке столбиком ртути, чтобы его объем не изменился? Атмосферное давление равно 750 мм рт. ст.

3. Сколько качаний поршневого насоса необходимо сделать, чтобы накачать колесо велосипеда до давления 400 кПа? Объем колеса — 5 литров. За каждое качание насос захватывает из атмосферы 100 см^3 воздуха. Считать, что в начале воздуха в камере колеса не было.

4. В вертикальном теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем находится 2 г кислорода. Площадь поршня $S = 15$ см^2, масса поршня — 3 кг. Кислород нагревают на 10 К. На какую высоту при этом поднимется поршень?

Глава 3

Термодинамика

§ 1. Внутренняя энергия и количество теплоты

Окружающие нас тела состоят из мельчайших частиц: молекул и атомов.

Эти частицы находятся в постоянном беспорядочном движении. Скорость этого движения связана с температурой: чем больше скорость — тем выше температура, поэтому это движение называют *тепловым*.

Вы уже знаете о существовании двух видов механической энергии: кинетической и потенциальной. Знаете, что эта энергия может переходить из одного вида в другой. Например, если мы подкинем металлический шарик, сообщив ему некоторую скорость, то по мере подъема его кинетическая энергия переходит в потенциальную. При падении — наоборот: потенциальная энергия переходит в кинетическую. А куда девается энергия при ударе шарика о землю? При ударе шар деформируется и нагревается. При этом его механическая энергия переходит во внутреннюю энергию.

Внутренняя энергия может измениться при совершении над телом работы или в результате теплопередачи. Есть три способа теплопередачи: *конвекция*, *теплопроводность*, *излучение*.

Конвекция — перенос энергии струями жидкости или газа (так, например, горячий воздух поднимается вверх, а холодный опускается вниз).

Теплопроводность — передача внутренней энергии между частями одного тела или между телами при их непосредственном контакте.

Излучение — перенос тепла в виде электромагнитных волн.

Энергию, которую получает или отдает тело в процессе теплопередачи, называют **количеством теплоты** (Q). Измеряется количество теплоты в джоулях (Дж).

§ 2. Теплообмен. Изменение агрегатного состояния вещества. Сгорание топлива

Нагревание и охлаждение

Количество теплоты, необходимое для нагревания одного килограмма вещества на один градус, называется **удельной теплоемкостью** (c). Измеряется удельная теплоемкость в Дж/кг°С.

Разные вещества обладают разной удельной теплоемкостью.

Количество теплоты, необходимое для нагревания конкретного тела на 1 °С, называется **теплоемкостью тела** (C). Измеряется в Дж/°С.

Количество теплоты, необходимое для нагревания или выделяемое при охлаждении, находится по формуле

$$Q = cm(t_2 - t_1),$$

где m — масса тела, t_1 — начальная температура, t_2 — конечная температура.

Если конечная температура меньше начальной, то количество теплоты получится отрицательным — это будет означать, что тело остывает и теплота выделяется.

Плавление и отвердевание

Плавление — переход вещества из твердого состояния в жидкое.

Отвердевание — переход вещества из жидкого состояния в твердое.

Температура плавления (отвердевания) — температура, при которой происходит процесс плавления (отвердевания).

Удельная теплота плавления λ — количество теплоты, которое необходимо сообщить твердому телу массой 1 кг, чтобы при температуре плавления полностью перевести его в жидкое состояние. Такое же количество теплоты выделится в процессе полного отвердевания тела. Измеряется теплота плавления в Дж/кг.

Количество теплоты, поглощаемое в процессе плавления (выделяемое в процессе отвердевания):

$$Q = \lambda m.$$

При температуре плавления внутренняя энергия некоторой массы вещества в жидком состоянии больше, чем в твердом.

Парообразование и конденсация

Парообразование — превращение жидкости в пар. Есть два вида парообразования: испарение и кипение.

Испарение — процесс перехода из жидкого состояния в газообразное, происходящий на поверхности вещества.

Кипение — процесс перехода из жидкого состояния в газообразное, который происходит по всему объему вещества.

Температура кипения — температура, при которой происходит процесс кипения.

Конденсация — процесс перехода из газообразного состояния в жидкое.

Удельная теплота парообразования L — количество теплоты, которое необходимо сообщить жидкости массой 1 кг, чтобы при постоянной температуре полностью перевести ее в газообразное состояние. Такое же количество теплоты выделится в процессе конденсации. Измеряется в Дж/кг.

Количество теплоты, поглощаемое в процессе парообразования (выделяемое в процессе конденсации):

$$Q = Lm.$$

Сгорание топлива

Удельная теплота сгорания q — количество теплоты, выделяющееся при полном сгорании 1 кг топлива. Измеряется в Дж/кг.

$$Q = qm.$$

§ 3. Уравнение теплового баланса

Суммарное количество теплоты, которое выделяется в теплоизолированной системе, равно по модулю суммарному количеству теплоты, которое в этой системе поглощается:

$$|Q_{в1}| + |Q_{в2}| + ... + |Q_{вn}| = |Q_{п1}| + |Q_{п2}| + ... + |Q_{пk}|.$$

Задача 1

В калориметр налито $m_1 = 2$ кг воды, имеющей температуру $t_1 = 5$ °С, и положен кусок льда массой $m_2 = 5$ кг, имеющий температуру $t_2 = -40$ °С. Определите температуру и объем содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь.

Решение.

Записать сразу уравнение теплового баланса не получится, так как мы не знаем конечное агрегатное состояние веществ в сосуде и конечную температуру.

Оценим количество теплоты, которое может выделиться при остывании воды до $t_0 = 0$ °С (температура замерзания воды):

$$Q_{в0} = |c_в m_1(t_0 - t_1)| = 42 \text{ кДж}.$$

И количество теплоты, необходимое для нагревания льда до $t_0 = 0$ °С:

$$Q_{л0} = c_л m_2(t_0 - t_2) = 420 \text{ кДж}.$$

Количества теплоты, которое выделится при остывании воды до 0 °С, не хватит, чтобы нагреть лед до этой же температуры. Значит, вода начнет превращаться в лед. Оценим количество теплоты $Q_к$, которое может выделиться при превращении воды в лед:

$$Q_к = \lambda m_1 = 660 \text{ кДж}.$$

Так как $Q_к + Q_{в0} > Q_{л0}$, то вся вода не превратится в лед, значит, в состоянии равновесия будут и лед и вода при 0 °С. Найдем массу воды $m_к$, которая превратится в лед:

$$c_л m_2(t_0 - t_2) = |c_в m_1(t_0 - t_1)| + \lambda m_к,$$

откуда

$$m_к = \frac{c_л m_2 (t_0 - t_2) - |c_в m_1 (t_0 - t_1)|}{\lambda} = \frac{c_л m_2 (t_0 - t_2) + c_в m_1 (t_0 - t_1)}{\lambda} \approx 1{,}145 \text{ кг}.$$

Тогда конечный объем содержимого в сосуде будет равен сумме объемов льда и воды:

$$V = V_л + V_в = \frac{m_л}{\rho_л} + \frac{m_в}{\rho_в} = \frac{m_2 + m_к}{\rho_л} + \frac{m_1 - m_к}{\rho_в} \approx 7{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Ответ: $t_0 = 0$ °С, $V \approx 7{,}7 \cdot 10^{-3}$ м^3.

§ 4. Внутренняя энергия газа

Макроскопические тела обладают внутренней энергией, которая равна сумме кинетических энергий беспорядочного движения и потенциальных энергий взаимодействия друг с другом всех молекул тела. В идеальном газе потенциальная энергия взаимодействия молекул считается равной нулю. Поэтому внутренняя энергия идеального газа состоит только из кинетической энергии движения молекул и зависит только от температуры газа.

В случае идеального одноатомного газа внутренняя энергия равна:

$$U = \frac{3m}{2M}RT = \frac{3}{2}\nu RT.$$

Для двухатомного газа:

$$U_2 = \frac{5}{2}\nu RT.$$

Для многоатомного газа (три и более атома, расположенных не на одной прямой):

$$U_3 = 3\nu RT.$$

Внутренняя энергия газа может изменяться при совершении над газом работы A или теплообмене (получением или отдачей газом некоторого количества теплоты Q).

Задача 1

Два теплоизолированных сосуда одинакового объема соединены тонкой трубкой с краном. В одном сосуде находится гелий при температуре 200 К, а в другом — гелий при температуре 400 К и при давлении в 3 раза большем, чем в первом сосуде. Какой станет температура газа после открывания крана и установления теплового равновесия?

Решение.

Так как сосуды соединены тонкой трубкой, то объемом трубки можно пренебречь. Поскольку сосуды теплоизолированные, то наша система из двух газов не получает и не отдает тепло. Значит, суммарная внутренняя энергия системы сохраняется.

Обозначим количества вещества, а также начальные давления, объемы и температуры газов ν_1, p_1, V_1, T_1 и ν_2, p_2, V_2, T_2 соответственно, а параметры конечного состояния газа обозначим ν_3, p_3, V_3, T_3.

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{3}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{3}{2}\nu_2 RT_2 = \frac{3}{2}\nu_3 RT_3 \text{ или } p_1V_1 + p_2V_2 = p_3\left(V_1 + V_2\right).$$

Учитывая, что $V_1 = V_2 = V$, $p_2 = 3p_1$, получим $p_3 = 2p_1$.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$\nu_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1},\ \nu_2 = \frac{p_2V_2}{RT_2},\ \nu_3 = \frac{p_3V_3}{RT_3}.$$

Так как $\nu_1 + \nu_2 = \nu_3$, то

$$\frac{p_1V_1}{RT_1} + \frac{p_2V_2}{RT_2} = \frac{p_3V_3}{RT_3},$$

$$\frac{p_1V}{RT_1} + \frac{3p_1V}{RT_2} = \frac{2p_1 2V}{RT_3},$$

$$\frac{1}{T_1} + \frac{3}{T_2} = \frac{4}{T_3},$$

откуда

$$T_3 = \frac{4T_1T_2}{T_2 + 3T_1} = 320 \text{ К}.$$

Ответ: $T_3 = \dfrac{4T_1T_2}{T_2 + 3T_1} = 320$ К.

Задача 2

Теплоизолированный сосуд разделен тонкой теплоизолирующей перегородкой на две части, отношение объемов которых $\frac{V_2}{V_1} = 3$. Части сосуда заполнены одним и тем же одноатомным идеальным газом. Давление в первой из них равно p_0, во второй — $2p_0$. Каким станет давление в сосуде, если перегородку убрать?

Решение.

1) Обозначим количество вещества в первой и во второй частях сосуда ν_1 и ν_2, температуры газа в первой и во второй частях T_1 и T_2.

2) Согласно закону Менделеева–Клапейрона

$$p_1V_1 = \nu_1RT_1, \tag{1}$$
$$p_2V_2 = \nu_2RT_2 \tag{2}$$

где $p_1 = p_0$, $p_2 = 2p_0$.

3) После удаления перегородки и установления теплового равновесия в сосуде будет тот же идеальный одноатомный газ температурой T и количеством вещества $\nu = \nu_1 + \nu_2$.

Так как сосуд теплоизолированный, то газ не обменивается теплом с внешней средой и, значит, внутренняя энергия газа в сосуде остается неизменной, т. е.:

$$\frac{3}{2}\nu_1RT_1 + \frac{3}{2}\nu_2RT_2 = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2)RT.$$

Выразим из уравнения (3) конечную температуру газа в сосуде:

$$T = \frac{\nu_1T_1 + \nu_2T_2}{\nu_1 + \nu_2}. \tag{3}$$

4) Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газа в конечном состоянии:

$$p(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2)RT.$$

С учетом уравнения (3) получим

$$p(V_1 + V_2) = (\nu_1T_1 + \nu_2T_2)R.$$

С учетом уравнений (1) и (2) имеем

$$p(V_1 + V_2) = p_1V_1 + p_2V_2.$$

Выразим искомое давление:

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

5) Так как $V_2 = 3V_1$, $p_1 = p_0$, $p_2 = 2p_0$, то:

$$p = \frac{p_0V_1 + 2p_0 3V_1}{V_1 + 3V_1} = \frac{7p_0V_1}{4V_1} = \frac{7p_0}{4} = 1,75p_0.$$

Ответ: $p = 1,75p_0$.

§ 5. Законы термодинамики

Первый закон термодинамики:

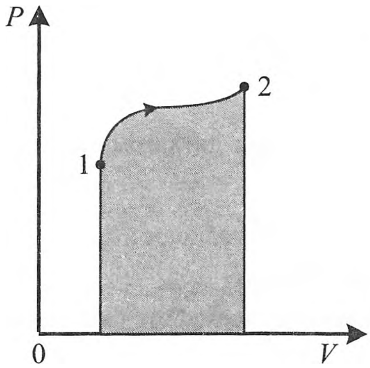
$$\Delta U = A + Q \text{ или } Q = \Delta U + A' = \Delta U - A,$$

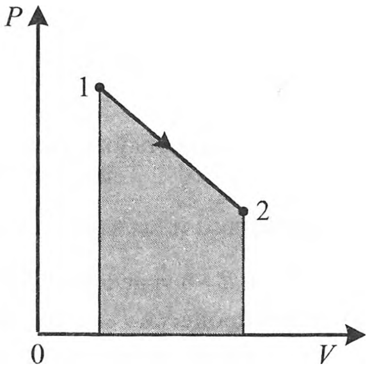
где A — работа, совершаемая над газом (системой) окружающими телами, A' — работа, совершаемая газом (системой) над окружающими телами.

Работа, совершаемая над системой при постоянном давлении (при изобарном процессе), в термодинамике равна: $A = -p\Delta V$, где p — давление, а ΔV — изменение объема. Сама система (газ) при этом совершает работу $A' = -A = p\Delta V$.

При увеличении объема газа последний совершает работу (работа газа положительна).

Также работу газа можно найти по графику процесса в координатах P–V как площадь фигуры под графиком.





Из программы восьмого класса вам уже известна формула для количества теплоты при нагревании и охлаждении:

$$Q = cm\Delta T,$$

где c — удельная теплоемкость вещества, а ΔT — изменение температуры.

Работа и количество теплоты — характеристики, при которых меняется внутренняя энергия системы.

Теплоемкостью тела C называется отношение количества теплоты ΔQ к изменению температуры тела ΔT:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

$\Delta Q > 0$, если тело получает тепло от нагревателя, и $\Delta Q < 0$, если тело отдает тепло холодильнику.

Удельная теплоемкость — теплоемкость одного килограмма вещества:

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}.$$

Молярная теплоемкость — теплоемкость одного моля газа:

$$c_M = \frac{\Delta Q}{\nu\Delta T}.$$

Для одного и того же газа теплоемкость может быть разной в зависимости от процесса.

При **изохорном** процессе работа газа равна нулю, и поэтому из первого закона термодинамики следует

$$Q = \nu C_V \Delta T = \Delta U,$$

откуда

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T,$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Тогда для одноатомного идеального газа $C_V = \frac{3}{2}R$, для двухатомного идеального газа — $C_V = \frac{5}{2}R$ и для многоатомного идеального газа — $C_V = 3R$.

При **изобарном** процессе работа газа может быть найдена по формуле

$$A' = p\Delta V = \nu R \Delta T,$$

значит,

$$Q = \nu C_p \Delta T = \Delta U + A' = \Delta U + \nu R \Delta T.$$

Тогда для одноатомного идеального газа $C_P = \frac{5}{2}R$, для двухатомного идеального газа — $C_P = \frac{7}{2}R$ и для многоатомного идеального газа — $C_p = 4R$.

Заметим, что $C_p = C_V + R$ — уравнение Роберта Майера.

При **изотермическом** процессе $T = \mathrm{const}$, поэтому теплоемкость газа равна нулю, внутренняя энергия идеального газа не меняется и $Q = A'$.

При **адиабатическом (адиабатном)** процессе (в теплоизолированной системе) $Q = 0$, $\Delta U = A$. И значит, теплоемкость газа в этом процессе равна нулю.

Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона):

$$pV^\gamma = \mathrm{const},$$

где $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ — показатель адиабаты.

При обмене теплом в изолированной системе без совершения работы выполняется уравнение теплового баланса:

$$|Q_{\text{в}1}| + |Q_{\text{в}2}| + \ldots + |Q_{\text{в}n}| = |Q_{\text{п}1}| + |Q_{\text{п}2}| + \ldots + |Q_{\text{п}k}|.$$

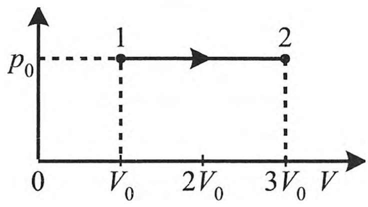
Второй закон термодинамики

Процессы, протекающие в природе, необратимы. Связано это с наличием трения и теплопередачей. Типичные необратимые процессы таковы: тепло самопроизвольно переходит от горячего тела к холодному, но не наоборот; механическая энергия самопроизвольно переходит во внутреннюю.

Невозможен процесс, единственным результатом которого была бы передача теплоты от холодного тела к горячему.

Задача 1

На рисунке показан процесс изменения состояния 2 моль идеального одноатомного газа. Начальная температура газа 127 °С. Какое количество теплоты сообщили газу в этом процессе?



Решение.

1) Обозначим температуру газа в состояниях 1 и 2 соответственно T_1 и T_2.

Запишем закон Менделеева–Клапейрона для газа в состояниях 1 и 2:

$$p_0V_1 = \nu RT_1, \quad (1)$$
$$p_0V_2 = \nu RT_2. \quad (2)$$

Разделив уравнение (2) на уравнение (1), найдем отношение температур:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 3, \text{ или } T_2 = 3T_1.$$

2) Запишем первый закон термодинамики для перехода газа из состояния 1 в состояние 2:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12},$$

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu RT_2 - \frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{3}{2}\nu R3T_1 - \frac{3}{2}\nu RT_1 = 3\nu RT_1.$$

Так как 1–2 изобарный процесс, то

$$A_{12} = p_0(V_2 - V_1) = \nu RT_2 - \nu RT_1 = 2\nu RT_1,$$
$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 5\nu RT_1 = 33\,240 \text{ Дж}.$$

Ответ: 33 240 Дж.

Самостоятельная работа 7

1. В смесь, состоящую из 5 кг воды и 3 кг льда, впустили 0,2 кг водяного пара при температуре 100 °С. Определите температуру и состав смеси спустя длительное время.

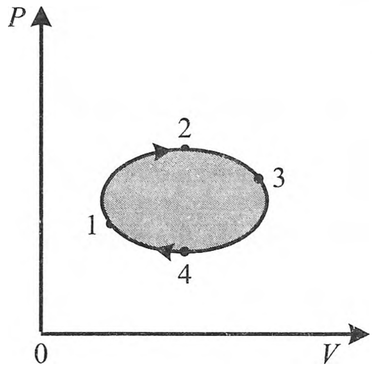
2. В сосуде с небольшой трещиной находится идеальный газ. Газ медленно просачивается через трещину. Сосуд нагревают и уменьшают его объем в 2 раза. При этом давление в сосуде увеличилось в 3 раза, а температура газа — в 6 раз. Как изменилась внутренняя энергия газа в сосуде?

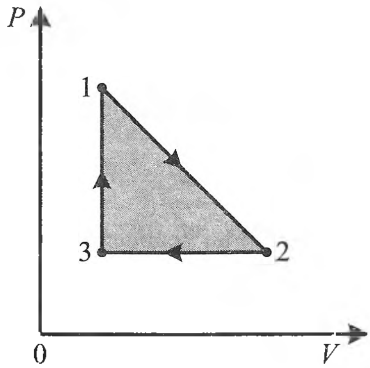
3. В вертикальном цилиндрическом сосуде под подвижным поршнем находится воздух массой 100 кг при температуре 300 К. Начальная высота поршня 1 м от дна цилиндра. Найдите работу, которую совершит газ при нагревании цилиндра на 100 К. Площадь поршня 20 см^2. Трения в системе нет. Атмосферное давление 10^5 Па.

4. Идеальный газ расширяется так, что отношение его давления к его объему остается неизменным. Начальный объем газа 2 л, конечный объем 4 л, начальное давление газа 10^5 Па. Найдите работу, совершенную газом в данном процессе.

§ 6. Циклы. Тепловые машины. КПД

Цикл (круговой процесс) — термодинамический процесс, в результате которого тело, пройдя несколько состояний, возвращается в исходное. При изображении на графике мы получим замкнутую кривую.





Прямой цикл — цикл, в котором газ (рабочее тело) совершает положительную работу.

Обратный цикл — цикл, в котором газ (рабочее тело) совершает отрицательную работу.

Можно найти работу газа за цикл по графику как площадь фигуры (ограниченной замкнутой кривой).

Работа газа за цикл равна алгебраической сумме всех количеств теплоты, полученной телом за цикл.

$$A = Q_н + Q_х.$$

Из законов термодинамики следует, что тепловые двигатели могут совершать работу только в результате передачи тепла от нагревателя к холодильнику.

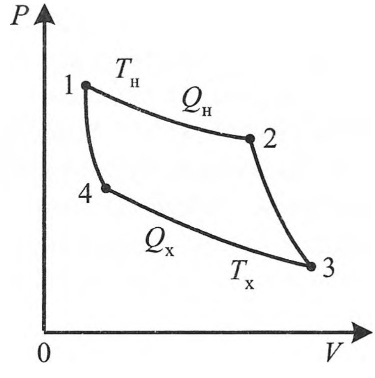
Коэффициент полезного действия (КПД) прямого цикла (КПД тепловой машины):

$$\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} \cdot 100\% = \frac{A}{Q_н} \cdot 100\%,$$

где $Q_н$ — количество теплоты, полученное от нагревателя за весь цикл, $Q_х$ — количество теплоты, отданное холодильнику за весь цикл, A — работа газа за цикл.

КПД всегда меньше единицы.

Максимальный КПД независимо от рабочего тела достигается в цикле Карно, состоящем из двух изотерм (1–2 и 3–4) и двух адиабат (2–3 и 4–1).



Максимально возможное значение коэффициента полезного действия теплового двигателя равно:

$$\eta_{max} = \frac{T_н - T_х}{T_н} \cdot 100\%,$$

где $T_н$ — температура нагревателя, $T_х$ — температура холодильника.

Тепловой двигатель, работающий по циклу Карно, называют *идеальной тепловой машиной*.

Холодильная машина (холодильник)

Холодильник — это тепловая машина, работающая по обратному циклу.

Обычная тепловая машина (работающая по прямому циклу) получает тепло $Q_н$ при высокой температуре $T_н$ и отдает меньшее количество теплоты $Q_х$ при низкой температуре $T_х$, совершая при этом работу $A = Q_н - Q_х$.

Холодильник же поглощает тепло Q_1 у холодного тела при температуре T_1 и отдает тепло Q_2 нагретому телу (или окружающему воздуху) при более высокой температуре T_2, и при этом холодильник потребляет некоторое количество энергии $W = Q_2 - Q_1$.

Эффективность работы холодильника (ее же можно считать и КПД) находят по формуле

$$\eta = \frac{Q_1}{W} \cdot 100\%.$$

Максимальный КПД холодильная машина имеет при работе по обратному циклу Карно:

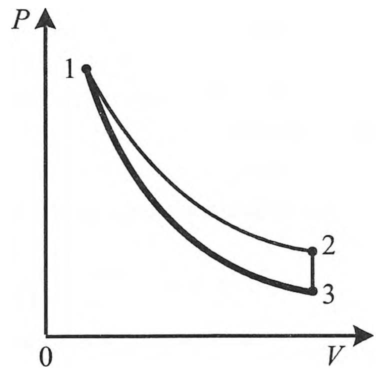
$$\eta_{max} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot 100\%.$$

Задача 1

1 моль идеального одноатомного газа совершает замкнутый цикл. Цикл состоит из изотермического расширения, изохорного охлаждения и адиабатического сжатия. В изотермическом процессе работа, совершенная газом, равна A, а в изохорном процессе температура газа понижается на ΔT. Найдите КПД цикла.

Решение.

Задачу можно решать и без рисунка, но с ним удобнее.



1) Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н},$$

где $Q_н$ — количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя; $|Q_х|$ — количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику.

2) По первому закону термодинамики

$$Q = \Delta U + A'.$$

В изотермическом процессе (процесс 1–2) внутренняя энергия идеального газа не изменяется, а объем газа растет, следовательно, работа газа положительна и по условию равна A.

Значит, в процессе 1–2 газ получает тепло

$$Q_{1-2} = A.$$

В изохорном процессе (2–3) газ не совершает работу, а его температура уменьшается, значит, в этом процессе газ отдает тепло:

$$Q_{2-3} = \frac{3}{2} \nu R \, \Delta T_{2-3}.$$

В адиабатном процессе (3–1) газ не получает и не отдает тепло.

Получается для нашего цикла

$$Q_н = Q_{1-2} = A,$$

$$|Q_х| = |Q_{2-3}| = \frac{3}{2}\nu R|\Delta T_{2-3}|.$$

По условию

$$\Delta T_{2-3} = \Delta T,$$

тогда

$$|Q_х| = \frac{3}{2}\nu R|\Delta T|.$$

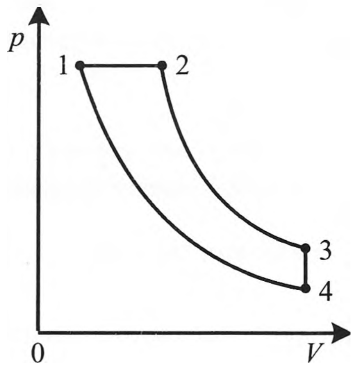
Подставив полученные значения в формулу для КПД цикла, получим

$$\eta = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н} = \frac{A - \frac{3}{2}\nu R|\Delta T|}{A} = 1 - \frac{3\nu R|\Delta T|}{2A}.$$

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{3\nu R\ \Delta T}{2A}$.

Задача 2

Тепловая машина использует в качестве рабочего вещества 1 моль идеального одноатомного газа. Цикл работы газа изображен на рисунке в pV-координатах и состоит из изохоры, изобары и двух адиабат.



Найдите КПД этого цикла, если минимальная и максимальная температура газа при изохорном процессе t_4 = 27 °С и t_3 = 327 °С и газ получает за цикл количество теплоты $Q_н$ = 4 кДж.

Решение.

Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н} \cdot 100\%,$$

где $Q_н$ — количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя; $|Q_х|$ — количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику.

Газ получает тепло от нагревателя на участке 1–2 при изобарном расширении и отдает тепло холодильнику на участке 3–4 при изохорном охлаждении.

На участках 2–3 и 4–1 газ не получает и не отдает тепло.

Значит,

$$Q_н = Q_{12},$$
$$Q_х = Q_{34}.$$

По первому закону термодинамики для процесса 3–4

$$Q_{34} = \Delta U_{34} + A'_{34}.$$

Так как процесс 3–4 изохорный, то

$$A'_{34} = 0.$$

Тогда

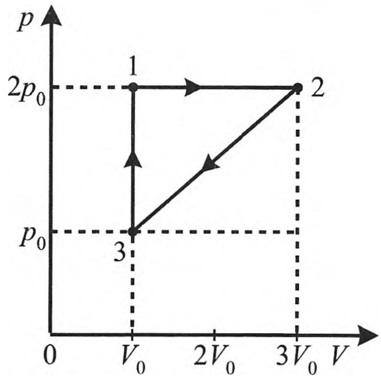
$$Q_{34} = \Delta U_{34} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_4 - T_3\right),$$

$$\eta = \frac{Q_н - \frac{3}{2}\nu R\left(T_4 - T_3\right)}{Q_н}\cdot 100\% = \frac{4000 - \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 8{,}31\left((27+273)-(327+273)\right)}{4000}\cdot 100\% \approx 6{,}25\%.$$

Ответ: $\eta \approx 6{,}25\%$.

Задача 3

Тепловой двигатель работает по циклу, изображенному на рисунке. При переходе из состояния 1 в состояние 2 газ совершает работу $A_{12} = 10$ кДж. Найдите КПД цикла.



Решение.

1) Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{Q_н - |Q_х|}{Q_н}\cdot 100\% = \frac{A_ц}{Q_н}\cdot 100\%,$$

где $Q_н$ — количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя; $|Q_х|$ — количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику; $A_ц$ — работа газа за цикл.

По первому закону термодинамики:

$$Q = \Delta U + A'.$$

Рассмотрим процессы 1–2, 2–3 и 3–1.

В процессе 1–2 давление газа постоянно, газ расширяется, значит, температура растет, поэтому работа газа положительна и внутренняя энергия увеличивается, а следовательно, на участке 1–2 газ получает тепло.

В процессе 2–3 газ отдает тепло (температура уменьшается, значит, внутренняя энергия уменьшается, объем уменьшается — работа газа отрицательна).

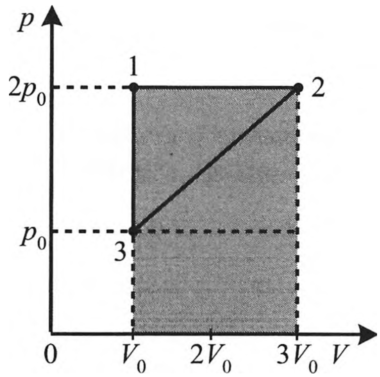
В процессе 3–1 работа газа равна нулю, температура растет, значит, газ получает тепло.

Тогда

$$Q_н = Q_{12} + Q_{31},$$

$$Q_х = Q_{23}.$$

2) Работа может быть найдена как площадь фигуры под графиком, поэтому работа A_{12} в процессе 1–2 равна площади прямоугольника:



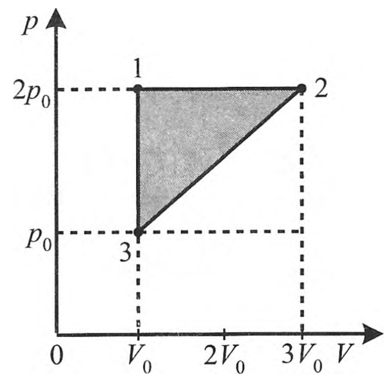
$$A_{12} = 2p_0 2V_0 = 4p_0V_0,$$

откуда

$$p_0V_0 = \frac{A_{12}}{4}.$$

Работа газа за цикл $A_ц$ равна площади треугольника:

$$A_ц = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(3V_0 - V_0) = p_0V_0 = \frac{A_{12}}{4}.$$



3) Количество теплоты, полученное газом на участке 3–1, равно:

$$Q_{31} = U_1 - U_3 = \frac{3}{2}\nu RT_1 - \frac{3}{2}\nu RT_3.$$

По закону Менделеева–Клапейрона

$$PV = \nu RT.$$

Значит,

$$\nu RT_1 = P_1V_1 = 2p_0V_0,$$
$$\nu RT_3 = P_3V_3 = p_0V_0.$$

Следовательно,

$$Q_{31} = \frac{3}{2}(2p_0V_0 - p_0V) = \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3A_{12}}{8}.$$

4) Количество теплоты, полученное газом на участке 1–2, равно:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12},$$

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu RT_2 - \frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}(6p_0V_0 - 2p_0V_0) = \frac{3}{2}\cdot 4p_0V_0 = \frac{3}{2}A_{12}.$$

Значит,

$$Q_{12} = \frac{5}{2}A_{12}.$$

5) Теперь мы можем найти количество теплоты $Q_н$, полученное за цикл от нагревателя:

$$Q_н = Q_{12} + Q_{31} = \frac{5}{2}A_{12} + \frac{3}{8}A_{12} = \frac{23}{8}A_{12}.$$

6) Тогда КПД равен:

$$\eta = \frac{A_ц}{Q_н}\cdot 100\% = \frac{\frac{A_{12}}{4}}{\frac{23}{8}A_{12}}\cdot 100\% = \frac{2}{23}\cdot 100\% \approx 8,7\%.$$

Ответ: $\eta \approx 8,7\%$.

Глава 4
Влажность. Насыщенный пар

Между жидкостью и паром, находящимся над ней, может существовать динамическое равновесие, при котором число молекул, покидающих жидкость за некоторое время, равно числу молекул, возвращающихся из пара в жидкость за то же время (скорость испарения равна скорости конденсации).

Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называется *насыщенным*. Давление насыщенного пара не зависит от объема и определяется только температурой.

Жидкость кипит при температуре, при которой давление насыщенного пара в пузырьках становится равным давлению в жидкости. Чем больше внешнее давление, тем выше температура кипения.

Атмосферный воздух представляет собой смесь различных газов и водяного пара.

Воздух, содержащий водяной пар, называют *влажным*. Давление влажного воздуха складывается из парциальных давлений сухого воздуха и водяного пара:

$$p_{вв} = p_{св} + p_{п}.$$

Абсолютная влажность (ρ) — количество водяного пара (в граммах) в 1 м^3 воздуха (плотность водяного пара).

Относительная влажность (φ) воздуха — выраженное в процентах отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению насыщенного водяного пара при той же температуре или отношение абсолютной влажности воздуха ρ к плотности насыщенного водяного пара $\rho_{н}$ при той же температуре:

$$\varphi = \frac{p}{p_{н}} \cdot 100\% = \frac{\rho}{\rho_{н}} \cdot 100\%.$$

Точка росы — температура, при которой пар находится в равновесии со своей жидкостью (**насыщенный пар**).

Твердые тела

Твердые тела преимущественно находятся в кристаллическом состоянии. У аморфных тел, в отличие от кристаллов, нет строгого порядка в расположении атомов. При низких температурах аморфные тела по своим свойствам напоминают твердые тела, а при высоких подобны вязким жидкостям.

Задача 1

Паровой котел частично заполнен водой, а частично — смесью воздуха и насыщенного пара при температуре 100 °С. Начальное давление в котле $p_1 = 3p_0 = 300$ кПа. Найдите давление p_2 в котле после понижения температуры до 10 °С.

Решение.

Давление насыщенного водяного пара $p_{н1}$ при температуре 100 °С равно 100 кПа, тогда давление сухого воздуха $p_{в1}$ при $T_1 = 100$ °С равно $p_1 - p_{н1}$.

При понижении температуры пар остается насыщенным, но часть его конденсируется в воду. Давление пара при $T_2 = 10$ °С — это табличная величина $p_{н2} = 1{,}23$ кПа.

