МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОЗДАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК С УЧЁТОМ ПОТОКОВ В СЕТЯХ С ОДНИМ ИСТОКОМ И ОДНИМ СТОКОМ

ДЕРЕВЯНЧУК Екатерина Дмитриевна
кандидат физико-математических наук, доцент
ШИРОКОВ Андрей Алексеевич
студент
Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия

В данной статье предложена методика решения задачи создания оптимального плана перевозок с учётом потоков в сетях с одним истоком и одним стоком. В качестве численного метода выбран алгоритм Форда-Фалкерсона, предложена его модификация. Использование модифицированного алгоритма способствует увеличению пропускной способности сети при минимальных затратах. Результаты работы могут быть применены при выборе оптимального решения многих задач логистики.
Ключевые слова: алгоритм Форда-Фалкерсона, поток в сетях, сеть с одним истоком и одним стоком, максимальный поток.

Оптимизация транспортных планов в сетевых структурах является одной из основных задач, стоящих перед современными транспортно-логистическими системами. Эффективное решение этой проблемы требует учета многих факторов, что особенно важно в энергетических сетях, таких как газовые сети, где надежность и эффективность транспортировки критически важны для энергоснабжения регионов.

Учитывая глобализацию и растущие потребности в энергии, обеспечение надежной и экономически эффективной транспортировки газа становится ключевой задачей. Газовые сети представляют собой сложные системы, состоящие из множества узлов (населенных пунктов, распределительных станций и трубопроводов). Управление газовыми потоками в таких сетях требует использования математических методов и алгоритмов, учитывающих все возможные ограничения и условия.

Теория графов предоставляет мощные инструменты для моделирования и анализа сетевых структур [1-4]. В графах транспортные сети могут быть представлены узлами и ребрами, что позволяет визуализировать транспортные сети. Одной из ключевых задач теории графов является нахождение максимального потока в сети, что имеет прямое применение для оптимизации транспортных потоков. Алгоритм Форда-Фалкерсона является одним из фундаментальных методов теории графов для решения задач о максимальном потоке. Этот алгоритм эффективно находит максимальный поток в сети, используя методы поиска в ширину или глубину для построения увеличивающихся путей. Его преимущества заключаются в относительной простоте и широком спектре практических применений, включая регулирование расхода в газовых сетях.

Применение алгоритма Форда-Фалкерсона к задачам управления газовыми сетями позволяет повысить пропускную способность системы и минимизировать транспортные расходы. Это важно в условиях ограниченных ресурсов и необходимости обеспечения надежного энергоснабжения. Модели и алгоритмы, разработанные в рамках данного исследования, могут быть использованы для оптимизации существующих газовых сетей и проектирования новых систем с учетом максимальной эффективности и надежности.

Настоящее исследование открывает перспективы для дальнейших исследований, включая интеграцию более сложных и адаптивных алгоритмов. Таким образом, применение алгоритма Форда-Фалкерсона для оптимизации планов транспортировки в сетях является эффективным подходом, который может значительно улучшить транспортировку газа.

Задача оптимизации транспортировки природных ресурсов сводится к задаче нахождения максимального потока в графе.

Рассмотрим задачу о максимальном потоке. Предположим, что через некоторую логистическую сеть пропускается поток материальных ресурсов. Например, это может быть газотранспортная система, которая соединяет между собой поставщика и потребителя.

Пусть задан граф G(X, A) (рисунок 1), где X – количество вершин, а A – множество рёбер. Данный граф имеет 7 вершин.

Постановка задачи: необходимо найти максимально возможный объем газа, который можно передать от поставщика к потребителю в единицу времени.

В теории графов поставленную задачу можно представить в виде взвешенного ориентированного графа, где в качестве вершин будут выступать станции, а в качестве дуг – трубы, соединяющие станции. При этом каждая труба, соединяющая две станции, может иметь разный диаметр, который и будет весом дуги в графе.

