АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ КАК ФАКТОР ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

РЫБАКОВА Татьяна Вячеславовна
кандидат педагогических наук, доцент
доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин
ГОУ ВО МО «Государственный социально-гуманитарный университет»
г. Коломна, Россия

В статье рассматриваются нетрадиционные способы решения задач на поиск наибольшего значения некоторой величины. Дифференциальное исчисление – хороший помощник в решении таких задач, но алгебраический и геометрические способы делают решение неожиданным и нетрудоёмким. Чем больше математических моделей для одной задачи может составить обучающийся, тем выше его математическая грамотность.

Ключевые слова: математическая грамотность, алгебраические способы, геометрические способы, задача с экономическим содержанием, введение параметра.

Решение задач с экономическим содержанием – хороший способ формирования математической грамотности у старшеклассников. Но каждая задача приобретает особый вес в этом процессе, если показать учащемуся возможности её решения теми способами, которые «не лежат на поверхности», но хорошо знакомы каждому одиннадцатикласснику.

Рассмотрим задачу следующего содержания:

Василий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Василий платит рабочему 300 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 200 рублей. Василий готов выделить 30000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество товаров можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Разумеется, у прочитавшего условие этой задачи сразу возникает желание применить знание дифференциального исчисления. И это прекрасное желание. Труды овладевшего техникой дифференцирования скорее всего увенчаются успехом.

Однако,

– введя переменные *x и y*, где *x* изделий – количество изделий, произведенных рабочими на первом заводе, а *y* изделий – количество изделий, произведенных рабочими на втором заводе,

– записав ограничение $300x^2+200y^2=30000000$, непосредственно следующее из условия задачи и преобразовав его к виду $3x^2+2y^2=300000$,

– представив количество товаров, которое необходимо максимизировать, в виде $x+y=a$, где a – некий параметр,

решающий задачу вдруг увидит возможность решения обычной системы уравнений с параметром, который должен принять наибольшее из возможных значений.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 300000 \\ x + y = a \end{cases}.$$

Выразив одну переменную через другую из второго уравнения системы и подставив полученное выражение в первое уравнение, получим квадратное относительно переменной *x* уравнение

$$3x^2 + 2(a - x)^2 - 300000 = 0,$$

$$5x^2 - 4ax + 2a^2 - 300000 = 0.$$

Это уравнение имеет решения в том случае, если его дискриминант неотрицателен, т. е.

$$16a^2 - 4 * 5 * (2a^2 - 300000) \geq 0.$$

Тогда

$-24a^2 + 6000000 \geq 0$,

$a^2 \leq 250000$.

Исходя из того, что a – это общее количество выпущенных изделий, можем утверждать, что a - число неотрицательное.

Значит, $0 \leq a \leq 500$.

Наибольшее из возможных значений параметра - число 500.

Ответ: 500 изделий.

Особо следует отметить геометрический способ решения этой задачи.

Если ввести новые переменные

$p = x\sqrt{3}$ и $q = y\sqrt{2}$,

То ограничение $300x^2+200y^2=30000000$ примет вид уравнения окружности

$p^2 + q^2 = 300000$,

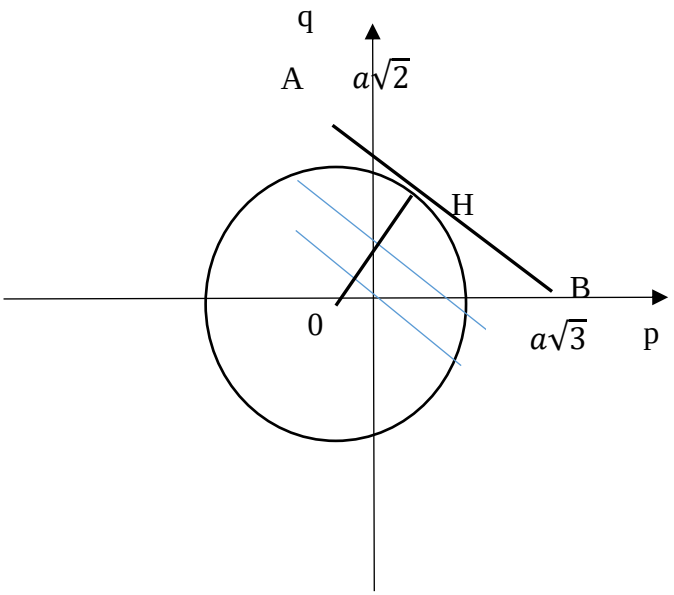
а уравнение с параметром $x+y=a$ преобразуется в уравнение

$$\frac{p}{\sqrt{3}} + \frac{q}{\sqrt{2}} = a,$$

$$q = a\sqrt{2} - \frac{p\sqrt{6}}{3}.$$

Это уравнение задаёт множество параллельных прямых, и $a\sqrt{2}-$ ордината точки пересечения прямой с осью ординат.

Изобразим графики уравнений в одной системе координат.



Очевидно, что наибольшее значение a мы получим, рассмотрев прямую АВ из множества прямых, заданных уравнением $q = a\sqrt{2} - \frac{p\sqrt{6}}{3}$ и имеющих общие точки с окружностью.

Рассмотрев треугольник АОВ с высотой ОН, равной радиусу окружности с уравнением $p^2 + q^2 = 300000$, отметим, что

ОА= $a\sqrt{2}$, ОВ=$a\sqrt{3}$, ОН=$100\sqrt{30}$.

Теорема Пифагора позволяет выразить гипотенузу этого треугольника через параметр a:

АВ=$\sqrt{2a^2 + 3a^2}$,

АВ= $a\sqrt{5}$.

Вспомнив, что произведение катетов равно произведению гипотенузы и высоты, опущенной на гипотенузу, получим уравнение

$a\sqrt{2} * a\sqrt{3} = a\sqrt{5} * 100\sqrt{30}$,

позволяющее найти a.

$a^2\sqrt{6} = 100a\sqrt{150}$,

$a \neq 0$,

поэтому,

$a = 500$.

Ответ: 500 изделий.

Для эффектного решения этой задачи можно и векторы применить!

Из уравнения $300x^2+200y^2=30000000$ *выразим y:*

$$y = \sqrt{150000 - \frac{3}{2}x^2}$$

Тогда наибольшим должно стать число

$$x + \sqrt{150000 - \frac{3}{2}x^2}$$

Введём в решение векторы.

Пусть $\vec{m}\left\{x\sqrt{\frac{3}{2}}\,;\ \sqrt{150000 - \frac{3}{2}x^2}\right\}$,

а $\vec{n}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}};1\right\}$.

Легко убедиться, что

$x+\sqrt{150000-\frac{3}{2}x^2}=\vec{m}*\vec{n}$.

Действительно, скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответственных координат этих векторов.

С другой стороны, по определению скалярного произведения

$\vec{m}*\vec{n}=|\vec{m}|*|\vec{n}|*\cos(\widehat{\vec{m}\ \ \vec{n}})$.

Наибольшее значение скалярного произведения векторов достигается при $\cos(\widehat{\vec{m}\ \ \vec{n}})=1$, тогда

$\vec{m}*\vec{n}=|\vec{m}|*|\vec{n}|$.

Поскольку

$|\vec{m}|=\sqrt{\frac{3}{2}x^2+150000-\frac{3}{2}x^2}=\sqrt{150000,}$

а $|\vec{n}|=\sqrt{\frac{5}{3}}$, то отсюда имеем искомое максимально возможное число

$\sqrt{150000}*\sqrt{\frac{5}{3}}=500.$

Ответ: 500 изделий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шестаков С.А.* ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2020. – 208 с.