

ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ: НА АНИЗОТРОПНОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ ДИАФРАГМЕ И АНИЗОТРОПНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ДИАФРАГМЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

ДЕРЕВЯНЧУК Екатерина Дмитриевна

кандидат физико-математических наук, доцент

ЛАЗАРЕВ Олег Андреевич

студент

Пензенский государственный университет

г. Пенза, Россия

Данная работа посвящена двум задачам дифракции: задаче дифракции электромагнитной волны на анизотропной однослойной диафрагме и задаче дифракции электромагнитной волны на анизотропной двухслойной диафрагме в прямоугольном волноводе. Задачи сведены к краевым задачам для системы уравнений Максвелла. Получены аналитические решения обеих задач дифракции.

Ключевые слова: задача дифракции, электромагнитная волна, анизотропный материал.

В данной статье рассматриваются две задачи: задача дифракции электромагнитной волны на анизотропной однослойной диафрагме и задача дифракции электромагнитной волны на анизотропной двухслойной диафрагме в прямоугольном волноводе. Прежде чем углубиться в специфику данной задачи, необходимо подробно рассмотреть основы волноводов и их устройство [1-6].

Волноводы являются важными компонентами систем передачи электромагнитных волн, особенно на высоких частотах.

Волновод представляет собой диэлектрическую металлическую или диэлектрическую структуру, которая направляет электромагнитные волны, ограничивая их распространение в одном или нескольких направлениях (рисунок 1). Это позволяет минимизировать потери энергии и искажение сигнала. Прямоугольные волноводы, которые рассматриваются в данной работе, представляют собой полые трубки с прямоугольным поперечным сечением, выполненные из проводящих материалов.



Рисунок 1. Волновод прямоугольного сечения

1. Постановка задачи дифракции.

Задача дифракции электромагнитной волны в прямоугольном волноводе со вставкой внутри него сводится к решению краевой задачи для системы уравнений Максвелла.

Пусть волновод работает в одномодовом режиме, что возможно при выполнении условия, что волновое число k_0 удовлетворяет неравенству $\pi/a < k_0 < \pi/b$, a – ширина волновода, b – высота волновода. Тогда в волноводе распространяется только

волна H_{10} , при этом высшие моды экспоненциально затухают [2]. Представленное ниже решение является точным и не содержит затухающих мод. Будем считать, что волновод имеет идеально проводящие стенки. В волноводе расположена диафрагма, состоящая из одного или двух слоев. Каждый слой диафрагмы заполнен анизотропной средой с тензором диэлектрической проницаемости и тензором магнитной проницаемости:

$$\hat{\epsilon}^{(i)} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (1.1) \quad \hat{\mu}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mu_{11}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Стенки диафрагмы плотно прилегают к стенкам волновода.

Электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} внутри вол-

новода может быть записано в виде системы уравнений Максвелла вне и внутри диафрагмы соответственно:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0\mathbf{E} \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \end{cases} \quad (1.3) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\hat{\epsilon}\mathbf{E} \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\hat{\mu}\mathbf{H}, \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.4)$$

Причем \mathbf{E} – это вектор напряженности электрического поля, \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля, $\omega > 0$ – круговая

частота. В качестве системы выберем систему СГС. Пусть внешнее электрическое поле имеет вид:

$$\mathbf{E}^0 = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\gamma_0 z} \mathbf{e}_2,$$

соответствующий волне типа H_{10} с известной амплитудой A , где $\gamma_0 = \gamma_0(\omega) \neq 0$, γ_0 – постоянная распространения волны H_{10} , \mathbf{e}_2 – орт вдоль оси O_y .

В прямоугольном волноводе основной волной является волна H_{10} , которая имеет поляризацию [1]:

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0), \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z). \quad (1.5)$$

Тогда вектор электрического поля \mathbf{E} вне Q имеет вид:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (Ae^{-i\gamma_0 z} + Be^{i\gamma_0 z}) \mathbf{e}_2, & z < 0 \\ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) F e^{-i\gamma_0 z} \mathbf{e}_2, & z > l, \end{cases} \quad (1.6)$$

а внутри Q :

$$\mathbf{E}_j = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (C_j e^{-i\gamma_j z} + D_j e^{i\gamma_j z}) \mathbf{e}_2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.7)$$

где C_j и D_j константы, которые определяются ниже. Здесь $\gamma_{n+1} = \gamma_0$, A – амплитуда па-

дающей волны, F/A – коэффициент прохождения, подлежащий измерению.

