ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТА В ДОРОЖНОЙ СЕТИ С УЧЕТОМ ВЕЕРНОЙ ПЛАНИРОВКИ ГОРОДА

ДЕРЕВЯНЧУК Екатерина Дмитриевна
кандидат физико-математических наук, доцент
МАШИН Олег Алексеевич
студент
Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия

Данная работа посвящена задаче оптимизации маршрута в дорожной сети с учетом веерной планировки города. Для решения данной задачи применяется аппарат теории графов. Задача сводится к поиску кратчайшего пути из одной вершины графа в другую вершину с учетом вида графа. Предложена модификация алгоритма Дейкстры, которая позволяет учитывать веерную планировку города.
Ключевые слова: модификация алгоритма Дейкстры, теория графов, веерная планировка города, кратчайший путь.

Постановка задачи. В зависимости от планировки города оптимальный маршрут от одной точки города до другой может быть проложен по разным дорогам. Время расчета может быть на порядок больше, если не учитывать планировку города. Данная работа посвящена исследованию задачи оптимизации маршрута в дорожной сети с учетом ***веерной*** планировки города и является продолжением работы [1-2].

Постановка задачи: требуется найти оптимальный маршрут из одной точки города до другой с учетом ***веерной*** планировки города.

Математическая постановка задачи:

1) найти кратчайший путь из одной вершины графа до другой.

2) предложить варианты оптимизации алгоритма с учетом ***веерной*** планировки города.

Основные понятия. Под **графом** $G_1(X, A)$ понимается пара множеств, первое из которых множество X представляет собой множество вершин, второе множество A – множество ребер, соединяющих две вершины (рисунок 1) [3].

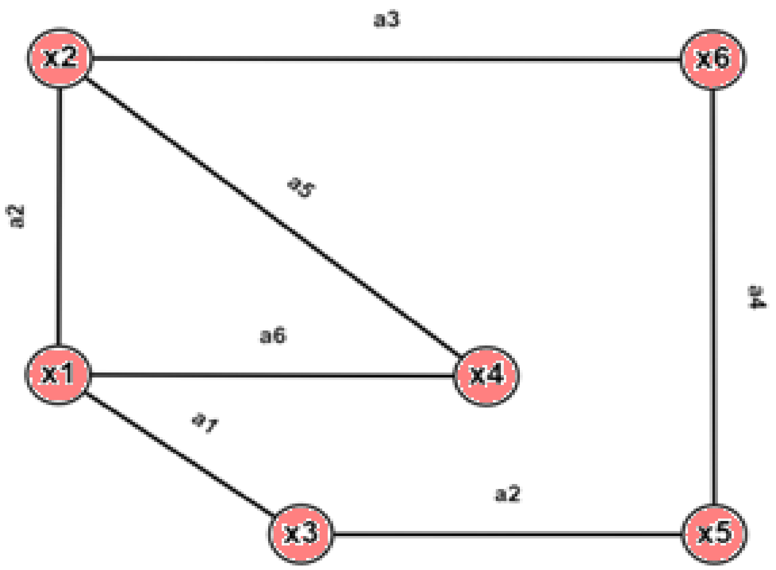


Рисунок 1. **Граф $G_1(X, A)$**

В настоящее время, с точки зрения геометрического начертания, улично-дорожные сети делятся на следующие схемы: прямоугольная, прямоугольно-диагональная, свободная, радиальная, радиально-кольцевая, веерная, треугольная и комбинированная [1]. Разновидностью радиально-кольцевой схемы является веерная планировка города. Она реализована в г. Костроме (рисунки 2-3).

