ДИНАМИКА ПРОНИКНОВЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОТОКА В СВЕРХПРОВОДНИКАХ СО СТЕПЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ХАМДАМОВ Бегали Исроилович
кандидат физико-математических наук, доцент
ГАППАРОВ Бехзод Нематиллаевич
старший преподаватель
Джизакский политехнический институт
г. Джизак, Узбекистан

В данной статье рассматривается задача о проникновении магнитного поля в высокотемпературный сверхпроводник второго рода, который находится в режиме вязкого течения потока во внешнем магнитном поле. Получены аналитические формулы для глубины и скорости проникновения магнитного поля в сверхпроводник в зависимости от значений параметра задачи, а именно, от показателя степени, характеризующего скорость проникновения вихрей в сверхпроводящее полупространство.

Ключевые слова: магнитное поле, скорость, проникновения, характеристика, степень, сверхпроводники, температура, механизм, энергия, движения.

Изучение динамики эволюции магнитного потока вглубь сверхпроводника с нелинейной вольтамперной характеристикой в режиме крипа потока является важной задачей технической сверхпроводимости. Математически задача исследования может быть сформулирована на основе системы нелинейных эволюционных уравнений для электромагнитного поля с учетом нелинейного соотношения между полем и током в сверхпроводнике [3; 4; 6; 7-9; 12-19]. Теоретические исследования закономерности проникновения магнитного потока в режиме крипа потока со степенной вольтамперной характеристикой и связанная с ним быстрая релаксация тока в сверхпроводниках были проведены в классических работах [12; 18]. Закономерности проникновения магнитного поля в режиме вязкого течения потока изучены в [4; 6; 13; 15]. Динамика проникновения магнитного потока исследована в [15] в предположении, что дифференциальное сопротивление не зависит от магнитного поля. Подробный анализ этих процессов в режиме крипа потока в случае с нарастающим с постоянной скоростью магнитным полем для сверхпроводников второго рода с различными типами вольтамперных характеристик проведен в [13].

В данной работе рассматривается диффузионная задача о проникновении магнитного потока в сверхпроводник с учетом нелинейной вольтамперной характеристики сверхпроводников, справедливой в области малых эклектических полей и в режиме крипа потока. Получено точное аналитическое решение, описывающее пространственную и временную эволюции проникновения магнитного и электрического полей и плотность тока. Определена скорость распространения фронта намагниченности при заданной средней скорости изменения по времени внешнего магнитного поля на границе образца.

Для моделирования процесса эволюции возмущений электромагнитного поля в пространстве и времени используется система уравнений макроскопической электродинамики [5]. Взаимосвязь между магнитной индукцией $\vec{B}$, электрическим полем $\vec{E}$ и плотностью транспортного тока $\vec{j}$ устанавливается уравнениями Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = 4\pi\vec{j}/c\,, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -(1/c)(d\vec{B}/dt)\,. \tag{2}$$

Движение вихревых нитей со скоростью v приводит к возникновению электрического поля

$$\vec{E} = v\vec{B}/c\,. \tag{3}$$

Согласно теории Андерсона [2; 1], термоактивационное движение вихрей может быть описано соотношением

$$v = v_0 \exp(-U / k_B T)\,, \qquad (4)$$

где v_0 – скорость вихрей при T = 0; U – энергия активации при тепловом движении вихрей, которая зависит от механизмов пиннинга; T – температура и k_B – постоянная Больцмана. Энергия активации $U = U(\vec{j}, \vec{B}, T)$ зависит от температуры T, индукции магнитного поля $\vec{B}$ и плотности тока $\vec{j}$. Для простого случая она может быть описана хорошо известной формулой Кима-Андерсона [2].

$$U(j) = U_0\left(1 - \frac{j}{j_c}\right), \qquad (5)$$

где U_0 – характерный масштаб энергии активации, $j_c = j_c(B)$ – критическая плотность тока. В режиме крипа потока активационная энергия U растет с ростом плотности тока по следующему закону [1]

$$U(j) = U_0 (j / j_c)^n\,, \qquad (6)$$

где показатель экспоненты n зависит от механизма пиннинга [20]. С учетом последнего равенства, скорость термоактивационного движения вихрей можно представить в виде

$$v = v_0 \left| j / j_c \right|^n. \qquad (7)$$

Тогда феноменологическое равенство для функции $\vec{E}(\vec{j})$ может быть выбрано в виде

$$\vec{E} = v_0 |B| \left|\vec{j} / j_c\right|^n \vec{j}\,. \qquad (8)$$

При n=1 последнее уравнение описывает режим вязкого течения потока. При достаточно больших значениях n последнее определяет критическое состояние Бина $j_c = j_c(B_e)$ [11]. Когда $1<n<\infty$, уравнение описывает режима крипа потока. Для зависимости $j_c(B)$ существуют различные модели и мы для простоты воспользуемся степенной моделью [10].

$$j_c(B) = j_0 (B_0 / B)^\gamma\,, \qquad (9)$$

где j_0 и B_0 – характеристические значения плотности тока и индукции магнитного поля; γ – безразмерный параметр, характеризующий пиннинг; $0<\gamma<1$. При γ = 0, последнее равенство сводится к модели Бина [5]. Другая возможная модель для зависимости $j_c(B)$ имеет экспоненциальную форму

$$j(B) = j_0 \exp(-B / B_0)^\gamma$$

где B_0 – параметр, связанный с пиннингом [9].

