МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

СВИСТОВИЧ Дмитрий Алексеевич
студент
Кузбасский гуманитарно-педагогический институт
Кемеровский государственный университет
г. Новокузнецк, Россия

Метод конечных элементов (МКЭ) является универсальным численным инструментом для решения краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. В работе кратко рассмотрены основные этапы метода, включая дискретизацию области, формирование локальных матриц жёсткости и сборку глобальной системы. Показаны основные области применения МКЭ, такие как механика деформируемого твёрдого тела, теплопередача, гидродинамика и электродинамика.

Ключевые слова: метод конечных элементов, численное моделирование, инженерный анализ, механика, теплопроводность, гидродинамика, электродинамика.

Метод конечных элементов (МКЭ) является численным методом для приближенного решения краевых задач, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных. Его суть заключается в замене непрерывной величины, такой как температура, перемещение или давление, на конечное количество кусочно-непрерывных функций – конечных элементов (КЭ), которые собираются в решаемую систему уравнений.

На сегодняшний день, процесс решения задач методом конечных элементов хорошо сформулирован и подробно описан [5; 11]. На первом этапе физическая область, заменяется совокупностью конечных элементов. Например, на треугольники и четырехугольники в двумерной области или тетраэдры и гексаэдры в трехмерной. Места их соединения называют узлами. На рисунке 1 приведен пример разбиения пластины на 16 треугольных КЭ. Точность модели во многом зависит от густоты и качества сетки. Так, в зонах, где ожидаются значительные перепады величин или требуется повышенная точность, сетку обычно сгущают.

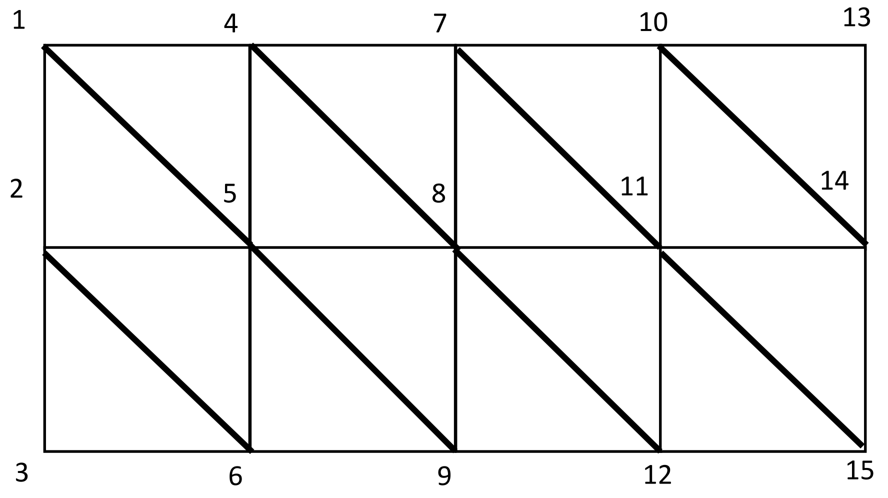

Рисунок 1. **Пример схемы разбиения пластины**

Для каждого типа элемента (треугольного, четырехугольного и т. д.) определяются так называемые функции формы или интерполяционные полиномы. Эти функции, обычно полиномы, определяют изменения искомого значения (например, перемещения) внутри элемента через его узловые значения. Ключевое свойство функции формы заключается в том, что она равна единице в своем узле и нулю во всех остальных узлах элемента. Выбор функций формы определяет тип элемента и его сходимость. Если элемент имеет n узлов, то искомая величина (например, перемещение u внутри элемента представляется как линейная комбинация функций формы:

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^{n} N_i(x)u_i, \tag{1}$$

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

где $N_i(x)$ – функция формы узла i,

u_i – узловое значение в узле i.

После определения функций формы для каждого элемента, строится кусочно-непрерывная функция, которая является непрерывной внутри каждого элемента и, как правило, непрерывной на границах между элементами. Таким образом, сложное поведение непрерывной величины аппроксимируется набором простых функций. Градиент искомой величины внутри элемента определяется через матрицу производных:

$$\nabla u(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \nabla N_i(x)u_i = Bu_e, \tag{2}$$

где u_e – вектор узловых значений элемента,

B – матрица производных функций формы (матрица деформаций).

На следующем этапе формируется система алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных. Для ее построения используются методы, такие как принцип минимума общей потенциальной энергии или метод Галеркина. Для каждого элемента на основе функций формы формируются локальные матрицы жесткости, а также векторы нагрузок. Эти матрицы и векторы отражают физические свойства материала и действующие на элемент воздействия. Для задачи линейной упругости элементная матрица жёсткости имеет вид:

$$K^e = \int_V B^T DBdV\,, \tag{3}$$

где D – матрица упругих свойств материала.

Если имеется распределённая нагрузка $f(x)$, то локальный вектор правой части имеет вид:

$$f^e = \int_V N^T fdV\,, \tag{4}$$

Локальные матрицы и векторы всех элементов собираются в глобальную систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Процесс сборки учитывает геометрическую связность сетки – вклад элементов, имеющих общий узел, суммируется в соответствующие строки и столбцы глобальной матрицы:

$$KU = F, \tag{5}$$

где $K = \sum_e K^e$ – глобальная матрица жёсткости,

$F = \sum_e f^e$ – глобальный вектор нагрузок,

U – вектор всех узловых неизвестных.