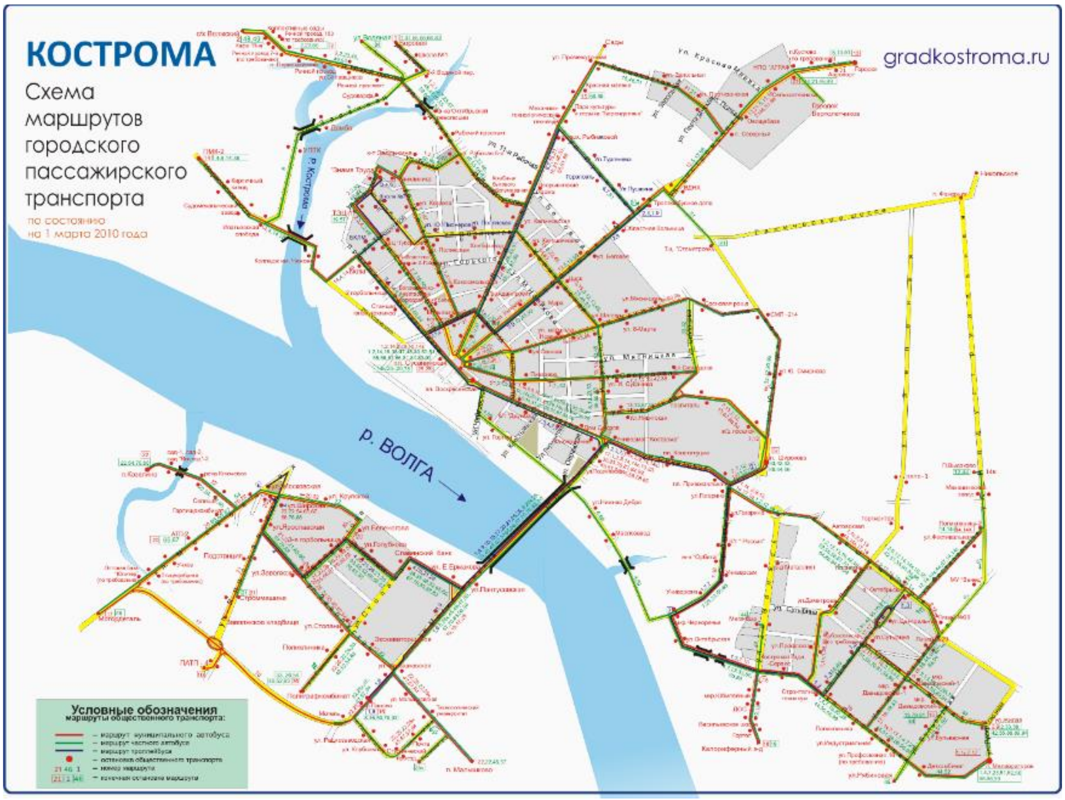


Рисунок 2. **Веерная планировка в г. Костроме**

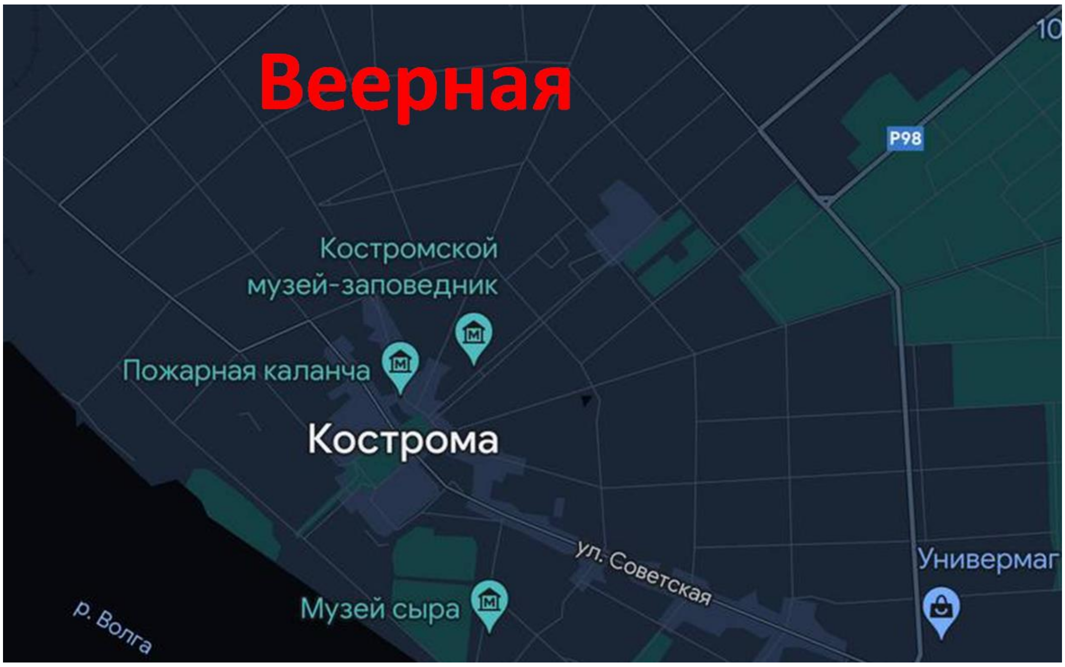
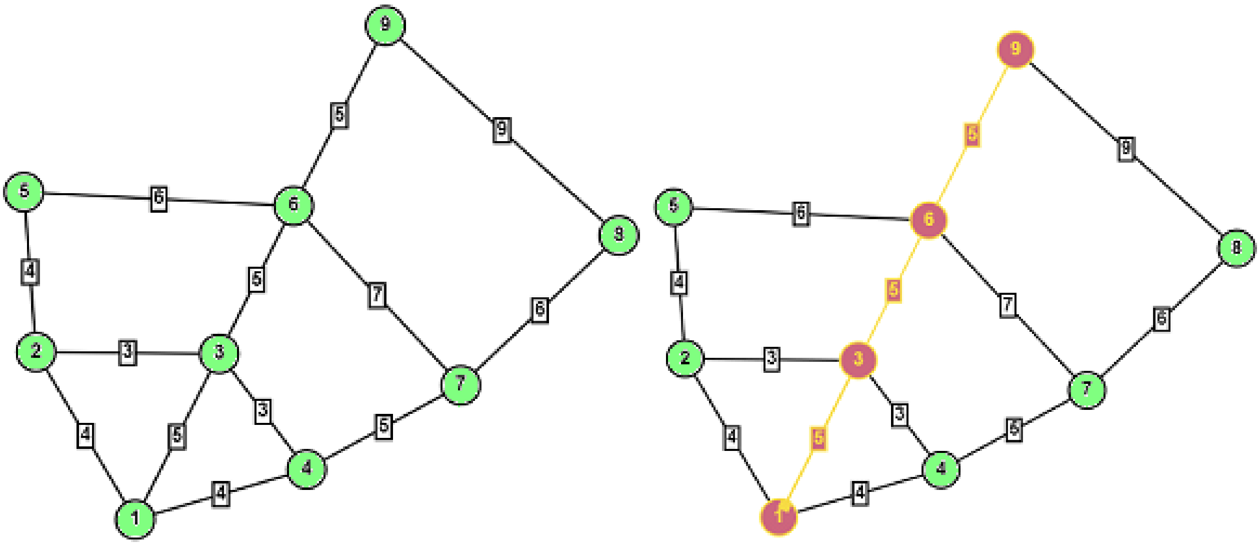


Рисунок 3. **Планировка части города Костромы. Модификация алгоритма Дейкстры**

Пусть задан граф, как показано на рисунке 4а, который представляет собой аналог веерной планировки города.

<u>Требуется</u> найти кратчайшее расстояние от вершины X_1 до вершины X_9. Построить дерево решения.



(а) (б)

Рисунок 4. **Пример веерной планировки (а). Кратчайший путь (б)**

<u>Решение</u> представлено в таблице 1. Кратчайший путь от вершины X_1 до вершины X_9 показан на рисунке 4б.

