УДК 517.968

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

САПАРОВА Гульмира Баатыровна
кандидат физико-математических наук, доцент
ЗИКИРОВА Гулайым Абдылдаевна
кандидат педагогических наук, доцент
Ошский технологический университет им. акад. М.М. Адышева
г. Ош, Кыргызстан

Актуальность данной статьи связано с развитием и интересом к теории интегральных уравнений, называемыми также некорректными задачами. Так как интегральные уравнения имеют большой вклад в приложении математических задач, то их исследование в настоящее время очень развита. Интегральные уравнения Фредгольма в последнее время широко применяются при решении задач в области прикладной математики, математического моделирования, прикладной механики, электродинамики, материаловедении, а также в теоретических исследованиях и разработках математических моделей, с помощью которых описываются процессы излучения, распространения, дифракции и трансформации волн в естественных и искусственных сферах в виде интегральных уравнений. Результаты данного исследования могут быть применены для решения прикладных задач.
Ключевые слова: интегральное уравнение, условие, вырожденное ядро, пространство, малый параметр, следствие.

Уравнение, к которому можно применить общую схему решения уравнения Фредгольма и Вольтерра с вырожденным ядром имеет вид:

$$v(t)=\int_a^t h(t)\,m(s)v(s)ds+\int_a^b\sum_{i=1}^k Q_i\left(s,v(s)\right)p_i(t)ds+f(t),\ \ a\le t\le b, \tag{1}$$

где $m(t), Q_i(t,u), p_i(t), h(t)-$ заданные непрерывные функции, при этом $h(t)\neq 0$, а $u(t)-$ неизвестная функция.

Введя новую переменную и подставляя в уравнение (1), получаем

$$v(t)=h(t)u(t),$$
$$u(t)=\int_a^t h(s)\,m(s)u(s)ds+\int_a^b\sum_{i=1}^k Q_i\left(s,h(s)u(s)\right)p_i(t)h^{-1}(t)ds++f(t)h^{-1}(t).$$

После преобразования имеем:

$$u(t)=\int_a^t m(s)u(s)ds+\int_a^b\sum_{i=1}^k Q_i\left(s,u(s)\right)p_i(t)ds+f(t),\quad a\le t\le b,$$

то есть считаем, что $h(t)\equiv 1$. (2)

Заменяя

$$c_i=\int_a^b Q_i\left(s,u(s)\right)ds,\ \ i=1,\dots,k. \tag{3}$$

Тогда из (2) имеем

$$u(t)=\int_a^t m(s)u(s)ds+\sum_{i=1}^k c_ip_i\,(t)+f(t). \tag{4}$$

Применяя резольвенту ядра $m(s)$ и заменяя $W(t,s)=e^{\int_s^t m(v)dv}$, уравнение (4) преобразуется в следующий вид:

$$u(t)=\int_a^t W(t,s)\left(\sum_{i=1}^{k} c_i p_i\,(v)+f(v)\right)dv+\sum_{i=1}^{k} c_i p_i\,(t)+f(t).$$

Формулу (3) запишем

$$c_j=\int_a^b Q_j\left(s,\int_a^s W(s,v)\left(\sum_{i=1}^{k} c_i p_i\,(v)+f(v)\right)dv+\sum_{i=1}^{k} c_i p_i\,(s)+f(s)\right)ds, j=1,\dots,k. \quad (5)$$

Из всего полученного вытекают теоремы.

Теорема 1. Уравнение (2) эквивалентно системе алгебраических уранвнеий (5).

Теорема 2. (принцип сжимающих отображений). Если систему (5) можно преобразовать к следующей формуле

$c_j=F_j(c_1,\dots,c_k), j=1,\dots,k.$

И можно подобрать замкнутую область $G\subset R^k$, что непрерывная вектор – функция F отображает G в себя и является сжимающей по некоторой метрике, то уравнение (2) имеет хотя бы одно решение.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с разрывным ядром. Применяя уравнение (2), имеем:

$$u(t)=\int_0^t u(s)ds+\int_0^1(\beta tsu^2(s)+\gamma u^2(s))ds+\lambda t^2,$$

где β,γ,λ – вещественные константы.

Обозначая через,

$c_1=\int_0^1 su^2(s)\,ds,\quad c_2=\int_0^1 u^2(s)\,ds,$

уравнение вида

$u(t)=\int_a^t m(s)u(s)ds+\sum_{i=1}^{k} c_i\,p_i(t)+f(t),$

примет вид

$u(t)=\int_0^t u(s)ds+\beta tc_1+\gamma c_2+\lambda t^2,$

а уравнение

$$u(t)=\int_a^t W(t,v)\left(\sum_{i=1}^{k} c_i p_i(v)+f(v)\right)dv+\sum_{i=1}^{k} c_i p_i(t)+f(t),$$