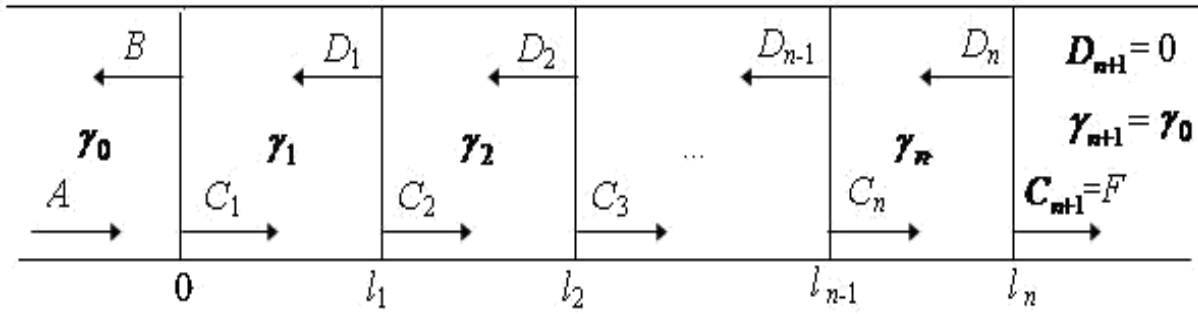


Рисунок 2. Схема распространения электромагнитной волны в волноводе

Граничные условия имеют вид:

$$[E_\tau]_L = 0, \quad [H_\tau]_L = 0,$$

где $L := \{(x, y, z) : z = 0, \dots, z = l_j, \dots, z = l_n\}, j = 1, \dots, n, [\cdot]_L$ скачок предельных зна-

чений функции на границе раздела сред L , то есть:

$$E_\tau^{(j)} - E_\tau^{(j+1)} = 0, \quad H_\tau^{(j)} - H_\tau^{(j+1)} = 0,$$

$E_\tau^{(j)}$ и $H_\tau^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) тангенциальные составляющие векторов \mathbf{E}, \mathbf{H} соответственно. В силу поляризации (1.5) тангенциаль-

ными составляющими векторов \mathbf{E}, \mathbf{H} являются $E_\tau = E_y, H_\tau = H_x$. Тогда граничные условия примут вид:

$$[E_y]_L = 0, \quad [H_x]_L = 0, \tag{1.8}$$

E_y, H_x тангенциальные составляющие векторов \mathbf{E}, \mathbf{H} соответственно.

Для получения граничных условий для постоянных распространения Максвелла (1.3), (1.4), получим выражения для постоянных распространения

Подставим (1.1), (1.2) и (1.5) в уравне-

$$\gamma_j = \sqrt{\left(\omega^2 \varepsilon_{22}^{(j)} \mu_{11}^{(j)} - \frac{\pi^2 \mu_{11}^{(j)}}{a^2 \mu_{33}^{(j)}}\right)}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.9}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}. \tag{1.10}$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = C_1 + D_1 \\ \frac{\gamma_0}{\mu_0} (B - A) = \frac{\gamma_1}{\mu_{11}^{(1)}} (D_1 - C_1) \\ C_j e^{-i\gamma_j l_j} + D_j e^{i\gamma_j l_j} = C_{j+1} e^{-i\gamma_{j+1} l_j} + D_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} l_j} \\ -\frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} (C_j e^{-i\gamma_j l_j} - D_j e^{i\gamma_j l_j}) = -\frac{\gamma_{j+1}}{\mu_{11}^{(j+1)}} (C_{j+1} e^{-i\gamma_{j+1} l_j} - D_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} l_j}) \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Здесь $j = 1, \dots, n$, $C_{n+1} = F$, $D_{n+1} = 0$, а γ_j, γ_0 вычисляются по формулам (1.9) и (1.10) соответственно.

Постановка прямой задачи: требуется по известной амплитуде A падающего поля, известной магнитной проницаемости μ_j и ди-

электрической проницаемости ϵ_j и известным толщинам l_j каждого слоя диафрагмы найти электромагнитное поле в волноводе.

2. Численный метод решения.

Решение задачи дифракции для однослойной анизотропной диафрагмы.