Таблица 1

РАСЧЕТ КРАТЧАЙШЕГО РАССТОЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА ДЕЙКСТРЫ

Вершины	№ итерации								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
X_1									
X_2	∞								
X_3	∞	*5X₁*	*5X1*						
X_4	∞	*4X1*							
X_5	∞	∞	*8X2*	*8X2*					
X_6	∞	∞	∞	∞	*10X3*	*10X3*			
X_7	∞	∞	∞	*9X4*	*9X4*				
X_8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	*15X7*		
X_9	∞	∞	∞	∞	∞	∞		*15X6*	

<u>Ответ:</u> Кратчайший путь от вершины X_1 до вершины X_9 равен 15. Дерево решения – это ветвь, отмеченная на рисунке 4б и состоящая из вершин 1, 3, 6, 9.

Для веерной планировки можно предложить следующий алгоритм оптимизации:

1) Вводим данные: X – номер вершины. Номер исходной вершины считаем нулем. Нумерация вершин ведется слева-направо. Следовательно, получаются ветви. Для каждой ветви можно составить арифметическую прогрессию:

а) $0 \to 1 \to 4 \to 7 \to ... \to 1 + (n-1) \cdot 3.$

б) $0 \to 2 \to 5 \to 8 \to ... \to 2 + (n-1) \cdot 3.$

в) $0 \to 3 \to 6 \to 9 \to ... \to 3n.$

2) Для того, чтобы определить принадлежность заданной вершины к одной из 3-х ветвей необходимо проверить следующие условия:

Для 1 ветви: если $\frac{x-1}{3}$ делится нацело, т. е. если остаток от деления равен нулю, то X принадлежит первой ветви.

Для 2 ветви: если $\frac{x-2}{3}$ делится нацело, т. е. если остаток от деления равен нулю, то X принадлежит второй ветви.

Для 3 ветви: если $\frac{x}{3}$ делится нацело, т. е. если остаток от деления равен нулю, то X принадлежит третьей ветви.

3) В общем виде граф может быть задан матрицей смежности[1] и весовой матрицей[2] [3]. Тогда из матрицы смежности и весовой матрицы выбираем строки и столбцы с индексом арифметической прогрессии выбранной ветви и суммируем их.

Проиллюстрируем алгоритм на следующем примере.

Пример 1. Пусть пользователю необходимо рассчитать кратчайший путь от вершины X_0 до вершины X_{14}.

