МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ВОПРОСА ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ САУ ПО ТЕОРЕМЕ О КОНЕЧНОМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ

ДЕРЕВЯНЧУК Наталия Владимировна
кандидат технических наук, доцент
Пензенский филиал Военной академии материально-технического обеспечения
им. генерала армии А.В. Хрулёва
г. Пенза, Россия

Данная работа посвящена методике изложения вопроса оценки точности САУ по теореме о конечном значении функции. Приведено решение конкретной задачи по данному вопросу. Применяется: математический аппарат дифференциального исчисления, а также математический анализ. Рассмотрена методика изложения вопроса оценки точности САУ по теореме о конечном значении функции.
Ключевые слова: методика, система автоматического управления (САУ), теорема о конечном значении функции, передаточная функция, установившаяся ошибка, структурная схема.

Кроме устойчивости, к процессам управления предъявляются также требования по точности в установившемся режиме. Различают два вида таких режимов работы САУ – статический и динамический. Статический – режим, при котором система находится в состоянии покоя, так как все внешние воздействия и параметры самой системы не меняются во времени. Динамический установившийся режим возникает, когда приложенные к системе внешние воздействия изменяются по какому-либо установившемуся закону, в результате чего система приходит в режим установившегося вынужденного движения.

Понятие «точность» подразумевает такие понятия как «отклонение», «погрешность», которые можно обобщить понятием «ошибка». Поэтому при рассмотрении точности САУ предметами исследования будут ошибки её работы.

Если условно считать, что САУ работает точно, следовательно, система без ошибки воспроизводит управляющее воздействие $x_{вх}(t)$ (рисунок 1).

$$x_{вх}(t) = x_{вых}(t);\ x_{вх}(t) - x_{вых}(t) = 0. \qquad (1)$$

Рисунок 1. **Упрощённая функциональная схема САУ**

Если в конструкцию САУ заложена неточность, то реакция системы $x_{вых}(t)$ будет отличаться от воздействия:

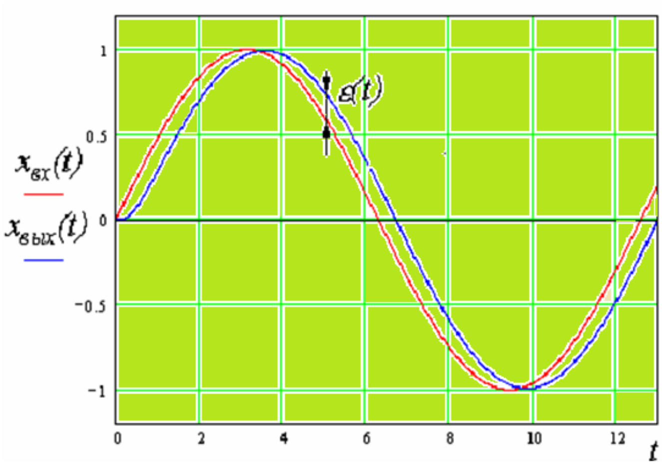
$$x_{вх}(t) \neq x_{вых}(t);\ x_{вх}(t) - x_{вых}(t) \neq 0. \qquad (2)$$

Таким образом, точность работы САУ в установившемся режиме (как в статическом, так и динамическом) характеризуется ошибками воспроизведения управляющего воздействия. Различают **динамическую** и **установившуюся** ошибки.