Сформулируем основные уравнения, описывающие динамику развития тепловых и электромагнитных возмущений для простого случая – сверхпроводящего плоского полубесконечного образца $x \geq 0$. Предполагаем, что внешнее магнитное поле $\vec{B} = (0, 0, B_e)$ направлено по оси z и скорость магнитного поля является постоянной $\dot{B}_e = const$. Согласно уравнению Максвелла (2), в образце имеется вихревое электрическое поле $\vec{E} = (0, E_e, 0)$. Здесь B_e – амплитуда внешнего магнитного поля, E_e – амплитуда фонового электрического поля. Из концепции критического состояния непосредственно следует параллельность плотности тока и электрического поля $\vec{j} \parallel \vec{E}$. Для такой геометрии пространственная и временная эволюции индукции магнитного поля $\vec{B}$ описываются следующим диффузионным уравнением

$$\frac{db}{dt} = \frac{d}{dt}\left[b^{\gamma n + 1} \left| \frac{db}{dt} \right|^{n-1} \frac{db}{dt} \right], \qquad (10)$$

где мы ввели следующие безразмерные параметры: $b = B / B_0$, $x_p = \mu_0 j_0 x / B_0$, $t = t / \tau_0$, $j = j / j_0$, $\varepsilon = E / v_0 j_0$, $B_0 = \mu_0 j_0 v_0 \tau$.

Запишем для рассматриваемой одномерной геометрии необходимые граничные и начальные условия относительно индукции магнитного поля. В эксперименте обычно реализуется линейное возрастание магнитного поля на границе сверхпроводника в некотором начальном интервале времени, а затем магнитное поле полагается постоянным. Представляет интерес и другие режимы возрастания внешнего магнитного поля. Ниже мы ограничимся исследованием краевой задачи со степенным граничным режимом

$$b(0, t) = b_0 t^\alpha\,. \qquad (11)$$

Возрастание поля по закону (11) происходит на конечном интервале времени, а затем оно стабилизируется, и таким образом

$$b(x_p, 0) = 0\,, \qquad (12)$$

где x_p положение фронта магнитного потока. Тогда задача (10) с начальным распределением

$$\int b(x, 0)\, dx = 1 \qquad (13)$$

моделирует эволюцию магнитного потока

в сверхпроводнике. Искомое распределение индукции магнитного поля будем отыскивать в классе автомодельных решений, используя групповые свойства дифференциального уравнения (10) с соответствующими граничными (11), (12) и начальным (13) условиями. Для решения задачи (10)-(13) будем использовать инварианты вида

$$b(x,t) = t^{\alpha} f(x/t^{\beta}). \qquad (14)$$

Здесь параметры α и β удовлетворяют соотношению $\alpha + 1 = \beta + \alpha(\gamma n + 1) + \alpha n + \beta n$.

Используя соотношение для закона сохранения потока типа (13), получим точное выражение для параметра $\alpha = \beta = 1/(2n + \gamma n + 1)$, которое предполагает существование решения типа

$$b(x,t) = t^{1/(2n+\gamma n+1)} f(z), \qquad (15)$$

где $z = xt^{1/(2n+\gamma n+1)}$.

Подставляя решение (15) в уравнение (10), получим следующее дифференциальное уравнение для новой функции $f(z)$

$$\frac{d}{dz}\left[f^{\gamma n+1} \left| \frac{df}{dz} \right|^{n} \right] + \frac{1}{2n+\gamma n+1} \frac{d}{dz}\left[z \frac{df}{dz} \right] = 0. \qquad (16)$$

Решение уравнения (16) должно удовлетворять следующим граничным условиям задачи

$$f(0,t)=1, \;\; f(z_0,\, t)=0. \qquad (17)$$

Таким образом, полученное решение описывает профиль распространения индукции магнитного поля в сверхпроводнике. Дальнейшее интегрирование уравнения (16) с учетом граничных условий (17) приводит к следующему решению задачи

$$f(z) = f(z_0)\left[1 - (z/z_0)^{(n+1)/n} \right]^{1/(\gamma+1)}, \qquad (18)$$

где

$$f(z_0) = \left[n \frac{\gamma+1}{n+1} \left(\frac{z_0^{n+1}}{2n+\gamma n+1} \right)^{1/n} \right]^{1/(\gamma+1)}.$$

Положение фронта индукции магнитного потока z_0 может быть найдено, подставляя решение (18) в равенство (13)

$$z_0^{(2n+\gamma n+1)/(\gamma+1)} = \left[\frac{\dfrac{n}{n+1} F\left(\dfrac{\gamma+2}{\gamma+1} + \dfrac{1}{2} \right)}{\Gamma\left(\dfrac{\gamma+2}{\gamma+1} \right) \Gamma\left(\dfrac{n}{n+1} \right)} \right] \left[n \frac{\gamma+1}{n+1} \left(\frac{1}{2n+\gamma n+1} \right)^{1/n} \right]^{1/(\gamma+1)}$$