Так как объем котла постоянен (объемам воды из сконденсированного водяного пара можно пренебречь), то запишем закон Шарля для сухого воздуха и найдем объем воздуха после изменения температуры $p_{в2}$:

$$\frac{p_{в1}}{T_1} = \frac{p_{в2}}{T_2},$$

откуда получим

$$p_{в2} = \frac{T_2}{T_1} p_{в1} = \frac{T_2}{T_1}(p_1 - p_{н1}).$$

Тогда, по закону Дальтона, давление в котле равно сумме давлений воздуха и насыщенного пара:

$$p_2 = p_{в2} + p_{н2} = \frac{T_2}{T_1}(p_1 - p_{н1}) + p_{н2} \approx 153 \text{ кПа}.$$

Ответ: $p_2 = \frac{T_2}{T_1}(p_1 - p_{н1}) + p_{н2} \approx 153$ кПа.

Задача 2

Сосуды объемами 10 и 40 л содержат влажный воздух при комнатной температуре. Относительная влажность воздуха в сосудах равна соответственно 20 и 60%. Какая влажность установится в сосудах, если их соединить тонкой трубкой, после установления равновесия? Температуру считать постоянной.

Решение.

1) Относительная влажность в сосудах до соединения трубкой:

$$\varphi_1 = \frac{p_1}{p_н}, \tag{1}$$

$$\varphi_2 = \frac{p_2}{p_н}, \tag{2}$$

где p_1 и p_2 — давления влажного воздуха в первом и во втором сосудах, $p_н$ — давление насыщенного пара при комнатной температуре.

После соединения сосудов трубкой

$$\varphi = \frac{p}{p_н}, \tag{3}$$

где p — давление в сосудах.

2) Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для содержимого сосудов, считая влажный воздух идеальным газом:

$$p_1V_1 = \nu_1RT,$$
$$p_2V_2 = \nu_2RT.$$

После соединения сосудов трубкой

$$p(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2)RT.$$

С учетом уравнений (1) — (3) получим

$$\varphi_1 p_н V_1 = \nu_1 RT, \qquad (4)$$

$$\varphi_2 p_н V_2 = \nu_2 RT, \qquad (5)$$

$$\varphi p_н (V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2)RT. \qquad (6)$$

Выразив из уравнений (4) и (5) ν_1 и ν_2 и подставив их значения в уравнение (6), получим ответ:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{20 \cdot 10 + 60 \cdot 40}{10 + 40} = 52\%.$$

Ответ: $\varphi = 52\%$.

Задача 3

В сосуде под поршнем находится воздух с относительной влажностью $\varphi = 50\%$. Объем воздуха изотермически уменьшили в 4 раза. Какая часть α исходного количества водяных паров сконденсировалась при сжатии?

Решение.

1) Относительная влажность

$$\varphi = \frac{p}{p_н} \cdot 100\%,$$

где p — давление водяного пара, $p_н$ — давление насыщенного водяного пара.

При уменьшении объема в $\frac{p_н}{p} = 2$ раза пар станет насыщенным.

После того как пар стал насыщенным, его давление при данной температуре будет оставаться постоянным, и при дальнейшем уменьшении объема (еще в 2 раза) пар будет конденсироваться.

2) Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний водяного пара:

$$pV = p_н \varphi V = \frac{m_0}{M} RT,$$

$$p_н \frac{V}{4} = \frac{m_2}{M} RT,$$

где m_0 — начальная масса водяного пара, m_2 — масса водяного пара после уменьшения объема в 4 раза.

Тогда

$$m_0 = \frac{p_н \varphi VM}{RT}, \qquad (1)$$

$$m_2 = \frac{p_н VM}{4RT}. \qquad (2)$$

3) С учетом уравнений (1) и (2) получим искомое отношение:

$$\alpha = \frac{m_0 - m_2}{m_0} = \frac{\frac{p_н \varphi VM}{RT} - \frac{p_н VM}{4RT}}{\frac{p_н \varphi VM}{RT}} = \frac{4\varphi - 1}{4\varphi} = 0{,}5.$$

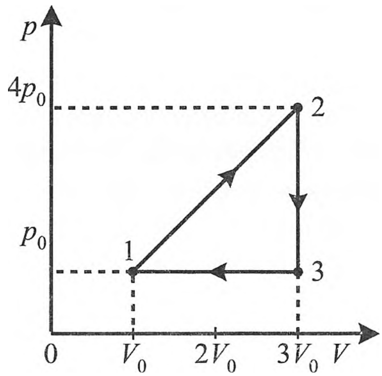
Ответ: $\alpha = 0{,}5$.

Контрольная работа 2

1. Груз какой массы может поднять воздушный шарик объемом 5 л, заполненный гелием? Считать, что оболочка шара не оказывает сопротивления изменению объема шара. Температура воздуха внутри и снаружи шара одинакова и равна 300 К. Масса оболочки 3 г. Атмосферное давление 10^5 Па.

2. Найти работу тепловой машины, работающей по циклу Карно, на участке изотермического расширения. КПД тепловой машины 70%, а количество теплоты, отдаваемое за цикл холодильнику, равно 6 Дж.

3. Тепловой двигатель использует в качестве рабочего вещества 1 моль идеального одноатомного газа. Цикл работы двигателя изображен на pV-диаграмме. Найдите КПД цикла и работу газа в процессе 1–2, если начальная температура газа равна 300 К.



4. В цилиндре под подвижным поршнем находится разреженный влажный воздух при температуре 323 К. Давление воздуха в цилиндре равно $2 \cdot 10^4$ Па. Относительная влажность воздуха 50%. Найдите установившееся давление в сосуде при уменьшении давления в 3 раза. Температура газа остается постоянной. Объемом воды, которая может появиться при конденсации водяного пара, пренебречь. Давление насыщенного водяного пара при температуре 323 К равно 12,3 кПа.

5. В теплоизолированный сосуд, который содержит 10 кг воды при 40 °С, ввели 1 кг пара при 100 °С. Определите конечную температуру содержимого сосуда. Теплоемкостью сосуда пренебречь.

Раздел 3
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 1
Электростатика

§ 1. Электрический заряд

В природе существует два вида электрических зарядов: положительные и отрицательные.

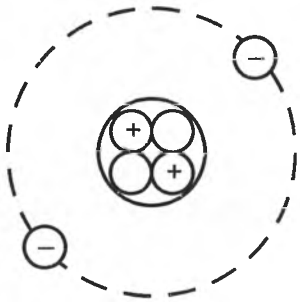
Все тела состоят из маленьких частичек — атомов.

Атом состоит из ядра и вращающихся вокруг него электронов. Ядро состоит из нейтронов и протонов.

Протоны и **нейтроны** имеют практически одинаковую массу. Масса электронов гораздо меньше.

Протоны имеют положительный заряд, электроны — отрицательный, по модулю заряды протонов и электронов равны. Нейтроны не имеют заряда.

На картинке показан атом гелия.



Атом нейтрален — у него одинаковое количество протонов и электронов. Если из атома убрать один из электронов, то атом станет положительно заряженным ионом, а если добавить один электрон — атом станет отрицательно заряженным ионом.

Отрицательно заряженные тела имеют избыток электронов, положительно заряженные тела — недостаток электронов.

При взаимодействии тел они могут обмениваться зарядами. Но всегда действует закон сохранения заряда: в замкнутой системе тел алгебраическая сумма зарядов не изменяется при любых взаимодействиях тел внутри системы.

Электрический заряд q — физическая величина, измеряется в кулонах (Кл).

Электрическая сила — сила, с которой электрическое поле действует на внесенный в него заряд.

Проводники — тела, через которые электрические заряды могут переходить от заряженного тела к незаряженному.

Диэлектрики (непроводники) — тела, через которые электрические заряды не могут переходить от заряженного тела к незаряженному.

Полупроводники — по способности проводить заряды находятся между проводниками и диэлектриками.

Минимальным зарядом считается заряд электрона (обозначается e). Любой заряд кратен заряду электрона.

§ 2. Закон Кулона. Напряженность электрического поля

Одноименные заряды взаимно отталкиваются, разноименные притягиваются.

Неподвижные точечные заряды q_1 и q_2, находящиеся на расстоянии r друг от друга, взаимодействуют в вакууме согласно закону Кулона с силой

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

где коэффициент $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9$ Н·м²/Кл², а $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ — электрическая постоянная.

В изолированной (замкнутой) системе заряженных тел заряд (общий заряд или алгебраическая сумма всех зарядов в системе) сохраняется:

$$q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n = \text{const}.$$

Заряженные тела создают вокруг себя **электрическое поле**, и это поле действует на другие заряженные тела. Вблизи заряженного тела поле действует сильнее.

Основной характеристикой электрического поля является напряженность.

Напряженность электрического поля $\vec{E}$ в точке — векторная физическая величина, равная отношению силы $\vec{F}$, действующей со стороны электрического поля на точечный пробный заряд q, внесенный в данную точку поля, к значению этого заряда.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Единицей напряженности в системе СИ является В/м.

Пробный точечный заряд также создает вокруг себя электрическое поле, но это поле никак не влияет на данное равенство, ибо собственное поле заряда не действует на сам заряд.

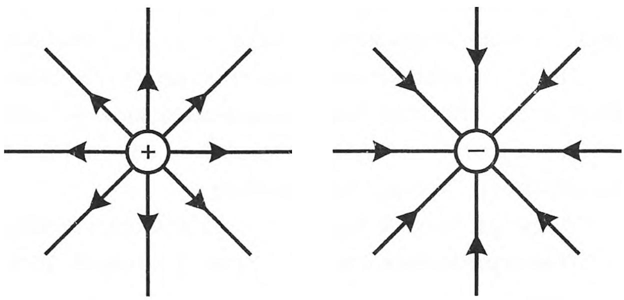
Напряженность поля $\vec{E}$ определяет силу, действующую на заряд: $\vec{F} = q\vec{E}$, поэтому напряженность называют силовой характеристикой поля.

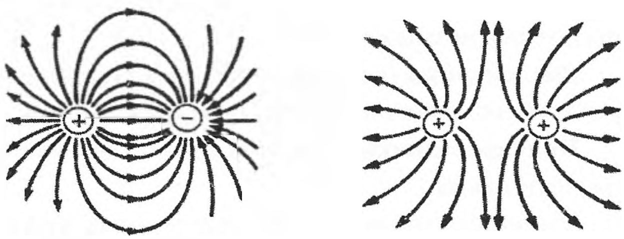
Напряженность поля, созданного точечным зярядом q на расстоянии r:

$$E = k\frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

Линии напряженности электрического поля — воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением напряженности электрического поля.

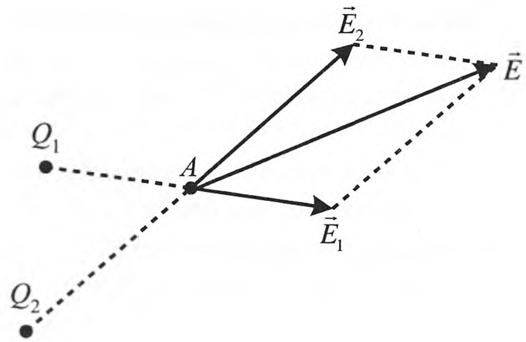
Линии напряженности являются непрерывными, начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.





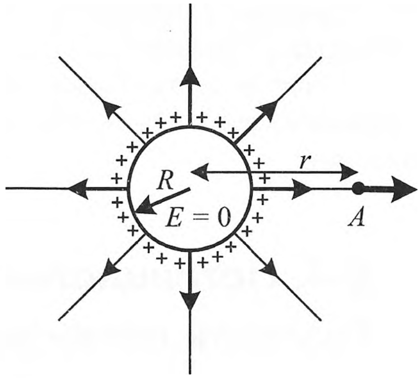
Напряженность поля, созданного несколькими зарядами, равна векторной сумме напряженностей полей, созданных каждым из зарядов (принцип суперпозиции):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots$$



Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом в вакууме, равна:

$$E = k\frac{|q|}{r^2}.$$



Напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой, вне сферы совпадает с полем точечного заряда, расположенного в центре сферы, а внутри сферы поле равно нулю.

Поле равномерно заряженной плоскости

Заряженная поверхность создает **однородное** электрическое поле — поле, в котором напряженность во всех точках одинакова по модулю и направлению.

Напряженность бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$E = \frac{q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где S — площадь плоскости, q — заряд на поверхности, σ — поверхностная плотность заряда (или заряд единицы поверхности), ε — диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ — электрическая постоянная.

§ 3. Проводники и диэлектрики в электрическом поле

Заряженные частицы, которые могут свободно передвигаться внутри тела, называют *свободными зарядами*, а вещества, содержащие свободные заряды, — *проводниками*.

Напряженность поля и электрический заряд внутри проводника равны нулю. При помещении проводников в электрическое поле свободные заряды приходят в движение и возникает электрический ток. Поэтому их и называют *проводниками*.

Электрический заряд всегда расположен на поверхности проводника. **Поле внутри проводника равно нулю.**

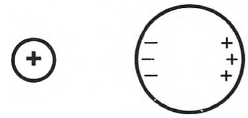
В диэлектриках все заряды связаны внутри отдельных атомов или молекул. Диэлектрики не проводят электрический ток.

Вследствие поляризации диэлектриков они ослабляют электрическое поле.

Диэлектрическая проницаемость (ε) — величина, показывающая, во сколько раз уменьшается напряженность электрического поля внутри данного диэлектрика.

Заряженные тела могут действовать не только на другие заряженные тела, но и на незаряженные.

Как это происходит? Электрическое поле заряженных тел, как правило, неоднородно: чем ближе к телу, тем оно больше, чем дальше — тем меньше. При внесении незаряженного тела в электрическое поле на нем происходит перераспределение зарядов, и в результате на разные части данного тела электрическое поле будет действовать в разные стороны. На ближе расположенные к заряженному телу части поле действует сильнее, и незаряженное тело притягивается к заряженному.



А могут ли притягиваться одинаково заряженные тела? Могут. Точечные заряды — нет, заряженные тела — да. По тому же принципу, что и незаряженное тело притягивается к заряженному.

§ 4. Потенциальная энергия. Потенциал. Разность потенциалов

Электрическое поле потенциально. Потенциальную энергию бесконечно удаленной точки поля принимают равной нулю.

Работа поля по перемещению заряда не зависит от траектории заряда и равна изменению его потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком:

$$A = W_{п1} - W_{п2} = -\Delta W_п = qEd.$$

Потенциальная энергия заряда q в однородном поле: $W_п = qEd$, где d — расстояние, на которое перемещается заряд, вдоль линий напряженности электрического поля.

Потенциал электрического поля φ — физическая величина, равная отношению потенциальной энергии заряда в поле к этому заряду:

$$\varphi = \frac{W_п}{q}.$$

Разность потенциалов (напряжение) между точками 1 и 2 равна отношению работы поля при перемещении заряда из начальной точки в конечную к этому заряду:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}.$$

Разность потенциалов выражается в вольтах, 1В = 1Дж/1Кл.

Напряженность однородного поля связана с разностью потенциалов формулой

$$E = \frac{U}{d},$$

где d — расстояние вдоль линий напряженности электрического поля.

Потенциал поля точечного заряда q на расстоянии r от заряда:

$$\varphi = \frac{kq}{\varepsilon r}.$$

Рассмотрим потенциал поля заряда q, равномерно распределенного по сферической поверхности радиуса R.

Внутри сферы потенциал равен потенциалу на поверхности, а за пределами сферы равен потенциалу точечного заряда, равного заряду сферы и помещенного в центре сферы:

$$\varphi = \frac{kq}{R} \text{ при } r \le R, \text{ и } \varphi = \frac{kq}{\varepsilon r} \text{ при } r \ge R.$$

Потенциалы всех точек проводника одинаковы и равны потенциалу на поверхности.

Задача 1

Металлический шарик радиусом r, имеющий заряд q, помещен в центр незаряженного сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны R_1 и R_2. Найдите напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого системой, если:

а) слой изготовлен из металла;

б) металлический слой заземлен;

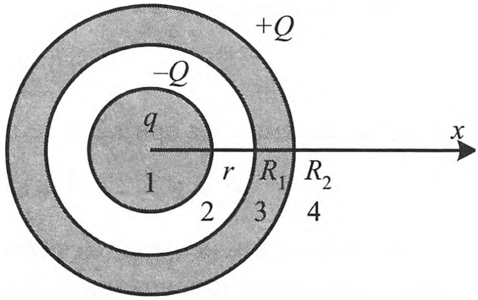
в) слой изготовлен из диэлектрика с проницаемостью ε.

Решение.

Первое, на что нужно обратить внимание: не указано, в какой точке пространства мы должны искать напряженность поля и потенциал.

Поэтому найдем напряженность и потенциал для всех точек поля в зависимости от расстояния от центра шара. Направим ось x из центра шара, как показано на рисунке.

а) После помещения заряженного шара в центр металлического слоя под действием сил поля в слое произойдет разделение зарядов. На внутренней и внешней поверхностях появятся индуцированные заряды.



Мы знаем, что электрическое поле внутри проводников равно нулю, поэтому заряды будут индуцироваться до тех пор, пока они своим полем не скомпенсируют внешнее электрическое поле внутри проводника.

Так как изначально слой не заряжен, то заряды внутренней и внешней поверхностей будут одинаковы по модулю и противоположны по знаку.

Обозначим заряд на внешней поверхности слоя $+Q$, такой же заряд противоположного знака $-Q$ появится на внутренней поверхности слоя.

Заряд металлического заряженного шара также распределен только по его поверхности и остается постоянным, так как шар не соединен со слоем.

Имеем три заряженные сферы радиусов r, R_1 и R_2 с зарядами q, $-Q$, $+Q$.

Так как напряженность в металлах равна нулю, то при $x < r$ напряженность поля равна:

$$E_1 = 0,$$

аналогично при $R_1 \le x < R_2$:

$$E_3 = 0.$$

Вспомним теорию: напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой, вне сферы совпадает с полем точечного заряда, расположенного в центре сферы, а внутри сферы поле равно нулю.

Так как внутри себя заряженная сфера не создает поле, то напряженность внутри слоя состоит из напряженности поля, созданного шаром с зарядом q, и напряженности поля, созданного внутренней сферой слоя зарядом $-Q$. То есть для расстояния x от общего центра сфер при $R_1 \le x < R_2$

$$E_3 = \frac{kq}{x^2} - \frac{kQ}{x^2} = 0,$$

откуда

$$Q = q.$$

Зная заряды внутренней и внешней поверхностей слоя, можем найти напряженности и потенциалы во всех точках пространства. (Вспомним теорию: внутри сферы потенциал равен потенциалу на поверхности, а за пределами сферы равен потенциалу точечного заряда, равного заряду сферы и помещенного в центре сферы.)

Имеем:

1) Внутри шара при $x < r$

$$E_1 = 0,\ \varphi_1 = k\frac{q}{\varepsilon r} - k\frac{q}{\varepsilon R_1} + k\frac{q}{\varepsilon R_2} = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

2) Между шаром и слоем при $r \le x < R_1$

$$E_2 = k\frac{q}{x_2},\ \varphi_2 = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{R_1} + k\frac{q}{R_2} = kq\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

3) Внутри слоя при $R_1 \le x < R_2$

$$E_3 = 0,\ \varphi_3 = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{x} + k\frac{q}{R_2} = k\frac{q}{R_2}.$$

4) За пределами слоя при $x \ge R_2$

$$E_4 = k\frac{q}{x^2} - k\frac{q}{x^2} + k\frac{q}{x^2} = k\frac{q}{x^2},\ \varphi_4 = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{x} + k\frac{q}{x} = k\frac{q}{x}.$$

б) Потенциал Земли принято считать равным нулю. Потенциал поверхности соединенного с Землей тела равен потенциалу Земли, т. е. нулю.

Потенциал заземленной поверхности слоя равен нулю, но заряды на внутренней и внешней поверхностях уже могут быть неодинаковыми, так как теперь заряд может уходить в землю или наоборот.

Обозначим заряды на внутренней и внешней поверхностях слоя q_1 и q_2.

Как и в пункте «а», при $R_1 \le x < R_2$

$$E_3 = 0,$$
$$E_3 = \frac{kq}{x^2} + \frac{kq_1}{x^2},$$

откуда

$$q_1 = -q.$$

На внешней поверхности при $x = R_2$

$$\varphi = k\frac{q}{R_2} + k\frac{q_1}{R_2} + k\frac{q_2}{R_2} = 0,$$

откуда получим $q_2 = 0$, т. е. на внешней поверхности слоя заряд равен нулю.

1) Внутри шара при $x < r$

$$E_1 = 0,\ \varphi_1 = k\frac{q}{r} - k\frac{q}{R_1} = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right).$$

2) Между шаром и слоем при $r \le x < R_1$

$$E_2 = k\frac{q}{x^2},\ \varphi_2 = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{R_1} = kq\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}\right).$$

3) Внутри слоя при $R_1 \le x < R_2$

$$E_3 = 0,\ \varphi_3 = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{x} = 0.$$

4) За пределами слоя при $x \ge R_2$ поле отсутствует, так как

$$E_4 = k\frac{q}{x^2} - k\frac{q}{x^2} = 0,\ \varphi_4 = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{x} = 0.$$

в) Если слой выполнен из диэлектрика, то при внесении его в электрическое поле происходит поляризация и на его поверхностях появляются связанные заряды $-q_c$ и $+q_c$.

Так как диэлектрик уменьшает действие поля в ε раз, то поле, созданное заряженным шариком внутри слоя ($R_1 \le x < R_2$), будет равно:

$$E_3 = k\frac{q}{\varepsilon x^2}.$$

С другой стороны,

$$E_3 = k\frac{q}{x^2} - k\frac{q_c}{x^2},$$

откуда

$$q_c = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}q.$$

Рассуждая так же, как и в пункте «а», получим:

1) При $x < r$

$$E_1 = 0,\ \varphi_1 = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right).$$

2) При $r \le x < R_2$

$$E_2 = k\frac{q}{x^2},\ \varphi_2 = kq\left(\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right).$$

3) При $R_1 \le x < R_2$

$$E_3 = k\frac{q}{\varepsilon x^2},\ \varphi_3 = kq\left(\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right)\right).$$

4) При $x \ge R_2$

$$E_4 = k\frac{q}{x^2},\ \varphi_4 = k\frac{q}{x}.$$

Ответ: а) Внутри шара при $x < r$: $E_1 = 0,\ \varphi_1 = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$

Между шаром и слоем при $r \le x < R_1$: $E_2 = k\frac{q}{x^2},\ \varphi_2 = kq\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$

Внутри слоя при $R_1 \le x < R_2$: $E_3 = 0,\ \varphi_3 = k\dfrac{q}{R_2}$.

За пределами слоя при $x \ge R_2$: $E_4 = k\dfrac{q}{x^2},\ \varphi_4 = k\dfrac{q}{x}$.

б) Внутри шара при $x < r$: $E_1 = 0,\ \varphi_1 = kq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1}\right)$.

Между шаром и слоем $r \le x < R_1$: $E_2 = k\dfrac{q}{x^2},\ \varphi_2 = kq\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{R_1}\right)$.

Внутри слоя при $R_1 \le x < R_2$: $E_3 = 0$, $\varphi_3 = 0$.

За пределами слоя при $x \ge R_2$ поле отсутствует $E_4 = 0$, $\varphi_4 = 0$.

в) Внутри шара при $x < r$: $E_1 = 0,\ \varphi_1 = kq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)\right)$.

Между шаром и слоем при $r \le x < R_1$: $E_2 = k\dfrac{q}{x^2},\ \varphi_2 = kq\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)\right)$.

Внутри слоя при $R_1 \le x < R_2$: $E_3 = k\dfrac{q}{\varepsilon x^2},\ \varphi_3 = kq\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{R_2}\right)\right)$.

За пределами слоя при $x \ge R_2$: $E_4 = k\dfrac{q}{x^2},\ \varphi_4 = k\dfrac{q}{x}$.

§ 5. Конденсаторы

Конденсатор — устройство для накопления электрического заряда.

Простейшим конденсатором является система из двух проводников, расположенных близко друг к другу (их называют *обкладками конденсатора*). Если поместить на обкладки конденсатора равные по модулю и противоположные по знаку заряды, то разность потенциалов (напряжение) между обкладками будет пропорциональна заряду обкладок.

Электроемкость (емкость) конденсатора C — физическая величина, равная отношению модуля заряда одной из его обкладок к разности потенциалов (напряжению) между обкладками:

$$C = \frac{q}{U},$$

где q — заряд одного из проводников (на другом проводнике такой же заряд противоположного знака), а U — разность потенциалов между проводниками.

Электроемкость выражается в фарадах (Ф): 1Ф = 1Кл/1В.

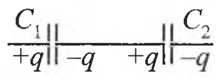
Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Емкость плоского конденсатора (из двух обкладок площадью S на расстоянии d друг от друга с диэлектриком между ними — диэлектрической проницаемостью ε):

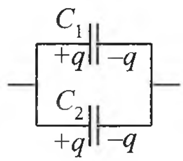
$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

При *последовательном соединении* конденсаторов емкостями C_1, C_2, … общий заряд равен заряду каждого конденсатора, а общая емкость равна:



$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots$$

При *параллельном соединении* конденсаторов емкостями C_1, C_2, … общий заряд равен сумме зарядов конденсаторов, а общая емкость равна:



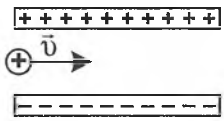
$$C = C_1 + C_2 + \ldots$$

Объемная плотность энергии в конденсаторе

$$\omega_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

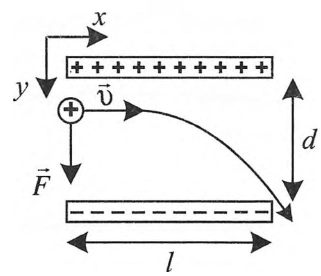
Задача 1

Протон влетает в электрическое поле конденсатора параллельно его пластинам в точке, находящейся посередине между его пластинами. Длина пластин конденсатора 4 см. Напряженность электрического поля конденсатора 4000 В/м. Расстояние между пластинами конденсатора 0,5 см. Найдите минимальную скорость υ, с которой протон должен влететь в конденсатор, чтобы потом вылететь из него. Силой тяжести пренебречь. Считать, что конденсатор находится в вакууме.



Решение.

Направим оси x и y, как показано на рисунке.



Со стороны электрического поля в конденсаторе на протон действует сила $\vec{F}=\vec{E}q$.

По второму закону Ньютона в проекциях на ось y

$$F = ma,$$

или

$$Eq = ma.$$

По оси x протон двигается равномерно. Движение по оси y равноускоренное с ускорением

$$a=\frac{Eq}{m}.$$

Для того чтобы протон вылетел из конденсатора, необходимо, чтобы к моменту, когда вдоль оси x он пролетит расстояние l, равное длине пластин конденсатора, он не успел достигнуть отрицательно заряженной пластины. То есть за время полета t внутри конденсатора

$$t=\frac{l}{\upsilon},$$

где υ — начальная скорость протона, его смещение вдоль оси y должно быть меньше, чем половина расстояния между пластинами, т. е.

$$\frac{d}{2}>\frac{at^2}{2}.$$

С учетом значения времени и ускорения

$$d>\frac{Eql^2}{m\upsilon^2}.$$

Выразив скорость, получим

$$\upsilon > l\sqrt{\frac{Eq}{dm}}.$$

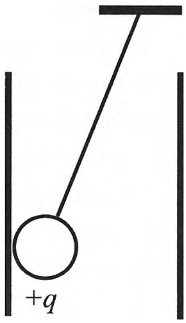
Значит, минимальная скорость

$$\upsilon_{\min} = l\sqrt{\frac{Eq}{dm}} = 0,04\sqrt{\frac{4000\cdot 1,6\cdot 10^{-29}}{0,005\cdot 1,673\cdot 10^{-27}}} \approx 3,5\cdot 10^{5}\ \text{м/с} = 350\ \text{км/с}.$$

Ответ: $\upsilon_{\min} = l\sqrt{\frac{Eq}{dm}} \approx 350$ км/с.

Задача 2

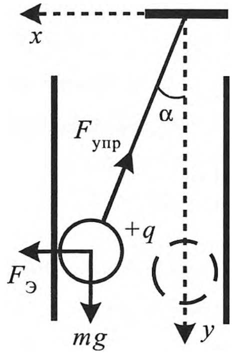
Маленький металлический шарик с зарядом $2\cdot 10^{-7}$ Кл и массой $m = 6$ г подвешен на невесомой нити между вертикальными пластинами плоского воздушного конденсатора. Коэффициент упругости нити 50 Н/м. Расстояние между обкладками конденсатора 4 см. Найдите разность потенциалов между обкладками конденсатора, если нить растянулась на 2 мм.



Решение.

Обозначим заряд шарика q, массу m, коэффициент упругости k, разность потенциалов между обкладками конденсатора U, напряженность поля внутри конденсатора E, растяжение нити l, расстояние между обкладками d, угол отклонения от вертикали в положении равновесия α.

Сделаем рисунок и покажем силы.



Запишем второй закон Ньютона, учитывая, что шарик находится в равновесии:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{э} + \vec{F}_{упр} = 0.$$

В проекциях на оси x и y

$$F_{э} - F_{упр}\sin\alpha = 0,$$
$$mg - F_{упр}\cos\alpha = 0,$$

или

$$F_{э} = F_{упр}\sin\alpha,$$
$$mg = F_{упр}\cos\alpha.$$

Угол мы не знаем, но помним основное тригонометрическое тождество, значит, можем возвести оба равенства в квадрат и сложить их. Тогда получим

$$(mg)^2 + (F_{э})^2 = (F_{упр})^2.$$

Так как

$$F_{э} = qE,$$
$$F_{упр} = kl,$$

то

$$(mg)^2 + (qE)^2 = (kl)^2.$$

Выразив напряженность E, получим

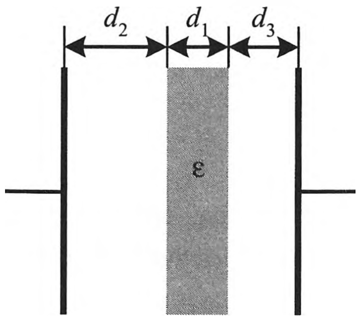
$$E = \frac{\sqrt{(kl)^2 - (mg)^2}}{q}.$$

Значит,

$$U = Ed = \frac{d\sqrt{(kl)^2 - (mg)^2}}{q} = 16\ 000 \text{ кВ}.$$

Ответ: $U = \dfrac{d\sqrt{(kl)^2 - (mg)^2}}{q} = 16\ 000$ кВ.

Задача 3



В плоский конденсатор с расстоянием d между обкладками вводится диэлектрическая пластинка толщиной $d_1 < d$. Найдите емкость конденсатора с диэлектрической пластинкой. Диэлектрическая проницаемость пластины — ε. Площадь каждой обкладки конденсатора и пластины — S.

Решение.

После внесения пластинки в конденсатор на ее поверхности появятся одинаковые по модулю заряды противоположных знаков. Это можно представить себе как три последовательно соединенных конденсатора емкостями:

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1},\ C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2},\ C_3 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_3}.$$

По формуле емкости последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon} + d_2 + d_3\right).$$

Так как $d_2 + d_3 = d - d_1$, то

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon} + d - d_1\right),$$

откуда

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon d + d_1(1-\varepsilon)}.$$

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon d + d_1(1-\varepsilon)}$.

Самостоятельная работа 8

1. Два одинаковых металлических шарика с зарядами 4 мкКл и –8 мкКл находятся на некотором расстоянии друг от друга. Во сколько раз по модулю изменится сила взаимодействия зарядов, если после соприкосновения их снова развести на первоначальное расстояние?

2. В вершинах равностороннего треугольника со стороной 1 м находятся заряды 1 нКл, 1 нКл и –1 нКл. Найдите напряженность в центре треугольника (центром треугольника является точка пересечения медиан).

3. Плоский воздушный конденсатор емкостью 2 мкФ присоединен к источнику с ЭДС 12 В. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно раздвинуть пластины конденсатора, вдвое увеличив расстояние между ними?

4. Плоский воздушный конденсатор заряжен до напряжения 24 В и отключен от источника. Расстояние между обкладками конденсатора 1 мм. Каким будет напряжение конденсатора, если его пластины раздвинуть до расстояния 4 мм между ними?

5. Конденсатор емкостью 2 мкФ заряжен до напряжения 12 В, а конденсатор емкостью 8 мкФ — до напряжения 24 В. Конденсаторы соединяют параллельно друг с другом обкладками, имеющими одинаковые по знаку заряды. Найдите напряжение на конденсаторах после соединения.

Глава 2

Законы постоянного тока

§ 1. Электрический ток. Закон Ома для участка цепи

Электрический ток — упорядоченное движение заряженных частиц.

Например, в металлах электрический ток представляет собой упорядоченное движение свободных электронов.

Ток в проводниках характеризуется силой тока.

Сила тока I — физическая величина, равная отношению электрического заряда q, который проходит через поперечное сечение проводника, ко времени его прохождения.

$$I = \frac{q}{t}.$$

Сила тока измеряется в амперах (А): 1 А = 1 Кл/с.

Амперметр — прибор для измерения силы тока.

Электрическое напряжение — физическая величина, равная отношению работы, которую совершает электрическое поле при перемещении единичного положительного заряда из одной точки в другую.

$$U = \frac{A}{q}.$$

Напряжение измеряется в вольтах (В): 1 В = 1 Дж/Кл.

Напряжение между двумя точками также называют *разностью потенциалов*.

Если потенциалы двух точек одинаковы, то напряжение между точками равно нулю.

В электрической цепи точки с одинаковыми потенциалами можно соединять или разъединять, так как ток между такими точками не идет, и при этом токи в общей цепи не изменяются.

Вольтметр — прибор для измерения напряжения.

Электрическое сопротивление R — физическая величина, характеризующая свойство проводника уменьшать скорость тока. Сила тока измеряется в омах (Ом).

Сопротивление проводника зависит от материала, из которого он изготовлен, его длины и площади сечения.

$$R = \frac{\rho l}{S},$$

где l — длина проводника, S — площадь сечения проводника, ρ — удельное сопротивление.

Удельное сопротивление ρ — физическая величина, определяющая сопротивление проводника длиной 1 м и площадью сечения 1 м^2, изготовленного из данного материала (вещества).

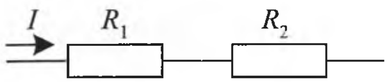
Закон Ома: сила тока на участке цепи прямо пропорциональна напряжению на концах данного участка и обратно пропорциональна его сопротивлению:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Реостат — прибор, с помощью которого можно изменять сопротивление, используется для изменения тока в цепи.