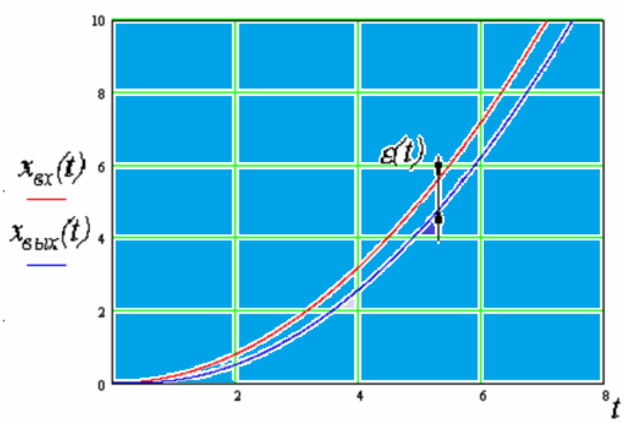
Динамическая ошибка качественно характеризует точность работы САУ и определяется как функция

$$\varepsilon(t) = x_{вх}(t) - x_{вых}(t). \qquad (3)$$

Графики, поясняющие сущность динамической ошибки, при воспроизведении системой гармонического воздействия и воздействия по закону параболы представлены на рисунке 2а и 2б соответственно.



(а)



(б)

Рисунок 2. **Графики, поясняющие сущность динамической ошибки $\varepsilon(t)$, при воспроизведении системой гармонического воздействия (а) и при воспроизведении системой воздействия, изменяющегося по закону параболы (б)**

Для численной оценки точности работы САУ в теории автоматического управления вводится установившаяся ошибка

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t). \qquad (4)$$

На упрощённой структурной схеме следящей САУ с главным контуром отрицательной обратной связи (рисунок 3) сумматор реализует арифметическую операцию вычитания

$$\Delta X(P) = X_{вх}(P) - X_{вых}(P), \qquad (5)$$

где $\Delta X(P)$ – изображение сигнала ошибки.

Сравнивая формулы (3) и (5) и учитывая свойства линейности преобразований Лапласа, можно установить связь между оригиналом и изображением. Пусть

$$\Delta X(P) = L(\varepsilon(t)). \qquad (6)$$

Откуда находим

$$\varepsilon(t) = L^{-1}(\Delta X(P)), \qquad (7)$$

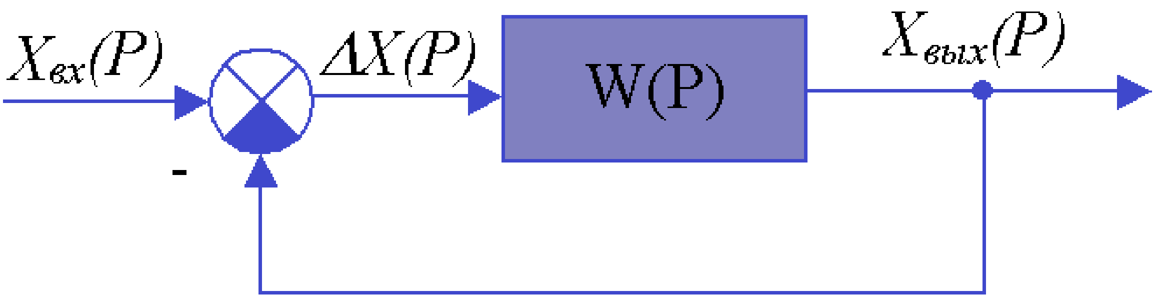


Рисунок 3. **Упрощённая структурная схема следящей САУ с главным контуром отрицательной обратной связи**

Формулы (3) и (4) поясняют физический смысл ошибок, но не позволяют произвести оценку точности САУ на этапе проектирования. Для определения связи ошибок со структурой и параметрами системы, необходимо определить передаточную функцию ошибки САУ $\Phi_\Delta(P)$.

Передаточная функция ошибки $\Phi_\Delta(P)$ – отношение изображения сигнала ошибки $\Delta X(P)$ к изображению входной величины $X_{вх}(P)$

$$\Phi_\Delta(P)=\frac{\Delta X(P)}{X_{вх}(P)} \qquad (8)$$

Формула (8) показывает зависимость передаточной функции ошибки только от управляющего воздействия $x_{вх}(t)$, но не отражает связь со структурой и параметрами САУ. Для выражения $\Phi_\Delta(P)$ через передаточную функцию разомкнутой системы $W(P)$ необходимо в структурной схеме (рисунок 3) произвести следующие преобразования. Схема САУ, поясняющая структурные преобразования, представлена на рисунке 4. Во-первых, прерывается выход системы в цепи прямой связи. Во-вторых, в качестве выходной величины САУ определяется сигнал ошибки.