преобразуется в следующее уравнение

$$u(t)=\int_0^t e^{(t-s)}(\beta sc_1+\gamma c_2+\lambda s^2)ds+\beta tc_1+\gamma c_2+\lambda t^2.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$u(t)=\int_0^t e^{(t-s)}\beta sc_1 ds+\int_0^t e^{(t-s)}\gamma c_2 ds+\int_0^t e^{(t-s)}\lambda s^2 ds+\beta tc_1+\gamma c_2+\lambda t^2$$
$$=c_1(\beta e^t-\beta)+\gamma c_2 e^t-2\lambda t-2\lambda+2\lambda e^t,$$

где,

$$\eta_1(t)=\beta e^t-\beta, \eta_2(t)=\gamma e^t, \eta_3(t)=-2\lambda t-2\lambda+2\lambda e^t,$$

отсюда получаем,

$$u(t)=\eta_1(t)c_1+\eta_2(t)c_2+\eta_3(t),$$
$$u^2(t)=\left(\eta_1(t)c_1+\eta_2(t)c_2+\eta_3(t)\right)^2=\eta_1^2(t)c_1^2+\eta_2^2(t)c_2^2+\eta_3^2(t)+$$
$$+2\eta_1(t)\eta_2(t)c_1c_2+2\eta_1(t)\eta_3(t)c_1+2\eta_2(t)\eta_3(t)c_2,$$

или

$$u^2(t) = (\beta e^t - \beta)^2 c_1^2 + (\gamma e^t)^2 c_2^2 + (-2\lambda t - 2\lambda + 2\lambda e^t)^2 +$$
$$+2(\beta e^t - \beta)(\gamma e^t)c_1 c_2 + 2(\beta e^t - \beta)(-2\lambda t - 2\lambda + 2\lambda e^t)c_1 + 2(\gamma e^t)(-2\lambda t - 2\lambda + 2\lambda e^t)c_2.$$

Найдем c_1, c_2 находим из системы уравнений

$$c_1 = \int_0^1 s\{(\beta e^s - \beta)^2 c_1^2 + (\gamma e^s)^2 c_2^2 + (-2\lambda s - 2\lambda + 2\lambda e^s)^2 + 2(\beta e^s - \beta)(\gamma e^s)c_1 c_2 + 2(\beta e^s - \beta)(-2\lambda s - 2\lambda + 2\lambda e^s)c_1 + 2(\gamma e^s)(-2\lambda s - 2\lambda + 2\lambda e^s)c_2\}ds; \quad (3)$$

$$c_2 = \int_0^1 \{(\beta e^s - \beta)^2 c_1^2 + (\gamma e^s)^2 c_2^2 + (-2\lambda s - 2\lambda + 2\lambda e^s)^2 + 2(\beta e^s - \beta)(\gamma e^s)c_1 c_2 + 2(\beta e^s - \beta)(-2\lambda s - 2\lambda + 2\lambda e^s)c_1 + 2(\gamma e^s)(-2\lambda s - 2\lambda + 2\lambda e^s)c_2\}ds; \quad (4)$$

Сделаем оценку (3),(4), применяя неравенство

$$0 \le s \le 1;\ |e^s + s - 1| \le e^s \le e:$$
$$\begin{cases} c_1 \ll 4\beta^2 c_1^2 + 4\gamma^2 c_2^2 + 8|\beta\gamma|c_1 c_2 + 16|\beta\lambda|c_1 + 16|\gamma\lambda|c_2 + 16\lambda^2 \equiv G_1 \\ c_2 \ll 4\beta^2 c_1^2 + 4\gamma^2 c_2^2 + 8|\beta\gamma|c_1 c_2 + 16|\beta\lambda|c_1 + 16|\gamma\lambda|c_2 + 16\lambda^2 \equiv G_2. \end{cases}$$

Если $|\beta|, |\gamma|, |\lambda| \le \frac{1}{8}$, то из $|c_1|, |c_2| \le 1$, $G_1, G_2 \le \frac{1}{64}(4 + 4 + 8 + 16 + 16 + 16) = 1$, то есть вектор – функция отображает область $|c_1|, |c_2| \le 1$ в себя. Таким образом, в случае $|\beta| \le \frac{1}{8}, |\gamma| \le \frac{1}{8}, |\lambda| \le \frac{1}{8}$, нелинейное интегральное уравнение с разрывным ядром имеет хотя бы одно решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асанов А.* Об одном классе интегральных уравнений Вольтера первого рода // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 19841. – Вып. 14. – С. 227-234.

2. *Асанов А., Сапарова Г.Б.* Регуляризация решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром // Вестник КазНУ, серия математика, механика, информатика. – № 2(61). – Алматы, 2009. – С. 16-22.

3. *Сапарова Г.Б.* Об одном классе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с разрывным ядром // Исследования по интегро-дифференциаль-ным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С.74-80.

4. *Сапарова Г.Б.* Регуляризация решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода с разрывным ядром // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып. 40. – С. 94-102.