

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОТОКА В СЕТИ С ОДНИМ ИСТОКОМ И ОДНИМ СТОКОМ С ПОМОЩЬЮ УВЕЛИЧЕНИЯ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ВХОДЯЩИХ ДУГ СТОКА

ШИРОКОВ Андрей Алексеевич

студент

ДЕРЕВЯНЧУК Олеся Дмитриевна

студент

Пензенский государственный университет

г. Пенза, Россия

В работе исследуется задача оптимального плана перевозок с учётом потоков в сетях с одним истоком и одним стоком. В качестве численного метода выбрана ранее предложенная и опубликованная в работе [1] модификация алгоритма Форда-Фалкерсона, которая позволяет использовать все ресурсы сети. Предложено использовать такую модификацию для увеличения пропускной способности входящих дуг стока.

Ключевые слова: алгоритм Форда-Фалкерсона, модификация, поток в сетях, сеть с одним истоком и одним стоком, пропускная способность, сток, исток, оптимальный поток сети.

Данная работа является продолжением работ авторов [1-2], посвященных исследованию задачи оптимизации транспортных планов в сетевых структурах. Целью данной работы является иллюстрация разработанного в работе [1] метода на примере сети с одним стоком и одним истоком, который позволяет задействовать все ресурсы сети с помощью

изменения пропускной способности входящих дуг стока.

Рассмотрим газовую структуру, представляющую собой сеть с одним стоком (потребитель) и одним истоком (поставщик). Дана газовая сеть в виде графа $G(X, A)$, где $x = \{x_i; i = 1, 2 \dots 12\}$ – множество вершин, A – множество дуг, $|A| = 15$ и весовой матрицей (рисунок 1).

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
X_1		50	100									
X_2												50
X_3				25	25		50					
X_4						25						
X_5									25			
X_6												25
X_7								25	25			
X_8											25	
X_9										25		
X_{10}												25
X_{11}												25
X_{12}												

Рисунок 1. Весовая матрица графа G

В матрице (рисунок 1) только один столбец нулевой. Это столбец с номером X_1 , при этом строка с номером X_1 ненулевая. Это означает, что существуют исходящие из вершины X_1 дуги, а входящих дуг нет. Следовательно, вершина X_1 – исток. В матрице (рисунок 1) только одна строка нулевая. Это строка с номером X_{12} , при этом столбец с номером X_{12} ненулевой. Это означает, что существуют входящие в вершину X_{12} дуги,

а исходящих дуг нет. Следовательно, вершина X_{12} – сток.

Таким образом, сеть состоит из 1 истока (вершина X_1) и 1 стока (вершина X_{12}).

Из истока выходят 2 дуги суммарным весом 150. В сток входят 4 дуги суммарным весом 125. Существует 5 путей: Путь первый 1-2-12; Путь второй 1-3-7-8-11-12; Путь третий 1-3-7-9-10-12; Путь четвёртый 1-3-5-10-12; Путь пятый 1-3-4-6-12 (рисунок 2).

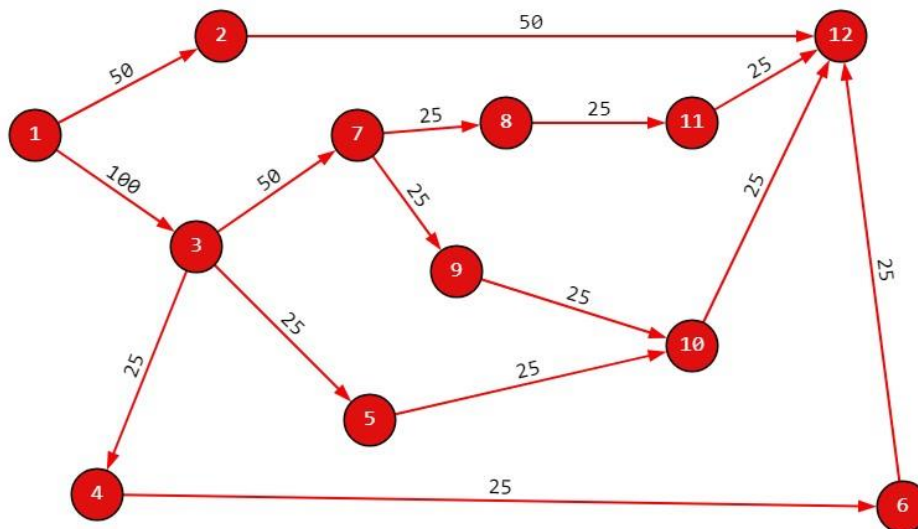


Рисунок 2. Пути в графе G

Путь: 1-2-12. Пропускные способности дуг на этом пути равны: (50;50). Минимальная пропускная способность $C_{\min} = \min[50;50] = 50$ равна 50 (рисунок 2). Это и есть тот макси-

