

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ВОЛЫНСКАЯ Мария Геннадьевна

кандидат физико-математических наук, доцент

ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет им. академика

С.П. Королева»

г. Самара, Россия

Актуальность заявленной тематики данной научно-исследовательской работы определяется важностью решения задач с нелокальными интегральными условиями и необходимостью использования гиперболического уравнения для качественного разрешения задач подобного рода. Основными результатами данного научного исследования следует считать доказательство практической разрешимости задач построения гиперболического уравнения с однозначно заданными локальными условиями, а также получение убедительного доказательства важности исследования нелокальных краевых и начально-краевых задач с точки зрения их практического применения в вычислительной и прикладной математике. Результаты данной научно-исследовательской работы имеют важное значение для разработчиков современных технических систем, при расчётах основных параметров работы которых требуется использование гиперболических уравнений с нелокальными интегральными условиями, что обеспечивает высокое качество теоретических расчетов и определение основных направлений проектирования подобных систем и их дальнейшей эксплуатации.

Ключевые слова: нелокальная задача, уравнение в частных производных, гиперболическое уравнение, интегральные условия.

В данной статье рассмотрена задача для гиперболического уравнения второго порядка с нелокальным интегральным условием второго рода. Нелокальными интегральными задачами в литературе принято называть задачи, в которых задаются условия, связывающие значения искомого решения и (или) его производных в различных точках границы, либо же в точках границы и каких-либо внутренних точках. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями, которые являются обобщением нелокальных условий, заданных в виде линейной комбинации [1]. Подобные условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Нелокальные задачи с интегральными условиями ставились и изучались как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений с частными производными. Задачи такого типа часто возникают при математическом моделировании различных физических, химических, биологических или экологических явлений, если вместо классических кра-

евых условий задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри неё. Подобные ситуации имеют место при изучении большого круга явлений в физике плазмы, биологии, демографии и других технологических процессах [2]. Нелокальные задачи имеют большую практическую значимость при решении задач распространения тепла, влагопереноса в пористых средах и механике твердого тела, так как позволяют управлять напряженно-деформированным состоянием. В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными, особый интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Такие задачи служат удобным способом описания условий на искомое решение в тех случаях, когда невозможно непосредственно измерение каких-либо физических величин на границе области, но известно их усредненное значение внутри [3].

Практическое разрешение задачи для гиперболического уравнения с нелокальным

интегральным условием имеет большое значение при проведении расчётов в рамках работ по проектированию новейших образцов технических устройств, используемых в различных областях экономики и промышленности. Развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными способствует прогрессу в рассматриваемой области, поскольку открывает широкие возможности для качественного разрешения практических задач в области расчетов основных проектных характеристик, имеющих существенное значение при проектировании сложных с технической точки зрения объектов. Нелокальные задачи представляют существенный интерес для математиков в целом и в связи с наличием возможности их приложения к исследованиям процессов различной сложности в смежных науках, составляющих основу современного естествознания.

Рассмотрим в прямоугольной области $Q=\{(x,t): 0<x<1, 0<t<T\}$ задачу для гиперболического уравнения:

$$u_{tt}-(a(x,t)u_x)_x + c(t)u=f(x,t) \quad (1)$$

с начальными граничными условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad (2)$$

$$u_x(0,t)=0 \quad (3)$$

и нелокальным интегральным условием:

где: $\varphi(x)$; $\psi(x)$; $K(x) \in C^1[0,1]$; $c(t) \in C[0,T]$; $a(x,t) \in C[0,1]$; $f(x,y)$; $K(1)=0$.