§ 2. Расчет электрических сетей

Последовательное соединение проводников



При последовательном соединении электрическая цепь не имеет разветвлений и ток последовательно проходит из одного проводника в другой.

Сила тока на всех участках цепи одинакова:

$$I = I_1 = I_2.$$

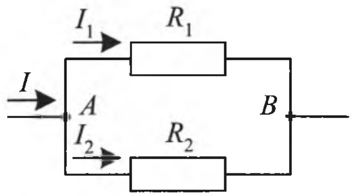
Общее сопротивление равно сумме сопротивлений отдельных проводников:

$$R = R_1 + R_2.$$

Напряжение на концах участка равно сумме напряжений на всех участках:

$$U = U_1 + U_2.$$

Параллельное соединение проводников



Параллельным называется такое соединение проводников, при котором все проводники одним концом присоединяются к одной точке цепи (на рис. точка A), а вторым — к другой точке цепи (точка B).

Напряжение U на участке AB и на концах всех соединенных параллельно проводников одинаково:

$$U = U_1 = U_2.$$

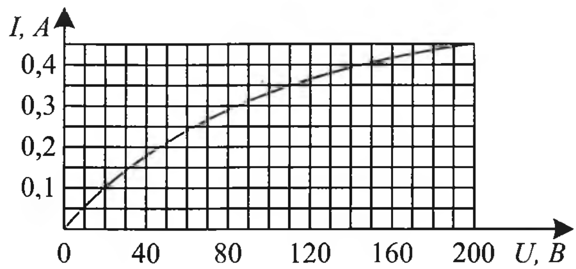
Ток при параллельном соединении разветвляется так, что сумма сил токов в параллельно соединенных проводниках равна силе тока до разветвления:

$$I = I_1 + I_2.$$

Общее сопротивление можно найти по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Задача 1



На графике изображена зависимость силы тока через лампу накаливания от приложенного к ней напряжения. При последовательном соединении трех одинаковых ламп и источника тока сила тока в цепи оказалась равной 0,45 А. Найдите напряжение на клеммах источника. Источник тока считать идеальным.

Решение.

Не стоит пугаться, если с такой задачей раньше не встречались. Давайте разбираться с условием.

1) Источник тока идеальный, значит, его внутреннее сопротивление равно нулю.

2) Лампы и источник тока соединены последовательно, значит, напряжение на источнике тока U_0 равно суммарному напряжению на всех трех лампах.

3) Лампы и источник тока соединены последовательно, а при последовательном соединении сила тока в цепи одинакова, значит, сила тока в каждой лампе равна 0,45 А.

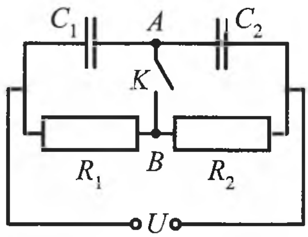
4) Напряжение на каждой лампе можно найти по графику, оно равно $U_1 = 170$ В.

5) Напряжение на всех трех лампах равно сумме напряжений на лампах, т. е. $U_0 = 3U_1 = 510$ В.

Ответ: $U_0 = 510$ В.

Задача 2

К схеме, изображенной на рисунке, известны величины R_1, R_2, C_1, C_2, U. Какой заряд пройдет через ключ K, если его замкнуть?



Решение.

До замыкания ключа суммарный заряд пластин, соединенных с точкой A, равен нулю, значит, эти пластины будут иметь одинаковые по модулю и противоположные по знаку заряды.

После того как ключ замкнут, напряжение U_1 на конденсаторе C_1 будет равно напряжению на сопротивлении R_1, а напряжение U_2 на конденсаторе C_2 будет равно напряжению на сопротивлении R_2.

По закону Ома найдем напряжения U_1 и U_2.

Сила тока в цепи:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Тогда

$$U_1 = IR_1 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2},\ U_2 = IR_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}.$$

Значит, заряды конденсаторов после замыкания ключа станут равными:

$$q_1 = C_1U_1 = \frac{C_1UR_1}{R_1 + R_2},\ q_2 = C_2U_2 = \frac{C_2UR_2}{R_1 + R_2}.$$

Через ключ пройдет заряд q, равный суммарному заряду пластин, подключенных к точке A:

$$q = q_1 - q_2 = \frac{U\left(C_1R_1 - C_2R_2\right)}{R_1 + R_2}.$$

Ответ: $q = \dfrac{U\left(C_1R_1 - C_2R_2\right)}{R_1 + R_2}.$

§ 3. Работа и мощность электрического тока

Работа электрического тока на участке цепи равна произведению напряжения на концах этого участка на электрический заряд, прошедший по нему:

$$A = qU = UIt.$$

В неподвижных проводниках вся работа тока идет на увеличение их внутренней энергии и выделяется в виде тепла:

$$Q = A = UIt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

Формулу

$$Q = I^2Rt$$

называют законом Джоуля–Ленца.

Мощность тока P — физическая величина, равная отношению работы тока ко времени:

$$P = \frac{A}{t} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

КПД электродвигателя η — отношение совершенной полезной работы двигателя к затраченной работе тока. Проще говоря, КПД показывает, какую часть энергии, полученной от сети, двигатель превращает в полезную работу.

Обозначим полезную работу $A_п$, затраченную работу (работу тока) — $A_з$, полезную мощность — $P_п$, затраченную мощность — $P_з$.

$$\eta = \frac{A_п}{A_з} \cdot 100\% = \frac{P_п}{P_з} \cdot 100\%.$$

Задача 1

Линия электропередачи длиной $l = 100$ км работает при напряжении $U = 200\,000$ В.

Определите КПД линии, т. е. отношение напряжения на нагрузке к напряжению, подводимому к линии. Линия выполнена из алюминиевого кабеля площадью поперечного сечения $S = 150$ мм^2. Передаваемая мощность $P = 30\,000$ кВт.

Решение.

$$\eta = \frac{P_п}{P} = \frac{U - \Delta U}{U},$$

где $P_п$ — полезная мощность, ΔU — падение напряжения в линии.

Сопротивление линии передачи, состоящей из двух проводов:

$$R = \frac{2\rho l}{S}.$$

Сила тока в линии

$$I = \frac{P}{U}.$$

Падение напряжения в линии

$$\Delta U = IR = \frac{P}{U}\frac{2\rho l}{S}.$$

Тогда

$$\eta = \frac{U - \Delta U}{U} = 1 - \frac{\Delta U}{U} = 1 - \frac{P}{U^2} \cdot \frac{2\rho l}{S} = 0{,}97 = 97\%.$$

Ответ: $\eta = 1 - \frac{P}{U^2} \cdot \frac{2\rho l}{S} = 97\%$.

Задача 2

Две спирали электроплитки сопротивлением по $R = 10$ Ом каждая соединены параллельно и включены в сеть. Каково напряжение сети, если вода массой $m = 3$ кг при нагревании на этой плите закипает через $\tau = 130$ с? Начальная температура воды равна $t_1 = 20$ °С, а КПД процесса — $\eta = 80\%$.

Решение.

Пусть напряжение в сети равно U. Температура кипения воды $t_2 = 100$ °С.

По закону Джоуля–Ленца количество теплоты, которое выделяется на проводнике с током, равно:

$$Q_1 = \frac{U^2\tau}{R}.$$

Так как напряжение при параллельном сопротивлении одинаково и сопротивление проводников одинаково, то суммарное количество теплоты, выделившееся на двух проводниках,

$$Q = 2Q_1 = \frac{2U^2\tau}{R}.$$

Количество теплоты, которое пошло на нагревание воды с учетом КПД: $Q_п = \eta Q$,

$$\frac{2U^2\tau}{R}\eta = cm(t_2 - t_1),$$

откуда

$$U = \sqrt{\frac{cmR(t_2 - t_1)}{2\tau\eta}} \approx 220 \text{ В}.$$

Ответ: $U = \sqrt{\frac{cmR(t_2 - t_1)}{2\tau\eta}} \approx 220$ В.

Задача 3

Алюминиевый проводник подключают к идеальному источнику постоянного тока с напряжением 12 В, и за 20 с он нагревается до температуры 60 °С. Найдите начальную температуру проводника, если на его нагревание идет 40% выделившейся теплоты. Проводник имеет цилиндрическую форму, его длина равна 20 метров.

Решение.

По закону Джоуля–Ленца на проводнике при прохождении по нему тока выделяется количество теплоты

$$Q = \frac{U^2}{R}t,$$

где U — напряжение на концах проводника, R — сопротивление проводника, t — время.

Сопротивление проводника можно найти по формуле

$$R = \frac{\rho_c l}{S},$$

где ρ_c — удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник (в нашем случае алюминий, и в справочных данных в конце книги находим, что $\rho_c = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м), l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения проводника.

Многие, дойдя в решении до этого момента, останавливаются, так как площадь сечения нам неизвестна. Не волнуйтесь и продолжайте решать задачу дальше в общем виде, так как для получения ответа значение площади нам не понадобится.

На нагревание проводника пойдет количество теплоты

$$Q_{\text{н}} = \eta Q = \frac{\eta U^2 tS}{\rho_{\text{c}} l}, \quad (1)$$

где $\eta = 0{,}4$ — по условию доля тепла, которая идет на нагревание проводника.

При сообщении проводнику количества теплоты $Q_{\text{н}}$ он нагревается согласно закону:

$$Q_{\text{н}} = cm(T_2 - T_1), \quad (2)$$

где c — удельная теплоемкость материала проводника (смотрим в таблице $c = 900$ Дж/(кг · К)), T_1 и T_2 — начальная и конечная температура проводника соответственно, m — масса проводника.

Еще из курса 8-го класса нам известно, что

$$m = \rho V = \rho lS,$$

где ρ — плотность материала проводника (не путайте с удельным сопротивлением, они просто обозначаются похожими буквами), V — объем проводника.

Плотность алюминия — также табличная величина, $\rho = 2700$ кг/м^3.

Подставив выражение для массы в уравнение (2), получим

$$Q_{\text{н}} = c\rho lS\,(T_2 - T_1). \quad (3)$$

Приравнивая значения количества теплоты из уравнений (1) и (3), имеем

$$\frac{\eta U^2 tS}{\rho_{\text{c}} l} = c\rho lS\left(T_2 - T_1\right).$$

Сократив обе части равенства на S (как видим, от площади проводника ответ не зависит, и ее значение нам не нужно), получим

$$\frac{\eta U^2 t}{\rho_{\text{c}} l} = c\rho l\left(T_2 - T_1\right),$$

откуда выразим начальную температуру:

$$T_1 = T_2 - \frac{\eta U^2 t}{\rho_{\text{c}} l^2 c\rho} \approx 17{,}7\ ^\circ\text{C}.$$

Ответ: $T_1 = T_2 - \dfrac{\eta U^2 t}{\rho_{\text{c}} l^2 c\rho} \approx 17{,}7\ ^\circ\text{C}$.

§ 4. Закон Ома для полной цепи

Источник постоянного тока — устройство, создающее и поддерживающее разность потенциалов на участках цепи за счет работы сил неэлектростатического происхождения (непотенциальных сторонних сил).

Электродвижущая сила источника (ЭДС) — отношение работы сторонних сил при перемещении заряда q вдоль замкнутого контура к этому заряду:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q}.$$

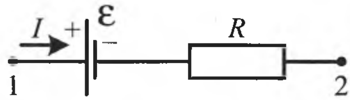
Измеряется ЭДС в вольтах (В).

Работа источника тока:

$$A = q\mathcal{E}.$$

Закон Ома для полной цепи: сила тока в замкнутой цепи равна отношению ЭДС к полному сопротивлению цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$



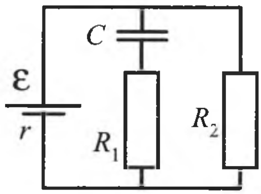
Закон Ома для неоднородного участка цепи 1–2, содержащего ЭДС:

$$\pm IR = U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathcal{E},$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов (напряжение) между точками 1 и 2, $\mathcal{E}$ — ЭДС, действующая на участке 1–2, I — сила тока, R — сопротивление участка 1–2. Перед $\mathcal{E}$ или I ставится знак «+», если направления действия ЭДС или направление тока совпадают с направлением от 1 к 2, и наоборот.

За направление ЭДС принимается направление действия сторонних сил на положительные заряды (от отрицательного полюса к положительному).

Задача 1



В схеме, изображенной на рисунке, напряженность электрического поля плоского конденсатора равна 15 кВ/м. ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ = 24 В, внутреннее сопротивление источника r = 2 Ом, сопротивление резисторов R_1 = 10 Ом, R_2 = 30 Ом. Найдите расстояние между пластинами конденсатора.

Решение.

Через заряженный конденсатор ток не течет, значит, и через резистор R_1 ток также не проходит. При этом напряжение на конденсаторе должно быть равно напряжению на клеммах источника и напряжению на резисторе R_2.

По закону Ома для полной цепи найдем силу тока, проходящего через резистор R_2:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_2}.$$

Тогда напряжение U на втором резисторе, а значит, и на конденсаторе, равно:

$$U = IR_2.$$

Поле внутри конденсатора однородно, следовательно, напряженность поля внутри конденсатора равна:

$$U = Ed,$$

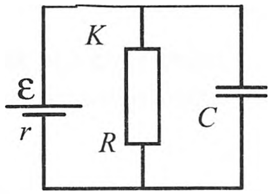
где E — напряженность поля в конденсаторе, d — расстояние между обкладками.

Тогда

$$d = \frac{U}{E} = \frac{\mathcal{E}R_2}{E(r + R_2)} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} = 1{,}5 \text{ мм}.$$

Ответ: $d = \dfrac{\mathcal{E}R_2}{E(r + R_2)} = 1{,}5$ мм.

Задача 2



На рисунке показана электрическая схема. Ключ K замкнут. ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ = 6 В, сопротивление резистора R = 10 Ом, заряд конденсатора — 4 мкКл. После размыкания ключа K на резисторе выделяется количество теплоты 10 мкДж. Найдите внутреннее сопротивление источника тока r.

Решение.

После размыкания ключа конденсатор начнет разряжаться, и вся накопленная в нем энергия W выделится в виде тепла на резисторе. То есть количество теплоты Q, выделившееся на резисторе после размыкания ключа, равно:

$$Q = W = \frac{qU}{2},$$

где U — напряжение на конденсаторе перед размыканием ключа, q — заряд конденсатора.

Значит,

$$U = \frac{2Q}{q}. \qquad (1)$$

До размыкания ключа напряжение на конденсаторе равно напряжению на резисторе. По закону Ома для участка цепи напряжение на резисторе

$$U = IR,$$

где I — сила тока, проходящего через резистор, до размыкания ключа. Ток через заряженный конденсатор при этом не идет. Силу тока можно найти по закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

Тогда напряжение равно:

$$U = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) получим

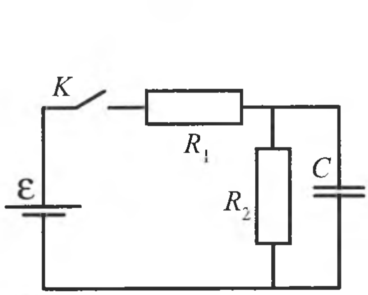
$$\frac{2Q}{q} = \frac{\mathcal{E}R}{R+r},$$

откуда выразим сопротивление источника тока r:

$$r = \frac{q\mathcal{E}R}{2Q} - R = \frac{R(q\mathcal{E} - 2Q)}{2Q} = 2 \text{ Ом}.$$

Ответ: $r = \dfrac{R(q\mathcal{E} - 2Q)}{2Q} = 2$ Ом.

Задача 3



В электрической схеме, состоящей из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ = 10 В, резисторов R_1 = 50 Ом, R_2 = 100 Ом и конденсатора, замыкают ключ K.

1) Найдите напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.

2) Вычислите ток через батарею в тот момент, когда напряжение на конденсаторе достигло значения $\frac{\mathcal{E}}{2}$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Решение.

1) В установившемся режиме ток не будет идти через конденсатор (заряженный конденсатор представляет из себя разрыв цепи). Тогда по закону Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

Конденсатор соединен параллельно с резистором сопротивлением R_2, значит, у них одинаковое напряжение:

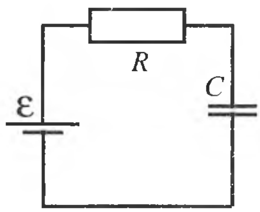
$$U = IR_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1 + R_2} \approx 6{,}7\ \text{В}.$$

2) Напряжение U_2 на резисторе R_2 равно напряжению на конденсаторе, т. е. $U_2 = \frac{\mathcal{E}}{2}$, тогда $U_1 = \mathcal{E} - U_2 = \frac{\mathcal{E}}{2}$. Через батарею проходит такой же силы ток, как и через резистор R_1:

$$I = I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{\mathcal{E}}{2R_1} = 0{,}1\ \text{А}.$$

Ответ: 1) $U = \frac{\mathcal{E}R^2}{R_1 + R_2} \approx 6{,}7$ В; 2) $I = \frac{\mathcal{E}}{2R_1} = 0{,}1$ А.

Задача 4



На рисунке показана электрическая схема, в которой идеальный источник тока соединен с резистором и конденсатором переменной емкости (расстояние между пластинами которого можно изменять). ЭДС идеального источника тока $\mathcal{E} = 24$ В. Пластины конденсатора медленно раздвигают, совершая при этом работу 40 мкДж против сил притяжения пластин. Заряд конденсатора при этом меняется на 1 мкКл. Какое количество теплоты выделилось на резисторе за время движения пластин?

Решение.

Так как конденсатор подключен к источнику тока, а пластины раздвигают медленно, то можно считать, что напряжение на конденсаторе остается неизменным и равным $\mathcal{E}$.

Формула емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Пластины раздвигают, расстояние между пластинами увеличивается, значит, емкость конденсатора уменьшается. Так как заряд и емкость конденсатора связаны соотношением

$$q = CU,$$

то заряд конденсатора также уменьшается, и происходит изменение заряда:

$$\Delta q = -1\ \text{мкКл}.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$W_1 + A + A_{\text{ист}} = W_2 + Q, \quad (1)$$

где W_1 и W_2 — энергия электрического поля конденсатора в начале и в конце процесса соответственно, A — работа, совершенная при раздвигании пластин, $A_{\text{ист}}$ — работа источника тока, Q — количество теплоты, выделившееся на резисторе.

Энергия конденсатора в начале и в конце процесса:

$$W_1 = \frac{\mathcal{E}q_1}{2} \quad (2)$$

$$W_2 = \frac{\mathcal{E}q_2}{2} \quad (3)$$

Работа источника тока

$$A_{\text{ист}} = E\Delta q. \quad (4)$$

Из уравнений (1)–(4) получим

$$\frac{\mathcal{E}q_1}{2} + A + \mathcal{E}\Delta q = \frac{\mathcal{E}q_2}{2} + Q.$$

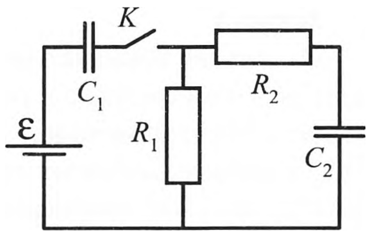
Тогда

$$Q = \frac{\mathcal{E}q_1}{2} - \frac{\mathcal{E}q_2}{2} + A + \mathcal{E}\Delta q = -\frac{\mathcal{E}\Delta q}{2} + A + \mathcal{E}\Delta q = \frac{\mathcal{E}\Delta q}{2} + A = 28 \text{ мкДж}.$$

Ответ: $Q = \frac{\mathcal{E}\Delta q}{2} + A = 28$ мкДж.

Задача 5

В изображенной на рисунке электрической цепи ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 400$ В, сопротивления резисторов $R_1 = 12$ Ом и $R_2 = 21$ Ом, а емкости конденсаторов $C_1 = 80$ мкФ и $C_2 = 120$ мкФ. В начальном состоянии конденсаторы не заряжены, ключ не замкнут. Ключ замыкают. Какое количество теплоты выделится в цепи к моменту установления равновесия?



Решение.

После установления равновесия ток в цепи прекратится, так как через заряженный конденсатор ток не идет. Конденсатор C_1 будет заряжен до напряжения, равного ЭДС источника тока, а конденсатор C_2 окажется разряжен (сначала он заряжается, а потом начинает разряжаться, и имеющаяся на нем энергия выделяется в виде тепла на резисторах), так он соединен параллельно с резистором R_1, а при установлении равновесия ток через резисторы уже не идет, и значит, напряжение на резисторах равно нулю.

Следовательно, энергия конденсатора C_1 после установления равновесия

$$W_1 = C_1\frac{\mathcal{E}^2}{2}.$$

Заряд, прошедший через источник тока до установления равновесия:

$$q = C_1\mathcal{E}.$$

Тогда работа сторонних сил в источнике тока

$$A = q\mathcal{E} = C_1\mathcal{E}^2.$$

Запишем закон сохранения энергии:

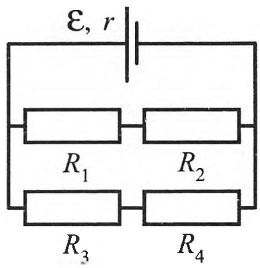
$$A = W_1 + Q.$$

Тогда количество теплоты, выделившееся в цепи, равно:

$$Q = A - W_1 = C_1\mathcal{E}^2 - \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} = 12{,}8\ \text{Дж}.$$

Ответ: $Q = 12{,}8$ Дж.

Задача 6



В схеме, изображенной на рисунке, сопротивления резисторов $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 4$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. Определите мощность, которая выделяется на резисторе R_4.

Решение.

Рассмотрим соединение резисторов. Резисторы R_1 и R_2, так же как и резисторы R_3 и R_4, соединены попарно последовательно. А пары соединены между собой параллельно.

Общее сопротивление R_{12} резисторов R_1 и R_2 равно:

$$R_{12} = R_1 + R_2.$$

Общее сопротивление R_{34} резисторов R_3 и R_4 равно:

$$R_{34} = R_3 + R_4.$$

Общее сопротивление R_0 внешней цепи (4 резисторов) найдем по формуле для параллельного соединения:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}} = \frac{R_{12} + R_{34}}{R_{12}R_{34}} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

Откуда

$$R_0 = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

По закону Ома для полной цепи ток во внешней цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + r} = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} + r} = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}.$$

Напряжение на внешней цепи:

$$U = IR_0 = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}.$$

Суммарное напряжение на резисторах R_3 и R_4 равно напряжению во внешней цепи, а так как R_3 и R_4, то по ним идет одинаковый ток I_{34}. По закону Ома для участка цепи:

$$I_{34} = \frac{U}{R_3 + R_4} = \frac{\mathcal{E}(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}.$$

Мощность P_4, выделяемая на резисторе R_4, равна:

$$P_4 = I_{34}^2 R_4 = \left(\frac{\varepsilon(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)} \right)^2 R_4 = 2,25 \text{ Вт}.$$

Решение получилось очень громоздким, и, несмотря на то что обычно рекомендуется решать задачи в общем виде, в подобных случаях можно сделать исключение и решать задачу по действиям, сразу подставляя числа. Только следить за тем, чтобы не было лишних округлений там, где без них можно обойтись.

Сравните:

1) $R_{12} = R_1 + R_2 = 10$ Ом,
$R_{34} = R_3 + R_4 = 5$ Ом.

2) Общее сопротивление внешней цепи найдем по формуле для параллельного соединения проводников:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}},$$

откуда

$$R_0 = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = \frac{10}{3} \text{ Ом}.$$

(Если считать с помощью калькулятора, то с этого момента ответ будет уже не точным, а приближенным, что не очень хорошо.)

3) Сила тока во внешней цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0 + r} = 2,25 \text{ А}.$$

4) Напряжение на внешней цепи

$$U = IR_0 = 7,5 \text{ В}.$$

5) $I_{34} = \dfrac{U}{R_3 + R_4} = 1,5$ А.

6) $P_4 = I_{34}^2 R_4 = 2,25$ Вт.

Ответ: $P_4 = 2,25$ Вт.

Задача 7

Источник тока, ЭДС которого ε, а внутреннее сопротивление r, подключен к реостату, сопротивление которого может изменяться от нуля до R. Каким должно быть сопротивление реостата, чтобы получить:

1) максимальную силу тока в цепи;

2) максимальную полезную мощность?

Решение.

1) Силу тока в цепи можно найти по закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

Дробь максимальна тогда, когда ее знаменатель минимален. Поэтому максимальная сила тока в цепи будет соответствовать короткому замыканию (при нулевом сопротивлении реостата).

$$I_{max} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

2) Мощность источника равна:

$$P = \varepsilon I.$$

Запишем закон сохранения энергии для цепи:

$$Pt = I^2rt + P_п t, \tag{1}$$

где $P_п$ — мощность, выделяющаяся на реостате.

Разделив уравнение (1) на время, получим

$$\varepsilon I = I^2r + P_п,$$

откуда получим

$$P_п = \varepsilon I - I^2r.$$

График зависимости полезной мощности от силы тока в цепи — это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, а следовательно, максимального значения полезная мощность достигает в вершине этой параболы при

$$I = \frac{\varepsilon}{2r}.$$

Тогда

$$P_{п\,max} = \frac{\varepsilon^2}{4r},$$

и достигается она при $R = r$.

Ответ: 1) $I_{max} = \frac{\varepsilon}{r}$, 2) $P_{п\,max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$.

§ 5. Правила Кирхгофа

Узел — точка, где сходятся не менее трех проводников.

Ветвь — участок цепи между двумя узлами.

Ток, входящий в узел, считается *положительным*, исходящий из узла — *отрицательным*.

Возьмем произвольный замкнутый контур, состоящий из отдельных ветвей, и выберем направление обхода по часовой или против часовой стрелки.

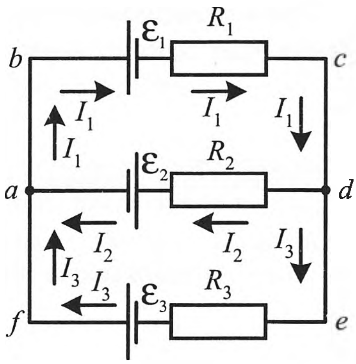
ЭДС в каждой ветви контура считается *положительной*, если направление ее действия совпадает с выбором обхода, в обратном случае — *отрицательной*.

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма сил токов в узле равна нулю.

Возможна другая формулировка: сумма сил токов, входящих в узел, равна сумме сил токов исходящих.

Второе правило Кирхгофа: в произвольном замкнутом контуре электрической цепи сумма падений напряжений во всех ветвях контура равна алгебраической сумме ЭДС в контуре.

Рассмотрим схему, показанную на рисунке. В данной цепи 2 узла: *a* и *d*. Можно выделить 3 замкнутых контура: *abcd*, *abcdef* и *adef*.



Первое правило Кирхгофа — для узла *a*:

$$I_3 + I_2 = I_1, \text{ или } I_2 + I_3 - I_1 = 0.$$

Второе правило Кирхгофа — для контуров *abcd* и *adef*.

Выберем направление обхода для обоих контуров по часовой стрелке.

Для контура *abcd*: $I_1R_1 + I_2R_2 = -\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$.

Для контура *adef*: $-I_2R_2 + I_3R_3 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$.

§ 6. Электрический ток в различных средах

В металлах электрическая проводимость связана со свободными электронами (*электронная проводимость*).

Полупроводники занимают промежуточное положение между металлами и диэлектриками.

Сопротивление полупроводников зависит от температуры, освещенности и наличия в нем примесей.

Электролиты — растворы и расплавы солей, оснований и кислот, являющиеся проводниками электрического тока. Электрическая проводимость водных растворов электролитов обусловлена положительными и отрицательными ионами (*ионная проводимость*). Сопровождается выделением на электродах веществ, входящих в состав электролитов, — **электролизом**.

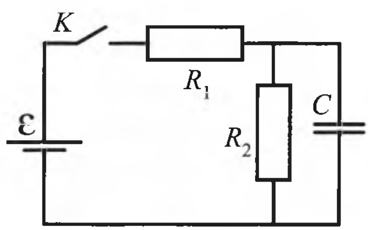
Проводимость газов обусловлена положительными ионами и электронами.

Газы при температурах, близких к комнатным, состоят из нейтральных молекул и являются *диэлектриками*. При нагревании или под действием излучения и других факторов возникает ионизация газов. Они становятся проводниками.

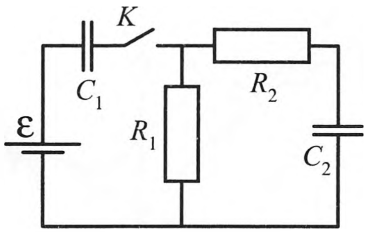
Самостоятельная работа 9

1. Какой длины нужно взять медный проводник радиусом 1 мм для изготовления из него кипятильника, работающего при напряжении 12 В, чтобы он мог вскипятить за 3 мин 1 литр воды, взятой при комнатной температуре 20 °С? Потерями тепла при нагревании и теплоемкостью контейнера для воды пренебречь.

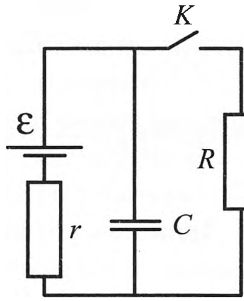
2. В электрической схеме, состоящей из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ = 12 В, резисторов R_1 = 10 Ом, R_2 = 15 Ом и конденсатора, замыкают ключ *K*. Найти напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.



3. В изображенной на рисунке электрической цепи ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 20$ В, сопротивления резисторов $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 16$ Ом, а емкости конденсаторов $C_1 = 8$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ. В начальном состоянии конденсаторы не заряжены, ключ не замкнут. Найдите установившиеся заряды на конденсаторах после замыкания ключа.



4. Какое количество теплоты выделится в схеме, показанной на рисунке, после размыкания ключа K? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В, сопротивление резисторов $R = 7$ Ом, $r = 3$ Ом, емкость конденсатора $C = 4$ мкФ.



Глава 3

Магнитное поле

§ 1. Магнитное поле. Сила Ампера. Сила Лоренца

Магнитное поле — особый вид материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между движущимися электрическими заряженными частицами или проводниками с током.

Магнитное поле порождается движущимися зарядами (электрическим током) и обнаруживается по своему действию на движущиеся заряды (электрический ток).

Магнитное поле характеризуется **вектором магнитной индукции** $\vec{B}$. Магнитная индукция измеряется в теслах (Тл).

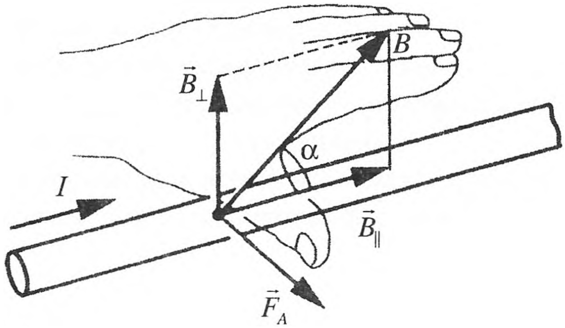
Линии магнитной индукции — замкнутые воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{B}$ в этих точках поля.

Сила Ампера $F_А$ — сила, с которой магнитное поле действует на проводник с током:

$$F_А = BIL\sin\alpha,$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, I — сила тока, L — длина проводника, α — угол между направлением вектора магнитной индукции и проводником с током.

Сила Ампера всегда перпендикулярна вектору $\vec{B}$ и силе тока I.



Направление силы Ампера определяется **правилом левой руки**: если левую руку расположить так, чтобы четыре пальца были направлены по направлению тока, а вектор магнитной индукции (или его перпендикулярная к проводнику составляющая) входил в ладонь, то большой палец (отогнутый на 90 °) покажет направление силы Ампера.

Закон Ампера: сила притяжения (отталкивания), которая действует на участок длины l одного из двух параллельных прямых бесконечных проводников, расположенных на расстоянии r друг от друга, по которым текут токи I_1 и I_2 при одинаковых (противоположных) направлениях токов, равна:

$$F = \frac{2I_1 \cdot I_2}{r}\frac{\mu_0\mu}{4\pi}l,$$

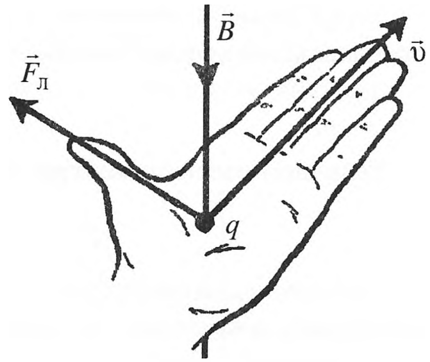
где μ_0 — магнитная постоянная, μ — относительная магнитная проницаемость однородной среды, в которой находятся проводники с током.

Сила Лоренца $F_Л$ — сила, с которой магнитное поле действует на движущуюся заряженную частицу:

$$F_Л = |q|\upsilon B\sin\alpha,$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, q — заряд частицы, υ — скорость частицы, α — угол между вектором магнитной индукции и вектором скорости частицы.

Сила Лоренца перпендикулярна векторам $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$. Направление силы Лоренца также определяется **правилом левой руки**: если левую руку расположить так, чтобы четыре пальца были направлены по направлению скорости положительно заряженной частицы (противоположно направлению отрицательно заряженной частицы), а вектор магнитной индукции (его перпендикулярная к проводнику составляющая) входил в ладонь, то большой палец (отогнутый на 90 °) покажет направление силы Лоренца.



§ 2. Магнитный поток. Электромагнитная индукция и самоиндукция. Энергия магнитного поля

Рассмотрим замкнутый проводник (контур) площадью S.

Магнитный поток Φ — величина, равная произведению модуля вектора магнитной индукции $\vec{B}$ на площадь S контура и косинус угла между векторами $\vec{B}$ и $\vec{n}$ (где $\vec{n}$ — нормаль к плоскости контура).

$$\Phi = BS\cos\alpha.$$

Единица магнитного потока — вебер (Вб).

Электромагнитная индукция — явление возникновения электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, пронизывающего контур.

Возникающий при этом ток называют **индукционным током**.

Закон электромагнитной индукции Фарадея: ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i$ в замкнутом контуре равна скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(BS\cos\alpha)}{\Delta t}.$$

Правило Ленца: возникающий в замкнутом контуре индукционный ток имеет такое направление, чтобы своим магнитным полем противодействовать изменению магнитного потока.