мальный поток, который можно пропустить по данному пути. Обозначим его на графе, сделав соответствующие пометки над каждой дугой (рисунок 3).

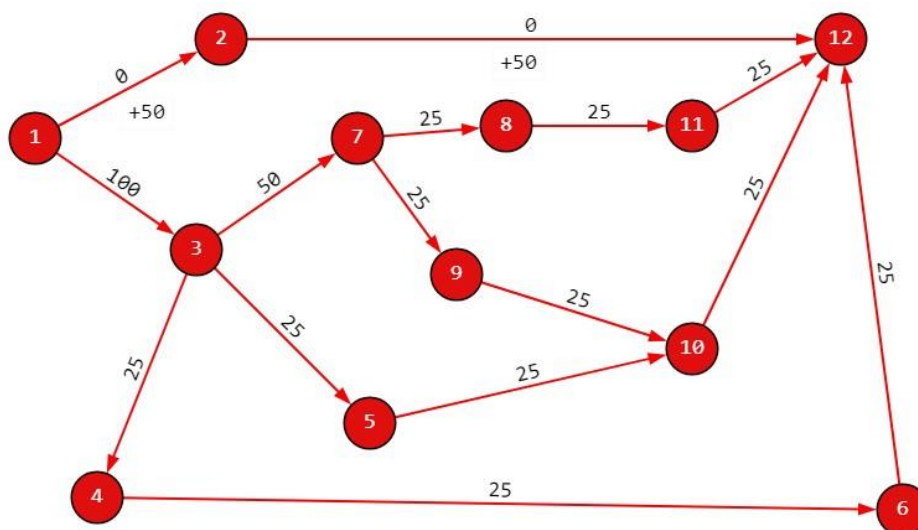


Рисунок 3. Максимальный поток, который можно пропустить по пути 1-2-12

Следующий произвольный ориентированный путь: 1-3-4-6-12. Пропускные способности дуг равны: (100;25;25;25) (рисунок 3). А минимальная пропускная способность $C_{\min} = \min$

$[100;25;25; 25]=25$ равна 25. Обозначим на графе данный поток и уменьшим на его величину пропускные способности дуг (рисунок 4).