Для исследования поставленной задачи используем метод вспомогательных функций. Рассмотрим функцию:

(5)

Тогда, с учетом (1-4), получаем вспомогательную задачу для введенной функции:

$$v_{tt}-(a(x,t)v_x)_x + c(t)v=F(x,t) \quad (6)$$

$$v(x,0)=\Phi(x), \quad v_t(x,0)=\Psi(x), \quad (7)$$

$$v_x(0,t)=0, \quad v(1,t)=0. \quad (8)$$

Получено интегральное тождество, с помощью которого определяется обобщенное решение задачи (5-8). Доказано, что обобщенное решение задачи (5-8) существует и единственно. Следовательно, задача (1-4) однозначно разрешима. Очевидно, что исследование нелокальных краевых, начально-краевых задач, разработка и анализ методов их численного решения — актуальное, прак-

тически и теоретически весьма интересное, важное направление математики, прикладной и вычислительной математики. Следует отметить, что нелокальными принято называть такие условия, при которых конкретные соотношения, предназначенные для связывания искомого параметра в области Ω , имеют место на определенном внутреннем многообразии, а также в конкретных точках в границах Ω . В том случае, если в данного рода соотношениях нет значений необходимого решения в интервале, заданных условиями задачи параметров, данные соотношения относятся к категории нелокальных условий первого рода. В том случае, если величина искомого решения либо его производных элементов на границе области в соотношения включены, то подобные соотношения следует считать нелокальными условиями второго рода.

Ряд уравнений невозможно подогнать под представленную классификацию (рисунок 1), поскольку они содержат в себе признаки всех вышеперечисленных типов. В прикладной математике подобные уравнения принято называть гибридными. Задачи с нелокальными интегральными условиями успешно решаются с применением уравнений любого из представленных выше типов, причём качество решения не зависит от типа конкретного уравнения, а определяется исключительно характеристиками данных условий. Задачи данного рода, нелокальные краевые или начально-краевые решаются с применением методов прикладной математики и учётом заданных граничных условий, которые могут быть описаны при помощи функций дифференциального уравнения. При составлении дифференциальных уравнений первого и более высокого порядков могут быть использованы функции нескольких переменных, описывающие различные процессы, протекающие в различных областях естественных наук. В частности, процессы теплопроводности в физике могут быть описаны с использованием гиперболического уравнения, содержащего нелокальные интегральные условия, описывающие динамику конкретной функции или её поведение на границах заданной области.

В частном случае конечным решением

дифференциального гиперболического уравнения с интегральным нелокальным условием выступает функция, которая придаёт тождественность данному уравнению. В более общих случаях решением уравнений данного рода следует считать множество функций, которые придают тождественность данному уравнению при подстановке в него. Если изначально задаются дополнительные условия, роль которых в исследуемом случае следует отводить нелокальным интегральным задачам, решением гиперболического уравнения в частных производных следует считать функцию, удовлетворяющую данной нелокальной задаче. Гиперболические дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков включают в себя несколько производных, описывающих параметры процессов, протекающих в различных физических средах, что имеет существенно значение при проведении алгебраических расчетов параметров данных сред. При изменении данных параметров имеет место изменение нелокальной интегральной задачи в целом и условий решения уравнения. Разнообразие практических задач, которые могут быть успешно решены посредством применения гиперболических уравнений с интегральными нелокальными условиями обуславливает их важность в прикладной математике для проведения расчетов параметров различных сред и происходящих в них процессов. В данном контексте, метод вспомогательных функций применим для получения качественных решений данного уравнения с учётом параметров внешней среды.

Вспомогательные функции описывают различные процессы, происходящие в средах, для описания которых, в свою очередь используются гиперболические уравнения. Метод вспомогательных функций позволяет получать интегральные тождества, с помощью которых определяются обобщённые решения поставленной задачи. Конкретные виды гиперболических уравнений предполагают использование разных методов их решения, с учётом имеющихся нелокальных интегральных задач. Особенно это касается замкнутых систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы, происходя-