Если в магнитном поле двигается проводник, то в нем возникает **ЭДС индукции**:

$$\mathcal{E}_i = Bl\upsilon\sin\alpha.$$

Если правую руку расположить вдоль проводника так, чтобы перпендикулярная составляющая магнитной индукции $\vec{B}_\perp$ входила в ладонь, а отогнутый большой палец показывал направление движения проводника, то четыре вытянутых пальца укажут направление индукционного тока в проводнике.

Самоиндукция — явление возникновения ЭДС индукции в электрической цепи (в контуре) в результате изменения силы тока в этой же цепи (контуре).

Если магнитное поле вызвано током I, протекающим по контуру, то магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром, пропорционален току:

$$\Phi = LI,$$

где L — **индуктивность** контура.

Индуктивность измеряется в генри (Гн). Индуктивность контура зависит от магнитной проницаемости среды μ, а также от формы и размеров контура.

$$\varepsilon_{si} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(LI)}{\Delta t}.$$

Если индуктивность контура не изменяется, то

$$\varepsilon_{si} = -\frac{L\Delta I}{\Delta t}.$$

Ток самоиндукции направлен навстречу собственному току I, обусловленному внешним источником, и замедляет его изменение.

Соленоид — катушка с намотанным проводом.

Энергия магнитного поля:

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Энергия поля, созданного проводником с током:

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля — энергия в единице объема поля:

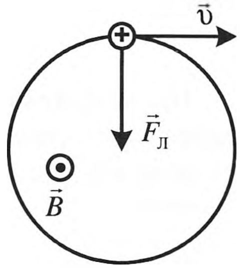
$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}.$$

Задача 1

В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает перпендикулярно линиям магнитной индукции частица массой m со скоростью $\vec{\upsilon}$ и положительным зарядом q. Как будет двигаться частица в магнитном поле? Считать, что движение происходит в вакууме и силой тяжести можно пренебречь.

Решение.

Сделаем рисунок и покажем направление скорости частицы и силы Лоренца, с которой поле действует на движущуюся заряженную частицу.



Сила Лоренца, действующая на частицу, всегда перпендикулярна скорости, значит, скорость тела остается неизменной по модулю и тело двигается по окружности.

Запишем второй закон Ньютона:

$$F_{Л} = ma_n,$$

$$q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R}.$$

Выразим радиус окружности:

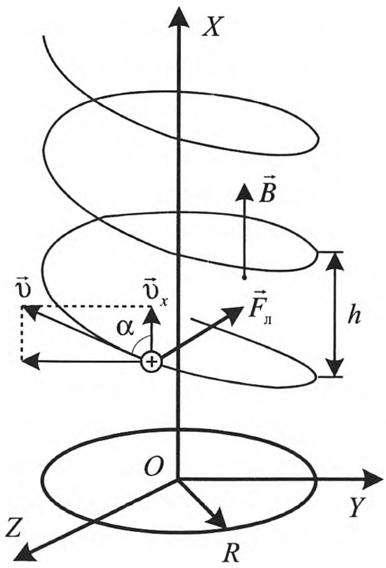
$$R = \frac{m\upsilon}{qB}.$$

Ответ: тело двигается с постоянной по модулю скоростью υ по окружности радиусом $R = \frac{m\upsilon}{qB}$ в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции.

Задача 2

В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает со скоростью $\vec{\upsilon}$ частица массой m и положительным зарядом q. Угол между векторами скорости $\vec{\upsilon}$ и магнитной индукции $\vec{B}$ равен α. Как будет двигаться частица в магнитном поле?

Решение.



Введем систему координат, как показано на рисунке. Ось X направим вдоль линий магнитной индукции.

Сила Лоренца, действующая на частицу, перпендикулярна скорости, значит, скорость тела остается неизменной по модулю.

Проекция силы Лоренца на ось X равна нулю. Значит, проекция скорости частицы υ_x на ось X остается постоянной.

Следовательно, вдоль оси X тело двигается прямолинейно равномерно.

В плоскости YOZ частица описывает окружность с постоянной по модулю скоростью $\upsilon \sin\alpha$. Радиус R окружности можно найти, записав второй закон Ньютона:

$$F_Л = ma_n,$$

$$q\upsilon B\sin\alpha = \frac{m(\upsilon\sin\alpha)^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{m\upsilon\sin\alpha}{qB}.$$

В итоге мы получили, что частица будет двигаться по спирали (прямолинейно равномерно вдоль оси X и одновременно по окружности в плоскости YOZ).

Найдем шаг спирали H (расстояние, на которое смещается частица вдоль оси X за время одного оборота T по окружности).

Период вращения T равен:

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon\sin\alpha} = \frac{2\pi m}{qB},$$

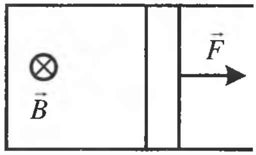
тогда

$$H = \upsilon T\cos\alpha = \frac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{qB}.$$

Ответ: частица будет двигаться по спирали радиусом $R = \dfrac{m\upsilon\sin\alpha}{qB}$ и шагом $H = \dfrac{2\pi m\upsilon\cos\alpha}{qB}$.

Задача 3

Длинный проводник согнут в виде буквы П и закреплен в горизонтальной плоскости. На параллельные стороны проводника опирается концами перпендикулярная проводящая перемычка. Масса перемычки 100 г, длина 1 м. Сопротивление перемычки равно 1 Ом. Проводник находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл. К перемычке прикладывают постоянную горизонтальную силу 0,6 Н, как показано на рисунке. Найдите, с какой установившейся скоростью будет двигаться перемычка. Коэффициент трения между стержнем и перемычкой равен 0,3. Сопротивлением проводника, по которому двигается перемычка, пренебречь.



Решение.

Под действием приложенной силы $\vec{F}$ перемычка начнет двигаться. Так как перемычка проводящая и она двигается в магнитном поле, то на ее концах возникнет ЭДС электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E} = B\upsilon l,$$

где B — индукция магнитного поля, υ — скорость движения перемычки, l — длина перемычки.

Стержень и перемычка — проводящие, значит, при возникновении ЭДС в замкнутом контуре возникнет индукционный электрический ток I, который можно найти по закону Ома для полной цепи:

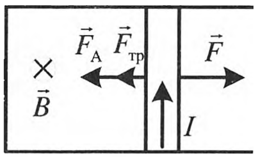
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\upsilon l}{R}, \qquad (1)$$

где R — сопротивление перемычки, так как сопротивлением изогнутого проводника, по которому скользит перемычка, можно пренебречь (по условию).

По правилу Ленца направление индукционного тока будет таким, чтобы он своим магнитным полем препятствовал увеличению магнитного потока (в замкнутом контуре, образованном проводником и перемычкой) при движении перемычки по проводнику.

Получается, что проводящая перемычка, по которой идет ток, двигается в магнитном поле. Значит, со стороны магнитного поля на нее будет действовать сила Ампера F_A. Направление силы Ампера можно найти по правилу левой руки.

Покажем направление сил на рисунке.

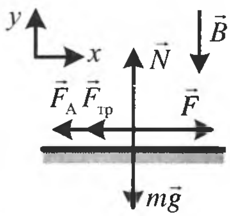


Сделаем еще один рисунок (вид сбоку), введем систему координат и покажем все силы, действующие на перемычку.

Тогда по второму закону Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A + \vec{F}_{тр} + \vec{F} = m\vec{a},$$

где $F_{тр}$ — сила трения скольжения.



После установления постоянной скорости

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A + \vec{F}_{тр} + \vec{F} = 0.$$

Направим координатные оси, как показано на рисунке, и распишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y:

$$F - F_A - F_{тр} = 0, \qquad (2)$$

$$N - mg = 0. \qquad (3)$$

Так как

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ — коэффициент трения между перемычкой и П-образным проводником, то сила трения с учетом уравнения (3) равна:

$$F_{тр} = \mu mg. \qquad (4)$$

Сила Ампера с учетом уравнения (1):

$$F_A = BIl = Bl\frac{B\upsilon l}{R} = \frac{B^2l^2\upsilon}{R}. \qquad (5)$$

Подставляя значения $F_{тр}$ и F_A в уравнение (2), получим

$$F - \frac{B^2l^2\upsilon}{R} - \mu mg = 0,$$

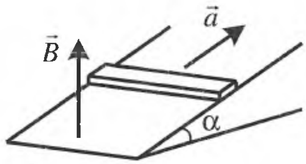
откуда

$$\upsilon = \frac{(F - \mu mg)R}{B^2l^2} = 1,2 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = \dfrac{(F - \mu mg)R}{B^2l^2} = 1,2$ м/с.

Задача 4

Горизонтальный проводник поступательно движется с ускорением вверх по гладкой наклонной плоскости в вертикальном однородном магнитном поле (см. рисунок). По проводнику протекает ток I = 2 А. Угол наклона плоскости α = 30°. Масса проводника m = 0,1 кг, длина L = 1 м. Модуль индукции магнитного поля B = 0,2 Тл. Найдите ускорение проводника a.

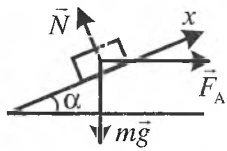


Решение.

Задача не сложная, но в ней часто делают две типичные ошибки.

Сделаем рисунок и покажем силы, действующие на проводник.

С направлением силы тяжести и силы реакции опоры все понятно.



Сила тяжести направлена вертикально вниз, сила реакции опоры направлена перпендикулярно плоскости вверх.

А вот с направлением силы Ампера школьники часто путаются и направляют ее вдоль наклонной плоскости вверх — это первая частая ошибка.

На самом деле, согласно правилу левой руки, сила Ампера направлена горизонтально вправо, как показано на рисунке.

Вторая ошибка связана со значением силы Ампера.

Многие считают, что сила Ампера равна:

$$F_A = IBL\sin\alpha,$$

и снова делают ошибку (2-я типичная ошибка).

В формуле для силы Ампера имеется в виду угол между направлением проводника и вектором магнитной индукции. В нашем случае этот угол равен 90°.

Поэтому правильное значение силы Ампера:

$$F_A = IBL.$$

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось x

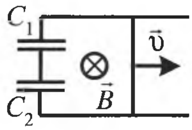
$$F_A\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma,$$

откуда находим ускорение:

$$a = \frac{F_А \cos\alpha - mg\sin\alpha}{m} = \frac{IBL\cos\alpha - mg\sin\alpha}{m} \approx 5{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = \dfrac{IBL\cos\alpha - mg\sin\alpha}{m} \approx 5{,}4 \text{ м/с}^2.$

Задача 5



По двум параллельным проводникам, находящимся друг от друга на расстоянии $l = 0{,}5$ м, перемещают перемычку с постоянной скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Между проводниками включены последовательно два конденсатора, причем отношение их емкостей равно: $n = \dfrac{C_2}{C_1} = 1{,}5$. Вся система находится в постоянном однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости, в которой лежат проводники. Какова индукция магнитного поля, если на конденсаторе C_2 напряжение $U = 0{,}5$ В?

Решение.

При движении проводника в магнитном поле на его концах возникает ЭДС индукции:

$$\varepsilon = Bl\upsilon.$$

Заряд q на обоих конденсаторах будет одинаков, а суммарное напряжение будет равно ЭДС на концах проводника:

$$U_1 + U_2 = \varepsilon.$$

Тогда напряжение на конденсаторах

$$U_1 = \frac{q}{C_1} \text{ и } U_2 = \frac{q}{C_2} = U,$$

откуда

$$q = C_2 U.$$

Тогда

$$U_1 = \frac{C_2 U}{C_1} = nU.$$

Следовательно,

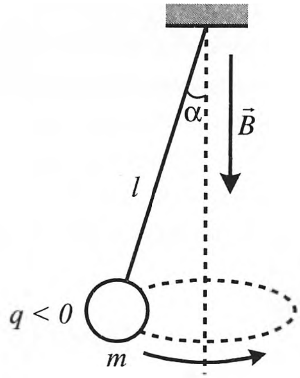
$$U_1 + U_2 = nU + U = (1+n)U = \varepsilon = Bl\upsilon.$$

Выразив из уравнения индукцию B, получим

$$B = \frac{(1+n)U}{l\upsilon} = 0{,}25 \text{ Тл}.$$

Ответ: $B = \dfrac{(1+n)U}{l\upsilon} = 0{,}25$ Тл.

Задача 6



Отрицательно заряженный шарик массой m, подвешенный на нити, равномерно вращается по окружности в горизонтальной плоскости в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Длина нити равна l, скорость вращения шарика — υ, угол отклонения нити от вертикали равен α. Найдите заряд шарика q.

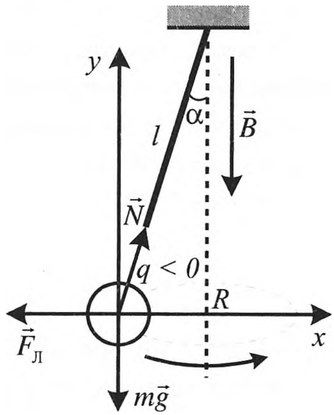
Решение.

Сделаем рисунок и покажем силы, действующие на шарик.

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{л}} + \vec{N} = m\vec{a},$$

где $\vec{N}$ — сила натяжения нити, $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}_{\text{л}}$ — сила Лоренца, действующая на шарик со стороны магнитного поля.



Направим оси x и y, как показано на рисунке. Распишем второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$$N\cos\alpha - mg = 0,$$
$$N\sin\alpha - |q|\upsilon B = ma.$$

Выразив из первого уравнения силу реакции опоры N и подставив во второе, получим

$$mg \cdot tg\alpha - |q|\upsilon B = ma.$$

Так как шарик вращается с постоянной скоростью, то речь идет о центростремительном ускорении, т. е.

$$a = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

Тогда

$$mg \cdot \text{tg}\ \alpha - |q|\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{R},$$

откуда

$$|q| = \frac{m}{\upsilon B}\left(g \cdot \text{tg}\ \alpha - \frac{\upsilon^2}{R}\right).$$

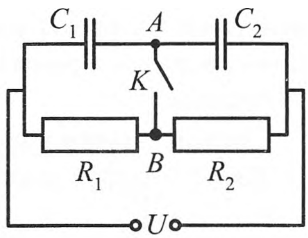
Ответ: $|q| = \frac{m}{\upsilon B}\left(g \cdot \text{tg}\ \alpha - \frac{\upsilon^2}{R}\right).$

Контрольная работа 3

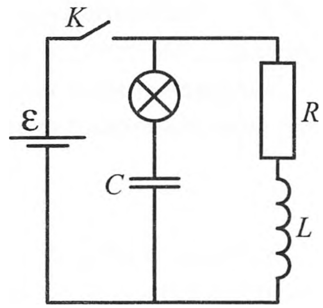
1. Два одинаковых шарика висят на непроводящих нитях одинаковой длины. Верхние концы нитей закреплены в одной точке. Шарики имеют одинаковые заряды и отклоняются на нитях на некоторый угол друг от друга. Найдите плотность материала шариков, если при погружении их в жидкий диэлектрик плотностью 900 кг/м^3 и диэлектрической проницаемостью 4 угол расхождения нитей не изменяется.

2. Электрон разогнали разностью потенциалов 1 кВ. После этого он влетает посередине между обкладками конденсатора параллельно им. Расстояние между обкладками 6 мм. При каком наименьшем напряжении между обкладками электрон не вылетит из конденсатора? Длина пластин конденсатора 5 см.

3. В схеме, изображенной на рисунке, известны величины R_1 = 8 Ом, R_2 = 2 Ом, C_1 = 4 мкФ, C_2 = 8 мкФ, U = 220 В. Какой заряд пройдет через ключ K, если его замкнуть?



4. Определите, какое количество теплоты выделится на резисторе в схеме, указанной на рисунке, после размыкания ключа. ЭДС идеального источника тока равно 10 В, индуктивность катушки 10 мГн, емкость конденсатора 1 мФ, сопротивление лампы 8 Ом, сопротивление резистора 2 Ом.



5. Кольцо изготовлено из алюминиевой проволоки длиной 1 м и помещено в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца. Площадь поперечного сечения проволоки 1 мм^2. Индукция магнитного поля начинает меняться со скоростью 2 мТл/с. Определите величину возникшего индукционного тока.

Раздел 4
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ОПТИКА

Глава 1
Механические колебания

§ 1. Определение колебания

Механические колебания — это механические движения, повторяющиеся через равные промежутки времени. Повторяться движения могут полностью или частично.

Эти промежутки времени называют **периодом колебания**.

Системы, в которых можно наблюдать колебания, называют колебательными системами.

Колебания, которые происходят в системе без постоянного действия внешних сил, называют свободными колебаниями.

Гармонические колебания — колебания, в которых смещение тела изменяется по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ или } x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A — амплитуда (максимальное отклонение от положения равновесия), φ_0 — начальная фаза колебаний, ω — циклическая частота колебаний.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

где T — период колебаний (время одного полного колебания), ν — частота колебаний (количество колебаний в единицу времени). В СИ колебания измеряют в герцах: 1 Гц = с$^{-1}$.

Скорость тела в колебательном движении можно найти как производную от координаты, а ускорение — как производную от скорости.

Тогда если

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

то

$$\upsilon(t) = x'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$a(t) = \upsilon'(t) = x''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t).$$

Поэтому уравнение вида

$$x'' = -\omega^2 x$$

также можно считать **уравнением гармонических колебаний**.

Колебания, которые происходят без действия переменных во времени внешних сил, называют **свободными**. Свободные колебания возникают в результате однократного выведения системы из положения равновесия. Если внешние и внутренние силы потенциальны, то механическая энергия при колебаниях и амплитуда колебаний сохраняются.

В реальной жизни из-за наличия сил трения свободные колебания являются **затухающими**.

Колебания, которые происходят под действием внешней силы $F(t)$, периодически меняющейся во времени, называют **вынужденными колебаниями**.

§ 2. Маятники

Математический маятник — материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. Математический маятник совершает колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Период колебаний математического маятника (**формула Гюйгенса**):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Физический (пружинный) маятник представляет собой груз массой m, подвешенный на пружине жесткостью k.

Период колебаний физического маятника:

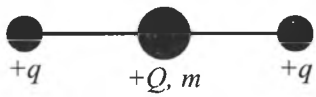
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Уравнение для гармонических колебаний, как правило, можно получить из второго закона Ньютона или из закона сохранения энергии.

Рассмотрим это на примере груза на пружине.

Задача 1

По гладкой горизонтальной направляющей длиной $2l$ скользит бусинка с положительным зарядом $Q > 0$ и массой m. На концах направляющей находятся положительные заряды $q > 0$ (см. рисунок). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T. Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд уменьшить в 2 раза?



Решение.

Направим ось x, как показано на рисунке.

При смещении бусинки вправо на малое расстояние $x \ll l$ от положения равновесия на нее будет действовать возвращающая сила F со стороны зарядов:

$$F = \frac{kqQ}{(l+x)^2} - \frac{kqQ}{(l-x)^2} = \frac{kqQ\left((l-x)^2-(l+x)^2\right)}{(l+x)^2(l-x)^2} = \frac{-4kqQlx}{(l+x)^2(l-x)^2} = \frac{-4kqQlx}{(l^2-x^2)^2}.$$

При малых $x \ll l$:

$$l^2 - x^2 \approx l^2,$$

тогда

$$F \approx \frac{-4kqQx}{l^3}.$$

По второму закону Ньютона для бусинки:

$$F = ma.$$

Так как $a = x''$, то

$$\frac{-4kqQx}{l^3} = mx'',$$

откуда

$$x'' = \frac{-4kqQ}{ml^3}x.$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний, тогда

$$\omega^2 = \frac{4kqQ}{ml^3},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kqQ}{ml^3}}} = \pi l\sqrt{\frac{ml}{kqQ}}.$$

А значит, если заряд бусинки уменьшить в 2 раза, т. е. $Q_2 = 0{,}5Q$, то

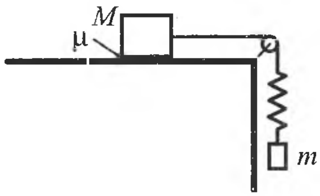
$$\frac{T_2}{T} = \frac{\pi l\sqrt{\frac{ml}{0{,}5kqQ}}}{\pi l\sqrt{\frac{ml}{kqQ}}} = \sqrt{2}.$$

То есть период колебаний бусинки увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

Ответ: увеличится в $\sqrt{2}$ раз.

Задача 2

Брусок, покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из грузика и легкой пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью через блок (см. рисунок). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола равен 0,4. Отношение массы бруска к массе грузика равно 6. Грузик маятника совершает колебания с частотой 1 Гц вдоль вертикали, совпадающей с вертикальным отрезком нити. Какова максимально возможная амплитуда этих колебаний, при которой они остаются гармоническими?



Решение.

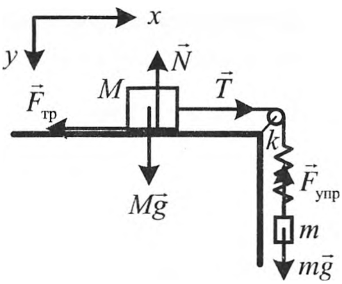
Колебания остаются гармоническими, если выполняются 2 условия:

1) брусок не двигается по столу, а значит, и верхний конец пружины не начинает двигаться вниз;

2) нить все время остается натянутой, т. е. верхний конец пружины не поднимается вверх.

Первое условие достигается, если сила натяжения нити в процессе колебаний не превышает максимально возможную силу трения между бруском и столом.

Второе условие — пружина не сжимается относительно недеформированного состояния в процессе колебаний.



Сделаем рисунок и покажем силы, действующие на брусок и грузик.

Запишем второй закон Ньютона для бруска и груза в проекциях на оси x и y:

$$T - \mu N = Ma_1,$$
$$Mg - N = 0,$$
$$mg - F_{упр} = ma_2,$$

где T — сила натяжения нити, μ — коэффициент трения между бруском и столом, N — сила реакции опоры со стороны стола, M — масса бруска, m — масса груза, $F_{упр}$ — сила упругости пружины.

С учетом условий

$$T_{max} - \mu Mg \le 0.$$

Так как нить невесома, то $T = F_{упр}$ и $k(x_0 + A) \le \mu Mg$, следовательно

$$A \le \frac{\mu Mg}{k} - x_0.$$

И с учетом второго условия

$$A \le x_0,$$

где A — амплитуда колебаний, x_0 — удлинение пружины в положении равновесия груза.

По второму закону Ньютона для положения равновесия груза

$$kx_0 = mg,$$

откуда

$$x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Частота колебаний

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}},$$

откуда

$$x_0 = \frac{g}{(2\pi\nu)^2},$$
$$k = m(2\pi\nu)^2.$$

Из первого условия:

$$A \le \frac{\mu Mg}{k} - x_0 = \frac{\mu Mg}{m(2\pi\nu)^2} - \frac{g}{(2\pi\nu)^2} = \frac{g}{(2\pi\nu)^2}\left(\frac{\mu M}{m} - 1\right) \approx 35 \text{ см}.$$

Из второго условия

$$A \le x_0 = \frac{g}{(2\pi\nu)^2} \approx 25 \text{ см}.$$

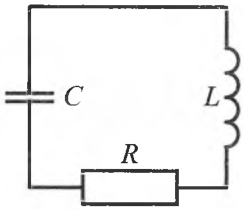
Так как должны выполняться оба условия, то выбираем наименьшее значение амплитуды из полученных

$$A \le \frac{g}{(2\pi\nu)^2} \approx 25 \text{ см}.$$

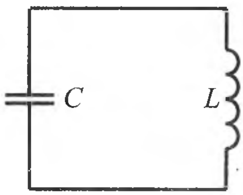
Ответ: $A \le \dfrac{g}{(2\pi\nu)^2} \approx 25$ см.

Глава 2
Электромагнитные колебания

Колебательный контур — электрическая цепь, состоящая из конденсатора емкостью C, катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением R, соединенных между собой.



Идеальный колебательный контур — колебательный контур без активного сопротивления ($R = 0$).



Рассмотрим свободные электромагнитные колебания в идеальном колебательном контуре с периодом колебаний T.

Отсчет времени t начнем с момента подключения к контуру заряженного конденсатора. Для определенности будем считать, что его верхняя пластина заряжена положительно, а нижняя — отрицательно, и тогда напряженность электрического поля направлена сверху вниз.

Заряд q_0, напряжение U_0 на обкладках конденсатора в этот момент времени максимально, тока в контуре еще нет, и, следовательно, магнитное поле в катушке отсутствует.

Энергия контура состоит только из энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Сначала $\left(t < \frac{T}{4}\right)$ конденсатор разряжается, и в контуре идет ток по часовой стрелке. В катушке возникает ЭДС самоиндукции, которая препятствует увеличению этого тока. Энергия конденсатора уменьшается, энергия катушки постепенно растет. Полная энергия контура состоит из энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки:

$$W = \frac{CU_1^2}{2} + \frac{LI_1^2}{2}.$$

В момент времени $t = \frac{T}{4}$ конденсатор окажется полностью разряжен (его заряд и напряжение равны нулю), а ток I_0 в контуре максимален, вся энергия контура состоит из энергии магнитного поля катушки:

$$W = \frac{LI_0^2}{2}.$$

В промежутке времени $\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}$ ток в цепи будет уменьшаться. При уменьшении тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая убыванию тока в катушке. Энергия катушки уменьшается. Конденсатор снова заряжается, только теперь положительно заряженной оказывается нижняя пластинка.

Энергия контура снова состоит из энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки:

$$W = \frac{CU_1^2}{2} + \frac{LI_1^2}{2}.$$

В момент времени $t = \frac{T}{2}$ ток в контуре прекращается, магнитное поле в катушке равно нулю, конденсатор заряжен.

Энергия контура

$$W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Можно сказать, что за половину периода колебания конденсатор «перезарядился». Дальше весь процесс повторяется в обратную сторону, и к моменту времени $t = T$ вся энергия контура снова будет находиться на конденсаторе, его верхняя пластинка будет заряжена положительно, как и в самом начале колебания.

Период колебаний (формула Томсона):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Уравнение колебаний:

$$q(t) = Q\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где Q — амплитудное значение заряда (максимальное значение), φ_0 — начальная фаза колебаний, ω — циклическая (круговая) частота колебаний.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$q'' = -\omega^2 q = -\frac{1}{LC}q.$$

Зависимость силы тока от времени в контуре (ток в контуре равен производной от заряда по времени):

$$I(t) = q'(t) = -Q\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = -I_0\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $I_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}U_0$ — амплитуда тока, $U_0 = \frac{Q}{C}$ — амплитуда напряжения.

Затухающие колебания: сопротивление катушки, проводов, наличие активных сопротивлений приводят к затуханию колебаний. При этом часть энергии переходит в тепловую энергию.

Глава 3

Геометрическая оптика

§ 1. Основные понятия и законы

Свет — это совокупность огромного количества фотонов.

Фотоны — элементарные частицы, которые одновременно обладают свойствами и частиц, и электромагнитных волн.

Скорость света c (скорость фотонов) в вакууме равна: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Скорость света в разных средах различна и зависит от показателя преломления среды n.

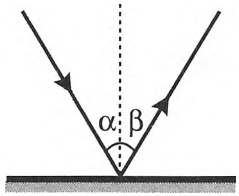
$$\upsilon = \frac{c}{n}.$$

Показатель преломления вакуума равен 1.

Отражение и преломление

В однородной среде свет распространяется прямолинейно. При падении света на границу раздела двух сред часть света (а иногда и весь свет) отражается обратно (в первую среду).

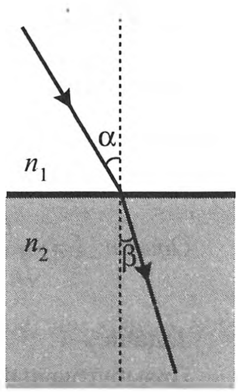
Закон отражения: луч падающий и луч отраженный, а также перпендикуляр к поверхности раздела сред лежат в одной плоскости. Угол падения равен углу отражения:



$$\alpha = \beta.$$

Следовательно, падающий и отраженный лучи могут меняться местами — **закон обратимости** световых лучей.

Вторая часть света проходит во вторую среду, при этом изменяя свое направление согласно **закону преломления** света:



$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta,$$

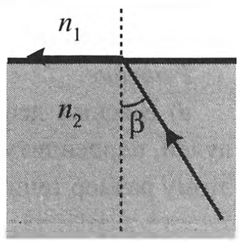
или

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

Предельный угол полного отражения

При переходе лучей из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду ($n_1 < n_2$) угол падения меньше угла преломления. При увеличении угла падения увеличивается и угол преломления.



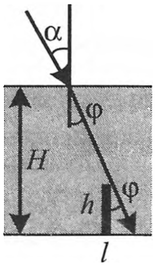
Когда угол падения достигает значения $\alpha_{пр}$, при котором угол преломления будет 90°, — преломленный луч пойдет по границе раздела двух сред и не попадет во вторую среду.

При переходе из оптически менее плотной среды в более плотную полное отражение невозможно.

Задача 1

В дно озера глубиной 3 м вертикально вбита свая. Высота сваи 1 м. Угол падения солнечных лучей на поверхность воды равен 30°. Определите длину тени от сваи на дне водоема. Коэффициент преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

Решение.



Сделаем рисунок и покажем ход луча после преломления, который проходит через самую вершину сваи.

Тень образуется там, куда не попадают солнечные лучи, которые не могут пройти сквозь сваю.

Тогда длину тени l можно найти из прямоугольного треугольника, образованного сваей и лучом:

$$l = h \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

где h — высота сваи, φ — угол преломления луча.

По закону преломления

$$\sin\alpha = n \sin\varphi,$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{n},$$

$$\operatorname{tg}\ \varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{\sin\alpha}{n\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)^2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

Длина тени

$$l = h \cdot \operatorname{tg}\ \varphi = \frac{h\cdot\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \approx 1{,}13 \text{ м}.$$

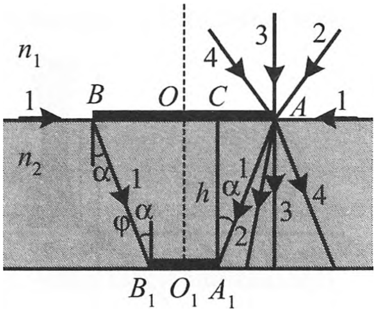
Ответ: $l = \frac{h\cdot\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \approx 1{,}13$ м.

Задача 2

Прямоугольный плот длиной $a = 5$ м и шириной $b = 3$ м плавает в открытом бассейне глубиной $h = 1$ м. Каковы размеры тени на дне бассейна: а) в солнечный день; б) когда все небо затянуто тучами?

Решение.

а) В ясный день можно считать, что плот освещается параллельным пучком солнечных лучей, перпендикулярных поверхности воды. Эти лучи проходят в воду не преломляясь, поэтому размер тени будет равен размеру плота (5 × 3 м).



б) В пасмурный день лучи света рассеиваются, и можно сказать, что они падают с неба «со всех сторон» — т. е. угол падения лучей — всевозможные варианты от 0 до 90° с двух сторон плота. Границу тени будет определять луч, падающий почти вдоль воды (луч 1 на рисунке).

Если угол падения составляет 90°, то угол преломления α равен: $\sin\alpha = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}$ (так как $\sin 90° = 1$), $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}33$, где n_1 — абсолютный показатель преломления воздуха, n_2 — показатель преломления воды абсолютный, n_{12} — относительный показатель преломления.

Тогда размер тени A_1B_1 с каждой стороны уменьшится на величину $AC = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

где $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{n_{12}}{\sqrt{1-n_{12}^2}}$, т. е. $A_1B_1 = AB - 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha = AB - \frac{2hn_{12}}{\sqrt{1-n_{12}^2}}$.

Тогда длина тени a_1 равна:

$$a_1 = a - \frac{2hn_{12}}{\sqrt{1-n_{12}^2}} \approx 2{,}72 \text{ м}$$

и ширина тени b_1 равна:

$$b_1 = b - \frac{2hn_{12}}{\sqrt{1-n_{12}^2}} \approx 0{,}72 \text{ м}.$$

Ответ: а) 5 × 3 м; б) 2,72 × 0,72 м.

§ 2. Зеркала и линзы

Зеркалом называют поверхность, хорошо отражающую свет. Изображение светящейся точки в зеркале (или в линзе) находится на пересечении световых лучей или продолжений световых лучей.

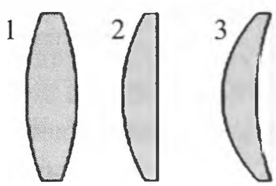
Изображение предмета, полученное в результате пересечения отраженных лучей, называют **действительным**, а изображение, полученное при пересечении продолжений этих лучей за зеркало, — **мнимым**.

Линзы — прозрачные тела, ограниченные криволинейными поверхностями.

Чаще всего используют сферические поверхности.

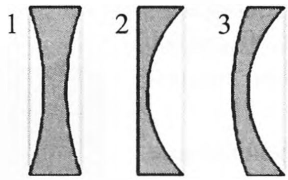
Различают линзы выпуклые и вогнутые. У выпуклых линз середина толще, чем края. У вогнутых линз — наоборот.

Выпуклые линзы еще называют *собирающими* (или положительными). Виды и обозначения собирающей линзы показаны на рисунке:



1 — двояковыпуклая
2 — плосковыпуклая
3 — вогнутовыпуклая

Вогнутые линзы называют *рассеивающими* (отрицательными).



1 — двояковогнутая
2 — плосковогнутая
3 — выпукловогнутая

Проходящие через линзу лучи преломляются два раза на обеих ее поверхностях. Но если линза тонкая (толщина линзы много меньше радиусов кривизны ее поверхностей), то смещением луча в линзе можно пренебречь, а 2 преломления можно заменить одним (в главной плоскости линзы).

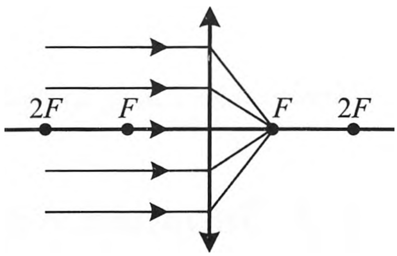
Оптическая ось линзы — прямая, проходящая через центр линзы.

Оптическая ось, перпендикулярная к плоскости линзы, называется **главной оптической осью**.