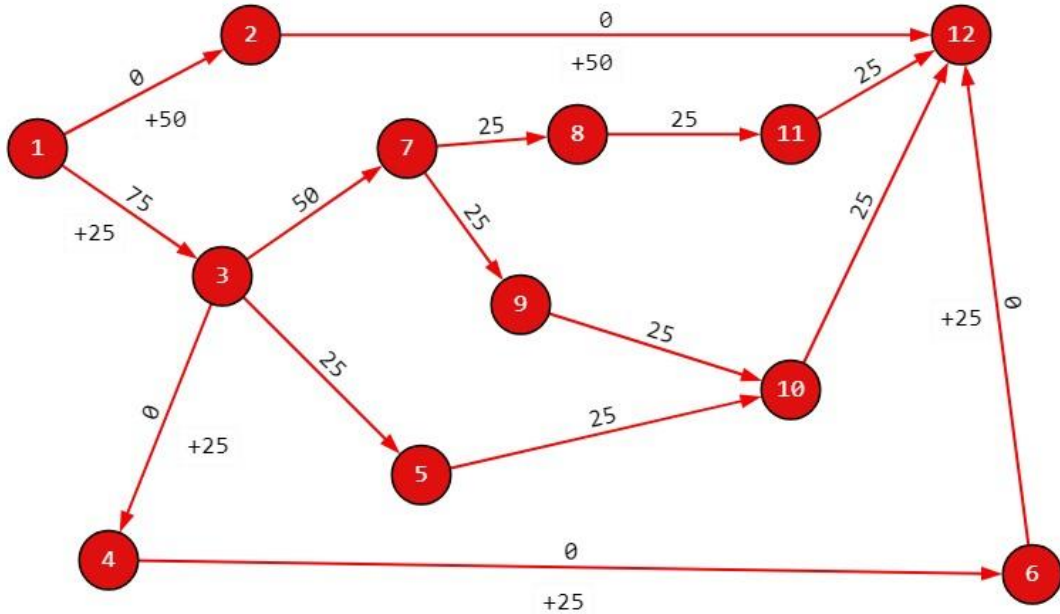


Рисунок 4. Максимальный поток, который можно пропустить по пути 1-3-4-6-12

Далее, рассмотрим ориентированный путь: 1-3-5-10-12. Пропускные способности его дуг составляют: (75;25;25;25) (рисунок 4). $C_{\min} = \min[75;25;25; 25]=25$. Это и есть

тот максимальный поток, который можно пропустить по данному пути. Обозначим его на графе, сделав соответствующие пометки над каждой дугой (рисунок 5).

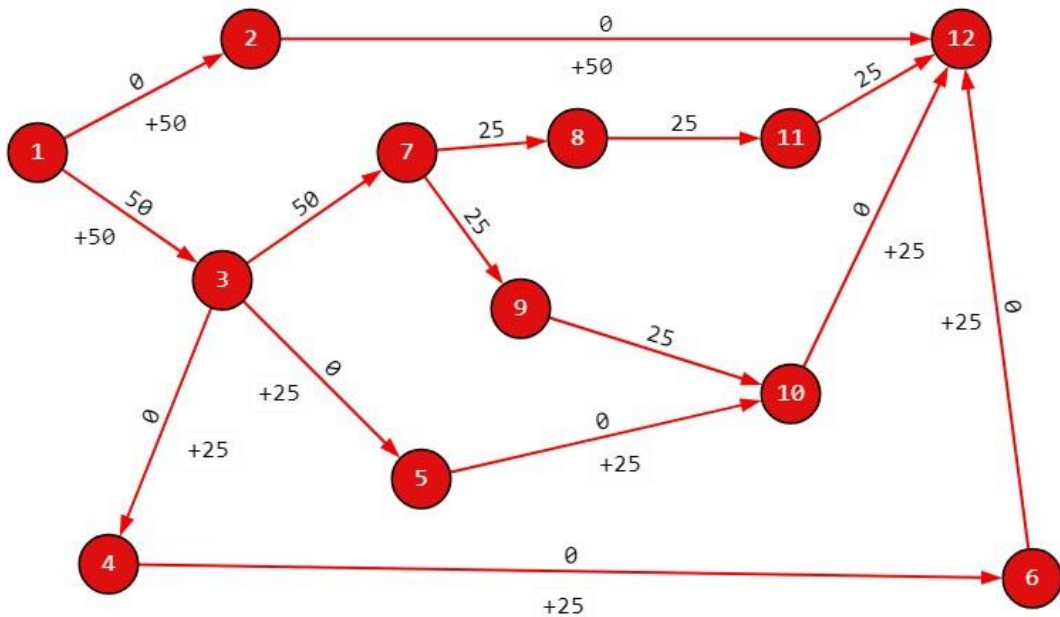


Рисунок 5. Максимальный поток, который можно пропустить по пути 1-3-5-10-12

В завершение, последний возможный ориентированный путь: 1-3-7-8-11-12. Здесь дуги имеют пропускные способности (50;50;25; 25;

25). $C_{\min} = \min[50;50;25;25;25] = 25$ (рисунок 5). Обозначим его на графе, сделав соответствующие пометки над каждой дугой (рисунок 6).