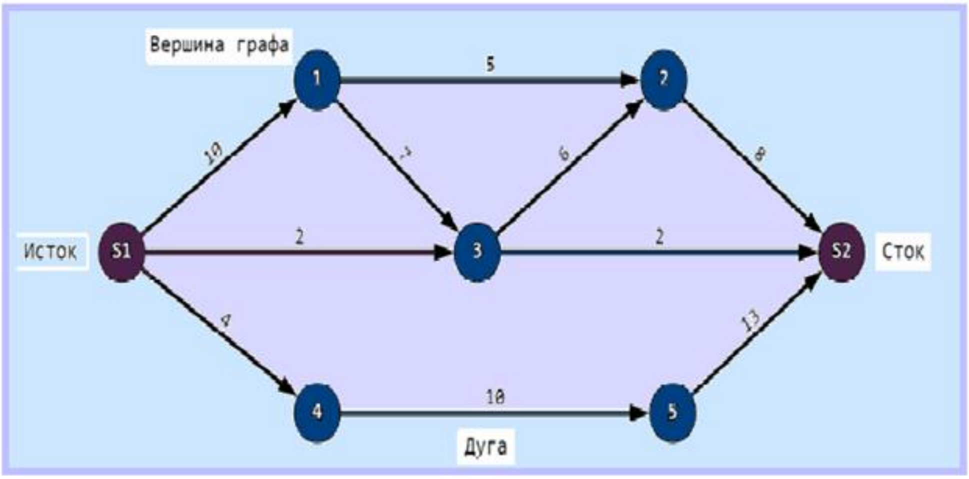

Рисунок 1. **Граф задачи**

Рассмотрим более подробно необходимые определения из теории графов для данной задачи. Газораспределительные станции представляют собой вершины этого графа, которые соединяются между собой дугами. Граф является взвешенным, так как каждая дуга имеет свой вес или пропускную способность. А также граф является ориентированным, так как каждая дуга имеет направление, по которому осуществляется движение потока. Вершина S1, то есть поставщик газа, называется истоком. А вершина S2, то есть потребитель, называется стоком.

Предположим, что граф имеет ровно один исток и один сток. Если это условие не выполняется, тогда граф все равно следует привести к данному виду. Важно отметить, что суммарный поток, который исходит по всем дугам из истока, всегда будет равен суммарному потоку, который вошел в сток.

Постановка задачи для графа с одним истоком и одним стоком: *Необходимо найти максимально возможный объем газа, который можно передать от поставщика к потребителю в единицу времени*

Математическая постановка задачи: *найти максимальный поток в графе с 1 истоком и 1 стоком.*

Рассмотрим алгоритм Форда-Фалкерсона для нахождения максимального потока, который можно пропустить из вершины S1 в S2 в графе G (рисунок 2).

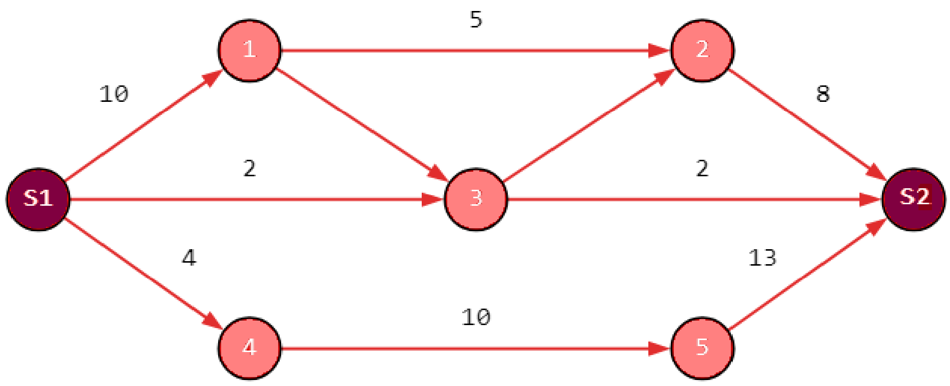

Рисунок 2. **Исходный граф G**

Этап 1. На первом этапе определяют произвольный ориентированный путь от истока к стоку и вычисляют максимальный поток газа, который можно по нему пропустить. Для этого оценивают пропускные способности каждой дуги на пути и выбирают наименьшее значение. Если одна из дуг имеет низкую пропускную способность, это ограничивает весь путь.

Этап 2. На втором этапе пропускные способности дуг уменьшаются на величину пропущенного потока. Это позволяет определить, сколько потока (объема) газа еще можно пропустить по этим дугам.

Этапы 1 и 2 повторяются до тех пор, пока возможно найти новый ориентированный путь от истока к стоку и пропустить по нему хотя бы небольшой поток газа.

Рассмотрим задачу на примере. Определим произвольный ориентированный путь, соединяющий вершины S1 и S2 графа G (рисунок 3). Пусть это будет: S1-1-3-2-S2.