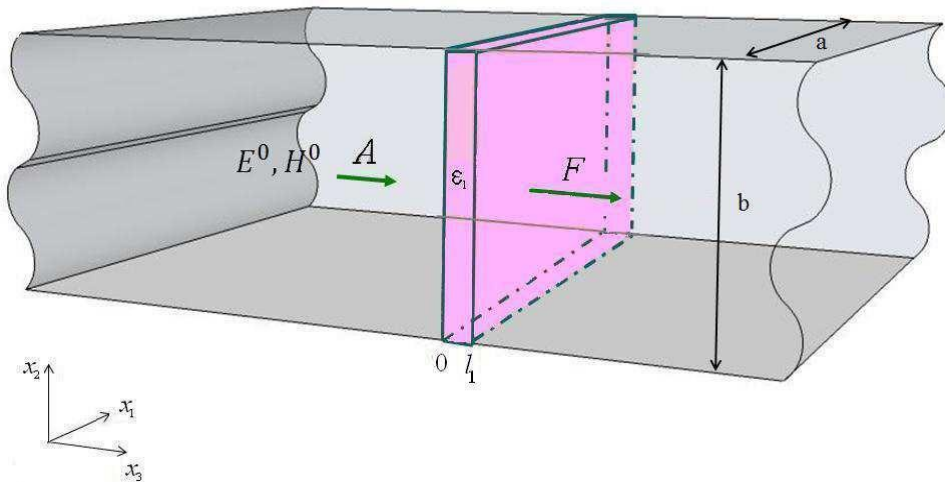


Рисунок 3. Однослойная диафрагма в прямоугольном волноводе

Тогда в случае однослойной диафрагмы компоненты электромагнитного поля имеют вид:

$$E_y = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (Ae^{-i\gamma_0 x_3} + Be^{i\gamma_0 x_3}), & x_3 < 0 \\ \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (C_1 e^{-i\gamma_1 x_3} + D_1 e^{i\gamma_1 x_3}), & 0 < x_3 < l_1 \\ \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) F e^{-i\gamma_0 x_3}, & x_3 > l \end{cases} \quad (2.1)$$

$$H_x = \begin{cases} -\frac{i\gamma_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (Ae^{-i\gamma_0 x_3} - Be^{i\gamma_0 x_3}), & x_3 < 0 \\ -\frac{i\gamma_1}{\omega \mu_{11}^{(1)}} \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (C_1 e^{-i\gamma_1 x_3} - D_1 e^{i\gamma_1 x_3}), & 0 < x_3 < l_1 \\ -\frac{i\gamma_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) F e^{-i\gamma_0 x_3}, & x_3 > l \end{cases} \quad (2.2)$$

$$H_z = \begin{cases} -\frac{i \pi}{\omega \alpha} \cos\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (Ae^{-i\gamma_0 x_3} + Be^{i\gamma_0 x_3}), & x_3 < 0 \\ -\frac{i \pi}{\omega \mu_{33}^{(1)} \alpha} \cos\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (C_1 e^{-i\gamma_1 x_3} + D_1 e^{i\gamma_1 x_3}), & 0 < x_3 < l_1 \\ -\frac{i \pi}{\omega \alpha} \cos\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) F e^{-i\gamma_0 x_3}, & x_3 > l_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Таким образом, электромагнитное поле в волноводе имеет вид (2.1)-(2.3) в случае однойслойной анизотропной диафрагмы. А ко-

эффициенты $F, C_j, D_j, (j = 1, \dots, n), B$ определяются по формулам, которые были выведены в работе [7]:

$$F = \frac{2A \frac{\gamma_0}{\mu_0}}{\left(\frac{\gamma_0}{\mu_0} + \frac{\gamma_1}{\mu_{11}^{(1)}}\right) \tilde{C}_1 + \left(\frac{\gamma_0}{\mu_0} - \frac{\gamma_1}{\mu_{11}^{(1)}}\right) \tilde{D}_1}, \quad (2.4)$$