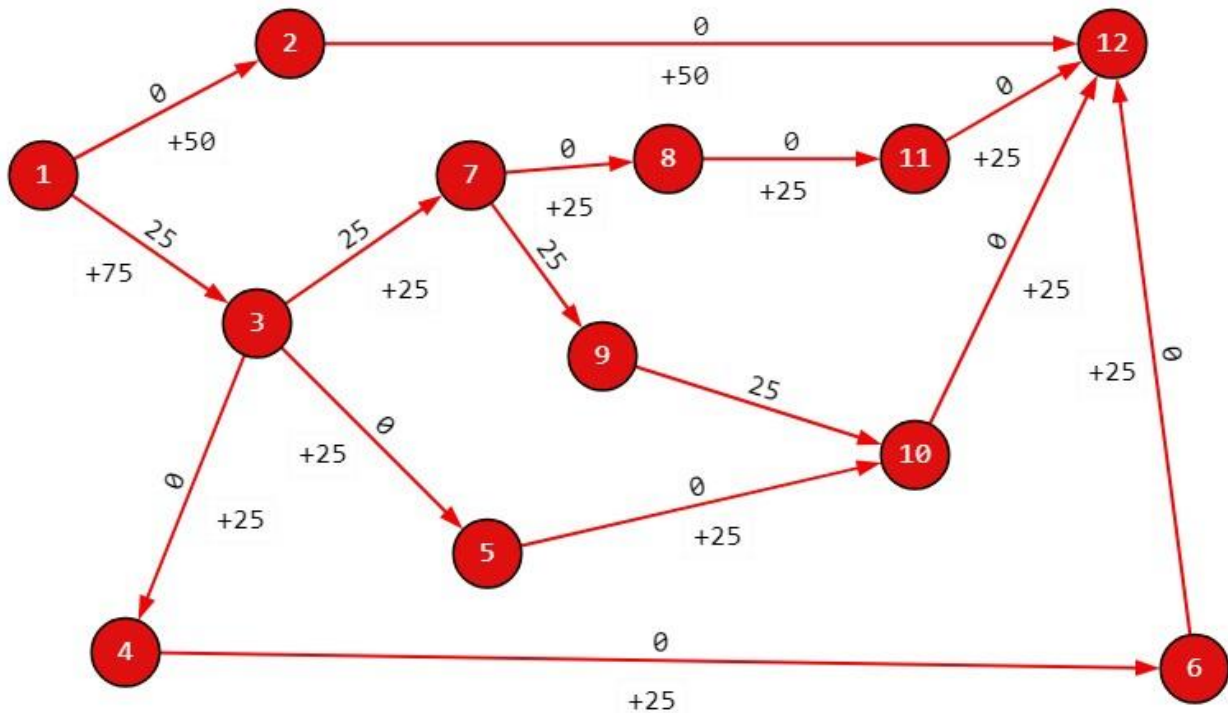


Рисунок 6. Максимальный поток, который можно пропустить по пути 1-3-7-8-11-12

Отметим, что путь 1-3-7-9-10-12 невозможно рассмотреть, так как пропускная способность дуги 10-12 равна 0 (рисунок 6).

Проанализируем полученный результат¹. Получилась максимальная пропускная способность равная 125. Но при этом не задействована на максимальную мощность пропускная возможность дуги 1-3. По ней мы

могли бы пропустить еще 25 условных единиц.

Если изменить вес дуги (X_{10}, X_{12}) , то применяя алгоритм Форда-Фалкерсона для пути 1-3-7-9-10-12, максимальный поток сети будет составлять 150 единиц (рисунок 7). Что совпадает с истоком $S_1=150$, т.е. сеть работает на тах мощности, т.к. из истока S_1 максимально может исходить 150 единиц.

¹Напомним, что пропускная способность сети определяется по минимальной суммарной пропускной способности исходящих дуг истока ($50+75=125$) и суммарной пропускной способности входящих дуг стока ($50+25+25+25=125$). Следовательно, пропускная способность сети равно 125.