Световые лучи, проходящие через центр линзы (вдоль оптической оси), не преломляются.

§ 3. Собирающая линза

Если на тонкую собирающую линзу направить пучок лучей, параллельных ее главной оптической оси, то после преломления в линзе они все пересекутся в одной точке на главной оптической оси за линзой. Эта точка называется **фокусом** линзы.

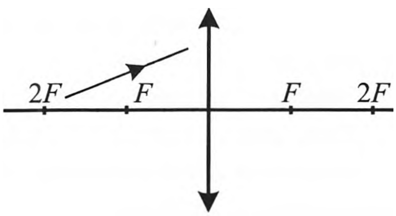


Расстояние от линзы до фокуса называется **фокусным расстоянием**.

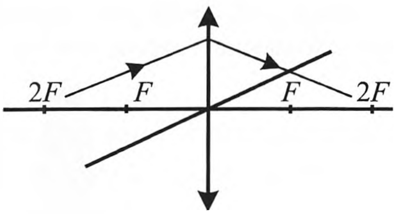
Плоскость, перпендикулярная оптической оси и проходящая через фокус, называется **фокальной плоскостью**.

Если мы направим параллельный пучок лучей под углом к главной оптической оси, то после преломления в линзе они все пересекутся в фокальной плоскости.

Построим ход произвольного луча после преломления в линзе.



1) Пустим луч, параллельный данному, через центр линзы, он не испытает преломления.



2) Параллельные лучи пересекаются в фокальной плоскости.

Результат можно увидеть на рисунке.

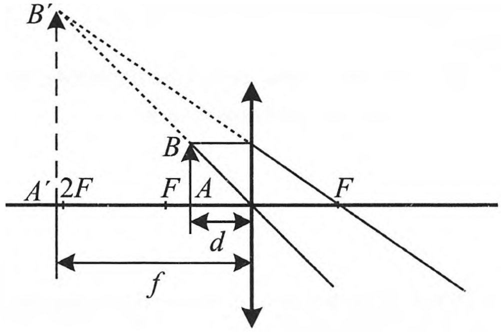
Теперь построим изображение предметов, даваемое собирающей линзой.

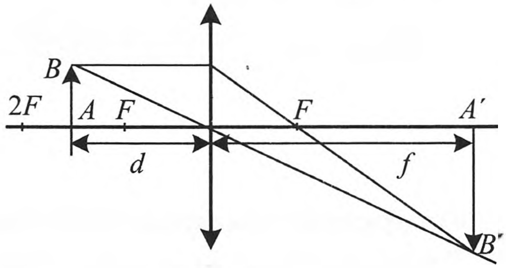
Рассмотрим предмет *AB* и построим его изображение в зависимости от расстояния между предметом и линзой.

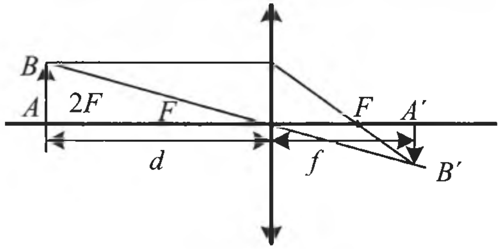
Для построения изображения точек *A* и *B* нам потребуется по 2 луча (один из них должен проходить через центр линзы, второй — параллельно главной оптической оси), и тогда их пересечение будет давать изображение соответствующей точки.

Как видим из рисунков, изображение может быть прямым или обратным (перевернутым), увеличенным или уменьшенным, действительным или мнимым.

Изображение предмета, полученное в результате пересечения преломленных лучей, называют *действительным* (его можно наблюдать на экране), а изображение, полученное при пересечении продолжений этих лучей, — *мнимым* (находится по ту же сторону от линзы, что и предмет).



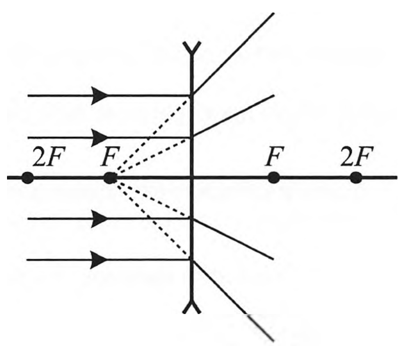




Расстояние от линзы до предмета, d	Прямое или перевернутое	Действительное или мнимое	Увеличенное или уменьшенное
$d < F$	прямое	мнимое	увеличенное
$F < d < 2F$	перевернутое	действительное	увеличенное
$d > 2F$	перевернутое	действительное	уменьшенное

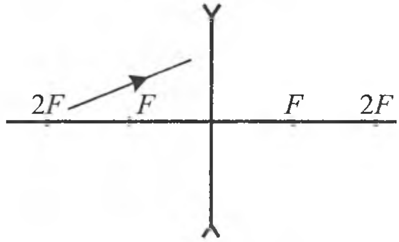
§ 4. Рассеивающая линза

Если на тонкую рассеивающую линзу направить пучок лучей, параллельных ее главной оптической оси, то после преломления в линзе все их продолжения пересекутся в одной точке на главной оптической оси перед линзой. Эта точка называется **фокусом** рассеивающей линзы. (Наблюдателю по другую сторону линзы будет казаться, что все эти лучи идут из одной точки, находящейся в фокусе линзы.) Фокус рассеивающей линзы иногда называют отрицательным.



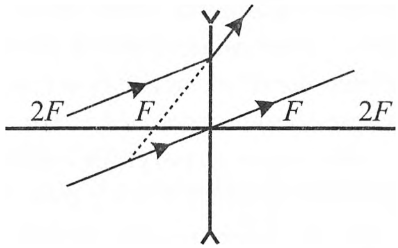
Построим ход произвольного луча после преломления в линзе.

1) Пустим луч, параллельный данному, через центр линзы, он не испытает преломления.



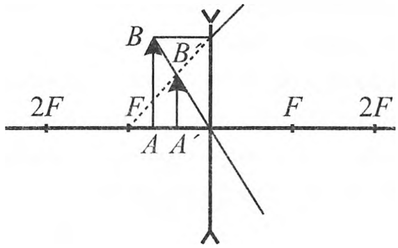
2) Продолжения лучей после преломления пересекаются в фокальной плоскости.

Результат можно увидеть на рисунке.



Построение изображений предметов, даваемое рассеивающей линзой

Рассеивающая линза всегда дает мнимое уменьшенное изображение действительного предмета.



§ 5. Формула тонкой линзы. Оптическая сила линзы. Увеличение

Формула тонкой линзы

$$\pm\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F},$$

где d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, F — фокусное расстояние линзы.

Если предмет действительный, то перед $\frac{1}{d}$ ставится знак «плюс»; если предмет мнимый (когда на линзу падает сходящийся пучок лучей, который в отсутствие линзы формирует в некоторой точке пространства действительное изображение), то перед $\frac{1}{d}$ ставится знак «минус».

Если изображение, даваемое линзой, действительное, то перед $\frac{1}{f}$ ставится знак «плюс»; если изображение мнимое, то перед $\frac{1}{f}$ ставится знак «минус».

Если линза собирающая, то перед $\frac{1}{F}$ ставится знак «плюс»; если линза рассеивающая, то перед $\frac{1}{F}$ ставится знак «минус».

Оптическая сила линзы

$$D = \pm\frac{1}{F}.$$

Оптическая сила измеряется в диоптриях (дптр). Фокусное расстояние — в метрах. Оптическую силу рассеивающей линзы считают отрицательной.

Общая оптическая сила нескольких линз, сложенных вместе, равна их алгебраической сумме:

$$D = D_1 + D_2 + \ldots$$

Увеличение линзы

Увеличением линзы или оптической системы называют отношение размеров изображения к размерам самого предмета.

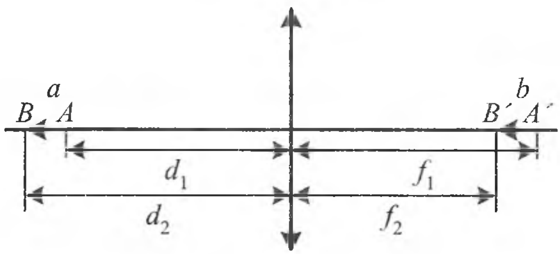
Выделяют 2 основных случая:

1) если предмет находится в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси линзы (оптической системы), то увеличение называют *поперечным* и обозначают буквой Γ.

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{f}{d},$$

где b — размер изображения, a — размер предмета, d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения;

2) если предмет расположен вдоль главной оптической оси линзы, то изображение предмета также будет располагаться вдоль главной оптической оси, и увеличение в этом случае называют *продольным*.



$$\Gamma_{12} = \Gamma_1\Gamma_2,$$

где $\Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1}$, $\Gamma_2 = \frac{f_2}{d_2}$.

Если размеры предмета малы по сравнению с расстояниями от предмета до линзы ($a \ll d_1$, $a \ll d_2$) и размеры изображения предмета также намного меньше расстояния от изображения до линзы ($b \ll f_1$, $b \ll f_2$), то

$$\Gamma_{12} \approx \Gamma^2.$$

Задача 1

Оптическая система состоит из расположенных друг за другом рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 10 см и собирающей линзы с неизвестным фокусным расстоянием. Главные оптические оси линз совпадают. Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси перед рассеивающей линзой на расстоянии 10 см от нее. Система создает изображение предмета в натуральную величину на экране, находящемся за собирающей линзой на расстоянии 30 см от нее.

1) На каком расстоянии от себя создает изображение предмета рассеивающая линза?

2) Найдите расстояние между линзами.

Решение.

1) Предмет находится в фокусе рассеивающей линзы, а значит, его изображение будет в два раза меньше на расстоянии, равном половине фокусного расстояния от линзы, с той же ее стороны:

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=\frac{1}{|F_1|},$$

откуда

$$f_1=\frac{|F|_1\,d_1}{|F_1|+d_1}=5\text{ см}.$$

2) Размер этого мнимого изображения также в два раза меньше натуральной величины предмета. Значит, собирающая линза должна увеличить его также в два раза, чтобы полученное изображение было в натуральную величину, т. е.

$$\frac{f_2}{d_2}=2,$$

откуда

$$d_2=\frac{f_2}{2}=15\text{ см}.$$

Расстояние между линзами $l=d_2-f_1=10$ см.

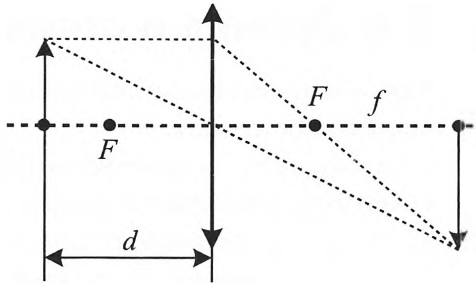
Чтобы лучше понять решение задачи, попробуйте самостоятельно сделать рисунок.

Ответ: 1) $f_1=5$ см; 2) $l=10$ см.

Задача 2

С помощью тонкой линзы на экране получили изображение предмета с шестикратным увеличением. Предмет и плоскость экрана расположены перпендикулярно главной оптической оси. Экран передвинули на 20 см вдоль главной оптической оси линзы. После этого, не меняя положения линзы, передвинули предмет так, что изображение снова стало резким. Теперь на экране получено изображение с четырехкратным увеличением. Найдите фокусное расстояние линзы.

Решение.



Сделаем схематический рисунок предмета, линзы и изображения.

Запишем формулу тонкой линзы для первого случая:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \qquad (1)$$

где d — расстояние от линзы до предмета, f — расстояние от линзы до экрана, F — фокусное расстояние линзы.

По формуле увеличения линзы

$$\Gamma=\frac{f}{d}, \qquad (2)$$

откуда

$$d=\frac{f}{\Gamma}. \qquad (3)$$

Подставив d в уравнение (1), получим

$$\frac{\Gamma}{f}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$$

или

$$\frac{\Gamma+1}{f}=\frac{1}{F}. \qquad (4)$$

Пусть f_1 и f_2 — расстояния от линзы до экрана до передвижения экрана с предметом и после соответственно, Γ_1 и Γ_2 — увеличения линзы до передвижения экрана с предметом и после соответственно.

Так как фокусное расстояние линзы не меняется, то из уравнения (4) получим

$$\frac{\Gamma_1+1}{f_1}=\frac{\Gamma_2+1}{f_2}. \qquad (5)$$

По условию $\Gamma_2<\Gamma_1$. Значит, из равенства (5) следует, что $f_2<f_1$, а так как экран передвинули на расстояние $l=20$ см, то $f_2=f_1-l$. Подставив f_2 в уравнение (5), получим

$$\frac{\Gamma_1+1}{f_1}=\frac{\Gamma_2+1}{f_1-l},$$

откуда

$$f_1=\frac{l(\Gamma_1+1)}{\Gamma_1-\Gamma_2}. \qquad (6)$$

Подставив полученное значение в уравнение (4) и выразив фокусное расстояние, получим

$$F=\frac{f_1}{\Gamma_1+1}=\frac{l(\Gamma_1+1)}{(\Gamma_1-\Gamma_2)(\Gamma_1+1)}=\frac{l}{\Gamma_1-\Gamma_2}=10\text{ см}.$$

Ответ: $F=\dfrac{l}{\Gamma_1-\Gamma_2}=10$ см.

§ 6. Зрение и оптические приборы

Глаз можно считать оптической системой, которая дает изображение на сетчатой оболочке глазного яблока (сетчатке).

Аккомодация — изменение оптической силы глаза за счет изменения фокуса хрусталика.

Расстояние наилучшего зрения — наименьшее расстояние, на котором можно рассматривать детали без напряжения глаз (для нормального зрения — 25 см).

Если в спокойном состоянии глаза фокус F находится не на сетчатке, а перед ней, то глаз называют **близоруким**.

Если в спокойном состоянии глаза фокус F находится не на сетчатке, а за ней, то глаз называют **дальнозорким**.

Лупа — короткофокусная собирающая линза. Увеличение, даваемое лупой, равно отношению расстояния наилучшего зрения к фокусному расстоянию лупы.

Микроскоп — оптический прибор для рассмотрения мелких предметов.

Задача 1

Близорукий человек читает без очков, держа книгу на расстоянии $d = 10$ см от глаз. Какова оптическая сила D необходимых ему для чтения очков?

Решение.

В правильно подобранных очках человек должен читать книгу на «расстоянии наилучшего зрения» ($d_0 = 25$ см).

Когда человек надевает очки, предметом для глаз уже является не сам предмет, а его мнимое изображение, создаваемое очками. Значит, именно изображение должно находиться на расстоянии 10 см от глаз. По формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F} = D,$$

откуда

$$D = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = 4 - 10 = -6 \text{ дптр.}$$

Ответ: $D = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = -6$ дптр.

Глава 4

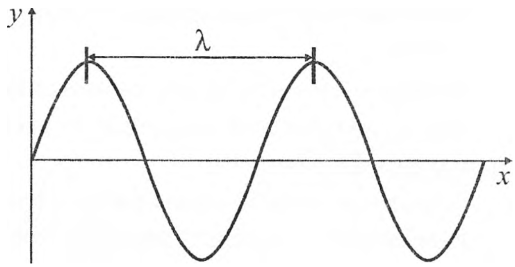
Волны

§ 1. Механические волны

Слово «волна» знакомо всем. Все мы видели, как распространяются волны по воде в реке из-за дуновения ветра или брошенного в воду камня.

Волны — это колебания, которые распространяются в пространстве (в твердых телах, жидкостях или газах).

Длина волны λ — расстояние между двумя ближайшими точками волны, которые колеблются в одинаковых фазах (например, между двумя пиками волны).



Скорость волны υ определяет быстроту распространения волны в пространстве:

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu,$$

где T — период волны — время, за которое волна перемещается на расстояние, равное длине волны λ; ν — частота колебаний.

В разных средах волны распространяются с разной скоростью. Быстрее всего волны распространяются в твердых средах, медленнее — в жидких, еще медленнее их распространение в газах.

Выделяют два вида волн: *продольные* и *поперечные*.

В продольных волнах колебания частиц происходят в направлении распространения волны.

В поперечных волнах колебания частиц происходят перпендикулярно распространению волны.

§ 2. Звуковые волны

Если мы возьмем в руки гитару и ударим по струнам, то сможем не только увидеть колебания струн, но и услышим звук, издаваемый гитарой.

Звук, который мы слышим, — это тоже волны. Большинство людей способны слышать звуковые волны с частотой колебаний от 16 до 20 000 Гц.

Волны, аналогичные звуковым волнам, которые мы слышим, но с меньшей частотой (с частотой менее 16 Гц), называют *инфразвуком,* или *инфразвуковыми волнами*.

Волны, аналогичные звуковым волнам, которые мы слышим, но с большей частотой (с частотой более 20 000 Гц), называют *ультразвуком,* или *ультразвуковыми волнами*.

Скорость звука в воздухе равна примерно 330 м/с.

Свет, который мы видим, — тоже волны, но скорость световых волн гораздо больше и равна 300 000 000 м/с.

Наверняка каждый из вас видел молнию и слышал звук грома. Если засечь время с момента, когда мы увидели вспышку молнии, до момента, когда мы услышим звук грома, то можно вычислить примерное расстояние, на котором от нас находится грозовой фронт. Для этого нужно умножить время на скорость звука в воздухе.

Скорость звука в воде при комнатной температуре равна примерно 1 400–1 500 м/с, а скорость звука в стали — уже около 5 000 м/с.

Кстати, никогда не задумывались, с чем связано эхо? Эхо — это отражение звуковых волн от преграды.

§ 3. Электромагнитные волны

Электромагнитные волны — это процесс распространения электромагнитного поля от источника.

Электромагнитные волны являются поперечными. Векторы напряженности электрического поля $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярны к направлению распространения электромагнитных волн.

Электромагнитные волны распространяются в вакууме со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Радиосвязь — передача звука без проводов с помощью электромагнитных волн.

Световые волны

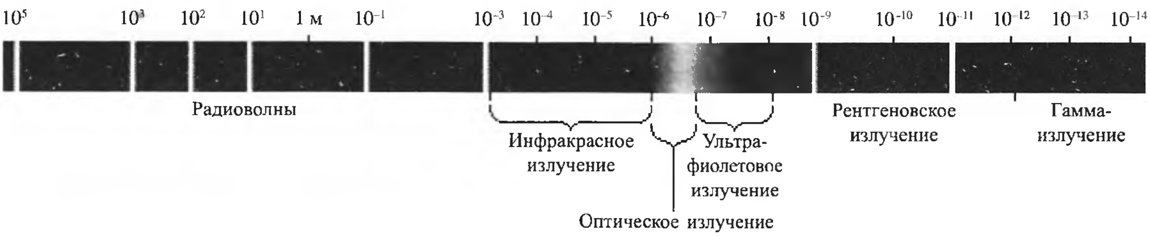
Ранее существовали две основные теории природы света:

1) корпускулярная теория света считала свет потоком частиц, идущих от источника во все стороны (этой теории придерживался и Ньютон);

2) волновая теория света считала свет волнами, распространяющимися в особой среде и проникающими внутрь всех тел. Во второй половине XIX века Максвелл доказал, что свет — это тоже электромагнитные волны.

Ни одна из них не в состоянии объяснить всех свойств света. В одних случаях свет ведет себя как поток частиц (например, при излучении или поглощении), а в других (например, при пересечении двух лучей света они друг другу никак не препятствуют) — как волны.

Появилось понятие *корпускулярно-волновой дуализм*. Кстати, тот же электрон (и не только) также может проявлять свойства как частиц, так и волн.



Название цвета	Длина волны, нм	Название цвета	Длина волны, нм
Фиолетовый (сине-фиолетовый)	380–440	Желто-зеленый	550–575
Синий	440–480	Желтый	575–585
Голубой (сине-зеленый)	480–510	Оранжевый	585–620
Зеленый	510–550	Красный	620–780

§ 4. Дисперсия света

Еще Ньютон заметил, что показатель преломления света не зависит от угла падения, но зависит от цвета падающего луча. Возможно, вам довелось и самим проделывать опыты в лабораторных работах в школе, где, направив луч света на стеклянную призму, можно было увидеть на экране (или на стене) чередование цветов (радугу), кто-то, возможно, замечал и дома (если дома есть аквариум, то можно заметить иногда радугу на стене после прохождения через аквариум с водой солнечных лучей).

Радуга во время дождя — это тоже пример дисперсии (разложения) света на каплях дождя.

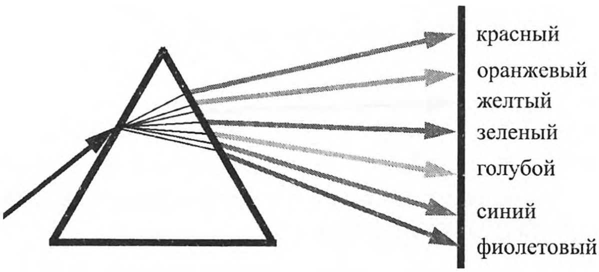
Дело в том, что лучи красного цвета преломляются меньше, а лучи фиолетового цвета — больше.

Соответственно, красный свет имеет в веществе большую скорость, меньшую частоту и большую длину волны. Фиолетовый — меньшую скорость, большую частоту и меньшую длину волны.

В пустоте скорости света разных цветов одинаковы.

Дисперсия — зависимость показателя преломления света от его частоты или длины волны.

Порядок расположения цветов в спектре можно легко запомнить с помощью известной фразы: «Каждый охотник желает знать, где сидит фазан».



§ 5. Интерференция волн

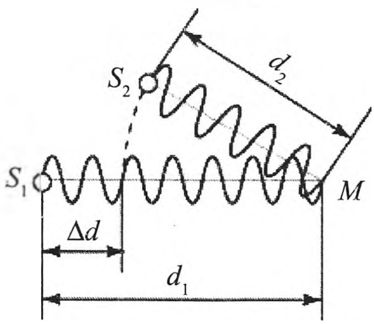
Интерференция — сложение когерентных волн (двух или нескольких), при которых образуется постоянное и устойчивое во времени распределение амплитуд (энергии) результирующих колебаний.

Когерентные волны — волны, имеющие одинаковую частоту и постоянную разность фаз их колебаний.

Результат сложения волн зависит от *разности хода* между ними.

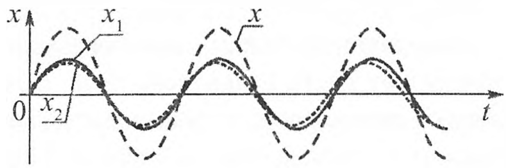
Разность хода — разность в расстояниях от источников до точки, в которой производится наблюдение.

$$\Delta d = |d_1 - d_2|.$$



Условие максимума

Амплитуда колебаний среды в точке максимальна, если разность хода двух волн, возбуждающих колебания в этой точке, равна целому числу k длин волн λ.



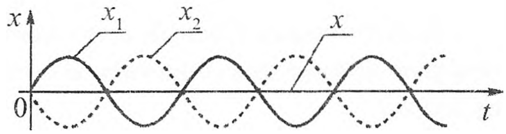
Это и есть условие максимума:

$$\Delta d = k\lambda,$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Условие минимума

Амплитуда колебаний среды в точке минимальна, если разность хода двух волн, возбуждающих колебания в этой точке, равна нечетному числу $2k + 1$ длин полуволн $\frac{\lambda}{2}$.



Это и есть условие минимума:

$$\Delta d = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

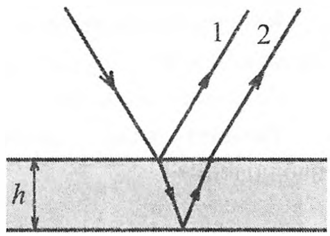
Во всех остальных случаях амплитуда колебаний среды занимает промежуточное положение между минимумом и максимумом.

Для световых волн добиться постоянной разности фаз волн от независимых источников сложно, поэтому используют свет от одного источника, разделив его на несколько пучков и пустив его разными путями.

Простейший пример — интерференция на тонких пленках.

Думаю, вы уже неоднократно наблюдали это в повседневной жизни, например на мыльных пузырях, которые переливаются разными цветами, или на масляной (бензиновой, керосиновой) пленке на поверхности воды.

Интерференция происходит из-за того, что часть света отражается от внешней поверхности (1) пленки, а часть — от внутренней (2). Можно наблюдать интерференцию лучей 1 и 2. При этом результат интерференции будет зависеть от разности хода, на который влияют угол падения лучей на пленку, длина лучей, толщина пленки.

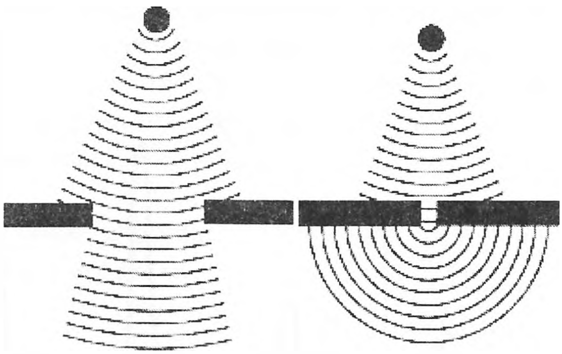


Разность хода на тонкой пленке с показателем преломления n и толщиной h равна:

$$\Delta d = 2hn + \frac{\lambda}{2}.$$

§ 6. Дифракция волн

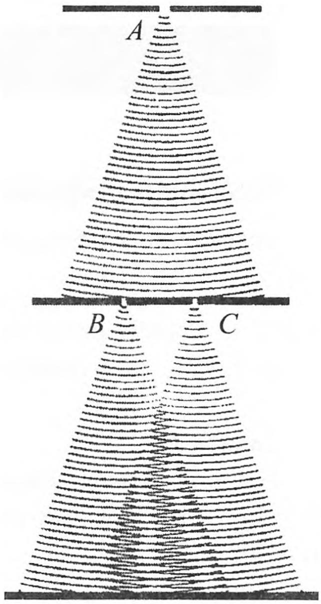
Дифракция — это огибание волнами препятствий, отклонение от прямолинейного распространения волн. При этом происходит искривление волновых поверхностей у краев препятствий.



Опыт Юнга

Т. Юнг проколол маленькое отверстие *А* в одной непрозрачной ширме и два маленьких отверстия *В* и *С* недалеко друг от друга в другой непрозрачной ширме. Отверстие *А* он освещал узким световым пучком, который после прохождения через отверстие *А* проходил через отверстия *В* и *С*.

Вследствие дифракции конусообразные пучки света, выходившие из отверстий *В* и *С*, частично перекрывались. В результате интерференции световых волн на экране появлялись чередующиеся светлые и темные полосы.



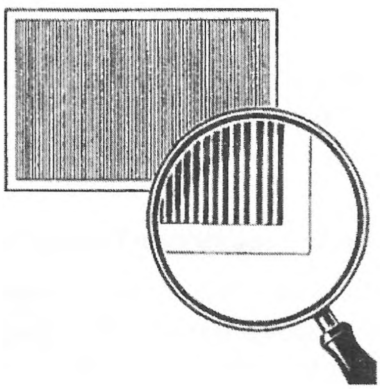
Принцип Гюйгенса–Френеля

Волновая поверхность в любой момент времени представляет собой не просто огибающую вторичных волн, а результат их интерференции.

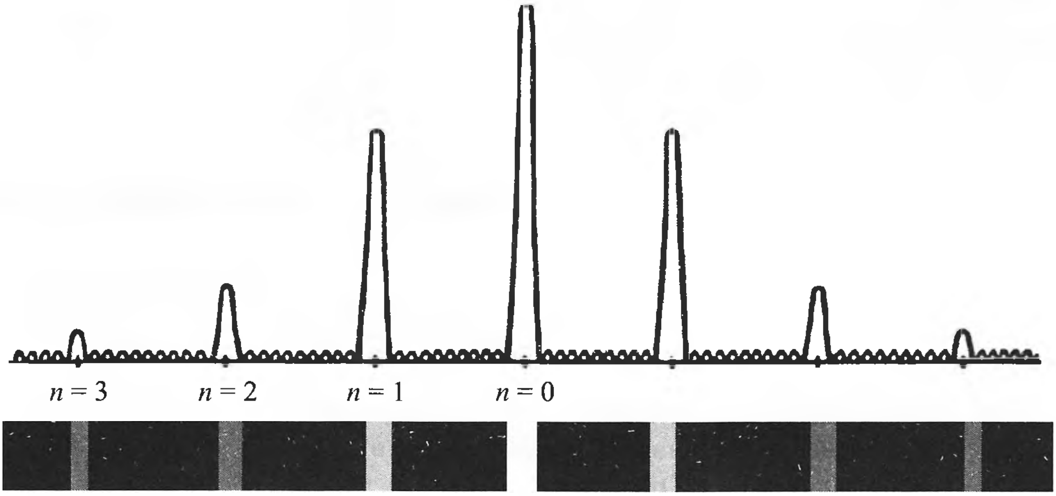
Дифракционная решетка — совокупность большого числа очень узких щелей, разделенных непрозрачными промежутками.

Период дифракционной решетки. Если ширину отверстий (щелей) обозначить a, а ширину непрозрачных промежутков b, то период решетки равен:

$$d = a + b.$$



Если посмотреть на картинку распределения интенсивности света на экране за дифракционной решеткой, то можно заметить в центре картины нулевой главный максимум.



Формула дифракционной решетки

Условие максимума на дифракционной решетке:

$$d\sin\alpha = k\lambda,$$

где d — период решетки, α — угол дифракции (в радианах), λ — длина световой волны, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — порядок максимума.

Задача 1

Найдите период дифракционной решетки, если при падении на нее фотонов с импульсом $p = 2{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг · м/с дифракционный максимум третьего порядка наблюдается под углом $\alpha = 30°$.

Решение.

Запишем уравнение дифракционной решетки:

$$d\sin\alpha = k\lambda,$$

где d — период решетки, $k = 3$ — порядок дифракционного максимума, λ — длина волны.

Так как

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где h — постоянная Планка, то период решетки равен:

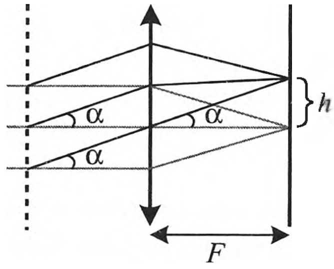
$$d = \frac{kh}{p\sin\alpha} = \frac{3 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-34}}{2{,}64 \cdot 10^{-27} \cdot 0{,}5} = 15 \cdot 10^{-7}\ \text{м} = 1{,}5\ \text{мкм}.$$

Ответ: $d = \dfrac{kh}{p\sin\alpha} = 1{,}5$ мкм.

Задача 2

Плоская монохроматическая световая волна падает на дифракционную решетку с периодом 2 мкм перпендикулярно решетке. За решеткой находится собирающая линза с фокусным расстоянием 10 см. За линзой в ее фокальной плоскости размещен экран. На экране наблюдается дифракционная картина. Частота падающего света $6 \cdot 10^{14}$ Гц. Найдите расстояние между вторым и третьим максимумами. Угол отклонения лучей решеткой считать малым. Как идут лучи и каким образом получается дифракционная картина на экране?

Решение.



1. Так как угол отклонения α — малый, то можно считать, что $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, где величина угла α выражена в радианах.

2. Формула дифракционной решетки

$$d\sin\alpha = k\lambda,$$

где d — период решетки, k — порядок дифракционного максимума, λ — длина волны.

3. Выразим длину волны через частоту:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

4. Из рисунка можем найти соотношение между углом, фокусным расстоянием и расстоянием от главной оптической оси до максимума:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{F}.$$

5. Тогда, учитывая пункты 2–5, имеем

$$d\,\frac{h}{F} = k\,\frac{c}{\nu},$$

откуда

$$h = \frac{kcF}{\nu d},$$

$$h_2 = \frac{k_2 cF}{\nu d},$$

$$h_3 = \frac{k_3 cF}{\nu d},$$

$$\Delta h = h_3 - h_2 = \frac{k_3 cF}{\nu d} - \frac{k_2 cF}{\nu d} = \frac{(k_3 - k_2)cF}{\nu d} = \frac{(3-2)3\cdot 10^8 \cdot 0{,}1}{6\cdot 10^{14}\cdot 2\cdot 10^{-6}} = 0{,}025 \text{ м} = 25 \text{ мм}.$$

Ответ: 25 мм.

Задача 3

На поверхность стекла с показателем преломления $n_1 = 1{,}6$ нанесена пленка с показателем преломления $n_2 = 1{,}45$. Толщина пленки $d = 200$ нм. Для какой длины волны λ видимого света, падающего перпендикулярно поверхности пленки, коэффициент отражения будет максимальным?

Решение.

Отражение будет максимальным, если разность хода лучей в пленке будет кратна длине волны в пленке λ_2. Разность хода равна удвоенной толщине пленки. Следовательно,

$$2d = k\lambda_2,$$

где k — целое число.

Длина волны в пленке по закону преломления равна:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}.$$

Тогда

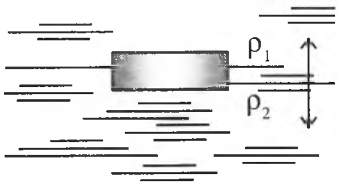
$$\lambda = \frac{2dn_2}{k} = \frac{580}{k} \text{ нм.}$$

Мы практически получили ответ. Но каким же должен быть k? Любым, главное, чтобы выполнялось условие, при котором коэффициент отражения будет максимальным. А длина волны видимого света находится в пределах от 380 нм (фиолетовый) до 780 нм (красный).

Значит, единственно возможная частота ВИДИМОГО света может быть при $k = 1$.

Ответ: $\lambda = 580$ нм.

Контрольная работа 4



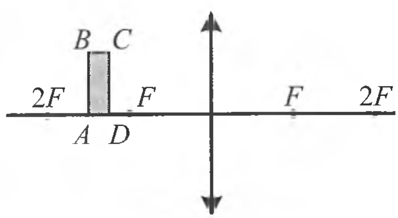
1. Однородный цилиндр с площадью поперечного сечения 10^{-2} м^2 плавает на границе несмешивающихся жидкостей с плотностью 800 кг/м^3 и 1000 кг/м^3. Пренебрегая сопротивлением жидкостей, определите массу цилиндра, если период его малых вертикальных колебаний $\frac{\pi}{5}$ с.

2. Колебательный контур состоит из катушки и двух одинаковых конденсаторов, соединенных последовательно. Период собственных колебаний контура 10 мс. Каким станет период собственных колебаний, если конденсаторы соединить параллельно?