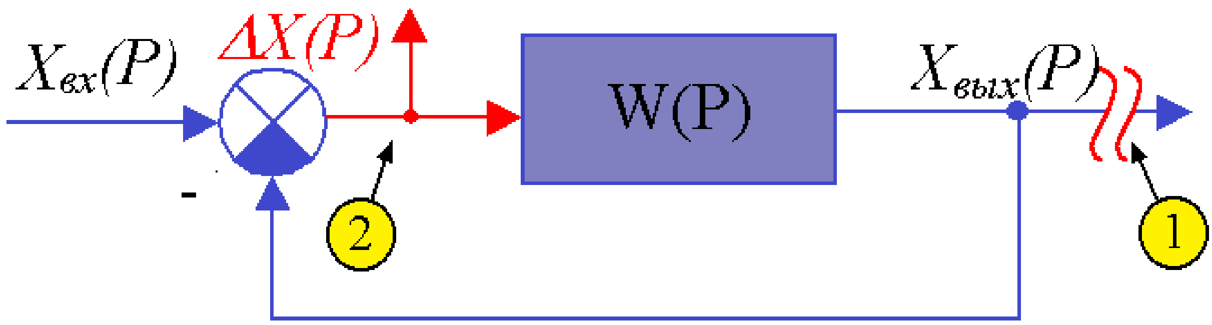


Рисунок. 4. **Схема САУ, поясняющая структурные преобразования**

После произведённых структурных преобразований схема (рисунок 4) представляется в более удобном для анализа виде (рисунок 5).

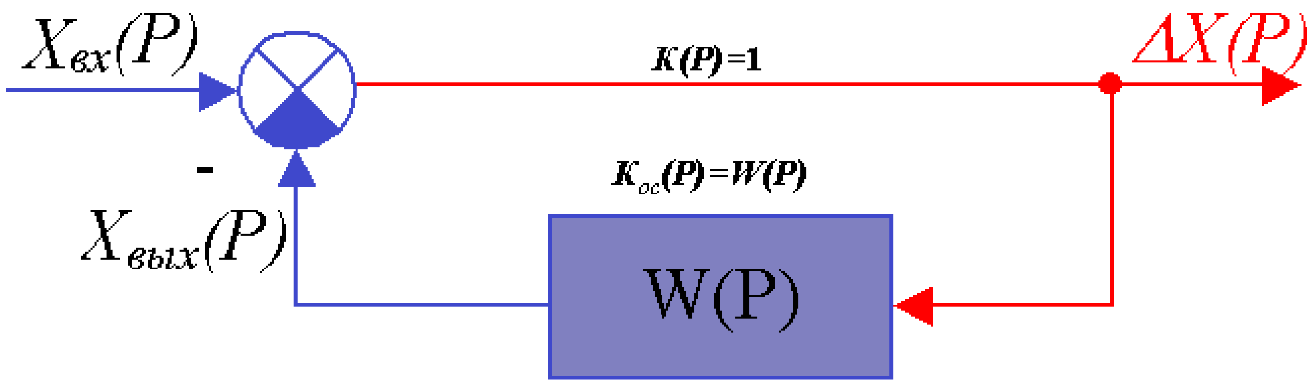


Рисунок 5. **Структурная схема САУ после структурных преобразований**

Полученная схема классифицируется как встречно-параллельное соединение с единичной передаточной функцией в цепи прямой связи. С учётом того, что выходной величиной будет являться сигнал ошибки, передаточная функция ошибки выражается как эквивалентная передаточная функция системы и определяется формулой