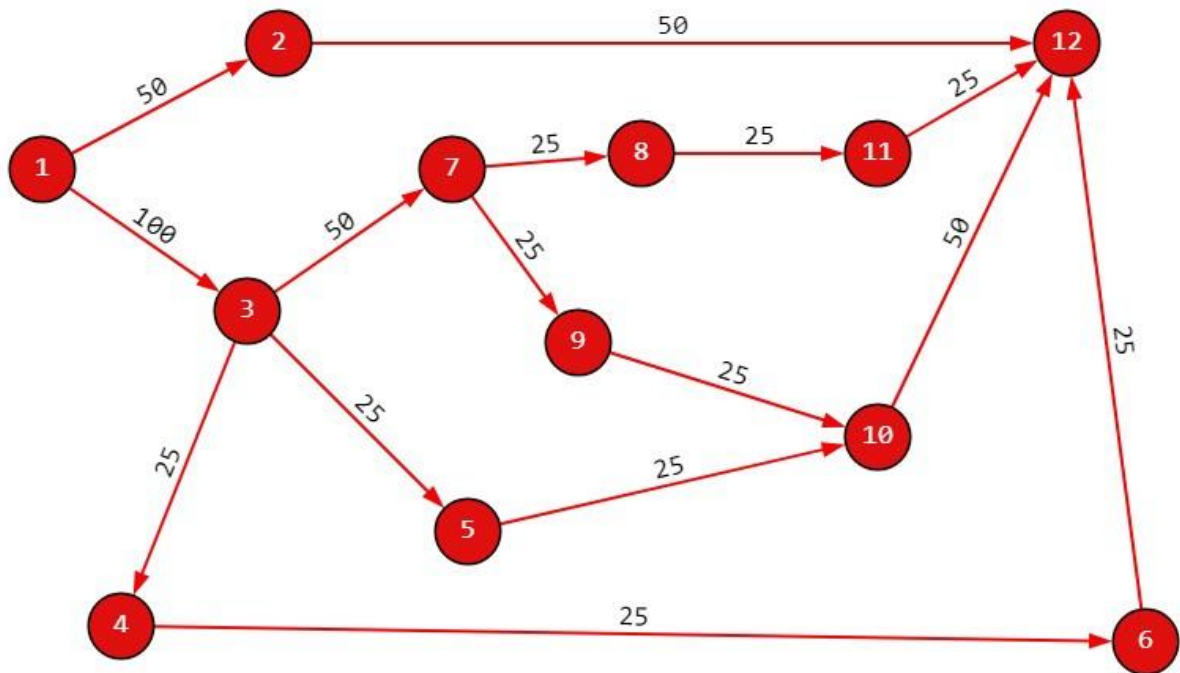


Рисунок 7. Преобразованный граф G

Приведем краткое решение задачи для преобразованного графа.

Путь: 1-2-12. Пропускные способности дуг на этом пути равны: (50;50). Минимальная

пропускная способность $C_{min} = \min[50;50] = 50$ равна 50 (рисунок 7). Это и есть тот максимальный поток, который можно пропустить по данному пути (рисунок 8).