где

$$\tilde{C}_j = \frac{e^{i\gamma_j l_j}}{2 \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}}} \left\{ \tilde{C}_{j+1} e^{-i\gamma_{j+1} l_j} \left(\frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} + \frac{\gamma_{j+1}}{\mu_{11}^{(j+1)}} \right) + \tilde{D}_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} l_j} \left(\frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} - \frac{\gamma_{j+1}}{\mu_{11}^{(j+1)}} \right) \right\}, \quad (2.5)$$

$$\tilde{D}_j = \frac{e^{-i\gamma_j l_j}}{2 \frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}}} \left\{ \tilde{C}_{j+1} e^{-i\gamma_{j+1} l_j} \left(\frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} - \frac{\gamma_{j+1}}{\mu_{11}^{(j+1)}} \right) + \tilde{D}_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} l_j} \left(\frac{\gamma_j}{\mu_{11}^{(j)}} + \frac{\gamma_{j+1}}{\mu_{11}^{(j+1)}} \right) \right\}, \quad (2.6)$$

$$\tilde{C}_{n+1} = C_{n+1} = F, \tilde{D}_{n+1} = D_{n+1} = 0, C_j = \tilde{C}_j F, D_j = \tilde{D}_j F, \quad (2.7) \\ j = 1, \dots, n.$$

$$B = \frac{1}{2 \frac{\gamma_0}{\mu_0}} \left\{ (C_1 + D_1) \frac{\gamma_0}{\mu_0} - (C_1 - D_1) \frac{\gamma_1}{\mu_{11}^{(1)}} \right\}. \quad (2.8)$$

Решение задачи дифракции для двухслойной анизотропной диафрагмы.

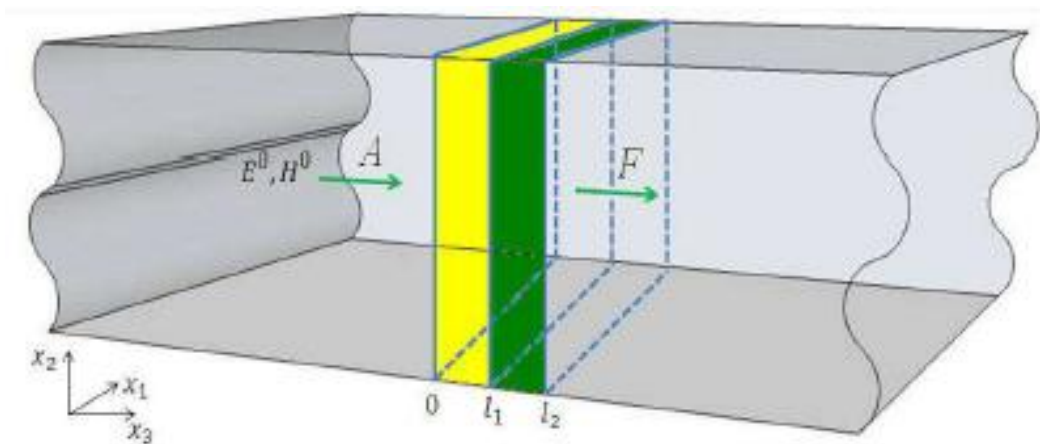


Рисунок 4. Двухслойная диафрагма в прямоугольном волноводе

В случае двухслойной диафрагмы компоненты электромагнитного поля имеют вид:

$$E_y = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (Ae^{-i\gamma_0 x_3} + Be^{i\gamma_0 x_3}), & x_3 < 0 \\ \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (C_1 e^{-i\gamma_1 x_3} + D_1 e^{i\gamma_1 x_3}), & 0 < x_3 < l_1 \\ \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (C_2 e^{-i\gamma_2 x_3} + D_2 e^{i\gamma_2 x_3}), & l_1 < x_3 < l_2 \\ \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) F e^{-i\gamma_0 x_3}, & x_3 > l_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$H_x = \begin{cases} \frac{-i\gamma_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (Ae^{-i\gamma_0 x_3} - Be^{i\gamma_0 x_3}), & x_3 < 0 \\ \frac{-i\gamma_1}{\omega \mu_{11}^{(1)}} \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (C_1 e^{-i\gamma_1 x_3} - D_1 e^{i\gamma_1 x_3}), & 0 < x_3 < l_1 \\ \frac{-i\gamma_2}{\omega \mu_{11}^{(2)}} \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (C_2 e^{-i\gamma_2 x_3} - D_2 e^{i\gamma_2 x_3}), & l_1 < x_3 < l_2 \\ \frac{-i\gamma_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) F e^{-i\gamma_0 x_3}, & x_3 > l_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$H_z = \begin{cases} -\frac{i}{\omega \alpha} \frac{\pi}{\alpha} \cos\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (Ae^{-i\gamma_0 x_3} + Be^{i\gamma_0 x_3}), & x_3 < 0 \\ -\frac{i}{\omega \mu_{33}^{(1)}} \frac{\pi}{\alpha} \cos\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (C_1 e^{-i\gamma_1 x_3} + D_1 e^{i\gamma_1 x_3}), & 0 < x_3 < l_1 \\ -\frac{i}{\omega \mu_{33}^{(2)}} \frac{\pi}{\alpha} \cos\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) (C_2 e^{-i\gamma_2 x_3} + D_2 e^{i\gamma_2 x_3}), & l_1 < x_3 < l_2 \\ -\frac{i}{\omega \alpha} \frac{\pi}{\alpha} \cos\left(\frac{\pi x_1}{\alpha}\right) F e^{-i\gamma_0 x_3}, & x_3 > l_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким образом, электромагнитное поле в волноводе имеет вид (2.9)-(2.11) в случае двухслойной анизотропной диафрагмы. А коэффициенты $F, C_j, D_j, (j = 1, \dots, n), B$ определяются по формулам (2.4) – (2.8).