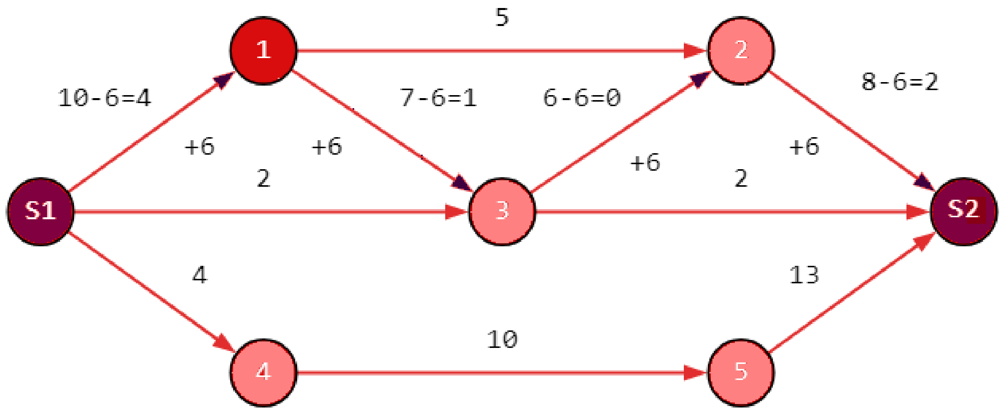

Рисунок 3. **Путь S1-1-3-2-S2 в графе G**

Пропускные способности дуг на этом пути: (10, 7, 6, 8). Минимальная пропускная способность равна 6, что и является максимальным потоком для данного пути. Обозначим его на графе, сделав пометки над дугами.

Одновременно уменьшим пропускные способности дуг на величину пропущенного потока, как показано на рисунке.

Следующий ориентированный путь: S1-4-5-S2 (рисунок 4).

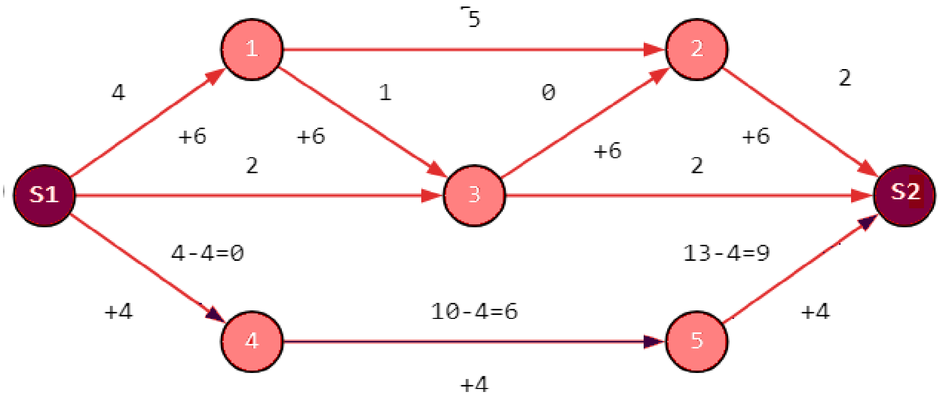

Рисунок 4. **Путь S1-4-5-S2 в графе G**

Пропускные способности дуг: (4, 10, 13). Минимальная пропускная способность – 4. Обозначим поток на графе и уменьшим пропускные способности дуг.

Далее рассмотрим путь: S1-1-2-S2 (рисунок 5).

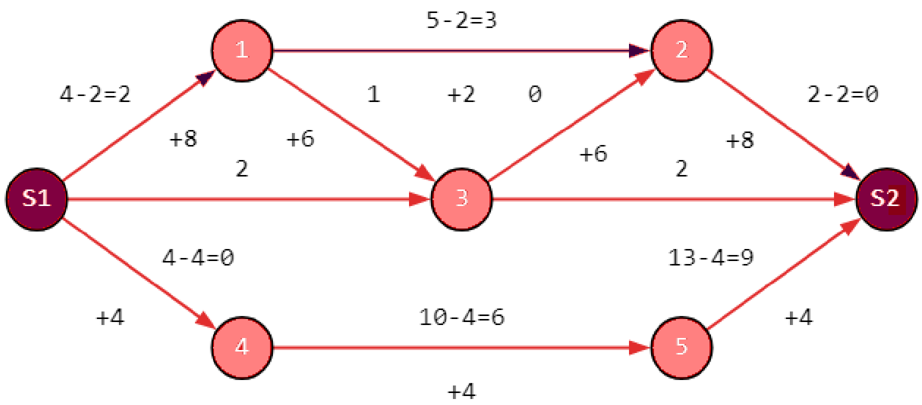

Рисунок 5. **Путь S1-1-2-S2 в графе G**

Пропускные способности дуг: (4, 5, 2). Пропустим поток равный 2 и отметим его на графе. Одновременно уменьшим пропускные способности дуг на величину пропущенного потока, как показано на рисунке.