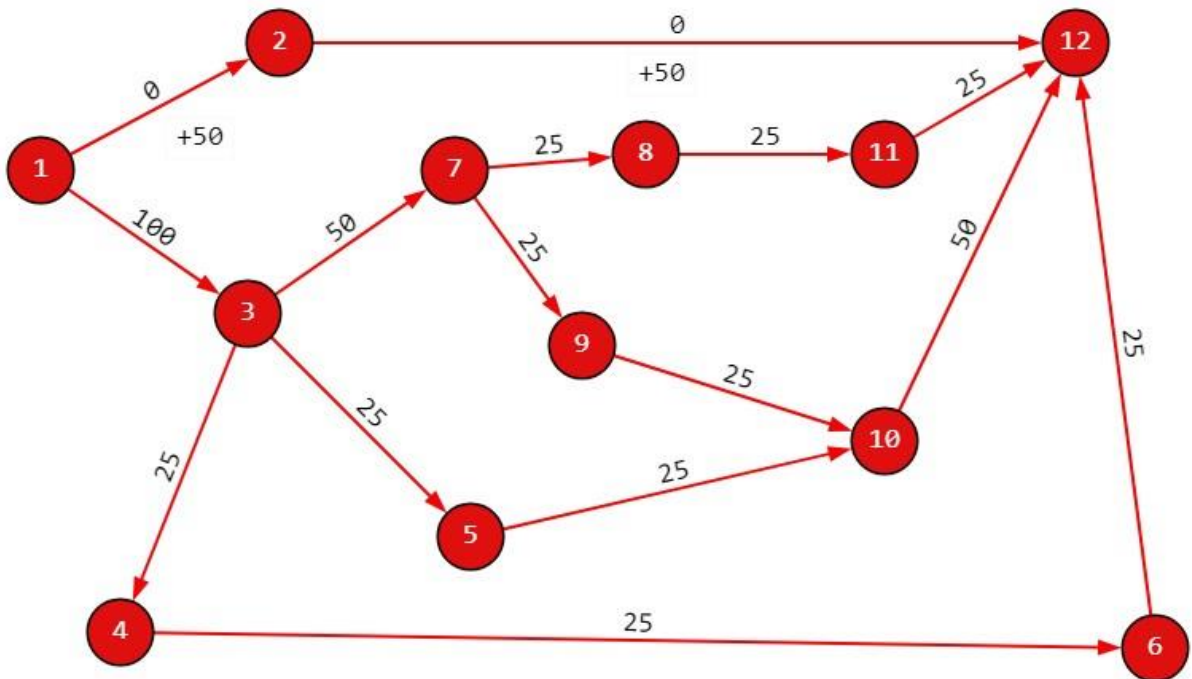


Рисунок 8. Максимальный поток, который можно пропустить по пути 1-2-12

Следующий произвольный ориентированный путь: 1-3-4-6-12. Пропускные способности дуг равны: (100; 25; 25; 25) . $C_{\min} = \min[100; 25;$

$25; 25] = 25$ (рисунок 8), и отмечаем на графе (рисунок 9).

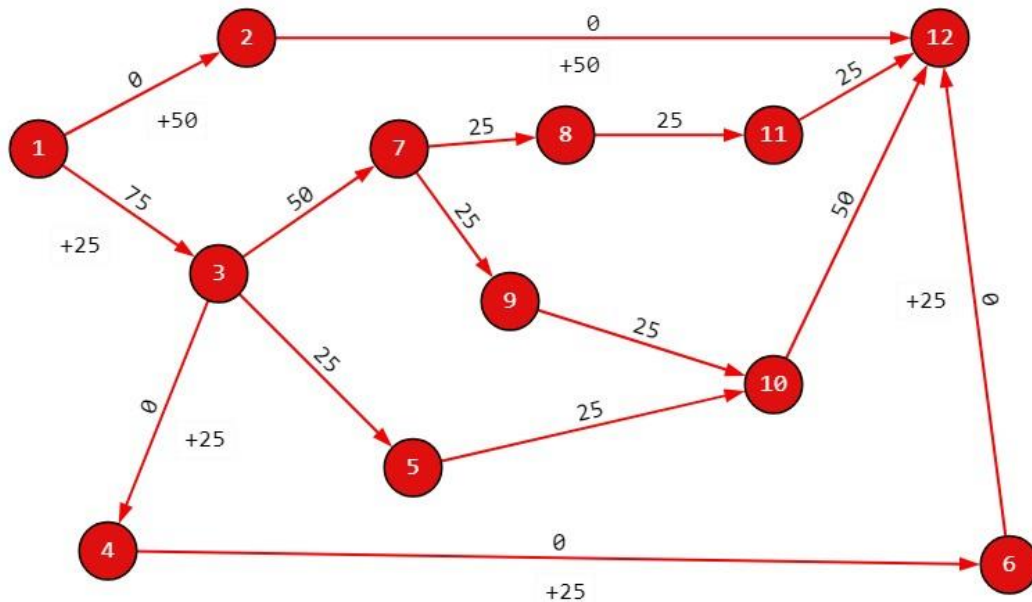


Рисунок 9. Максимальный поток, который можно пропустить по пути 1-3-4-6-12

Далее, рассмотрим ориентированный путь: 1-3-5-10-12. $C_{\min} = \min[75; 25; 25; 50] = 25$, рав-

ный 25 (рисунок 9), и отмечаем его на графе (рисунок 10).