На границах области учитываются краевые условия. Например, если $U^i = 0$, то соответствующие строки и столбцы исключаются из системы. Полученная глобальная система, как правило, имеет ленточный вид (все ненулевые элементы примыкают к главной диагонали), что упрощает ее решение.

МКЭ активно применяется в области механики деформируемого твердого тела и прочности конструкций. Он применяется для расчета напряженно-деформированного состояния под действием статических и динамических нагрузок, включая анализ контактных задач, устойчивости конструкций и поведения композитных материалов [1; 10].

В теплофизике МКЭ эффективно решает задачи стационарной и нестационарной теплопроводности [8]. Это позволяет моделировать температурные поля в элементах двигателей, радиаторах, электронных компонентах, зданиях и технологическом оборудовании.

В гидродинамике метод применяется для моделирования течений жидкостей и газов [3; 9]. Решаются задачи как для несжимаемых, так и для сжимаемых сред, ламинарных и турбулентных режимов. С помощью МКЭ анализируют обтекание транспортных средств и летательных аппаратов, процессы в трубопроводах, насосах, гидравлических системах и вентиляционных установках.

В электродинамика МКЭ применяется для расчета электрических и магнитных полей в электрических машинах, трансформаторах, антеннах, конденсаторах и печатных платах [4; 7]. Это позволяет определить распределение потенциала, напряженности поля, индуктивности и емкости, спрогнозировать потери на вихревые токи и электромагнитные помехи.

Кроме этих направлений, метод применяется в биоинженерии для моделирования тканей и имплантатов, в геотехнике для анализа напряжений в грунтовых массивах и в акустике для расчета звуковых полей [2; 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агапов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Пром. и гражд. стр-во» направления подгот. дипломир. специалистов «Стр-во» / В.П. Агапов; В.П. Агапов. – изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Изд-во Ассоц. строит. вузов, 2004. – 247 с. – EDN QMECWX.
2. Биомеханическое моделирование вариантов внутренней фиксации односторонних переломов крестца / И.В. Кажанов, С.И. Микитюк, А.В. Доль [и др.] // Травматология и ортопедия России. – 2020. – Т. 26, № 2. – С. 79-90. – DOI 10.21823/2311-2905-2020-26-2-79-90. – EDN KOVMRE.
3. *Васильева Е.И.* Применение метода конечных элементов для расчёта движения воздуха в гибких воздухопроводах шахтной вентиляции / Е.И. Васильева, В.О. Каледин, Е.В. Равковская // Научно-технический вестник Поволжья. – 2017. – № 2. – С. 79-83. – DOI 10.24153/2079-5920-2017-7-2-79-83. – EDN YNSGTT.
4. *Григорьев А.Д.* Методы вычислительной электродинамики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 432 с. – ISBN 978-5-9221-1450-9. – EDN UGPDRD.
5. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 543 с.
6. *Каледин В.О.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния горных пород применительно к нефтегазопоисковым задачам / В.О. Каледин, В.П. Ластовецкий // Геофизика. – 1999. – № 3. – С. 63-68. – EDN UCRCUX.
7. *Крюкова Я.С.* Эффективные коэффициенты электропроводности кусочно-однородной среды / Я.С. Крюкова, В.О. Каледин, Т.В. Бурнышева // Научно-технический вестник Поволжья. – 2013. – № 2. – С. 146-149. – EDN PZGFIP.
8. Метод конечных элементов в решении задач теплопроводности / С.А. Подгорный, З.А. Меретуков, Е.П. Кошевой, В.С. Косачев // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2013. – № 2(56). – С. 10-15. – EDN QCSNRN.
9. Методы решения дифференциальных уравнений гидродинамики / З.А. Меретуков, А.А. Заславец, Е.П. Кошевой, В.С. Косачев // Новые технологии. – 2012. – № 1. – С. 36-41. – EDN OWITBP.
10. Разработка математической модели статического деформирования слоистых конструкций с несжимаемыми слоями / Е.С. Вячкин, В.О. Каледин, Е.В. Решетникова [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 55. – С. 72-83. – DOI 10.17223/19988621/55/7. – EDN YNAMXJ.
11. *Сегерлинд, Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

FINITE ELEMENT METHOD IN MATHEMATICAL MODELING

SVISTOVICH Dmitriy Alekseevich
Student
Kuzbass Humanitarian Pedagogical Institute
Kemerovo State University
Novokuznetsk, Russia

The Finite Element Method (FEM) is a versatile numerical approach for solving boundary value problems described by partial differential equations. This work provides a concise overview of the main steps of FEM, including domain discretization, formation of local stiffness matrices, and global system assembly. Key application areas are highlighted, such as solid mechanics, heat transfer, fluid dynamics and electrodynamics.
Keywords: finite element method, numerical simulation, engineering analysis, solid mechanics, heat transfer, fluid dynamics, electrodynamics.