И наконец, последний возможный путь: S1-3-S2, с пропускными способностями дуг (2, 2). Пропустим поток мощностью 2 и отметим его на графе (рисунок 6).

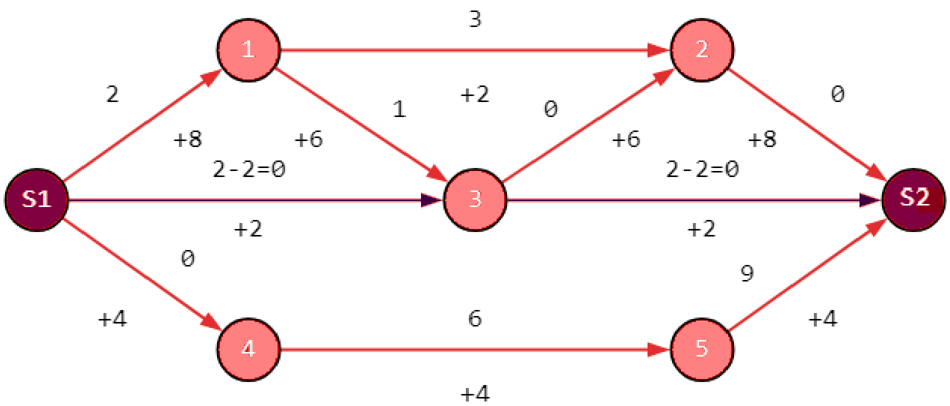

Рисунок 6. **Путь S1-3-S2 в графе G**

Теперь невозможно найти новый путь для пропуска дополнительного потока, поэтому алгоритм Форда-Фалкерсона завершает работу (рисунок 7).

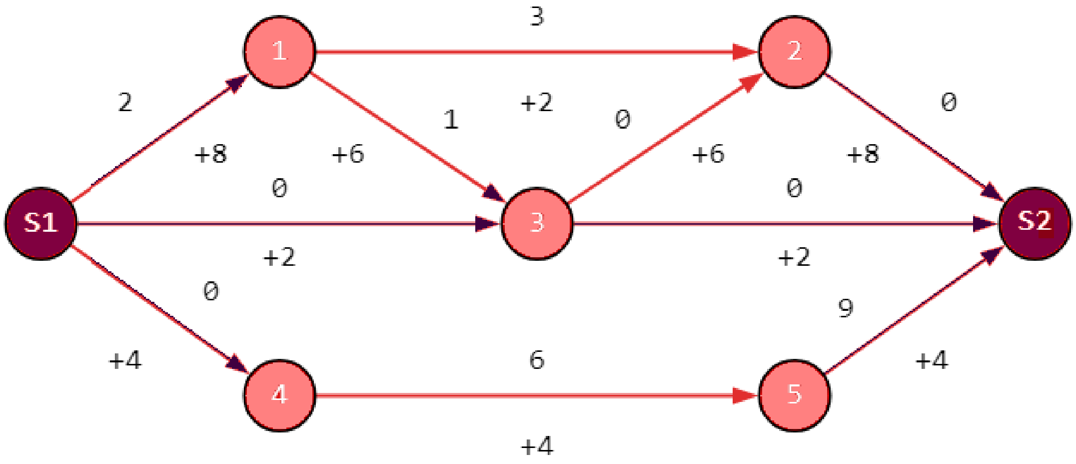

Рисунок 7. **Решение задачи. Проверка**

Сложим потоки, прошедшие через сеть: 6+4+2+2=14. Это и есть максимальный возможный поток. Величина максимального потока равна сумме потоков, выходящих из вершины-истока S1: 8+2+4=14. Она также равна сумме потоков, входящих в вершину-сток S2: 8+2+4=14.