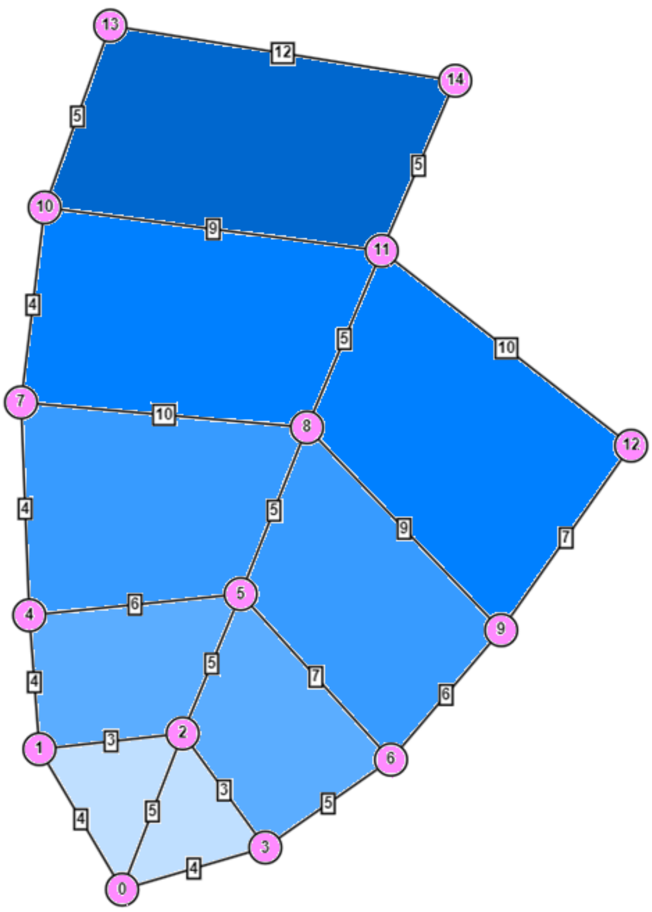


Рисунок 5. **Пример веерной планировки с тремя ветвями**

[1]Матрица смежности A – это матрица размера nxn, где n-количество вершин графа, элемент A_{ij} =1, если существует ребро от вершины X_i до вершины X_j, иначе A_{ij} = 0.

[2]Весовая матрица B – это матрица размера nxn, где n-количество вершин графа, элемент B_{ij} которой равен любому положительному числу, которое соответствует расстоянию от вершины X_i до вершины X_j.

Решение

1. Проверим принадлежность ветви.

а) $\frac{14-1}{3}=\frac{13}{3}\notin\square\Rightarrow$ не принадлежит первой ветви.

б) $\frac{14-2}{3}=\frac{12}{3}=4\in\square\Rightarrow$ принадлежит 2 ветви, т. е. имеем путь из вершины 0 в вер\\шину 14: $0\rightarrow2\rightarrow5\rightarrow8\rightarrow11\rightarrow14$.

2. Составляем матрицу смежности (рисунок 6).

3. Так как $X=14$ принадлежит второй ветви, то из арифметической прогрессии выбираем элементы, принадлежащие этой ветви: $a_{0,2}=2,\ a_{2,5}=5,\ a_{5,8}=8,\ a_{8,11}=11,\ a_{11,14}=14$ и складываем их веса.

$$A=\begin{array}{c|ccccccccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Рисунок 6. **Матрица смежности**

Составим матрицу весов для второй ветви (рисунок 7).

$$a=\begin{array}{c|cccccc}
 & a_0 & a_2 & a_5 & a_8 & a_{11} & a_{14}\\
a_0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_2 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0\\
a_5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0\\
a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0\\
a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\\
a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Рисунок 7. **Матрица весов**

Складываем элементы диагонали и получаем оптимальный кратчайший путь от вершины X_0 до вершины X_{14}, который равен 25.

Пример 2. Допустим, что пользователю необходимо рассчитать кратчайший путь от 0 до 12 вершины для того же графа (рисунок 5).

Решение

1. Проверим принадлежность ветви.

а) $\frac{12-1}{3}=\frac{11}{3}\notin\mathbb{N}\Rightarrow$ не принадлежит первой ветви.

б) $\frac{12-2}{3}=\frac{10}{3}\notin\mathbb{N}\Rightarrow$ не принадлежит второй ветви.

в) $\frac{12}{3}=\frac{12}{3}\in\mathbb{N}\Rightarrow$ принадлежит 3 ветви, т.е. путь: $0\to3\to6\to9\to12$.

2. Далее по примеру 2 оставляем матрицу смежности:

3. Из пункта 1 видно, что $X=12$ принадлежит второй ветви, следовательно, из арифметической прогрессии выбираем элементы, принадлежащие этой ветви: $a_{0,3}=4,\ a_{3,6}=5,\ a_{6,9}=6,\ a_{9,12}=7$ и складываем их веса. Получаем кратчайший путь по третьей ветви, который равен 22.

Пример 3. Допустим, что пользователю необходимо рассчитать кратчайший путь от X_0 до X_{10} вершины графа, представленного на рисунке 3.

Решение

1. Проверим принадлежность ветви.

а) $\frac{10-1}{3}=\frac{9}{3}\in\mathbb{N}\Rightarrow$ принадлежит 1 ветви, следовательно, путь имеет вид $0\to1\to4\to7\to10$.