$$\Phi_\Delta(P)=\frac{K(P)}{1+K(P)K_{ос}(P)}=\frac{1}{1+W(P)} \qquad (9)$$

В зависимости (9) передаточная функция ошибки $\Phi_\Delta(P)$ выражается через передаточную функцию разомкнутой САУ $W(P)$. Для определения изображения сигнала ошибки необходимо приравнять друг к другу формулы (8) и (9)

$$\frac{\Delta X(P)}{X_{вх}(P)} = \frac{1}{1+W(P)} \quad , \qquad (10)$$

из выражения (10) определяется

$$\Delta X(P) = \frac{X_{вх}(P)}{1+W(P)} \qquad (11)$$

Тогда с учётом (7) и (4) динамическая и установившаяся ошибка определяются как

$$\varepsilon(t) = L^{-1}(\Delta X(P)) = L^{-1}\left(\frac{X_{вх}(P)}{1+W(P)}\right) \quad , \qquad (12)$$

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t\to\infty}\left(L^{-1}\left(\frac{X_{вх}(P)}{1+W(P)}\right)\right) \quad . \qquad (13)$$

Анализ формул (12) и (13) показывает, что точность воспроизведения линейной САУ управляющего воздействия зависит от двух следующих факторов: вида управляющего воздействия $X_{вх}(P)$ и структуры и параметров системы $W(P)$.

Оценка точности по формулам (12) и (13) весьма затруднительна по причине большого объёма вычислений при выполнении обратного преобразования Лапласа. С целью упрощения процедуры оценки точности для расчёта установившейся ошибки САУ используется одна из основных теорем операционного исчисления – *теорема о конечном значении функции*. Сущность теоремы заключается в следующем. Если функция $f(t)$ и её первая производная $f'(t)$ могут быть преобразованы по интегралу Лапласа, т.е. для оригинала $f(t)$ существует изображение $F(P)$

$$\mathbf{L(f(t)) = F(P)}, \qquad (14)$$

то изменение оригинала $f(t)$ на бесконечности ($t\to\infty$) соответствует изменению изображения $F(P)$ в области начала координат ($P\to 0$)

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{P\to 0} PF(P) \qquad (15)$$

Применяя теорему (15) для оценки установившейся ошибки, получается зависимость

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{P\to 0} P\Delta X(P) = \lim_{P\to 0} \frac{PX_{вх}(P)}{1+W(P)} \quad , \qquad (16)$$

использование которой позволяет избежать трудностей выполнения обратного преобразования Лапласа (13).

Для закрепления данного материала решается задача, после решения которой, теоретический материал станет более понятным, а также обучающиеся смогут применять теорию на практике и в решении других задач.

Пусть дана структурная схема следящего электропривода (рисунок 6).