3. Столб вбит в дно реки так, что часть столба высотой $h = 1$ м возвышается над водой. Найдите длину тени столба на поверхности воды и на дне реки, если высота солнца над горизонтом 30°, а глубина реки $H = 2$ м.

4. Какова глубина ручья, если при определении на глаз по вертикальному направлению глубина его кажется равной $h = 60$ см?

5. Плоский прямоугольник $ABCD$ расположен перед тонкой собирающей линзой, как показано на рисунке. Оптическая сила линзы 10 дптр. В прямоугольнике длины сторон $AD = 2$ см, $AB = 6$ см. Расстояние от линзы до стороны CD равно 14 см. Найдите площадь даваемого линзой изображения данного прямоугольника.



Раздел 5
КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

§ 1. Световые кванты. Фотоэффект

Атомы испускают или поглощают энергию отдельными порциями — квантами.

Фотон — квант света (электромагнитного излучения) — «световая частица», или порция излучения. Считается, что фотон всегда двигается со скоростью света c, и не существует ни одной системы отсчета, в которой он покоится. Масса покоя фотона равна нулю.

Энергия одного кванта пропорциональна частоте излучения:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, c — скорость света.

Импульс фотона

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Фотоэффект — явление вырывания электрона из вещества под действием света.

Рассмотрим один эксперимент, который поможет нам лучше понять явление фотоэффекта.

В стеклянный баллон поместили два электрода и откачали воздух.

На один из электродов (катод) поступает свет через кварцевое «окно», прозрачное для ультрафиолета.

На электроды подается напряжение (катод подключен к отрицательному полюсу источника тока), которое можно менять и измерять вольтметром.

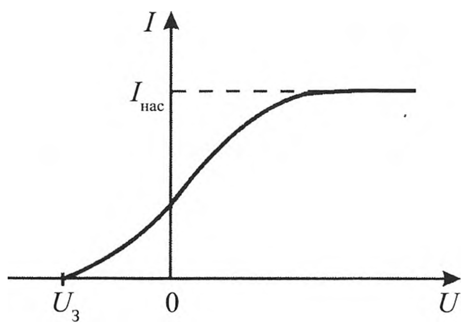
Под действием света катод испускает электроны, которые попадают на анод. Можно говорить, что возникает «фототок».

Если мы измерим поданное нами на электроды напряжение и силу тока, то можно заметить, что:

1) даже при нулевом напряжении (если не подаем напряжение на электроды) фототок все равно есть;

2) при некотором значении напряжения между катодом и анодом ток перестает зависеть от напряжения — достигает насыщения ($I_{нас}$);

3) если катод подключить к положительному полюсу источника, то фотоэлектроны будут тормозиться электрическим полем и при некотором значении напряжения фототок прекратится. Это напряжение называют *запирающим* (или задерживающим) напряжением $U_з$.



Также, изменяя интенсивность излучения, можно заметить, что количество электронов, вырываемых светом с поверхности катода в единицу времени, пропорционально поглощаемой за это время энергии световой волны.

Кинетическая энергия вылетевших фотоэлектронов возрастает с увеличением частоты света и не зависит от его интенсивности.

Если частота света меньше некоторого значения (определенного для данного вещества), то фотоэффекта не происходит. Эту минимальную частоту $\nu_{кр}$ (или максимальную длину волны $\lambda_{кр}$) называют **красной границей фотоэффекта**.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{вых} + \frac{m\upsilon^2}{2},$$

где $A_{вых}$ — работа выхода, которая зависит от вещества.

$$A_{вых} = h\nu_{кр}.$$

Запирающее напряжение для фотоэффекта зависит от кинетической энергии фотоэлектронов:

$$U_з = \frac{m\upsilon^2}{2e}.$$

где e — заряд электрона.

Задача 1

Металлическую пластину освещают монохроматическим светом, имеющим длину волны $\lambda = 520$ нм. Найдите импульс фотоэлектронов, если работа выхода электронов из данного металла $A_{вых} = 1{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Решение.

1) Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{вых} + \frac{m\upsilon^2}{2}, \qquad (1)$$

где h — постоянная Планка.

2) Выразим частоту волны через длину:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}. \qquad (2)$$

3) Импульс фотоэлектрона равен:

$$p = m\upsilon, \qquad (3)$$

где m — масса электрона, υ — его максимальная скорость.

Тогда

$$\upsilon = \frac{p}{m}. \qquad (4)$$

4) Подставив значения из уравнений (2) и (4) в уравнение (1), получим

$$h\frac{c}{\lambda} = A_{вых} + \frac{p^2}{2m}.$$

Осталось выразить импульс:

$$p = \sqrt{2m\left(\frac{hc}{\lambda} - A_{вых}\right)} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Ответ: $p = \sqrt{2m\left(\frac{hc}{\lambda} - A_{вых}\right)} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с.

Задача 2

При увеличении в 2 раза частоты света, падающего на поверхность металла, запирающее напряжение для фотоэлектронов увеличилось в 3 раза. Начальная частота падающего света равна $0{,}8 \cdot 10^{15}$ Гц. Найдите длину волны, которая соответствует «красной границе» фотоэффекта для этого металла.

Решение.

1) Запишем уравнение Эйнштейна:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{1}$$

2) Запирающее напряжение для фотоэффекта:

$$U_з = \frac{m\upsilon^2}{2e}. \tag{2}$$

3) Из уравнений (1) и (2) получим

$$h\nu = A_{\text{вых}} + eU, \tag{3}$$

$$2h\nu = A_{\text{вых}} + 3eU. \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) найдем работу выхода:

$$A_{\text{вых}} = \frac{h\nu}{2}. \tag{5}$$

С другой стороны,

$$A_{\text{вых}} = h\nu_{\text{кр}}. \tag{6}$$

Приравняв правые и левые части уравнений (5) и (6), получим

$$\nu_{\text{кр}} = \frac{\nu}{2}. \tag{7}$$

4) Так как

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \tag{8}$$

тогда с учетом уравнения (7) получим

$$\frac{c}{\lambda_к} = \frac{\nu}{2}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\lambda_к = \frac{2c}{\nu} = 750 \text{ нм}.$$

Ответ: $\lambda_к = \dfrac{2c}{\nu} = 750$ нм.

§ 2. Строение атома на примере атома водорода. Квантовые постулаты Бора

В этом разделе мы познакомимся с весьма упрощенной моделью строения атома, а также с постулатами Бора, которые помогут нам разобраться с поглощением и излучением атомами энергии. Более подробную информацию вы сможете получить в институте, в курсе «Квантовая механика».

В начале прошлого века, в 1911 году, известный физик Эрнест Резерфорд, исследовав рассеяние альфа-частиц (α-частица — положительно заряженная частица, состоящая из двух протонов и двух нейтронов — ядро атома гелия ${}^{2}_{4}He^{2+}$), предложил планетарную модель атома.

Согласно этой модели в центре атома находится атомное ядро, в котором сосредоточены почти вся масса и весь положительный заряд атома, а вокруг ядра вращаются электроны.

Ядро атома состоит из протонов и нейтронов.

Протон (открыт также Эрнестом Резерфордом в 1919 г.) — элементарная частица, имеет положительный заряд, равный по модулю заряду электрона $q_p = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, и массу $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг (как видим, масса протона почти в 2000 раз больше массы электрона).

Нейтрон — элементарная частица, не имеющая заряда. Масса нейтрона $m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ кг (приблизительно равна массе протона).

Нуклон — общее название для протонов и нейтронов.

Постулаты Бора

1. Атом (атомная система) может находиться только в стационарных (квантовых) состояниях, которым соответствуют определенные значения энергии и в которых энергия не излучается.

2. При переходе атома (атомной системы) из одного стационарного состояния в другое атом излучает или поглощает энергию. То есть если атом переходит из состояния с большей энергией E_k в состояние с меньшей энергией E_n, то он излучает фотон. Энергия излученного фотона равна разности энергий стационарных состояний атома $E_k - E_n$:

$$h\nu_{kn} = E_k - E_n.$$

Следовательно, частота излучения

$$\nu_{kn} = \frac{E_k - E_n}{h}.$$

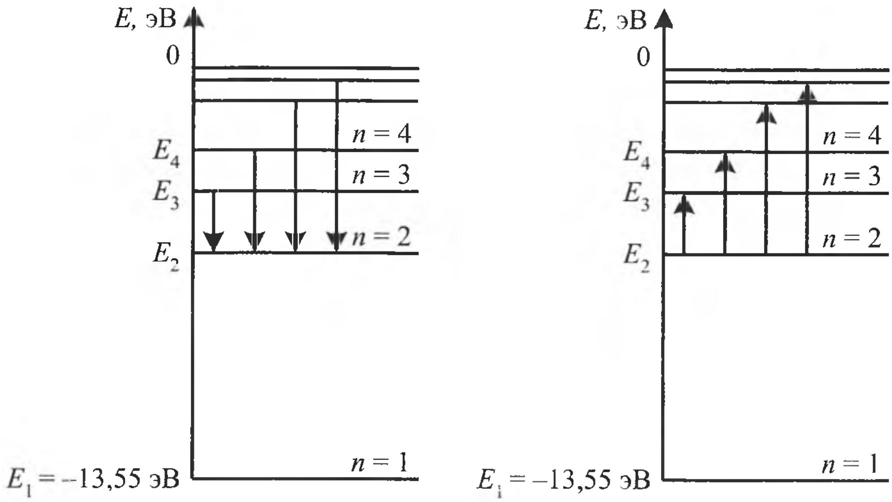
При поглощении фотона атом переходит из стационарного состояния с меньшей энергией в стационарное состояние с большей энергией.

Так, второй постулат Бора позволяет вычислять частоты излучения или поглощения атома по известным значениям энергий стационарных состояний.

На рисунке ниже показаны переходы в первое возбужденное состояние (второй энергетический уровень) с верхних уровней при излучении и со второго уровня на верхние при поглощении — *серия Бальмера* (видимое излучение).

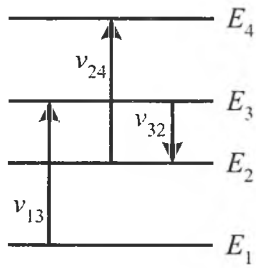
Переход с верхних возбужденных энергетических уровней на первый и с первого уровня на верхние называется *серией Лаймана* (ультрафиолетовое излучение).

Переход с верхних возбужденных энергетических уровней на третий и с третьего уровня на верхние называется *серией Пашена* (инфракрасное излучение).



Задача 1

На рисунке показаны энергетические уровни атома и указаны частоты световых волн, испускаемых и поглощаемых при переходах между ними: $\nu_{13} = 6 \cdot 10^{14}$ Гц, $\nu_{32} = 2{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц. При переходе с уровня E_4 на уровень E_1 атом излучает свет с длиной волны $\lambda = 380$ нм. Найдите частоту колебаний световой волны, которую поглощает атом при переходе с уровня E_2 на уровень E_4.



Решение.

Энергия фотона

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Согласно постулатам Бора при переходах между уровнями с энергиями E_m и E_n поглощаются и излучаются фотоны с энергией E:

$$|E_m - E_n| = E = h\nu_{mn} = \frac{hc}{\lambda_{mn}}.$$

Атом совершает последовательность переходов между уровнями энергий E_1 и E_4, которая показана на рисунке:

$$E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_4,$$

а потом возвращается в состояние с энергией E_1. То есть общая энергия поглощенных фотонов равна энергии фотонов, излученных атомом:

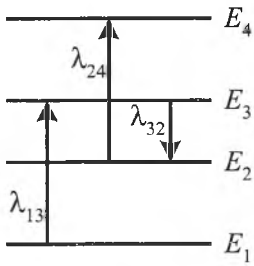
$$h\nu_{13} - h\nu_{32} + h\nu_{24} = \frac{hc}{\lambda_{41}},$$

откуда

$$\nu_{24} = \frac{c}{\lambda_{41}} - \nu_{13} + \nu_{32} = \frac{3 \cdot 10^8}{380 \cdot 10^{-9}} - 6 \cdot 10^{14} + 2{,}5 \cdot 10^{14} \approx 4{,}4 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

Ответ: $\nu_{24} = \dfrac{c}{\lambda_{41}} - \nu_{13} + \nu_{32} \approx 4{,}4 \cdot 10^{14}$ Гц.

Задача 2



На рисунке показаны энергетические уровни атома и длины волн фотонов, испускаемых и поглощаемых при переходах между ними: $\lambda_{13} = 380$ нм, $\lambda_{32} = 620$ нм. При всех возможных переходах между уровнями энергии, показанными на рисунке, минимальная длина волны излучаемого фотона $\lambda_{min} = 300$ нм. Найдите длину волны фотона, поглощаемого атомом при переходе с уровня E_2 на уровень E_4.

Решение.

Очень часто у учеников возникает вопрос, почему на рисунке λ_{13} длиннее, чем λ_{32}.

Дело в том, что на рисунке даны уровни энергий атома, энергия на том или ином уровне пропорциональна частоте волны и обратно пропорциональна длине волны. (Смотрите формулу энергии фотона.)

Энергия фотона

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Значит, минимальная длина волны излучаемого фотона λ_{min} соответствует переходу с четвертого энергетического уровня на первый, т. е.

$$\lambda_{min} = \lambda_{41}.$$

Согласно постулатам Бора при переходах между уровнями с энергиями E_m и E_n поглощаются и излучаются фотоны с энергией E:

$$|E_m - E_n| = E = h\nu_{mn} = \frac{hc}{\lambda_{mn}}.$$

Атом совершает последовательность переходов между уровнями энергий E_1 и E_4, которая показана на рисунке:

$$E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_4,$$

а потом возвращается в состояние с энергией E_1, т. е. общая энергия поглощенных фотонов равна энергии фотонов, излученных атомом:

$$\frac{hc}{\lambda_{13}} - \frac{hc}{\lambda_{32}} + \frac{hc}{\lambda_{24}} = \frac{hc}{\lambda_{41}}.$$

Выразим длину волны, которую поглощает атом при переходе с уровня E_2 на уровень E_4:

$$\lambda_{24} = \frac{\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{41}}{\lambda_{13}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{41} - \lambda_{32}\lambda_{41}} = \frac{\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{min}}{\lambda_{13}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{41} - \lambda_{32}\lambda_{min}} =$$

$$= \frac{380 \cdot 620 \cdot 300}{380 \cdot 620 + 380 \cdot 300 - 620 \cdot 300} \approx 432 \text{ нм}.$$

Ответ: $\lambda_{24} = \dfrac{\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{min}}{\lambda_{13}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{41} - \lambda_{32}\lambda_{min}} \approx 432$ нм.

Задача 3

Значения энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\dfrac{13{,}6\ \text{эВ}}{n^2}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ При переходах с верхних уровней энергии на нижние атом излучает фотон. Переходы с верхних уровней на уровень $n = 1$ образуют серию Лаймана; на уровень $n = 2$ — серию Бальмера. Найдите отношение α максимальной частоты фотона в серии Лаймана к максимальной частоте фотона в серии Бальмера.

Решение.

Согласно постулатам Бора при переходах между уровнями с энергиями E_m и E_n поглощаются и излучаются фотоны с энергией E:

$$|E_m - E_n| = E = h\nu_{mn}. \tag{1}$$

Энергия фотона в серии Лаймана:

$$E_{\text{Л}} = E_n - E_1,$$

где $n = 2, 3, \ldots$

Энергия фотона в серии Бальмера:

$$E_{\text{Б}} = E_k - E_2,$$

где $k = 3, 4, \ldots$

Согласно формуле (1) максимальная частота фотонов соответствует переходу с максимальных верхних уровней, где энергию можно считать равной нулю.

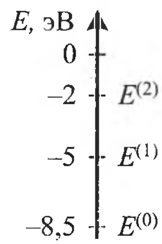
Тогда

$$\alpha = \frac{E_{\text{Л}}}{E_{\text{Б}}} = \frac{E_n - E_1}{E_k - E_2} = \frac{0 - E_1}{0 - E_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{-\dfrac{13{,}6\ \text{эВ}}{1^2}}{-\dfrac{13{,}6\ \text{эВ}}{2^2}} = 4.$$

Ответ: $\alpha = 4$.

Задача 4

Схема энергетических уровней атомов вещества изображена на рисунке. Атомы находятся в состоянии с энергией $E^{(1)}$. В результате столкновения с одним из таких атомов электрон приобрел дополнительную энергию. Импульс электрона после столкновения с покоящимся атомом оказался равным $1{,}6 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с. Найдите кинетическую энергию электрона до столкновения с атомом.



Решение.

Так как электрон получил энергию при столкновении, то атом потерял энергию.

Атом может отдавать энергию лишь квантами, значит, он перешел из состояния $E^{(1)}$ в состояние $E^{(0)}$, отдав электрону энергию:

$$\Delta E = E^{(1)} - E^{(0)}.$$

Импульс электрона после столкновения

$$p = m\upsilon,$$

откуда скорость электрона

$$\upsilon = \frac{p}{m}$$

кинетическая энергия

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

По закону сохранения энергии

$$E = E_0 + \Delta E,$$

где E_0 — начальная кинетическая энергия электрона.

Тогда

$$E_0 = E - \Delta E = \frac{p^2}{2m} - \left(E^{(1)} - E^{(0)}\right) \approx 8,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Ответ: $E_0 = E - \Delta E = \dfrac{p^2}{2m} - \left(E^{(1)} - E^{(0)}\right) \approx 8,4 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Задача 5

Значения энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\dfrac{13,6 \text{ эВ}}{n^2}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ При переходе из состояния E_3 в состояние E_1 атом излучает фотон. Излученный фотон попадает на поверхность фотокатода и выбивает фотоэлектрон. Работа выхода для данного металла равна 4 эВ. Найдите максимально возможный импульс фотоэлектрона.

Решение.

Импульс фотоэлектрона

$$p = m\upsilon,$$

откуда скорость электрона

$$\upsilon = \frac{p}{m}.$$

Тогда кинетическая энергия

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Энергия излученного фотона

$$E = h\nu = E_3 - E_1.$$

Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{вых} + E_к = A_{вых} + \frac{p^2}{2m}.$$

Выразив импульс, получим

$$p = \sqrt{2m\left(E_3 - E_1 - A_{вых}\right)} \approx 1,2 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Ответ: $p = \sqrt{2m\left(E_3 - E_1 - A_{вых}\right)} \approx 1,2 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с.

§ 3. Физика атомного ядра

Строение атомного ядра

Заряд ядра равен: $Z \cdot q_p = Z|e|$, где Z — число протонов.

Массовое число A — общее количество протонов Z и нейтронов N в ядре:

$$A = Z + N.$$

Для обозначения ядер разных элементов используется запись $^A_Z X$.

Изотопы — ядра, у которых одинаковый заряд Z, но разная масса A.

Рассмотрим изотопы на примере водорода.

Протий: ^1_1H. Самый распространенный изотоп водорода (когда мы говорим про атом водорода, подразумеваем, как правило, именно атом с таким ядром). Как видим, ядро состоит из одного протона.

Дейтерий: ^2_1H (ядро состоит из протона и нейтрона).

Тритий: ^3_1H (ядро состоит из протона и двух нейтронов).

Ядерные силы — силы взаимодействия между нуклонами в ядре.

Дефект массы Δm — разность между суммой масс нуклонов, входящих в ядро, и массой самого ядра $m_я$.

$$\Delta m = \left(Zm_p + (A - Z)m_n\right) - m_я.$$

Массы ядер элементов (включая массы изотопов) можно найти в справочниках.

Часто массы атомных ядер измеряют в *атомных единицах массы* (а.е.м.):

$$1 \text{ а. е. м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Атомная единица массы равна $\dfrac{1}{12}$ массы ядра атома углерода $^{12}_6C$.

Энергия связи ядра — энергия, которую нужно затратить для разделения ядра на нуклоны:

$$E = \Delta mc^2.$$

Энергию в атомной физике часто выражают в электронвольтах (эВ):

$$1 \text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

1 эВ — это энергия, необходимая для переноса элементарного заряда (*элементарным зарядом* называют заряд электрона) между точками с разностью потенциалов (напряжением) в 1 В.

Радиоактивность

Радиоактивность — способность ядер к спонтанному испусканию частиц (электронов, γ-квантов, α-частиц и т. д.). Обычно сопровождается превращением ядра в другое ядро или переходом в другое состояние.

Считается, что все химические элементы в таблице Менделеева с порядковым номером более 83 являются радиоактивными.

Активность — число распадов в единицу времени.

Период полураспада T — время, за которое распадается половина имеющихся ядер (активность уменьшается в 2 раза).

Пусть в начальный момент времени количество ядер N_0, тогда спустя время T (равное периоду полураспада) останется $\frac{N_0}{2}$, спустя еще время T останется $\frac{N_0}{4}$ и так далее.

Закон радиоактивного распада позволяет найти количество нераспавшихся ядер в зависимости от времени:

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Виды радиоактивного распада:

1) альфа-распад (α-распад).

При альфа-распаде ядро распадающегося элемента испускает ядро атома гелия (альфа-частицу):

$$^{A}_{Z}X \rightarrow ^{A-4}_{Z-2}Y + ^{4}_{2}\mathrm{He};$$

2) бета-распад (β-распад).

При бета-распаде ядро излучает электрон:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow ^{A}_{Z+1}Y + ^{0}_{-1}e;$$

3) гамма-излучение (γ-излучение).

При гамма-излучении ядро испускает кванты света. При этом масса ядра не меняется, заряд практически не меняется. Ядро атома переходит в состояние с меньшей энергией.

Ядерные реакции — реакции, которые приводят к изменению атомных ядер при взаимодействии их с элементарными частицами или друг с другом.

Первая ядерная реакция была осуществлена в 1932 году. Это была реакция расщепления лития при помощи быстрых протонов.

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Поглощенная доза излучения D — отношение поглощенной энергии E ионизирующего излучения к массе m облученного вещества. Измеряется в грэях (Гр).

$$D = \frac{E}{m}.$$

Задача 1

Радиоактивный препарат активностью $1{,}2 \cdot 10^{11}$ частиц в секунду помещен в медный контейнер массой 1 кг. Насколько повысится температура контейнера за 1 ч, если радиоактивное вещество испускает α-частицы энергией 5 МэВ? Энергия всех α-частиц полностью переходит во внутреннюю энергию контейнера. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение.

За время t распадается N частиц:

$$N = At,$$

где A — активность препарата.

Тогда количество теплоты Q, которое выделяется при испускании α-частиц препаратом за время $t = 1$ час:

$$Q = AWt, \tag{1}$$

где W — энергия α-частицы.

Выделившееся количество теплоты (по условию задачи) идет на нагревание контейнера, т. е.

$$Q = cm\Delta T, \qquad (2)$$

где c — удельная теплоемкость меди, m — масса контейнера, ΔT — изменение температуры контейнера.

Из равенств (1) и (2) получим

$$\Delta T = \frac{AWt}{cm} \approx 0{,}9 \text{ К}.$$

Ответ: $\Delta T = \dfrac{AWt}{cm} \approx 0{,}9$ К.

Задача 2

Пациенту ввели внутривенно дозу раствора, содержащего изотоп $^{11}_{24}$Na. Активность 1 см^3 этого раствора $a_0 = 4\,000$ распадов в секунду. Период полураспада изотопа $^{11}_{24}$Na равен $T = 15{,}3$ ч. Через $t = 7$ ч 39 мин активность 1 см^3 крови пациента стала $a_к = 0{,}4$ распада в секунду. Каков объем введенного раствора, если общий объем крови пациента $V = 5$ л? Переходом ядер изотопа $^{11}_{24}$Na из крови в другие ткани организма пренебречь.

Решение.

Когда эта задача впервые встретилась на ЕГЭ, решили ее единицы школьников. Такая сложная? Нет, просто растерялись, не знали, с чего начать. Давайте разберемся.

Что такое активность и что такое период полураспада?

Активность — число распадов в единицу времени.

Период полураспада T — время, за которое распадается половина имеющихся ядер (активность уменьшается в 2 раза).

Активность препарата a со временем уменьшается по закону

$$a = a_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Отметим, что в условии задачи встречаются активность раствора и активность крови (величина которой, естественно, меньше, так как препарат равномерно расходится по всему объему крови пациента).

Поэтому активность крови $a_к$ пациента через время t равна:

$$a_к = a\frac{V_0}{V} = \frac{a_0 V_0}{V} 2^{-\frac{t}{T}},$$

где V_0 — объем введенного раствора, а V — объем крови человека.

Тогда

$$V_0 = V\frac{a_к \cdot 2^{-\frac{t}{T}}}{a_0} \approx 7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 7 \text{ см}^3.$$

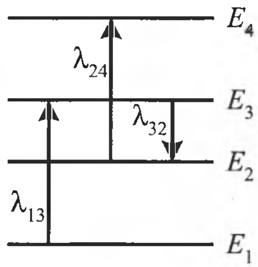
Ответ: $V_0 = V\dfrac{a_к \cdot 2^{\frac{t}{T}}}{a_0} = 7$ см^3.

Контрольная работа 5

1. Значения энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\frac{13{,}6 \text{ эВ}}{n^2}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ При переходах с верхних уровней энергии на нижние атом излучает фотон. Переходы с верхних уровней на уровень $n = 1$ образуют серию Лаймана; на уровень с $n = 3$ — серию Пашена. Найдите отношение δ минимальной частоты фотона в серии Лаймана к максимальной частоте фотона в серии Пашена.

2. Найдите радиус окружности, по которой будут двигаться фотоэлектроны, влетевшие в однородное магнитное поле с индукцией $3 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям индукции этого поля. Фотоэлектроны были выбиты с поверхности кальциевого фотокатода с работой выхода $4{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж при его освещении светом с частотой 450 нм.

3. На рисунке показаны энергетические уровни атома и длины волн фотонов, испускаемых и поглощаемых при переходах между ними: $\lambda_{13} = 450$ нм, $\lambda_{24} = 550$ нм, $\lambda_{32} = 650$ нм. Найдите длину волны фотонов, излучаемых при переходе с уровня E_4 на уровень E_1.



4. Поток света с длиной волны 0,4 мкм и мощностью 7 мкВт падает на поверхность металла. Вычислите силу фототока насыщения, если только 10% падающих фотонов выбивают из металла электроны.

5. Металлическую пластинку облучают светом с частотой $1{,}8 \cdot 10^{15}$ Гц. При увеличении частоты падающего на металлическую пластинку света в 3 раза задерживающее напряжение для фототока увеличивается в 4 раза. Определите длину волны для красной границы фотоэффекта.

Задачи на повторение

Перед тем как приступить к итоговой контрольной работе, советую заново перерешать задачи, разобранные в книге, не подглядывая в решение. В конце книги к этим задачам есть ответы. После решения сверьтесь с ответом: если ответ неверен — постарайтесь самостоятельно найти ошибку, и только если решить правильно не получится — найдите эту задачу в тексте параграфа и, повторив еще раз теорию, разберитесь с ее решением.

Механика

1. Велосипедист половину пути ехал со скоростью 8 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 12 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

2. Велосипедист половину времени ехал со скоростью 8 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 12 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

3. Рыболов, поднимаясь на лодке вверх по реке, уронил удочку и заметил это только спустя 2 минуты. Заметив потерю, он сразу же повернул обратно. На каком расстоянии от места потери он догонит удочку, если скорость течения реки 3 м/с? Собственная скорость рыболова (скорость рыболова относительно воды) постоянна.

4. Переправляясь через реку шириной 400 метров, лодочник направил лодку строго на противоположный берег. На какое расстояние его снесет ниже по течению, если скорость течения 1,5 м/с, а собственная скорость лодки 4 м/с?

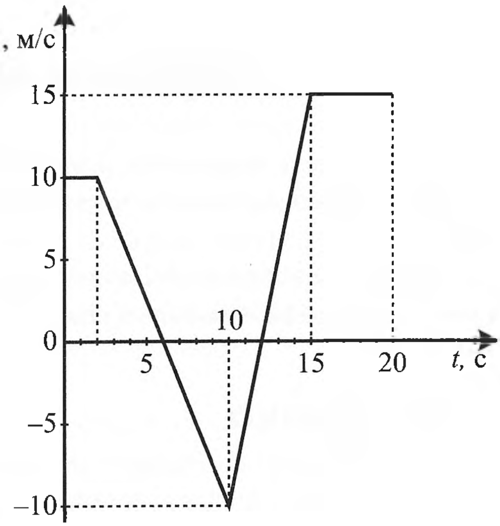
5. При скорости ветра, равной 10 м/с, капли дождя падают под углом 30° к вертикали. При какой скорости ветра капли будут падать под углом 60° к вертикали?

6. Капли дождя падают относительно земли отвесно со скоростью 30 м/с. С какой наименьшей скоростью относительно земли должен ехать автомобиль, чтобы на заднем смотровом стекле, наклоненном под углом 60° к горизонту, не оставалось следов капель?

7. Вертолет, который летит со скоростью υ_0 из пункта A в пункт B и обратно, затрачивает на весь путь время t. Найдите расстояние S между пунктами A и B, если на протяжении всего обратного пути дул ветер со скоростью u перпендикулярно линии полета.

8. При переправе через реку шириной $d = 60$ м надо попасть в точку B, лежащую на $l = 80$ м ниже по течению реки, чем точка старта A. Лодочник управляет моторной лодкой так, что она движется точно к цели со скоростью $\upsilon = 8$ м/с относительно берега. Какова при этом скорость лодки относительно воды, если скорость течения реки $u = 2,8$ м/с?

9. Пользуясь графиком зависимости скорости тела от времени, найдите путь и перемещение тела за 20 секунд.



10. Тело разгоняется из состояния покоя. Найдите путь, пройденный телом за девятую секунду движения, если за пятую секунду он составляет 90 метров. Движение считать равноускоренным.

11. Расстояние между двумя городами автомобиль проехал со средней скоростью $\upsilon_{ср}$ = 60 км/ч за t = 30 мин. Разгон и торможение вместе длились t_1 = 10 мин, а остальное время автомобиль двигался равномерно. Какой была скорость υ автомобиля при равномерном движении?

12. Тело брошено вертикально вверх с некоторой начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Найдите время подъема тела до максимальной высоты t_1, время всего полета тела t_2 и максимальную высоту H, которую достигнет тело в процессе полета.

13. Камень, свободно падающий с высоты, первый участок проходит за время t_1 = 2 с, а такой же последний участок — за время t_2 = 1 с. С какой высоты падало тело и сколько времени длилось падение?

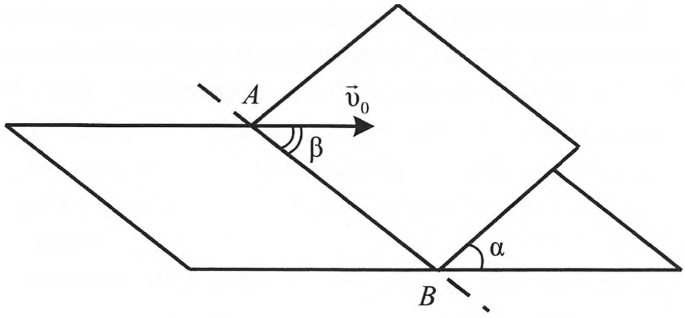
14. Тело брошено горизонтально с высоты h со скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Найдите время и дальность полета тела, а также скорость тела и высоту спустя время τ, которое меньше времени полета.

15. Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Найдите:

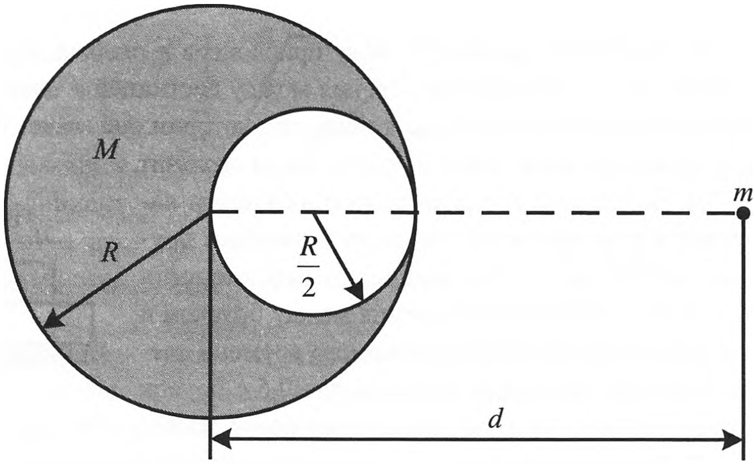
1) время подъема тела t_1;
2) время всего полета t_2;
3) максимальную высоту полета h_{max};
4) дальность полета L;
5) модуль и направление скорости спустя время $\tau < t_2$;
6) уравнение траектории.

16. Снаряд вылетает из пушки, стоящей у подножия горы, с начальной скоростью υ_0 под углом α к поверхности горы. Поверхность горы наклонена под углом β к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите дальность полета снаряда S вдоль склона и максимальную высоту H подъема над склоном.

17. Небольшая шайба двигается по гладкой наклонной плоскости из точки A в точку B с начальной скоростью $\upsilon_0 = 4$ м/с, направленной под углом $\beta = 60°$ к прямой AB, как показано на рисунке. Угол наклона плоскости $\alpha = 30°$. Найдите максимальное удаление шайбы от прямой AB и расстояние от точки A до точки B.



18. Найдите силу притяжения F маленького шарика массой m и большого однородного шара массой M, в котором имеется сферическая полость (см. рисунок).



19. Определите вес тела массой m, лежащего на полу лифта в трех случаях:

1) лифт покоится;

2) лифт двигается с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх;

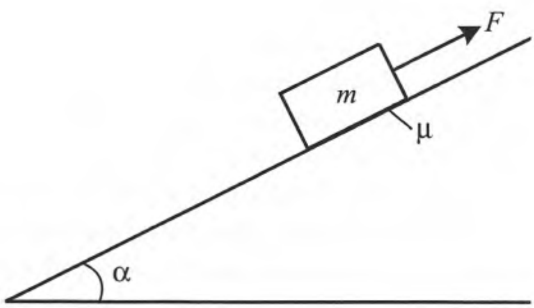
3) лифт двигается с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз.

20. На экваторе некоторой планеты тела весят втрое меньше, чем на полюсе. Период обращения этой планеты вокруг своей оси равен $T = 55$ мин. Определите среднюю плотность планеты. Планету считать однородным шаром.