щие в ограниченных средах в короткие промежутки времени. В подобных условиях необходимо дополнение поставленных нелокальных интегральных условий дискретными представлениями начальных условий и условий, характерных для границ исследуемых сред. В целом алгоритм практического разрешения данной задачи не представляет существенной сложности, поскольку предполагает использование ограниченного числа уравнений с заданным числом неизвестных. В данном случае количество неизвестных величин будет приведено в соответствие с числом уравнений, описывающих состояние среды, что будет свидетельствовать о полном завершении процесса формирования схемы разности искомых значений. Начальные граничные условия гиперболического уравнения определяют состояние на границах исследуемой среды, в то время как интегральные локальные условия выступают отражением дополнительных условий, возникающих в конкретной исследуемой среде. Подобные уравнения широко используются в различных разделах физики и химии, в частности при описании колебательных процессов, протекающих в замкнутых пространствах и сильно ограниченных по времени. Гиперболические уравнения с нелокальными интегральными условиями описывают процессы, протекающие в электромагнитном поле, при резком изменении его параметров, а также при наличии внешних возмущений, способных дестабилизировать параметры данного поля. Принципы теории электромагнитного поля эффективно и точно описываются с использованием дифференциальных гиперболических уравнений первого и более высоких порядков, причём в каждом конкретном случае могут использоваться различные уравнения, описывающие различные процессы, протекающие в разных точках электромагнитного поля. В каждом конкретном случае гиперболические уравнения с нелокальными интегральными условиями могут различаться по принципам построения и типы переменных данного рода уравнений.

Практические задачи с использованием гиперболических уравнений с нелокальными интегральными условиями встречаются в

различных сферах современной науки и техники, что предопределяет их важность в прикладной математике в целом и необходимость глубокого и всестороннего изучения. Проведение исследований основных задач, разрешаемых на практике с использованием уравнений данного рода, разработка и анализ методов их решения в численном выражении, является актуальным, практически и теоретически крайне перспективным, важным

направлением современной математики, как прикладной, так и вычислительной. Дальнейшие исследования в данном направлении только поспособствуют углублённому изучению основных аспектов практического применения уравнений данного рода при решении широкого спектра задач, встречающихся в различных областях науки и техники, где данные уравнения применяются для решения важных практических и теоретических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alexeev B. Nonlocal astrophysics. – Oxford: Elsevier, 2017.
2. Chen W., Kim S. Bubble-tower solutions to asymptotically critical nonlocal elliptic equations on conformal infinities // Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 265, No. 10. – P. 5115-5155.
3. Camilli F., Maio R.D., Tosin A. Measure-valued solutions to nonlocal transport equations on networks // Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 264, No. 12. – P. 7213-7241.
4. Di H., Shang Y. Global well-posedness for a nonlocal semilinear pseudo-parabolic equation with conical degeneration // Journal of Differential Equations. – 2020. – Vol. 269, No. 5. – P. 4566-4597.
5. Coron J-M., Hu L., Olive G., Shang P. Boundary stabilization in finite time of one-dimensional linear hyperbolic balance laws with coefficients depending on time and space // Journal of Differential Equations. – 2021. – No. 271. – P. 1109-1170.

ON THE SOLVABILITY OF A NONLOCAL PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION

VOLYNSKAYA Maria Gennadievna

PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Academician S.P. Korolev's Samara National Research University
Samara, Russia

The relevance of the declared topic of this research work is determined by the importance of solving problems with non-local integral conditions and the need to use a hyperbolic equation for a qualitative solution of problems of this kind. The main results of this scientific research should be considered the proof of the practical solvability of the problems of constructing a hyperbolic equation with uniquely given local conditions, as well as obtaining convincing evidence of the importance of studying non-local boundary and initial boundary value problems from the point of view of their practical application in computational and applied mathematics. The results of this research work are of great importance for the developers of modern technical systems, the calculation of the main parameters of which requires the use of hyperbolic equations with non-local integral conditions, which ensures the high quality of theoretical calculations and the determination of the main directions for the design of such systems and their further operation.

Key words: nonlocal problem, partial differential equation, hyperbolic equation, integral conditions.