Таким образом, в данной работе было проведено исследование задачи дифракции электромагнитной волны на анизотропной

многослойной диафрагме в прямоугольном волноводе. Рассмотрены два случая: для однослойной анизотропной диафрагмы и для двухслойной анизотропной диафрагмы. Получено аналитическое решение для каждого случая. Полученные теоретические результаты могут быть применены при исследовании новых видов анизотропных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 779 с.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
3. Деревянчук Е.Д. Исследование обратных задач восстановления электромагнитных параметров многосекционной диафрагмы в прямоугольном волноводе по коэффициентам прохождения или отражения: дис. ... канд. физико-математ. наук. – Пенза, 2015. – 130 с.: ил.
4. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
5. Стрижаченко А.В. Измерение анизотропных диэлектриков на СВЧ. Теоретический анализ, устройства, методы. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 288 с.

6. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Никитов С.А., Мерданов М.К., Евтеев С.Г. Волноводные фотонные кристаллы с электрически управляемыми характеристиками // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2017. – Т. 20. – № 3. – С. 43-51.

7 Шван Х.П., Фостер К.Р. Воздействие высокочастотных полей на биологические системы: Электрические свойства и биофизические механизмы // ТИИЭР. – Т. 68. – № 1. – 1980. – С. 121-132.

ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION PROBLEMS: ON AN ANISOTROPIC SINGLE-LAYER DIAPHRAGM AND ANISOTROPIC TWO-LAYER DIAPHRAGM IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

DEREVYANCHUK Ekaterina Dmitrievna

Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor

LAZAREV Oleg Andreevich

Student

Penza State University

Penza, Russia

This work is devoted to two diffraction problems: the problem of diffraction of an electromagnetic wave on an anisotropic single-layer diaphragm and the problem of diffraction of an electromagnetic wave on an anisotropic two-layer diaphragm in a rectangular waveguide. The problems are reduced to boundary value problems for the system of Maxwell's equations. Analytical solutions of both diffraction problems are obtained.

Keywords: diffraction problem, electromagnetic wave, anisotropic material.

ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ: НА АНИЗОТРОПНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ДИАФРАГМЕ И АНИЗОТРОПНОЙ n-СЛОЙНОЙ ДИАФРАГМЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

ДЕРЕВЯНЧУК Екатерина Дмитриевна

кандидат физико-математических наук, доцент

ЛАЗАРЕВ Олег Андреевич

студент

Пензенский государственный университет

г. Пенза, Россия

Данная работа посвящена двум задачам дифракции: задаче дифракции электромагнитной волны на анизотропной трехслойной диафрагме и задаче дифракции электромагнитной волны на анизотропной n-слойной диафрагме в прямоугольном волноводе. Задачи сведены к краевым задачам для системы уравнений Максвелла. Получены аналитические решения обеих задач дифракции.

Ключевые слова: задача дифракции, электромагнитная волна, анизотропный материал.

Данная работа является продолжением работы Е.Д. Деревянчук, О.А. Лазарева «Задачи дифракции электромагнитной вол-

ны: на анизотропной однослойной диафрагме и анизотропной двухслойной диафрагме в прямоугольном волноводе» [1]. В отличие от