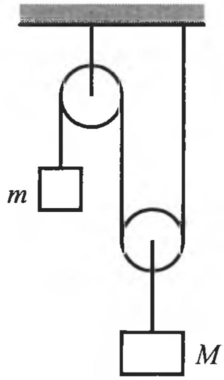
21. Тело массой m покоится на наклонной плоскости с углом наклона α. Найдите вес тела.

22. Пружины одинаковой длины жесткостями k_1 и k_2 соединили: а) параллельно; б) последовательно. Пружиной какой жесткости можно заменить такую систему пружин?

23. При каких значениях силы F, приложенной к ящику вдоль наклонной плоскости, он будет находиться в равновесии? Масса ящика 50 кг, угол наклонной плоскости 30°, коэффициент трения скольжения равен 0,2.



24. Найдите силу натяжения нити, перекинутой через блоки, и ускорения грузов в системе, изображенной на рисунке. Массы грузов $m = 2$ кг, $M = 3$ кг. Массой блоков и трением пренебречь. Нить считать идеальной и невесомой.



25. Лестница массой $m = 30$ кг прислонена к гладкой вертикальной стене под некоторым углом к полу. Коэффициент трения между лестницей и полом $\mu = 0{,}3$. Определите наименьший угол наклона лестницы к полу, при котором она может оставаться в равновесии, и силу, с которой лестница давит на стену, когда скользит.

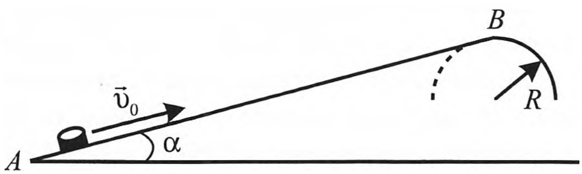
26. На гладкой горизонтальной плоскости находится длинная доска. На доску помещают брусок массой $m = 1$ кг и сообщают ему скорость $\upsilon_0 = 3$ м/с. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}4$. В начальный момент времени доска покоится. В момент времени $\tau = 0{,}5$ с брусок перестает скользить по доске. Чему равна масса доски M?

27. Человек массой $m = 70$ кг сидит на корме лодки, находящейся в озере. Длина лодки $L = 5$ м и масса ее $M = 280$ кг. Человек переходит на нос лодки. На какое расстояние переместится человек относительно дна озера? Сопротивлением воды пренебречь.

28. Подъемный кран поднял со дна озера глыбу массой 2 т и объемом 0,5 м^3. Сколько времени длился подъем, если глубина озера 12 м, а кран развивал мощность 3 кВт? Считать, что скорость глыбы во время подъема постоянна.

29. Санки массой 10 кг скатились с горы высотой 5 м и остановились на горизонтальном участке. Какую минимальную работу совершит мальчик, возвращая санки по линии скатывания на вершину горки?

30. Камень после удара скользит вверх по наклонной плоскости из точки A. Наклонная плоскость без излома в точке B переходит в наружную поверхность трубы радиусом $R = 0{,}5$ м. Какую минимальную скорость υ_0 нужно сообщить камню в точке A, чтобы в точке B камень оторвался от поверхности? Длина наклонной плоскости $AB = L = 2$ м, угол $\alpha = 30°$. Коэффициент трения между камнем и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}1$.



31. Шары одинакового размера массами m_1 и m_2 двигаются навстречу друг другу со скоростями υ_1 и υ_2 соответственно. Поверхности шаров гладкие. Найдите скорости шаров после центрального соударения, если известно, что

а) удар абсолютно упругий;

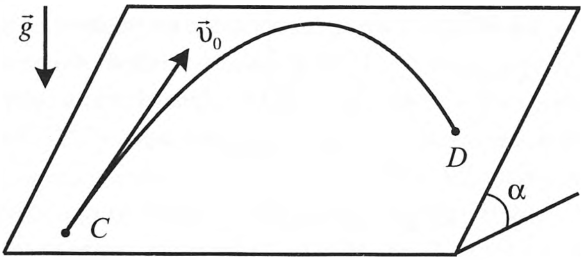
б) удар абсолютно неупругий.

32. Легкий шарик начинает свободно падать и, пролетев расстояние l, сталкивается упруго с тяжелой плитой, движущейся вверх со скоростью u. На какую высоту h подскочит шарик после удара?

33. Легкая пружина, жесткость которой равна k, а длина L, стоит вертикально на столе. С высоты H над столом на нее падает небольшой шарик, масса которого равна m. Найдите максимальную скорость υ_{max}, которую будет иметь шарик при своем движении вниз, и максимальное сжатие пружины. Трением пренебречь.

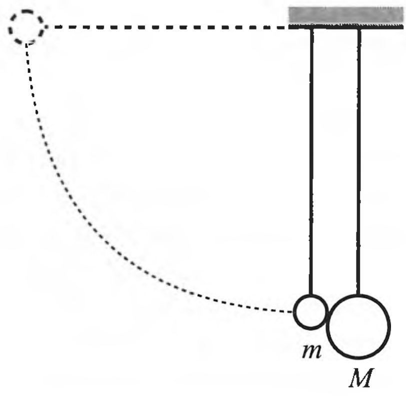
34. Один грузик подвешен на нерастяжимой нити длиной l, а другой — на жестком невесомом стержне такой же длины. Какие минимальные скорости нужно сообщить этим грузикам, чтобы они вращались в вертикальной плоскости?

35. Монета скользит по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α и имеет в точке C скорость υ_0. Через некоторое время монета оказалась в точке D наклонной плоскости, пройдя путь S и поднявшись по вертикали на высоту H. Коэффициент трения скольжения между монетой и наклонной плоскостью μ. Найдите скорость монеты в точке D.



36. В шар массой 500 г, висящий на невесомом стержне, попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально, и застревает в нем. После этого шар с пулей поднимаются на высоту 5 см относительно начального положения шара. Найдите скорость пули.

37. Два шарика, массы которых $m = 1$ кг и $M = 3$ кг, висят, соприкасаясь, на нитях длиной 80 см каждая. Шарик меньшей массы отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости. Какое количество теплоты выделится в результате абсолютно неупругого удара шариков?



38. Снаряд массой $m = 10$ кг, летящий горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 200$ м/с, разрывается на две равные части, одна из которых летит в направлении снаряда, а вторая — в противоположную сторону. Найдите скорости осколков, если известно, что при взрыве механическая энергия E увеличилась на 900 кДж.

39. Летящий снаряд разорвался на два осколка. Угол между скоростями осколков 60°. Первый осколок массой $m_1 = 40$ кг имеет скорость $\upsilon_1 = 100$ м/с. Второй осколок массой $m_2 = 60$ кг имеет скорость $\upsilon_2 = 25$ м/с. Чему равна энергия ΔE, выделенная при разрыве снаряда?

40. В одинаковых сообщающихся сосудах трубки частично заполнены водой. Насколько повысится уровень воды в левой трубке, если в правую налить столб керосина высотой $H = 30$ см? Плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

41. (Задача Гиерона) Предположив, что золотая корона царя Гиерона в воздухе весит 20 Н, а в воде 18,75 Н, вычислите плотность вещества короны. Полагая, что к золоту было подмешано только серебро, определите, сколько в короне было золота, а сколько — серебра. При решении задачи плотность золота считайте равной 20 000 кг/м^3, плотность серебра — 10 000 кг/м^3.

МТК. Газовые законы. Термодинамика

42. Воздушный шар с тонкой газонепроницаемой оболочкой заполнен гелием. Масса оболочки 300 кг. Масса гелия внутри оболочки 100 кг. Температура окружающего воздуха 7 °С. Какой груз сможет удерживать в воздухе воздушный шар? Считать, что оболочка шара не оказывает сопротивления изменению объема шара. Атмосферное давление воздуха 105 Па.

43. Воздух в воздушном шаре нагревается горелкой через отверстие снизу воздушного шара. Объем шара $V = 1000$ м^3, масса тонкой оболочки шара $m_0 = 350$ кг, масса корзины, в которую залезает человек, $m_к = 200$ кг. Температура окружающего воздуха 17 °С, температура, до которой нагревается воздух внутри шара, 37 °С. Человека какой массы m может поднять данный воздушный шар?

44. В трубке, закрытой с одного конца, столбик воздуха заперт столбиком ртути высотой $h = 19$ см. Если трубку повернуть открытым концом вниз, длина столбика воздуха будет $l_1 = 20$ см, а если повернуть открытым концом вверх, то $l_2 = 12$ см. Найдите атмосферное давление. Ответ выразите в мм рт. ст.

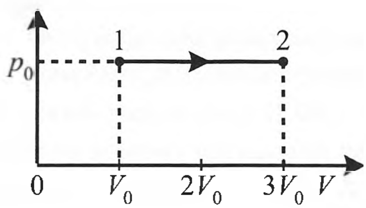
45. Горизонтально расположенный теплоизолированный сосуд разделен пористой перегородкой на две равные части. В начальный момент в правой части сосуда находится $\nu_1 = 10$ моль гелия, а в левой — $\nu_2 = 6$ моль ксенона при одинаковой температуре. Атомы гелия могут проникать через перегородку, а атомы ксенона — нет. Найдите отношение давлений газов по разные стороны перегородки после установления термодинамического равновесия.

46. В калориметр налито $m_1 = 2$ кг воды, имеющей температуру $t_1 = 5$ °С, и положен кусок льда массой $m_2 = 5$ кг, имеющего температуру $t_2 = -40$ °С. Определите температуру и объем содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь.

47. Два теплоизолированных сосуда одинакового объема соединены тонкой трубкой с краном. В одном сосуде находится гелий при температуре 200 K, а в другом — гелий при температуре 400 K и при давлении в 3 раза больше, чем в первом сосуде. Какой станет температура газа после открывания крана и установления теплового равновесия?

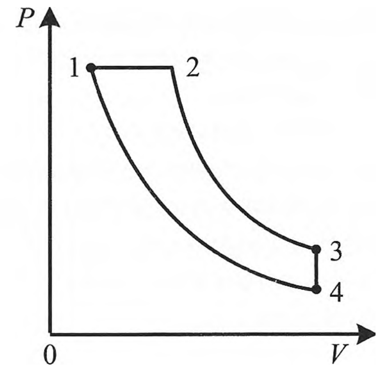
48. Теплоизолированный сосуд разделен тонкой теплоизолирующей перегородкой на две части, отношение объемов которых $\frac{V_2}{V_1} = 3$. Части сосуда заполнены одним и тем же одноатомным идеальным газом. Давление в первой из них равно p_0, во второй — $2p_0$. Каким станет давление в сосуде, если перегородку убрать?

49. На рисунке показан процесс изменения состояния 2 моль идеального одноатомного газа. Начальная температура газа 127 °С. Какое количество теплоты сообщили газу в этом процессе?

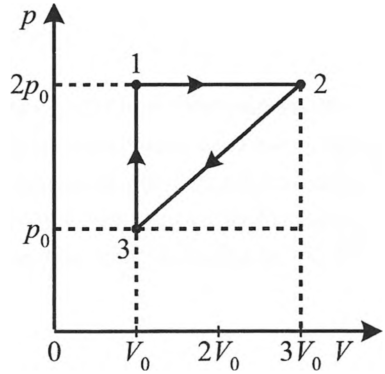


50. 1 моль идеального одноатомного газа совершает замкнутый цикл. Цикл состоит из изотермического расширения, изохорного охлаждения и адиабатического сжатия. В изотермическом процессе работа, совершенная газом, равна A, а в изохорном процессе температура газа понижается на ΔT. Найдите КПД цикла.

51. Тепловая машина использует в качестве рабочего вещества 1 моль идеального одноатомного газа. Цикл работы газа изображен рисунке в pV-координатах и состоит из изохоры, изобары и двух адиабат. Найдите КПД этого цикла, если минимальная и максимальная температуры газа при изохорном процессе $t_4 = 27$ °C и $t_3 = 327$ °C и газ получает за цикл количество теплоты $Q_н = 4$ кДж.



52. Тепловой двигатель работает по циклу, изображенному на рисунке. При переходе из состояния 1 в состояние 2 газ совершает работу $A_{12} = 10$ кДж. Найдите КПД цикла.



53. Паровой котел частично заполнен водой, а частично — смесью воздуха и насыщенного пара при температуре 100 °C. Начальное давление в котле $p_1 = 3p_0 = 300$ кПа. Найдите давление p_2 в котле после понижения температуры до 10 °C. Атмосферное давление воздуха $p_0 = 10^5$ Па.

54. Сосуды объемами 10 и 40 л содержат влажный воздух при комнатной температуре. Относительная влажность воздуха в сосудах равна соответственно 20 и 60%. Какая влажность установится в сосудах, если их соединить тонкой трубкой, после установления равновесия? Температуру считать постоянной.

55. В сосуде под поршнем находится воздух с относительной влажностью $\varphi = 50\%$. Объем воздуха изотермически уменьшили в 4 раза. Какая часть α исходного количества водяных паров сконденсировалась при сжатии?

Электродинамика

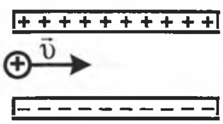
56. Металлический шарик радиусом r, имеющий заряд q, помещен в центр незаряженного сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны R_1 и R_2. Найдите напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого системой, если:

а) слой изготовлен из металла;

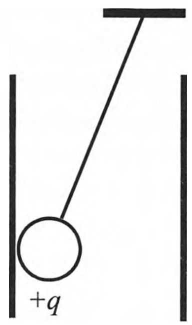
б) металлический слой заземлен;

в) слой изготовлен из диэлектрика с проницаемостью ε.

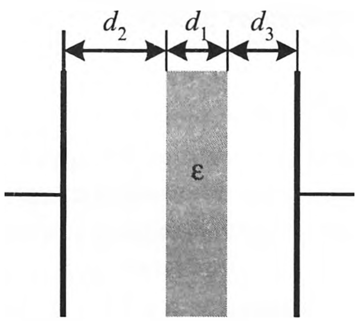
57. Протон влетает в электрическое поле конденсатора параллельно его пластинам в точке, находящейся посередине между его пластинами. Длина пластин конденсатора 4 см. Напряженность электрического поля конденсатора 4000 В/м. Расстояние между пластинами конденсатора 0,5 см. Найдите минимальную скорость υ, с которой протон должен влететь в конденсатор, чтобы потом вылететь из него. Силой тяжести пренебречь. Считать, что конденсатор находится в вакууме.



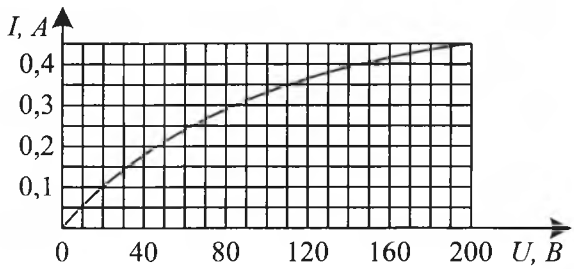
58. Маленький металлический шарик с зарядом $2 \cdot 10^{-7}$ Кл и массой $m = 6$ г подвешен на невесомой нити между вертикальными пластинами плоского воздушного конденсатора. Коэффициент упругости нити 50 Н/м. Расстояние между обкладками конденсатора 4 см. Найдите разность потенциалов между обкладками конденсатора, если нить растянулась на 2 мм.



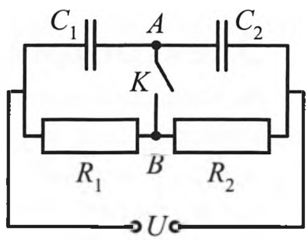
59. В плоский конденсатор с расстоянием d между обкладками вводится диэлектрическая пластинка толщиной $d_1 < d$. Найдите емкость конденсатора с диэлектрической пластинкой. Диэлектрическая проницаемость пластины — ε. Площадь каждой обкладки конденсатора и пластины — S.



60. На графике изображена зависимость силы тока, проходящего через лампу накаливания, от приложенного к ней напряжения. При последовательном соединении трех одинаковых ламп и источника тока сила тока в цепи оказалась равной 0,45 А. Найдите напряжение на клеммах источника. Источник тока считать идеальным.



61. К схеме, изображенной на рисунке, известны величины R_1, R_2, C_1, C_2, U. Какой заряд пройдет через ключ K, если его замкнуть?

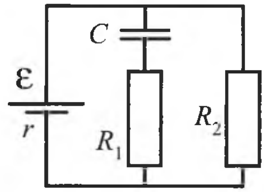


62. Линия электропередачи длиной l = 100 км работает при напряжении U = 200 000 В. Определите КПД линии, т. е. отношение напряжения на нагрузке к напряжению, подводимому к линии. Линия выполнена из алюминиевого кабеля площадью поперечного сечения S = 150 мм^2. Передаваемая мощность Р = 30 000 кВт.

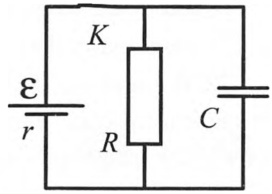
63. Две спирали электроплитки сопротивлением по R = 10 Ом каждая соединены параллельно и включены в сеть. Каково напряжение сети, если вода массой m = 3 кг при нагревании на этой плите закипает через τ = 130 с? Начальная температура воды равна t_1 = 20 °С, а КПД процесса η = 80%.

64. Алюминиевый проводник подключают к идеальному источнику постоянного тока с напряжением 12 В, и за время 20 с он нагревается до температуры 60 °С. Найдите начальную температуру проводника, если на нагревание проводника идет 40% выделившейся теплоты. Проводник имеет цилиндрическую форму, его длина равна 20 метров.

65. В схеме, изображенной на рисунке, напряженность электрического поля плоского конденсатора равна 15 кВ/м. ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ = 24 В, внутреннее сопротивление источника r = 2 Ом, сопротивление резисторов R_1 = 10 Ом, R_2 = 30 Ом. Найдите расстояние между пластинами конденсатора.



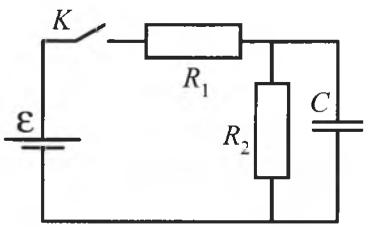
66. На рисунке показана электрическая схема. Ключ K замкнут. ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ = 6 В, сопротивление резистора R = 10 Ом, заряд конденсатора — 4 мкКл. После размыкания ключа K на резисторе выделяется количество теплоты Q = 10 мкДж. Найдите внутреннее сопротивление источника тока r.



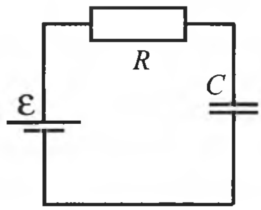
67. В электрической схеме, состоящей из батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ =10 В, резисторов R_1 = 50 Ом, R_2 = 100 Ом и конденсатора, замыкают ключ K.

1) Найдите напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.

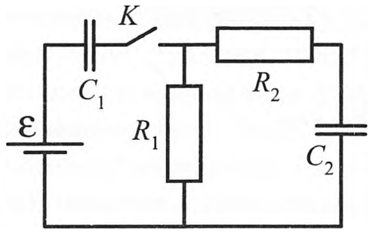
2) Найдите ток через батарею в тот момент, когда напряжение на конденсаторе достигло значения $\frac{\mathcal{E}}{2}$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



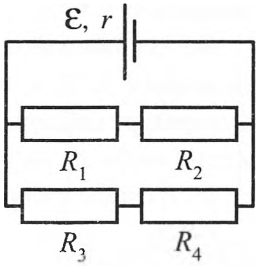
68. На рисунке показана электрическая схема, в которой идеальный источник тока соединен с резистором и конденсатором переменной емкости (расстояние между пластинами которого можно изменять). ЭДС идеального источника тока $\mathcal{E}$ = 24 В. Пластины конденсатора медленно раздвигают, совершая при этом работу против сил притяжения пластин, равную 40 мкДж. Заряд конденсатора меняется на 1 мкКл. Какое количество теплоты выделилось на резисторе за время движения пластин?



69. В изображенной на рисунке электрической цепи ЭДС источника тока равна 400 В, сопротивления резисторов $R_1 = 12$ Ом и $R_2 = 21$ Ом, а емкости конденсаторов $C_1 = 80$ мкФ и $C_2 = 120$ мкФ. В начальном состоянии конденсаторы не заряжены, ключ не замкнут. Ключ замыкают. Какое количество теплоты выделится в цепи к моменту установления равновесия?



70. В схеме, изображенной на рисунке, сопротивления резисторов $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 4$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. Определите мощность, которая выделяется на резисторе R_4.



71. Источник тока, ЭДС которого $\mathcal{E}$, а внутреннее сопротивление r, подключен к реостату, сопротивление которого может изменяться от нуля до R. Каким должно быть сопротивление реостата, чтобы получить:

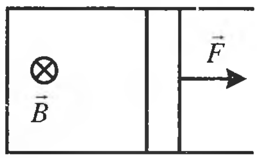
1) максимальную силу тока в цепи;

2) максимальную полезную мощность?

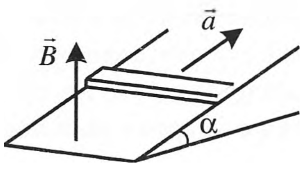
72. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает перпендикулярно линиям магнитной индукции частица массой m со скоростью $\vec{\upsilon}$ и положительным зарядом q. Как будет двигаться частица в магнитном поле? Считать, что движение происходит в вакууме и силой тяжести можно пренебречь.

73. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает со скоростью $\vec{\upsilon}$ частица массой m и положительным зарядом q. Угол между векторами скорости $\vec{\upsilon}$ и магнитной индукции $\vec{B}$ равен α. Как будет двигаться частица в магнитном поле?

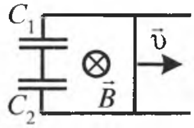
74. Длинный проводник согнут в виде буквы П и закреплен в горизонтальной плоскости. На параллельные стороны проводника опирается концами перпендикулярная проводящая перемычка. Масса перемычки 100 г, длина 1 м. Сопротивление перемычки равно 1 Ом. Проводник находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл. К перемычке прикладывают постоянную горизонтальную силу $F = 0{,}6$ Н, как показано на рисунке. С какой установившейся скоростью будет двигаться перемычка? Коэффициент трения между стержнем и перемычкой равен 0,3. Сопротивлением проводника, по которому двигается перемычка, пренебречь.



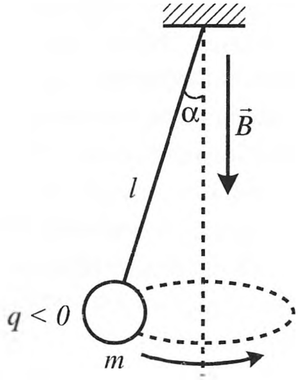
75. Горизонтальный проводник поступательно движется с ускорением вверх по гладкой наклонной плоскости в вертикальном однородном магнитном поле. По проводнику протекает ток $I = 2$ А. Угол наклона плоскости $\alpha = 30°$. Масса проводника $m = 0{,}1$ кг, длина $L = 1$ м. Модуль индукции магнитного поля $B = 0{,}2$ Тл. Найдите ускорение проводника a.



76. По двум параллельным проводникам, находящимся друг от друга на расстоянии l = 0,5 м, перемещают перемычку с постоянной скоростью υ = 10 м/с. Между проводниками включены последовательно два конденсатора, причем отношение их емкостей равно: $n = \frac{C_2}{C_1} = 1{,}5$. Вся система находится в постоянном однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости, в которой лежат проводники. Какова индукция магнитного поля, если на конденсаторе C_2 напряжение U = 0,5 В?

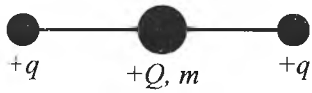


77. Отрицательно заряженный шарик массой m, подвешенный на нити, равномерно вращается по окружности в горизонтальной плоскости в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Длина нити равна l, скорость вращения шарика υ, угол отклонения нити от вертикали равен α. Найдите заряд шарика q.

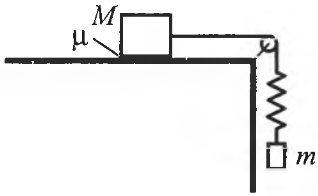


Колебания и волны. Оптика

78. По гладкой горизонтальной направляющей длиной $2l$ скользит бусинка с положительным зарядом $Q > 0$ и массой m. На концах направляющей находятся положительные заряды $q > 0$. Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T. Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд уменьшить в 2 раза?



79. Брусок, покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из грузика и легкой пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью через блок. Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола равен 0,4. Отношение массы бруска к массе грузика равно 6. Грузик маятника совершает колебания с частотой 1 Гц вдоль вертикали, совпадающей с вертикальным отрезком нити. Какова максимально возможная амплитуда этих колебаний, при которой они остаются гармоническими?



80. В дно озера глубиной 3 м вертикально вбита свая. Высота сваи 1 м. Угол падения солнечных лучей на поверхность воды равен 30°. Определите длину тени от сваи на дне водоема. Коэффициент преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

81. Прямоугольный плот длиной a = 5 м и шириной b = 3 м плавает в открытом бассейне глубиной h = 1 м. Каковы размеры тени на дне бассейна:

а) в солнечный день;

б) когда все небо затянуто тучами?

82. Оптическая система состоит из расположенных друг за другом рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 10 см и собирающей линзы с неизвестным фокусным расстоянием. Главные оптические оси линз совпадают. Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси перед рассеивающей линзой на расстоянии 10 см от нее. Система создает изображение предмета в натуральную величину на экране, находящемся за собирающей линзой на расстоянии 30 см от нее. На каком расстоянии от себя создает изображение предмета рассеивающая линза? Найдите расстояние между линзами.

83. С помощью тонкой линзы на экране получили изображение предмета с шестикратным увеличением. Предмет и плоскость экрана расположены перпендикулярно главной оптической оси. Экран передвинули на 20 см вдоль главной оптической оси линзы. После этого, не меняя положения линзы, предмет передвинули так, что его изображение снова стало резким. Теперь на экране получено изображение с четырехкратным увеличением. Найдите фокусное расстояние линзы.

84. Близорукий человек читает без очков, держа книгу на расстоянии d =10 см от глаз. Какова оптическая сила D необходимых ему для чтения очков?

85. Найдите период дифракционной решетки, если при падении на нее фотонов с импульсом $p = 2{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг · м/с дифракционный максимум третьего порядка наблюдается под углом $\alpha = 30\,°$.

86. Плоская монохроматическая световая волна падает на дифракционную решетку с периодом 2 мкм перпендикулярно решетке. За решеткой находится собирающая линза с фокусным расстоянием 10 см. За линзой в ее фокальной плоскости размещен экран, на котором наблюдается дифракционная картина. Частота падающего света $6 \cdot 10^{14}$ Гц. Найдите расстояние между вторым и третьим максимумами. Угол отклонения лучей решеткой считать малым.

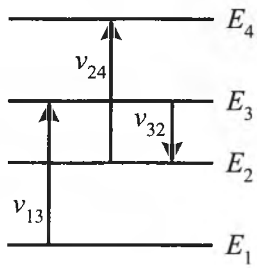
87. На поверхность стекла с показателем преломления $n_1 = 1{,}6$ нанесена пленка с показателем преломления $n_2 = 1{,}45$. Толщина пленки $d = 200$ нм. Для какой длины волны λ видимого света, падающего перпендикулярно поверхности пленки, коэффициент отражения будет максимальным?

Квантовая физика

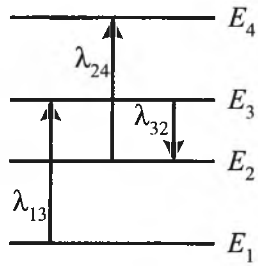
88. Металлическую пластину освещают монохроматическим светом, имеющим длину волны $\lambda = 520$ нм. Найдите импульс фотоэлектронов, если работа выхода электронов из данного металла $A_{вых} = 1{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж.

89. При увеличении в 2 раза частоты света, падающего на поверхность металла, запирающее напряжение для фотоэлектронов увеличилось в 3 раза. Начальная частота падающего света равна $0{,}8 \cdot 10^{15}$ Гц. Найдите длину волны, которая соответствует «красной границе» фотоэффекта для этого металла.

90. На рисунке показаны энергетические уровни атома и указаны частоты световых волн, испускаемых и поглощаемых при переходах между ними: $\nu_{13} = 6 \cdot 10^{14}$ Гц, $\nu_{32} = 2{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц. При переходе с уровня E_4 на уровень E_1 атом излучает свет с длиной волны $\lambda = 380$ нм. Найдите частоту колебаний световой волны, которую поглощает атом при переходе с уровня E_2 на уровень E_4.

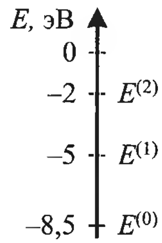


91. На рисунке показаны энергетические уровни атома и длины волн фотонов, испускаемых и поглощаемых при переходах между ними: $\lambda_{13} = 380$ нм, $\lambda_{32} = 620$ нм. При всех возможных переходах между уровнями энергии, показанными на рисунке, минимальная длина волны излучаемого фотона $\lambda_{min} = 300$ нм. Найдите длину волны фотона, который поглотит атом при переходе с уровня E_2 на уровень E_4.



92. Значения энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\dfrac{13{,}6\text{ эВ}}{n^2}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ При переходах с верхних уровней энергии на нижние атом излучает фотон. Переходы с верхних уровней на уровень $n = 1$ образуют серию Лаймана; на уровень с $n = 2$ — серию Бальмера. Найдите отношение α максимальной частоты фотона в серии Лаймана к максимальной частоте фотона в серии Бальмера.

93. Схема энергетических уровней атомов вещества изображена на рисунке. Атомы находятся в состоянии с энергией $E^{(1)}$. В результате столкновения с одним из таких атомов электрон приобрел дополнительную энергию. Импульс электрона после столкновения с покоящимся атомом оказался равным $1{,}6 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с. Найдите кинетическую энергию электрона до столкновения с атомом.



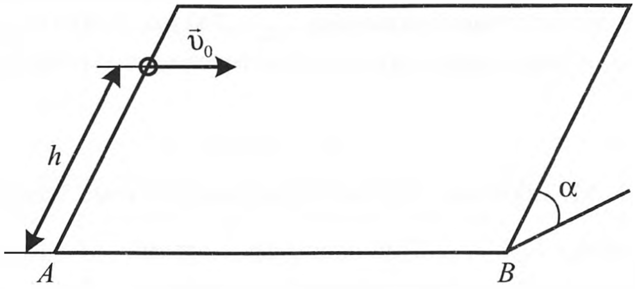
94. Значения энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\dfrac{13{,}6\text{ эВ}}{n^2}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ При переходе из состояния E_3 в состояние E_1 атом излучает фотон. Излученный фотон попадает на поверхность фотокатода и выбивает фотоэлектрон. Работа выхода для данного металла равна 4 эВ. Найдите максимально возможный импульс фотоэлектрона.

95. Радиоактивный препарат активностью $1{,}2 \cdot 10^{11}$ частиц в секунду помещен в медный контейнер массой 1 кг. Насколько повысится температура контейнера за 1 ч, если радиоактивное вещество испускает α-частицы энергией 5 МэВ? Энергия всех α-частиц полностью переходит во внутреннюю энергию контейнера. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

96. Пациенту ввели внутривенно дозу раствора, содержащего изотоп $^{11}_{24}Na$. Активность 1 см^3 этого раствора $a_0 = 4000$ распадов в секунду. Период полураспада изотопа $^{11}_{24}Na$ равен $T = 15{,}3$ ч. Через $t = 7$ ч 39 мин активность 1 см^3 крови пациента стала $a_к = 0{,}4$ распада в секунду. Каков объем введенного раствора, если общий объем крови пациента $V = 5$ л? Переходом ядер изотопа $^{11}_{24}Na$ из крови в другие ткани организма пренебречь.

Итоговая контрольная работа

1. Вдоль гладкой наклонной плоскости с углом наклона 30°, как показано на рисунке, толкают шайбу, сообщив ей горизонтальную скорость 2 м/с. Найдите перемещение шайбы к моменту ее падения на прямую AB. Начальное расстояние от шайбы до прямой AB равно h = 40 см.



2. Деревянный шар массой 300 г подвешен на нити длиной 18 см. В шар попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально, и застревает в нем. С какой минимальной скоростью должна лететь пуля, чтобы шар с застрявшей в нем пулей начал вращаться в вертикальной плоскости?

3. В запаянной с одного конца горизонтальной трубке столбик воздуха заперт столбиком ртути длиной 15 см. Если трубку расположить вертикально, открытым концом вверх, то длина столбика воздуха равна 13 см. Если же трубку повернуть открытым концом вниз, то длина столбика воздуха станет равна 17 см. Найдите атмосферное давление воздуха. Ответ выразите в мм рт. ст.

4. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 5 кВ, влетает ровно посередине между обкладками плоского конденсатора, параллельно им. Длина пластин конденсатора 20 см, расстояние между обкладками 2 см. Определите напряжение, которое нужно подать на пластины конденсатора, чтобы электрон отклонялся от своего начального направления на максимальный угол при вылете из конденсатора.

5. Медный шарик длительное время освещается светом с длиной волны 250 нм. Работа выхода фотоэлектронов из меди равна 4,36 эВ. Радиус шарика 5 мм. Найдите установившийся заряд шарика.

Приложения

Приложение 1

Основные физические формулы, которые нужно знать

Механика

1. **Средняя путевая скорость** — отношение пройденного пути L ко времени движения t.

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{L}{t}.$$

2. **Средняя скорость перемещения** — отношение перемещения $\vec{S}$ ко времени движения t.

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\vec{S}}{t}.$$

3. **Сложение скоростей при относительном движении тел:**

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2.$$

Скорость тела относительно неподвижной системы отсчета $\vec{\upsilon}$ равна геометрической (векторной) сумме скорости тела относительно подвижной системы отсчета $\vec{\upsilon}_1$ и скорости подвижной системы отсчета относительно неподвижной $\vec{\upsilon}_2$.

4. **Зависимость скорости тела и перемещения от времени при равноускоренном движении:**

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t,$$

где $\vec{a}$ — ускорение, $\vec{\upsilon}_0$ — начальная скорость, t — время движения, $\vec{\upsilon}$ — скорость в момент времени t.

5. **Перемещение тела при равноускоренном движении:**

$$\vec{S} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

6. **Угловая скорость:**

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

7. **Связь линейной и угловой скорости:**

$$\upsilon = \omega R.$$

8. **Центростремительное (нормальное) ускорение:**

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где a_n — центростремительное ускорение, υ — скорость, R — радиус окружности.