Таким образом, задача решена с помощью классического метода решения подобных задач – алгоритма Форда-Фалкерсона. Но данное решение не задействует все имеющиеся возможности сети. Так, например, если увеличить величину потока дуги 2-S2 на 2, можно создать условия для работы сети на полную мощность. Анализ графа и решение задачи о максимальном потоке позволяет увидеть различие между имеющимися ресурсами сети и задействованными. Как правило, максимальный поток сети меньше, чем имеющиеся ресурсы. Для улучшения работы сети была предложена в работе [3] модификация метода Форда-Фалкерсона. Рассмотрим его более детально.

Алгоритм модификации Форда-Фалкерсона

1) Задача будет решаться при условии, что выполнена топологическая сортировка (X_i, X_j) вершин[1].

2) Необходимо определить сумму весов входящих и исходящих дуг по матрице весов:

	X_1	X_2	…	X_n
X_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
X_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}
…	…	…	…	
X_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}

[1]**Топологическая сортировка вершин** – это сортировка вершин ориентированного графа, такая что, для каждого ориентированного ребра (u, v) из вершины u в вершину v, номер вершины u будет идти раньше чем номер вершины v в отсортированном результате.

3) Элементы столбца X_j матрицы весов определяют веса всех входящих дуг. Тогда сумма элементов столбца X_j определяет сумму весов всех входящих дуг вершин X_j. Элементы i-ой строки матрицы определяют веса исходящих дуг из вершины X_i .

Для каждой вершины $X_i (i = \overline{1,n})$ вычислим по матрице весов сумму j-го столбца

и i-ой строки. Сравним сумму элементов i-ой строки R_i и сумму элементов i -го столбца C_i соответственно:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \qquad C_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ji}$$

Если $R_i > C_i$, то значение номера вершины согласно алгоритму в памяти компьютера не хранится, и далее осуществляется переход на следующий шаг.

Если $R_i \neq C_i$, то запоминается номер вершины, при этом если $R_i < C_i$, то значение R_i необходимо увеличить на $\Delta_i = C_i - R_i$.

Случай, когда $R_i > C_i$ возможен, если, например, до топологической сортировки была удалена дуга или, если при формировании графа был «заложен» запас производительности для дополнительного подключения [3].

Алгоритм завершен, и на практике это означает, что задействованы все имеющиеся ресурсы сети.

Таким образом, в данной статье была представлена методика решения задачи по оптимизации плана перевозок с учетом потоков в сетях. В результате проведенного теоретического и практического анализа были достигнуты следующие основные выводы и результаты:

– рассмотрены ключевые понятия и методы теории графов, применимые к моделированию газовых сетей;

– алгоритм Форда-Фалкерсона проиллюстрирован на решении конкретной задачи;

– предложена методика улучшения работы сети в виде модификации алгоритма Форда-Фалкерсона с помощью анализа сети.

Результаты исследования открывают возможности для дальнейших исследований и применения методов теории графов в управлении логистическими операциями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волченская Т.В., Князьков В.С.* Компьютерная математика: Часть 2 Теория графов. – Пенза, 2002 . – 101 с.

2. *Деревянчук Е.Д.* Методика построения алгоритмов для практических задач с применением теории графов // Научный потенциал. – 2024. – № 2(45). – С. 37-44.

3. *Деревянчук О.Д.* Транспортировка больных из одного госпиталя в другой с остановками во временных пунктах размещения // Общество. – 2024. – № 1(32). Часть 2. – С. 19-23.

4. *Домнин Л.Н.* Элементы теории графов. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. –144 с.

METHODOLOGY FOR SOLVING THE PROBLEM OF CREATING AN OPTIMAL TRANSPORTATION PLAN TAKING INTO ACCOUNT FLOWS IN NETWORKS WITH ONE SOURCE AND ONE DRAIN

DEREVYANCHUK Ekaterina Dmitrievna
Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor
SHIROKOV Andrey Alekseevich
Student
Penza State University
Penza, Russia

This article proposes a method for solving the problem of creating an optimal transportation plan, taking into account flows in networks with one source and one drain. It is chosen the Ford-Fulkerson algorithm as a numerical method, and its modification is proposed. The use of a modified algorithm helps to increase network bandwidth at minimal cost. The results of the work can be applied in choosing the optimal solution for many logistics problems.
Keywords: Ford-Fulkerson algorithm, flow in networks, network with one source and one drain, maximum flow.