Последнее уравнение в старых переменных имеет вид

$$b(x,t) = b_0 \left[1 - \left(\frac{x}{x_p} \right)^{(n+1)/n} \right]^{1/(\gamma+1)}, \qquad (19)$$

где

$$b_0(0,t) = b(x,t) = t^{-1/(2n+\gamma n+1)} \left[n \frac{\gamma+1}{n+1} \left(\frac{z_0^{n+1}}{2n+\gamma n+1} \right)^{1/n} \right]^{1/(\gamma+1)}$$

Положение фронта магнитного потока может быть представлено в виде $x_p = x_0 t^{-1/(2n+\gamma n+1)}$. Тогда нетрудно определить скорость фронта магнитного поля:

$$v_p \sim v_0 t^{-n(2+\gamma)/(2n+\gamma n+1)}. \qquad (20)$$

Как видно, скорость фронта магнитного потока уменьшается линейно с течением времени.

Таким образом, полученное решение (20) описывает проникновение магнитного потока в глубь сверхпроводника в интервале $0<x<x_p$ в режиме крипа потока со степенной вольтамперной характеристикой, определяемой соотношением (8).

Таким образом, мы изучали задачу о проникновении магнитного поля в высокотемпературный сверхпроводник второго рода, который находится в режиме крипа потока во внешнем магнитном поле. Показано, что магнитное поле на границе сверхпроводника возрастает с течением времени в режиме с обострением. Получено уравнение типа диффузии, которое описывает распределение магнитной индукции в режиме вязкого течения потока при проникновении магнитного потока вглубь сверхпроводника. Получены аналитические формулы для глубины и скорости проникновения магнитного поля в сверхпроводник в зависимости от значений параметров задачи, а именно от показателя степени n, характеризующего скорость проникновения вихрей в сверхпроводящее полупространство. Отличительной особенностью решений является их самоподобность, т. е. возникающие при крипе диссипативные магнитные структуры являются инвариантными относительно преобразований пространственных и временных масштабов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ
1. *Anderson P.W.* Phys. Rev. Lett. 309, 317. 1962.
2. *Anderson P.W., Kim Y.B.* Rev. Mod. Phys. 36, 3456. 1964.
3. *Aranson D.G., Vazquez J.L.* Phys. Rev. Lett. 72, 823. 1994.
4. *Bass F.* Physica C. 297, 269. 1998.
5. *Bean C.P.* Phys. Rev. Lett. 8, 250. 1962.
6. *Bryksin V.V., Dorogovstev S.N.* Physica C 215, 345. 1993.
7. *Gilchrist J.* Physica C. 30, 291. 1997.
8. *Gilchrist J., Van der Beek C.J.* Physica C. 27, 231. 1994.
9. *Holiastou M. et all.* Supercond. Sci. Technol. 11, 787. 1998.
10. *Irie F., Yamafuji K.* Phys. Soc. Jpn. 23, 255. 1967.
11. *Kes P.H. et all* Supercond. Sci. Technol., 1, 242. 1989.
12. *Koziol Z., Chatel E.P.* IEEE Trans. Magn. 30, 1169. 1994.
13. *Krasnyuk I.B.* Technical Physics, 52. 2007.
14. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Fluid Mechanics (Pergamon, Oxford). 1987.
15. *Meerovich V.* et all., Supercond. Sci. Technol. 9. 564. 1996.
16. *Samarskii A., Galaktionov V.A., Kurdjumov S.P. and A.S. Stepanenko* Peaking Regimes for Quasilinear Parabolic Equations, Nauka, Moskow. 1987.
17. *Shantsev D.V. et all* arXiv:cond-mat/0108049 v1. 2001.
18. *Vinokur V.V. et all* Phys. Rev. Lett. 67, 915. 1997.
19. *Wang W., Dong J.* Phys. Rev. B49, 698 1994.
20. *Zeldov E. et all* Phys. Rev. Lett. 62, 3093. 1989.

DYNAMICS OF PERFORMANCE OF MAGNETIC FLOW IN SUPERCONDUCTORS WITH DEGREE DISTRIBUTION OF VOLTAMPER CHARACTERISTICS

HAMDAMOV Begali Isroilovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
GAPPAROV Behzod Nematillaevich
Senior Lecturer
Jizzakh Polytechnic Institute
Jizzakh, Uzbekistan

Theoretical investigation of spatial and temporal evolution of the small thermal and electromagnetic perturbation in superconductors has been provided within the framework Bean's model. It has been considered a semiinfinite superconducting sample, placed in a parallel external magnetic field. Dynamics of magnetic flux penetration into superconductors with power-law voltage-current characteristics is studied.

Key words: magnetic field, speed, penetration, characteristic, degree, superconductors, temperature, mechanism, energy, motion.