9. **Второй закон Ньютона:**

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

10. **Третий закон Ньютона:**

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

11. **Сила гравитационного притяжения (сила тяготения):**

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2 — гравитационная постоянная.

12. **Сила трения скольжения:**

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ — коэффициент трения, N — модуль силы нормальной реакции со стороны опоры.

13. **Сила упругости (закон Гука):**

$$F = kx,$$

где k — коэффициент упругости тела, x — деформация упругого тела.

14. **Момент силы:**

$$M = Fl,$$

где l — плечо силы (расстояние от оси вращения до линии действия силы).

15. **Импульс тела:**

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

16. **Закон изменения импульса тела:**

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{\upsilon}.$$

17. **Работа силы**

Работа A силы $\vec{F}$ на малом перемещении $\vec{S}$ — это скалярная физическая величина, равная скалярному произведению векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{S}$.

$$A = \vec{F}\vec{S} = FS\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$.

18. **Мощность:**

$$N = \frac{A}{\Delta t}.$$

19. **КПД:**

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} \cdot 100\%.$$

20. **Кинетическая энергия тела:**

$$E_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

21. **Потенциальная энергия, связанная с силой тяжести:**

$$E_{\text{п}} = mgh,$$

где h — высота, на которую поднято тело относительно нулевого уровня.

22. **Потенциальная энергия упруго деформированного тела:**

$$E_п = \frac{kx^2}{2},$$

где k — коэффициент упругости тела, x — деформация тела (удлинение или сжатие).

23. **Закон сохранения импульса при взаимодействии двух тел:**

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

где m_1 и m_2 — массы тел, $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ — скорости тел до взаимодействия, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ — скорости тел после взаимодействия.

24. **Закон сохранения энергии при абсолютно упругом взаимодействии двух тел:**

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$

где m_1 и m_2 — массы тел, $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ — скорости тел до взаимодействия, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ — скорости тел после взаимодействия.

25. **Давление силы:**

$$p = \frac{F}{S},$$

где F — сила, S — площадь.

26. **Давление столба жидкости:**

$$p = \rho g h,$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, h — высота столба жидкости.

27. **Формула гидравлического пресса:**

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1},$$

где S_1 и S_2 — площади поршней гидравлического пресса.

28. **Сила Архимеда:**

$$F_A = \rho_ж g V_т,$$

где $\rho_ж$ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, $V_т$ — объем погруженной в жидкость части тела.

МКТ и термодинамика

29. **Молярная масса:**

$$M = m_0 N_A,$$

где m_0 — масса одной молекулы газа, $N_A \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — число Авогадро.

30. **Средняя квадратичная скорость движения молекул газа:**

$$\upsilon_{ср.\,кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где m_0 — масса одной молекулы газа, T — температура газа (K), M — молярная масса газа, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/K — постоянная Больцмана, $R = kN_A = 8{,}31$ Дж/(моль · K) — универсальная газовая постоянная.

31. **Уравнение Менделеева–Клапейрона:**

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где p — давление, V — объем, m — масса газа, M — молярная масса; $R = 8{,}31$ Дж/(моль · K) — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура.

32. **Уравнение Клапейрона:**

$$\text{при } m = \text{const: } \frac{pV}{T} = \text{const, или } \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

33. **Закон Бойля–Мариотта** (для изотермического процесса постоянной массы газа):

$$\text{при } m = \text{const}, T = \text{const: } pV = \text{const, или } p_1V_1 = p_2V_2.$$

34. **Закон Гей-Люссака** (для изобарного процесса постоянной массы газа):

$$\text{при } m = \text{const}, p = \text{const: } \frac{V}{T} = \text{const, или } \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

35. **Закон Шарля** (для изохорного процесса постоянной массы газа):

$$\text{при } m = \text{const}, V = \text{const: } \frac{p}{T} = \text{const, или } \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$

36. **Закон Дальтона для смеси разреженных газов:**

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_i.$$

Общее давление смеси газов p равно сумме давлений всех газов в данном объеме.

37. **Количество теплоты, необходимое для нагревания или выделяемое при охлаждении:**

$$Q = cm(t_2 - t_1),$$

где m — масса тела, t_1 — начальная температура, t_2 — конечная температура.

38. **Количество теплоты, поглощаемое в процессе плавления** (выделяемое в процессе отвердевания):

$$Q = \lambda m,$$

где λ — удельная теплота плавления, m — масса тела.

39. **Количество теплоты, поглощаемое в процессе парообразования** (выделяемое в процессе конденсации):

$$Q = Lm,$$

где L — удельная теплота парообразования, m — масса тела.

40. **Количество теплоты, выделяющееся при сгорании топлива:**

$$Q = qm,$$

где q — удельная теплота сгорания, m — масса сгоревшего топлива.

41. **Уравнение теплового баланса:**

$$|Q_{\text{в}1}| + |Q_{\text{в}2}| + ... + |Q_{\text{в}n}| = |Q_{\text{п}1}| + |Q_{\text{п}2}| + ... + |Q_{\text{п}k}|.$$

Суммарное количество теплоты, которое выделяется в теплоизолированной системе, равно по модулю количеству теплоты (суммарному), которое в этой системе поглощается.

42. **Внутренняя энергия идеального одноатомного газа:**

$$U = \frac{3m}{2M}RT = \frac{3}{2}\nu RT,$$

где m — масса газа, M — молярная масса; R = 8,31 Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная; T — абсолютная температура, ν — количество вещества.

43. **Первый закон термодинамики:**

$$\Delta U = A + Q, \text{ или } Q = \Delta U + A' = \Delta U - A,$$

где A — работа, совершаемая над газом (системой) окружающими телами, A' — работа, совершаемая газом (системой) над окружающими телами, Q — количество теплоты, которое сообщили газу, ΔU — изменение внутренней энергии газа.

44. **Теплоемкость:**

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

45. **Удельная теплоемкость** (теплоемкость одного килограмма вещества):

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}.$$

46. **Молярная теплоемкость** (теплоемкость одного моля вещества):

$$c_M = \frac{\Delta Q}{\nu\Delta T}.$$

47. **Работа газа при изобарном процессе:**

$$A' = p\Delta V = \nu R\Delta T.$$

48. **Уравнение адиабатного процесса** (уравнение Пуассона):

$$pV^{\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ — показатель адиабаты, C_P — молярная теплоемкость газа при постоянном давлении, C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

49. **Уравнение Роберта Майера:**

$$C_P = C_V + R.$$

50. **Работа газа за цикл:**

$$A = Q_{н} - Q_{х},$$

где $Q_{н}$ — количество теплоты, полученное от нагревателя за весь цикл; $Q_{х}$ — количество теплоты, отданное холодильнику за весь цикл.

51. **КПД цикла:**

$$\eta = \frac{Q_{н} - Q_{х}}{Q_{н}} \cdot 100\% = \frac{A}{Q_{н}} \cdot 100\%.$$

52. **КПД идеальной тепловой машины** (цикл Карно):

$$\eta_{max} = \frac{T_{н} - T_{х}}{T_{н}} \cdot 100\%,$$

где $T_{н}$ — температура нагревателя, $T_{х}$ — температура холодильника.

53. **Относительная влажность:**

$$\varphi = \frac{p}{p_{\text{н}}} \cdot 100\% = \frac{\rho}{\rho_{\text{н}}} \cdot 100\%,$$

где p и ρ — давление и плотность водяного пара при данной температуре, $p_{\text{н}}$ и $\rho_{\text{н}}$ — давление и плотность насыщенного водяного пара при той же температуре.

54. **Давление влажного воздуха:**

$$p_{\text{вв}} = p_{\text{св}} + p_{\text{п}},$$

где $p_{\text{вв}}$ — давление влажного воздуха, $p_{\text{св}}$ — давление сухого воздуха, $p_{\text{п}}$ — давление водяного пара.

Электродинамика

55. **Закон Кулона:**

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2},$$

где коэффициент $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл², а $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ — электрическая постоянная, $|q_1|$ и $|q_2|$ — модули взаимодействующих зарядов, r — расстояние между точечными зарядами (или между центрами заряженных шаров или сфер), ε — диэлектрическая проницаемость среды.

56. **Закон сохранения электрического заряда:**

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n = \text{const}.$$

В изолированной (замкнутой) системе заряженных тел заряд (общий заряд — алгебраическая сумма всех зарядов в системе) сохраняется.

57. **Напряженность электрического поля:**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

58. **Напряженность поля, созданного точечным зярядом** q на расстоянии r:

$$E = k\frac{q}{r^2}.$$

59. **Напряженность бесконечной равномерно заряженной плоскости:**

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \text{ или } E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

где q — заряд на поверхности, S — площадь плоскости, ε — диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 — $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ — электрическая постоянная, σ — поверхностная плотность заряда (или заряд единицы поверхности, $\sigma = \frac{q}{S}$).

60. **Потенциальная энергия заряда** q в однородном электрическом поле напряженностью E:

$$W_{\text{п}} = qEd,$$

где d — расстояние, на которое перемещается заряд вдоль линий напряженности электрического поля.

61. **Работа сил поля по перемещению заряда в однородном электрическом поле:**

$$A = W_{п1} - W_{п2} = -\Delta W_{п} = qEd.$$

62. **Потенциал электрического поля:**

$$\varphi = \frac{W_{п}}{q}.$$

63. **Разность потенциалов** (напряжение) между точками 1 и 2:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}.$$

64. **Потенциал поля точечного заряда** q на расстоянии r от заряда:

$$\varphi = \frac{kq}{\varepsilon r}.$$

65. **Электроемкость (емкость) конденсатора:**

$$C = \frac{q}{U},$$

где q — заряд одного из проводников (на другом проводнике такой же заряд противоположного знака), а U — разность потенциалов между проводниками.

66. **Емкость плоского конденсатора:**

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S — площадь обкладок конденсатора, d — расстояние между обкладками, ε — диэлектрическая проницаемость диэлектрика между обкладками конденсатора (если есть), $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

67. **Энергия заряженного конденсатора:**

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

68. **Сила тока:**

$$I = \frac{q}{t}.$$

69. **Сопротивление проводника:**

$$R = \frac{\rho l}{S},$$

где l — длина проводника, S — площадь поперечного сечения проводника, ρ — удельное сопротивление материала, из которого изготовлен проводник.

70. **Последовательное соединение проводников:**

$$I = I_1 = I_2,$$
$$R = R_1 + R_2,$$
$$U = U_1 + U_2.$$

71. **Параллельное соединение проводников:**

$$U = U_1 = U_2,$$
$$I = I_1 + I_2,$$
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

72. **Работа электрического тока на участке цепи:**

$$A = qU = UIt.$$

73. **Закон Джоуля–Ленца:**

$$Q = A = UIt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

74. **Мощность тока:**

$$P = \frac{A}{t} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

75. **КПД электродвигателя** (η):

$$\eta = \frac{A_п}{A_з} \cdot 100\% = \frac{P_п}{P_з} \cdot 100\%,$$

где $A_п$ — полезная работа, $A_з$ — затраченная работа, $P_п$ — полезная мощность, $P_з$ — затраченная мощность.

76. **Электродвижущая сила источника (ЭДС):**

$$\varepsilon = \frac{A_{ст}}{q},$$

где $A_{ст}$ — работа сторонних сил в источнике тока, q — заряд.

77. **Закон Ома для полной цепи:**

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

Магнитное поле

78. **Сила Ампера:**

$$F_A = BIL\sin\alpha,$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, I — сила тока, L — длина проводника, α — угол между направлением вектора магнитной индукции и проводником с током.

79. **Сила Лоренца:**

$$F_Л = |q|\upsilon B\sin\alpha,$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, q — заряд частицы, υ — скорость частицы, α — угол между вектором магнитной индукции и вектором скорости частицы.

80. **Магнитный поток:**

$$\vec{\Phi} = \vec{B}S\cos\alpha,$$

где $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции, S — площадь контура, α — угол между векторами $\vec{B}$ $\vec{n}$ (где $\vec{n}$ — нормаль к плоскости контура).

81. **Закон электромагнитной индукции Фарадея:**

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(BS\cos\alpha)}{\Delta t}.$$

82. **ЭДС индукции в движущемся проводнике:**

$$\varepsilon_i = Bl\upsilon\sin\alpha.$$

83. **Индуктивность контура:**

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

84. **Самоиндукция:**

$$\varepsilon_{si} = -\frac{L\Delta I}{\Delta t}.$$

85. **Энергия магнитного поля:**

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Колебания

86. **Уравнения гармонических колебаний:**

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$x'' = -\omega^2 x,$$

где ω — циклическая частота колебаний.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

где T — период колебания (время одного полного колебания), ν — частота колебания (количество колебаний в единицу времени).

87. **Период колебаний математического маятника** (формула Гюйгенса):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

88. **Период колебаний пружинного маятника:**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

89. **Период колебаний колебательного контура** (формула Томсона):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Геометрическая оптика

90. **Скорость света в среде:**

$$\upsilon = \frac{c}{n},$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, n — показатель преломления среды.

91. **Закон преломления света:**

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta.$$

92. **Формула тонкой линзы:**

$$\pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm\frac{1}{F},$$

где d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, F — фокусное расстояние линзы.

93. **Оптическая сила тонкой линзы:**

$$D = \pm\frac{1}{F}.$$

94. **Поперечное увеличение:**

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{f}{d},$$

где b — размер изображения, a — размер предмета, d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения.

95. **Скорость волны:**

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu,$$

где T — период волны — время, за которое волна перемещается на расстояние, равное длине λ волны, ν — частота колебаний.

96. **Условие максимума интерференции:**

$$\Delta d = k\lambda,$$

где Δd — разность хода волн, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

97. **Условие минимума интерференции:**

$$\Delta d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

98. **Уравнение дифракционной решетки:**

$$d\sin\alpha = k\lambda,$$

где d — период решетки, k — порядок дифракционного максимума, λ — длина волны, α — угол дифракции (в радианах).

Квантовая физика

99. **Энергия кванта света (фотона):**

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, c — скорость света, ν — частота волны, λ — длина волны.

100. **Импульс фотона:**

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

101. **Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:**

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m\upsilon^2}{2},$$

где $A_{\text{вых}}$ — работа выхода, которая зависит от вещества.

102. **Красная граница фотоэффекта:**

$$A_{\text{вых}} = h\nu_{\text{кр}}.$$

103. **Запирающее напряжение для фотоэффекта:**

$$U_з = \frac{m\upsilon^2}{2e}.$$

104. **Энергия излученного фотона:**

$$h\nu_{kn} = E_k - E_n.$$

105. **Массовое число:**

$$A = Z + N.$$

106. **Дефект масс:**

$$\Delta m = \left(Zm_p + (A - Z)m_n\right) - m_я.$$

107. **Энергия связи ядра:**

$$E = \Delta mc^2.$$

108. **Закон радиоактивного распада:**

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

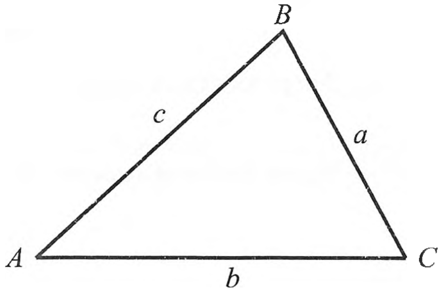
Приложение 2

Сведения из математики, которые обязательно нужно знать

1. График функции $y = ax^2 + bx + c$ — парабола. Вершина параболы имеет координаты: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = c - \dfrac{b^2}{4a}$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.

2. Теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$



3. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

4. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

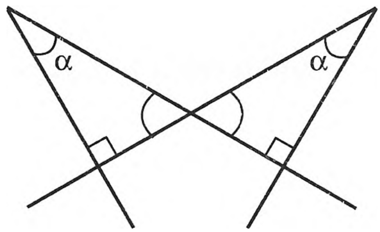
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

5. Длина (модуль) вектора и длины его проекций в прямоугольной системе координат связаны теоремой Пифагора: $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, $a_x = a\cos\varphi$, $a_y = a\sin\varphi$.

6. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны.



7. Для малых углов (угол выражен в радианах) α:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

8. Площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$, объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$; здесь R — радиус сферы или шара.

9. Площадь поверхности цилиндра $S = 2\pi R(R + h)$, объем цилиндра $V = \pi R^2 h$.

10. При $x \ll 1$ выполняется равенство $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, где n — действительное число.

11. Для малых величин Δx и Δy верно равенство

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x.$$

Приложение 3

Справочные данные

Десятичные приставки

Кратные			Дольные		
Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель
гига	Г	10^9	санти	с	10^{-2}
мега	М	10^6	милли	м	10^{-3}
кило	к	10^3	микро	мк	10^{-6}
гекто	г	10^2	нано	н	10^{-9}
деци	д	10^{-1}	пико	п	10^{-12}

Константы

Число π	$\pi = 3{,}14$
Ускорение свободного падения на Земле	$g = 10$ м/с^2
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(моль · К)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Авогадро	$N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Скорость света в вакууме	$C = 3 \cdot 10^8$ м/с
Коэффициент пропорциональности в законе Кулона	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ Н · м^2/Кл^2
Элементарный электрический заряд	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Планка	$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

Соотношения между различными единицами

Температура	0 К = –273 °С
Атомная единица массы	1 а. е. м. $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
1 атомная единица массы эквивалента	931,5 МэВ
1 электронвольт	1 эВ $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж
1 астрономическая единица	1 а.е. ≈ 150 000 000 км
1 световой год	1 световой год $\approx 9{,}46 \cdot 10^{15}$ м
1 парсек	1 пк ≈ 3,26 светового года

Масса частиц

электрона	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $\approx 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ а. е. м.
протона	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1{,}007$ а. е. м.
нейтрона	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1{,}008$ а. е. м.

Плотность

воды	1000 кг/м^3	меди	8900 кг/м^3
древесины (сосны)	400 кг/м^3	алюминия	2700 кг/м^3
керосина	800 кг/м^3	железа (стали)	7800 кг/м^3
подсолнечного масла	900 кг/м^3	ртути	13 600 кг/м^3

Удельная теплоемкость

воды	$4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К)	алюминия	900 Дж/(кг · К)
льда	$2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К)	меди	380 Дж/(кг · К)
железа	460 Дж/(кг · К)	чугуна	500 Дж/(кг · К)
свинца	130 Дж/(кг · К)		

Удельная теплота

парообразования воды	$2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг
плавления свинца	$2{,}5 \cdot 10^4$ Дж/кг
плавления льда	$3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг

Удельное сопротивление

алюминия	$2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м
меди	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м
стали	$9{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

Нормальные условия

давление 10^5 Па; температура 0 °C

Молярная масса

азота	$28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	гелия	$4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
аргона	$40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	кислорода	$32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
водорода	$2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	лития	$7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
воздуха	$29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	неона	$20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
воды	$18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	углекислого газа	$44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Ответы к самостоятельным и контрольным работам

Самостоятельная работа 1

1. 4 км/ч
2. 4,5 км/ч
3. 4,8 км/ч
4. 6 м/с
5. 9,6 км/ч
6. 3 км/ч

Самостоятельная работа 2

1. 19 м
2. 1 м/с; 2 м/с^2
3. $L = 92{,}5$ м; $S = 32{,}5$ м

Самостоятельная работа 3

1. 245 м
2. 25 м
3. $H = \frac{g}{2}\left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_2}\right)^2 = 361{,}25$ м; $t = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_2} = 8{,}5$ с
4. 27 км
5. 8,4 с
6. 60 м
7. 100 м
8. 107 м

Самостоятельная работа 4

1. 36 Н
2. $a = \frac{(m - 2\mu M)g}{4M + m} \approx 0{,}1$ м/с^2
3. ≈2 ч
4. $\upsilon_0 = gt_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$; $t_2 = t_1\sqrt{\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}}$

Самостоятельная работа 5

1. 7,5 Дж
2. 2 м
3. 55 м
4. 20 Н
5. 404 м/с

Самостоятельная работа 6

1. 20 кг
2. на 8 °C
3. 200
4. ≈3 см

Самостоятельная работа 7

1. 6,8 кг воды и 1,4 кг льда при 0 °C
2. Внутренняя энергия увеличилась в 1,5 раза
3. 400 Дж
4. 300 Дж

Самостоятельная работа 8

1. Уменьшится в 8 раз
2. 54 В/м
3. 72 мкДж
4. 96 В
5. 21,6 В

Самостоятельная работа 9

1. 14 м
2. 7,2 В
3. $q_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Кл; $q_2 = 0$
4. 26 мкДж

Контрольная работа 1

1. 2,9 м
2. 2,5 м/с
3. 25 см
4. 20 м
5. 54%

Контрольная работа 2

1. 2 г
2. 30 Дж
3. 14%; 12,5 кДж
4. 53,85 кПа
5. 95 °C

Контрольная работа 3

1. 1200 кг/м^3
2. 28,8 В
3. 352 мкКл
4. 35 мДж
5. 5,7 мА

Контрольная работа 4

1. 0,2 кг

2. 5 мс

3. $l = h\operatorname{ctg}\alpha \approx 1{,}73$ м; $L = h\operatorname{ctg}\alpha + \dfrac{H\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\cos^2\alpha}} \approx 3{,}45$ м

4. $H = nh \approx 80$ см

5. ≈ 154 см^2

Контрольная работа 5

1. $\delta = 6{,}75$

2. 4 мм

3. ≈ 400 нм

4. $2{,}3 \cdot 10^{-7}$ А

5. 500 нм

Ответы к задачам на повторение

1. $\upsilon_{ср} = \dfrac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1+\upsilon_2} = 9{,}6$ км/ч

2. $\upsilon_{ср} = \dfrac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2} = 10$ км/ч

3. $S = 2tu = 720$ м

4. $l = \dfrac{ud}{\upsilon_0} = 150$ м

5. $\upsilon_{в2} = \upsilon_{в1}\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 30$ м/с

6. $u = \dfrac{\upsilon_0}{\operatorname{tg}\alpha} \approx 17$ м/с

7. $S = \dfrac{\upsilon_0 t\sqrt{\upsilon_0^2-u^2}}{\upsilon_0+\sqrt{\upsilon_0^2-u^2}}$

8. $\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon^2+u^2-\dfrac{2\upsilon ul}{\sqrt{d^2+l^2}}} = 6$ м/с

9. $L = 167{,}5$ м; $S = 107{,}5$ м

10. 170 м

11. $\upsilon = \dfrac{2\upsilon_{ср}t}{2t-t_1} = 72$ км/ч

12. $t_1 = \dfrac{\upsilon_0}{g}$; $t_2 = \dfrac{2\upsilon_0}{g}$; $H = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$

13. $H = \frac{g}{2}\left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_2}\right)^2 = 31,25$ м; $t = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_2} = 2,5$ с

14. $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; $l = \upsilon_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$; $h_\tau = h - \frac{g\tau^2}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{g\tau}{\upsilon_0}$

15. 1) $t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$; 2) $t_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$; 3) $h_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$; 4) $L = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$;

5) $\operatorname{tg}\beta = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha - g\tau}{\upsilon_0 \cos\alpha}$; 6) $y(x) = -\frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\operatorname{tg}\alpha$

16. $S = \frac{\upsilon_0^2(1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)\sin 2\alpha}{g\cos\beta}$; $H = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g\cos\beta}$

17. $h = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g\sin\alpha} = 1,2$ м; $l = \frac{\upsilon_0^2 \sin(2\beta)}{g\sin\alpha} \approx 2,77$ м

18. $F = G\frac{Mm}{7}\left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right)$

19. 1) $P = mg$; 2) $P = m(g + a)$; 3) $P = m(g - a)$

20. $\rho = \frac{9\pi}{2GT^2} \approx 19\ 450$ кг/м^3

21. $P = mg\cos\alpha$

22. а) $k = k_1 + k_2$; б) $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

23. 163,4 Н $\le F \le$ 336,6 Н

24. $T = \frac{3mMg}{M + 4m} \approx 16,4$ Н; $a_1 = \frac{2g(2m - M)}{M + 4m} \approx 1,8$ м/с^2; $a_2 = \frac{g(2m - M)}{M + 4m} \approx 0,9$ м/с^2

25. $\alpha \ge \operatorname{arctg}\frac{1}{2\mu} \approx 59°$; $F = \mu mg = 88,2$ Н

26. $M = \frac{m\mu g\tau}{\upsilon_0 - \mu g\tau} = 2$ кг

27. $s = \frac{ML}{m + M} = 4$ м

28. $t = \frac{hg(m - \rho_в V)}{N} = 1$ мин

29. $A = 2mgh = 1000$ Дж

30. $\upsilon_0 = \sqrt{gR\cos\alpha + 2gL(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 5$ м/с

31. а) $u_1 = \dfrac{m_1\upsilon_1 - 2m_2\upsilon_2 - m_2\upsilon_1}{m_1 + m_2}$; $u_2 = \dfrac{2m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_2 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$; б) $u = \dfrac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$

32. $h = \dfrac{\left(\sqrt{2gl} + 2u\right)^2}{2g}$

33. $\upsilon_{\max} = \sqrt{2g(H-L) + \dfrac{mg^2}{k}}$; $x_{\max} = \dfrac{mg + \sqrt{mg(mg + 2k(H-L))}}{k}$

34. 1) $\upsilon_c = 2\sqrt{gl}$; 2) $\upsilon_{н1} = \sqrt{5gl}$

35. $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2g(H + \mu S\cos\alpha)}$

36. $\upsilon_0 = \dfrac{(m+M)\sqrt{gh}}{m} = 51$ м/с

37. $Q = \dfrac{2glmM}{2(m+M)} = 6$ Дж

38. $\upsilon_1 = \upsilon_0 + \sqrt{\dfrac{E}{m}} = 500$ м/с; $\upsilon_2 = \sqrt{\dfrac{E}{m}} - \upsilon_0 = 100$ м/с

39. $\Delta E = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\dfrac{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha}{2} = 97{,}5$ кДж

40. $h = \dfrac{\rho_к H}{2\rho_в} = 12$ см

41. $\rho_к = 16\,000$ кг/м^3; $m_з = 1{,}5$ кг; $m_с = 0{,}5$ кг, $V_0 = 100$ см^3

42. $m = m_H\left(\dfrac{M_в}{M_н} - 1\right) - m_0 = 325$ кг

43. $m = \dfrac{MpV}{R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right) - m_0 - m_к \approx 95$ кг

44. $h_0 = \dfrac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}h = 760$ мм рт. ст.

45. 2,2

46. $t_0 = 0$ °C; $V \approx 7{,}7 \cdot 10^{-3}$м^3

47. $T_3 = \dfrac{4T_1T_2}{T_2 + 3T_1} = 320$ K

48. $p = 1{,}75p_0$

49. 33 240 Дж

50. $\eta = 1 - \dfrac{3\nu R|\Delta T|}{2A}$

51. $\eta \approx 6{,}25\%$

52. $\eta \approx 8{,}7\%$

53. $p_2 = \dfrac{T_2}{T_1}(p_1 - p_{н1}) + p_{н2} \approx 153$ кПа

54. $\varphi = 52\%$

55. $\alpha = 0{,}5$

56. а) Внутри шара при $x < r$: $E_1 = 0$, $\varphi_1 = kq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$

Между шаром и слоем при $r \le x < R_1$: $E_2 = k\dfrac{q}{x^2}$, $\varphi_2 = kq\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$

Внутри слоя при $R_1 \le x < R_2$: $E_3 = 0$, $\varphi_3 = k\dfrac{q}{R_2}$

За пределами слоя при $x \ge R_2$: $E_4 = k\dfrac{q}{x^2}$, $\varphi_4 = k\dfrac{q}{x}$

б) Внутри шара при $x < r$: $E_1 = 0$, $\varphi_1 = kq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1}\right)$

Между шаром и слоем при $r \le x < R_1$: $E_2 = k\dfrac{q}{x^2}$, $\varphi_2 = kq\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{R_1}\right)$

Внутри слоя при $R_1 \le x < R_2$: $E_3 = 0$, $\varphi_3 = 0$

За пределами слоя при $x \ge R_2$ поле отсутствует: $E_4 = 0$, $\varphi_4 = 0$

в) Внутри шара при $x < r$: $E_1 = 0$, $\varphi_1 = kq\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)\right)$

Между шаром и слоем при $r \le x < R_1$: $E_2 = k\dfrac{q}{x^2}$, $\varphi_2 = kq\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)\right)$

Внутри слоя при $R_1 \le x < R_2$: $E_3 = k\dfrac{q}{x^2}$, $\varphi_3 = kq\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{R_2}\right)\right)$

За пределами слоя при $x \ge R_2$: $E_4 = k\dfrac{q}{x^2}$, $\varphi_4 = k\dfrac{q}{x}$

57. $\upsilon_{min} = l\sqrt{\dfrac{Eq}{dm}} \approx 350$ км/с

58. $U = \dfrac{d\sqrt{(kl)^2 - (mg)^2}}{q} = 16$ кВ

59. $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon d + d_1(1 - \varepsilon)}$

60. $U_0 = 510$ В

61. $q = \dfrac{U(C_1R_1 - C_2R_2)}{R_1 + R_2}$

62. $\eta = 1 - \dfrac{2\rho l P}{U^2 S} = 97\%$

63. $U = \sqrt{\dfrac{cmR(t_2 - t_1)}{2\tau\eta}} \approx 220$ В

64. $T_1 = T_2 - \dfrac{\eta U^2 t}{\rho_c l 2c\rho} \approx 17{,}7$ °С

65. $d = \dfrac{\varepsilon R_2}{E(r + R_2)} = 1{,}5$ мм

66. $r = \dfrac{R(q\varepsilon - 2Q)}{2Q} = 2$ Ом

67. 1) $U = \dfrac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_2} \approx 6{,}7$ В; 2) $I = \dfrac{\varepsilon}{2R_1} = 0{,}1$ А

68. $Q = \dfrac{\varepsilon \Delta q}{2} + A = 28$ мкДж

69. $Q = 12{,}8$ Дж

70. $P_4 = 2{,}25$ Вт

71. 1) $I_{\max} = \dfrac{\varepsilon}{r}$; 2) $P_{\text{п}\max} = \dfrac{\varepsilon^2}{4r}$

72. Частица двигается с постоянной по модулю скоростью υ по окружности радиусом $R = \dfrac{m\upsilon}{qB}$, в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции.

73. Частица будет двигаться по спирали радиусом $R = \dfrac{m\upsilon \sin\alpha}{qB}$ и шагом $H = \dfrac{2\pi m\upsilon \cos\alpha}{qB}$.

74. $\upsilon = \dfrac{(F - \mu mg)R}{B^2 l^2} = 1{,}2$ м/с

75. $a = \dfrac{IBL\cos\alpha - mg\sin\alpha}{m} \approx 5{,}4$ м/с^2

76. $B = \dfrac{(1+n)U}{l\upsilon} = 0{,}25$ Тл

77. $|q| = \dfrac{m}{\upsilon B}\left(g \cdot \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{\upsilon^2}{R}\right)$

78. Увеличится в $\sqrt{2}$ раза.

79. $A \le \dfrac{g}{(2\pi\nu)^2} \approx 25$ см

80. $l = \dfrac{h \cdot \sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \approx 1{,}13$ м

81. а) 5 × 3 м; б) 2,72 × 0,72 м

82. 1) $f_1 = 5$ см; 2) $l = 10$ см

83. $F = \dfrac{l}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = 10$ см

84. $D = \dfrac{1}{d_0} - \dfrac{1}{d} = -6$ дптр

85. $d = \dfrac{kh}{p\sin\alpha} = 1{,}5$ мкм

86. 25 мм

87. $\lambda = 580$ нм

88. $p = \sqrt{2m\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}}\right)} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с

89. $\lambda_{\text{к}} = \dfrac{2c}{v} = 750$ нм

90. $v_{24} = \dfrac{c}{\lambda_{41}} - v_{13} + v_{32} \approx 4{,}4 \cdot 10^{14}$ Гц

91. $\lambda_{24} = \dfrac{\lambda_{13}\lambda_{32}\lambda_{\min}}{\lambda_{13}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{41} - \lambda_{32}\lambda_{\min}} \approx 432$ нм

92. $\alpha = 4$

93. $E_0 = \dfrac{p^2}{2m} - \left(E^{(1)} - E^{(0)}\right) \approx 8{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж

94. $p = \sqrt{2m\left(E_3 - E_1 - A_{\text{вых}}\right)} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с

95. $\Delta T = \dfrac{AWt}{cm} \approx 0{,}9$ K

96. $V_0 = V\dfrac{a_{\text{к}} \cdot 2^{-\frac{t}{T}}}{a_0} = 7$ см^3

Итоговая контрольная работа

1. 0,9 м

2. 93 м/с

3. 750 мм рт. ст.

4. 100 В

5. $1{,}64 \cdot 10^{-15}$ Кл

Литература

Балаш В. А. Задачи по физике и методы их решения. — М.: Просвещение, 1983.

Гольдфарб Н. И. Сборник вопросов и задач по физике. — М.: Высш. школа, 1982.

ЕГЭ 2012. Физика. Типовые экзаменационные варианты. 32 варианта / под ред. Демидовой, ООО «Национальное образование», 2011.

Кирик Л. А. Физика. Разноуровневые самостоятельные и контрольные работы 9. — М.: Илекса, 2004.

Кирик Л. А. Физика. Разноуровневые самостоятельные и контрольные работы 10. — М.: Илекса, 2005.

Мякишев Г. Я. Физика: учебник для 10 класса. — М.: Просвещение, 2001.

Мякишев Г. Я. Физика: учебник для 11 класса. — М.: Просвещение, 2001.

Черноуцан А. И. Физика для поступающих в вузы. — М.: Физматлит, 2009.

Черноуцан А. И. Физика. Задачи с ответами и решениями. — М.: Книжный дом «Университет», 2001.

0+

Учебное издание

Лях Виталий Владимирович

ФИЗИКА

Задания высокой и повышенной сложности

Ответственный редактор *А. Васько*
Выпускающий редактор *Г. Логвинова*
Технический редактор *Т. Ткачук*

Формат $70 \times 100^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Тираж 3000 экз. Заказ № 19-09-0602.

Импортер на территории ЕАЭС: ООО «Феникс»
344011, Россия, Ростовская обл., г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59

Изготовлено в Украине. Дата изготовления: 10.2019.
Изготовитель: ООО «БЭТ». 61024, г. Харьков, ул. Максимилиановская, 17

Сайт издательства www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин www.phoenixbooks.ru