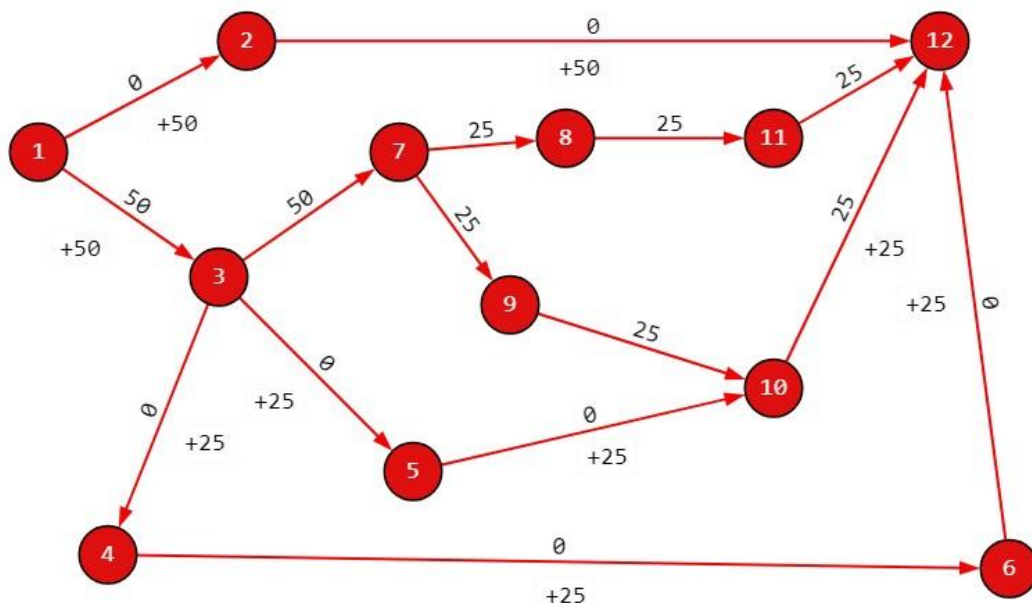


Рисунок 10. Максимальный поток, который можно пропустить по пути 1-3-5-10-12

Следующий путь: 1-3-7-8-11-12. Пропускные способности дуг на этом пути равны: (50; 50; 25; 25; 25) (рисунок 10). Минималь-

ная пропускная способность $C_{\min} = \min[50; 50; 25; 25; 25] = 25$ равна 25 (рисунок 11).

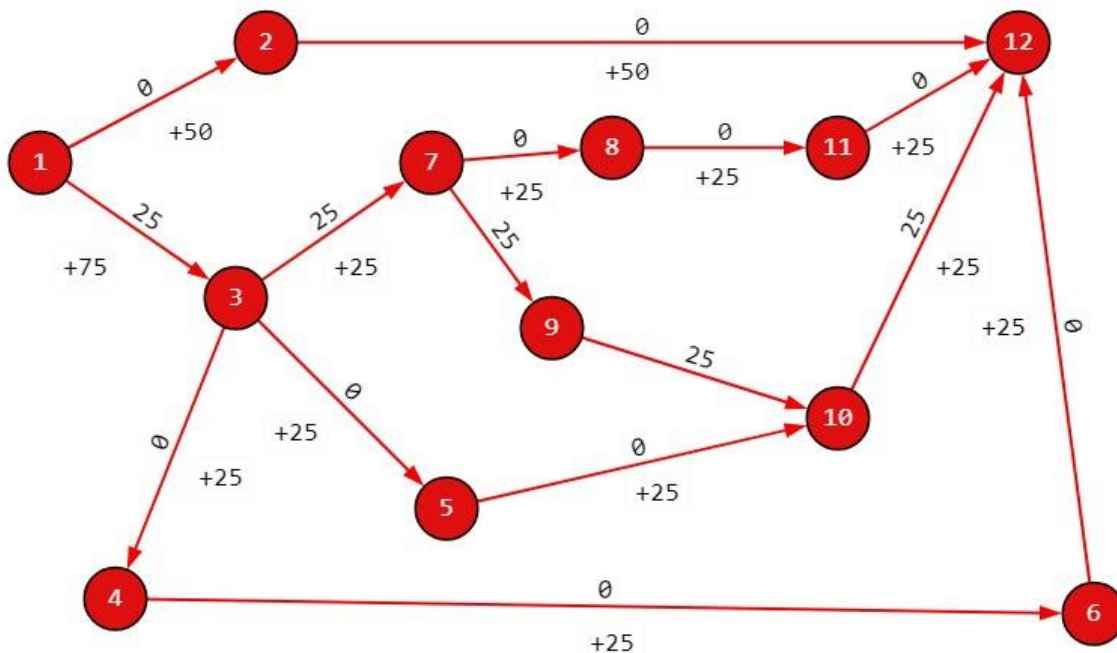


Рисунок 11. Максимальный поток, который можно пропустить по пути 1-3-7-8-11-12

И в завершение, последний возможный ориентированный путь: 1-3-7-9-10-12.