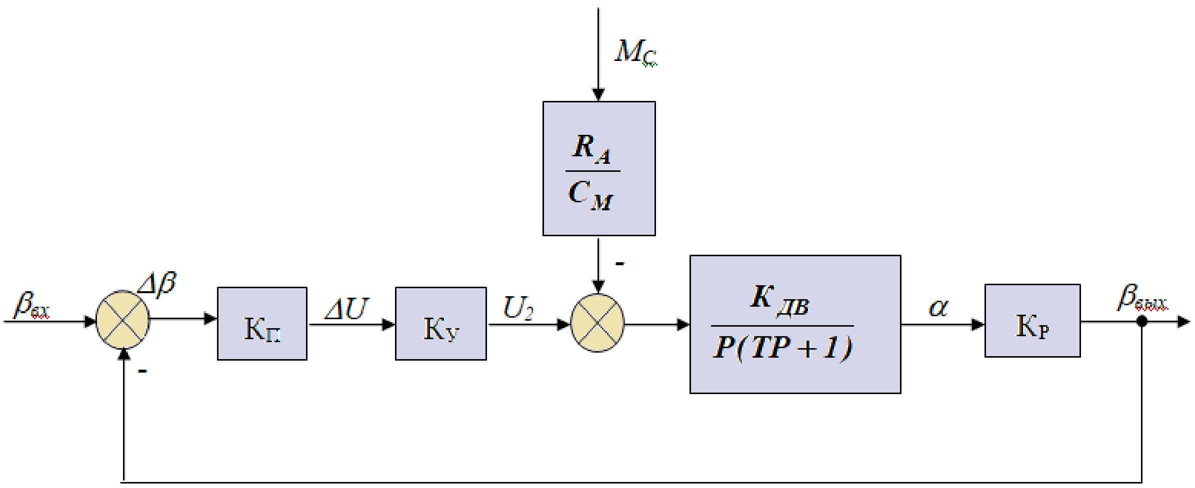


Рисунок 6. **Структурная схема следящего электропривода**

Исходные данные: $\mathbf{К_П}$ = 0,1В/град; $\mathbf{К_У}$ = 100; $\mathbf{К_{ДВ}}$ = 500 град/В·с;
$\mathbf{К_Р}$ = 1/1000; $\mathbf{R_А}$ = 5 Ом; $\mathbf{С_М}$ = 0,2 н·м/А.

Входное воздействие: $\beta_{вх}(t) = \Omega t$, где Ω = 2 град/с.

Возмущающее воздействие:

$M_C(t) = M_C = 0{,}05\, н \cdot м$.

Определить:

1. Передаточную функцию разомкнутой системы $K_p(p)$;

2. Установившуюся ошибку от входного сигнала $\Delta\beta_{вх}$;

3. Передаточную функцию по возмущающему воздействию (по моменту сопротивления) $F_{MC}(p)$;

4. Установившуюся ошибку от возмущающего воздействия $\Delta\beta_{MC}$;

5. Общую установившуюся ошибку $\Delta\beta_{уст}$.

Приведем алгоритм решения данной задачи.

1. Преобразуем структурную схему следящего электропривода наведения (рисунок 1) в одноконтурную структурную схему разомкнутой САУ (рисунок 7) для определения $K_P(p)$ (при $M_C = 0$):

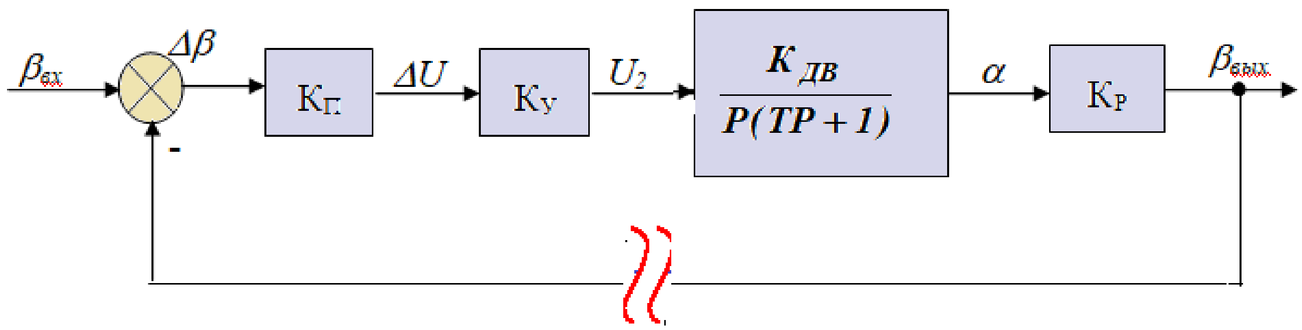


Рисунок 7. **Одноконтурная структурная схема разомкнутой САУ**

$$K_P(p) = \frac{K_П \cdot K_У \cdot K_{ДВ} \cdot K_P}{p(Tp+1)} = \frac{K}{p(Tp+1)}$$

$$K = K_П K_У K_{ДВ} K_P = \frac{0{,}1 \cdot 100 \cdot 500 \cdot 1}{1000} = \frac{10}{2} = 5c^{-1}$$