2. Далее по примеру 2 оставляем матрицу смежности:

3. Из 1 пункта видно, что $X=10$ принадлежит второй ветви, следовательно, из арифметической прогрессии выбираем элементы, принадлежащие этой ветви: $a_{0,1}=4,\ a_{1,4}=4,\ a_{4,7}=4,\ a_{7,10}=4$ и складываем их веса. Получаем кратчайший путь по третьей ветви, который равен 16.

Вывод. Предложенный вариант оптимизации расширяется с появлением новых ветвей. Из формулы *n*-го члена арифметической прогрессии видно к какой ветви принадлежит заданная точка. Это объясняется с помощью формулы *n*-го члена арифметической прогрессии: $a_n=a_1+(n-1)d$. Допустим, мы имеем веерную планировку с четырьмя ветвями, также считаем, что нумерация начинается с 0, и последующие вершины идут слева направо. Из этого можно сделать вывод, что a1 будет определять ветвь: первая, вторая, третья или четвертая, сомножитель *n-1* остается без изменения, а d — это общее количество ветвей. На рисунке 8 видно, что мы имеем четыре пути:

1) $0\to1\to5\to9$; 2) $0\to2\to6\to10$; 3) $0\to3\to7\to11$; 4) $0\to4\to8\to12$.

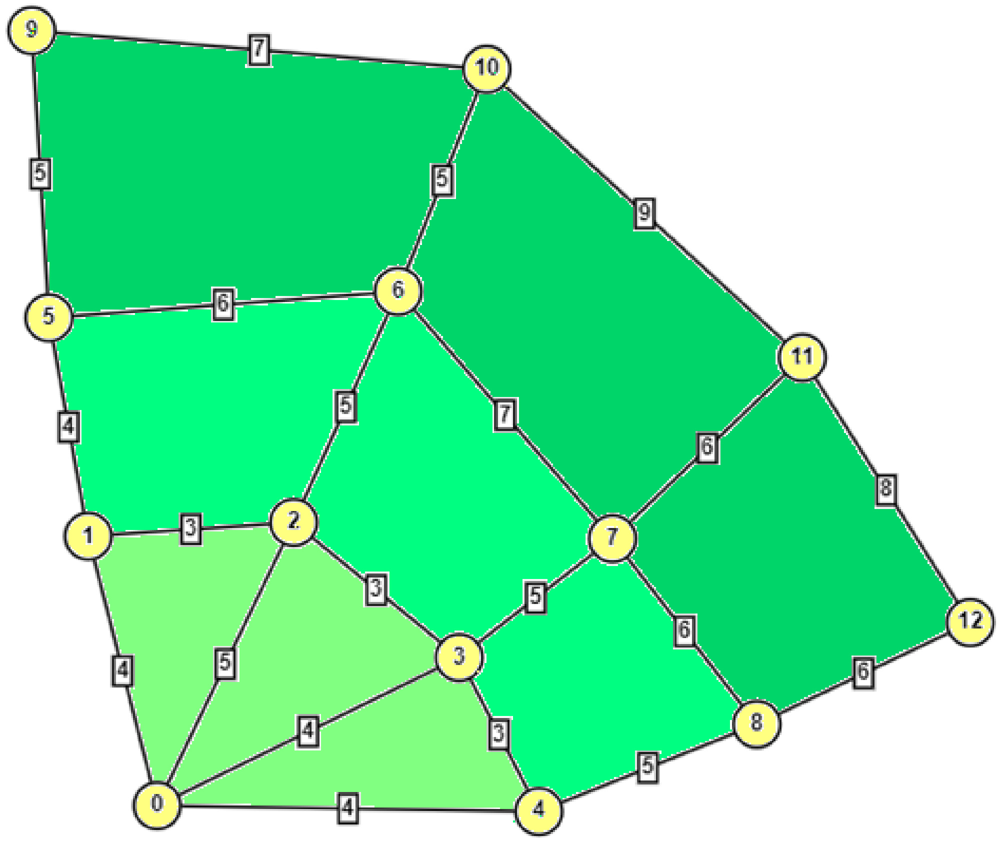


Рисунок 8. **Пример веерной планировки с четырьмя ветвями**

Пример 4. Пусть пользователю требуется проложить маршрут от вершины X_1 до вершины X_{11}.