Здесь дуги имеют пропускные способности (25; 25; 25; 25; 25). То есть, пропускаем

поток, мощностью $C_{\min} = \min[25; 25; 25; 25; 25] = 25$ равная 25 (рисунок 11), и отмечаем его на графе (рисунок 12).

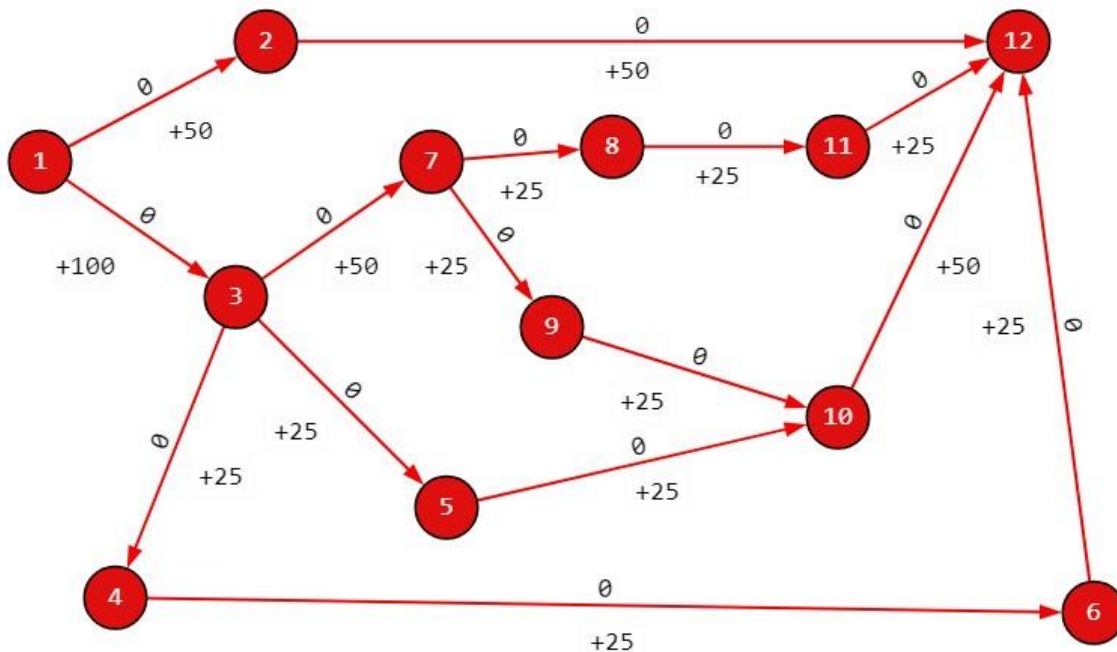


Рисунок 12. Максимальный поток, который можно пропустить по пути 1-3-7-9-10-12

Таким образом, благодаря увеличению пропускной способности дуги удалось увеличить максимальную пропускную способ-

ность в сети до 150 условных единиц, при этом использовать максимальную возможность исходящих дуг истока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деревянчук О.Д. Транспортировка больных из одного госпиталя в другой с остановками во временных пунктах размещения // Общество. – 2024. – № 1(32). Часть 2. – С. 19-23.
2. Деревянчук Е.Д. Широков А.А. Методика решения задачи создания оптимального плана перевозок с учётом потоков в сетях с одним истоком и одним стоком // Педагогика современности. – 2024. – № 2. – С. 63-68.

OPTIMIZATION OF NETWORK FLOW WITH ONE SOURCE AND ONE DRAIN BY INCREASING THE THROUGHPUT OF INCOMING FLOW ARCS

SHIROKOV Andrey Alekseevich

Student

DEREVYANCHUK Olesya Dmitrievna

Student

Penza State University

Penza, Russia

The paper examines the problem of an optimal transportation plan, taking into account flows in networks with one source and one drain. A modification of the Ford-Fulkerson algorithm, previously proposed and published in paper [1], was chosen as a numerical method, which allows using all network resources. It is proposed to use such a modification to increase the throughput of incoming flow arcs.

Keywords: Ford-Fulkerson algorithm, modification, flow in networks, network with one source and one drain, bandwidth, drain, source, optimal network flow.