2. Входное воздействие: $\beta_{вх}(t) = \Omega t$, где Ω = 2 град/с, следовательно:

$$X_{вх}(p) = \frac{\Omega}{p^2}$$

По теореме о конечном значении функции для входного воздействия имеем:

$$\Delta\beta_{вх} = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{1 + K_p(p)} \cdot x_{вх}(p) = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{1 + \dfrac{K}{p(Tp+1)}} \cdot \frac{\Omega}{p^2} =$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{\Omega}{p\left(1 + \dfrac{K}{p(Tp+1)}\right)} = \lim_{p\to 0} \frac{\Omega}{\dfrac{p(p(Tp+1)+K)}{p(Tp+1)}} = \lim_{p\to 0} \frac{\Omega}{\dfrac{p(Tp+1)+K}{(Tp+1)}} =$$

$$= \frac{\Omega}{K} = \frac{2}{5} = 0{,}4^0$$

3. Преобразуем структурную схему САУ в одноконтурную структурную схему относительно возмущающего воздействия (рисунок 8):

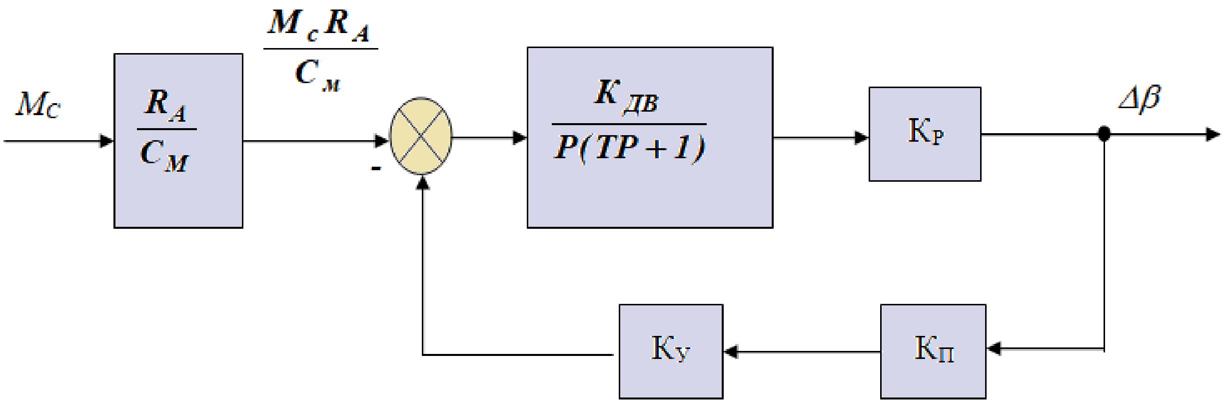


Рисунок 8. **Одноконтурная структурная схема относительно возмущающего воздействия**

3.1. Выделим внутренний контур, как было показано в работе [1], в данной схеме.

3.2. Применяя формулы последовательного соединения звеньев и встречно-параллельного соединения звеньев [1] рассчитаем $К_{внутр.к.}$

$K_{внутр.к.} = \frac{K_1}{1+K_1K_{oc}}$; $K_1 = \frac{K_{дв}K_p}{p(Tp+1)}$;

$K_{oc} = K_y K_П$

3.3. Используя формулу для разомкнутой САУ, как было показано в работе [2], определяем передаточную функцию по возмущающему воздействию (по моменту сопротивления) $\boldsymbol{F_{MC}(p)}$**:**

$$F_{M_c}(p) = \frac{R_A}{C_M}\cdot\frac{\dfrac{K_{дв}K_p}{p(Tp+1)}}{1+\dfrac{K_{дв}K_pK_yK_П}{p(Tp+1)}} = \frac{R_A}{C_M}\cdot\frac{\dfrac{K_{дв}K_p}{p(Tp+1)}}{\dfrac{p(Tp+1)+K_{дв}K_pK_yK_П}{p(Tp+1)}} =$$

$$= \frac{R_A}{C_M}\cdot\frac{K_{дв}K_p}{p(Tp+1)}\cdot\frac{p(Tp+1)}{p(Tp+1)+K} = \frac{R_AK_{дв}K_p}{C_M\,(p(Tp+1)+K)} =$$

$$= \frac{5\cdot500\cdot1}{1000\cdot0,2(p(Tp+1)+5)} = \frac{5}{2\cdot0,2(p(Tp+1)+5)} =$$

$$= \frac{5}{0,4(p(Tp+1)+5)} = \frac{12,5}{p(Tp+1)+5}$$

При этом (рисунок 8)

$$x_{вх\,воз}(t) = M_C\cdot 1(t) \;\Rightarrow\; x_{вх}(p) = \frac{M_C}{p}.$$

4. Определим установившуюся ошибку от возмущающего воздействия $\Delta\beta_{MC}$;

По теореме о конечном значении функции для возмущающего воздействия имеем:

$$\Delta\beta_{Mc} = \lim_{p\to0} pF_{Mc}(p)\cdot\frac{M_c}{p},$$

где $F_{Mc}(p)$ – передаточная функция по ошибке $\Delta\beta$.

$$\Delta\beta_{M_c} = \lim_{p\to 0} p\frac{R_A K_{\partial в} K_p}{C_M\left(p(Tp+1)+K\right)}\cdot\frac{M_c}{p} =$$

$$= \lim_{p\to 0}\frac{R_A K_{\partial в} K_p M_c}{C_M\left(p(Tp+1)+K\right)} = \lim_{p\to 0}\frac{5\cdot 500\cdot 1\cdot 0.05}{1000\cdot 0.2\cdot\left(p\left(Tp+1\right)+5\right)} =$$

$$= \frac{5\cdot 0.05}{2} = \frac{0.25}{2} = 0.125^\circ$$

5. Определяем общую установившуюся ошибку $\boldsymbol{\Delta\beta_{уст}}$:

$$\Delta\beta_{уст} = \Delta\beta_{вх} + \Delta\beta_{M_c} = 0.4 + 0.125 = 0.525^\circ$$

Ответ: общая установившаяся ошибка $\Delta\beta_{уст} = 0.525^\circ$.

Таким образом, в данной работе рассмотрена методика изложения вопроса оценки точности САУ по теореме о конечном значении функции с подробнейшим разбором примера на эту тему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Деревянчук Н.В.* Определение передаточной функции внутреннего контура системы автоматического управления // Педагогика современности. – 2024. –№ 1.– С. 78-83.
2. *Деревянчук Н.В.* Определение передаточных функций разомкнутой и замкнутой систем автоматического управления // Педагогика современности. – 2024. –№ 1.– С. 84-88.

THE METHODOLOGY OF PRESENTING THE ISSUE OF ASSESSING THE ACCURACY OF ACS BY THE FINITE VALUE THEOREM OF A FUNCTION

DEREVYANCHUK Natalia Vladimirovna
Candidate of Sciences in Technology, Associate Professor
Penza Branch of the Military Academy of Logistics named after Army General A.V. Khrulev
Penza, Russia

This work is devoted to the methodology of presenting the issue of assessing the accuracy of ACS by the theorem on the finite value of the function. The solution of a specific problem on this issue is given. Applied: mathematical apparatus of differential calculus, as well as mathematical analysis. The methodology of presenting the issue of assessing the accuracy of ACS is considered by the theorem on the finite value of the function.

Keywords: methodology, automatic control system (ACS), theorem on the final value of the function, transfer function, steady-state error, block diagram.