<u>Решение</u>

1. Проверим принадлежность ветви.

а) $\frac{11-1}{4}=\frac{10}{4}\Rightarrow\notin\mathbb{N}$ не принадлежит 1 ветви.

б) $\frac{11-2}{4}=\frac{9}{4}\notin\mathbb{N}\Rightarrow$ не принадлежит 2 ветви.

в) $\frac{11-3}{4}=\frac{8}{4}\in\mathbb{N}\Rightarrow$принадлежит 3 ветви ($0\rightarrow3\rightarrow7\rightarrow11$).

2. Далее аналогично предыдущим примерам составляем матрицу смежности.

3. Из первого пункта видно, что X_{11} принадлежит второй ветви, следовательно, из арифметической прогрессии выбираем элементы, принадлежащие этой ветви: $a_{0,3}=4,\ a_{3,7}=5,\ a_{7,11}=6$ и складываем их веса. Получаем кратчайший путь по третьей ветви, который равен 15.

Пример 5. Пусть пользователю требуется проложить маршрут от вершины X_1 до вершины X_9.

<u>Решение</u>1) Проверим принадлежность ветви. а) $\frac{9-1}{4}=\frac{8}{4}\in\mathbb{N}\Rightarrow$ принадлежит 1 ветви ($0\rightarrow1\rightarrow5\rightarrow9$). 2) Далее аналогично предыдущим примерам составляем матрицу смежности. 3) Из арифметической прогрессии выбираем элементы, принадлежащие первой ветви: $a_{0,1}=4,\ a_{1,5}=4,\ a_{5,9}=5$ и складываем их веса. Получаем кратчайший путь по первой ветви, который равен 13.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ
1. *Деревянчук Е.Д.* Влияние планировки города и карты дорожной сети на выбор оптимального маршрута // Общество. – 2024. – № 1(32). – Часть 2. – С. 10-17.
2. *Деревянчук Е.Д.* Методика построения алгоритмов для практических задач с применением теории графов // Научный потенциал. – 2024. – № 2(45). – Часть 3. – С. 37-44.
3. *Волченская Т.В., Князьков В.С.* Компьютерная математика. Учебное пособие. Часть 2. Теория графов. – Пенза: Изд-во Пенз. ун-та, 2002. – 101 с.

THE ROUTE OPTIMIZING PROBLEM IN THE ROAD NETWORK, TAKING INTO ACCOUNT THE FAN LAYOUT OF THE CITY

DEREVYANCHUK Ekaterina Dmitrievna
Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor
MASHIN Oleg Alekseevich
Student
Penza State University
Penza, Russia

This work is devoted to the route optimizing problem in the road network, taking into account the fan layout of the city. To solve this problem, the apparatus of graph theory is used. The task is to find the shortest path from one vertex of the graph to another vertex, taking into account the type of graph. A modification of Dijkstra's algorithm is proposed, which allows taking into account the fan layout of the city.
Keywords: modification of Dijkstra's algorithm, graph theory, city fan layout, the shortest path.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТА В ДОРОЖНОЙ СЕТИ С УЧЕТОМ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАНИРОВКИ ГОРОДА

ДЕРЕВЯНЧУК Екатерина Дмитриевна
кандидат физико-математических наук, доцент
МАШИН Олег Алексеевич
студент
Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия

Данная работа посвящена задаче оптимизации маршрута в дорожной сети с учетом треугольной планировки города. Для решения данной задачи применяется аппарат теории графов. Задача сводится к поиску кратчайшего пути из одной вершины графа в другую вершину с учетом вида графа. Предложена модификация алгоритма Дейкстры, которая позволяет учитывать треугольную планировку города.
Ключевые слова: модификация алгоритма Дейкстры, теория графов, треугольная планировка города, кратчайший путь.

Постановка задачи. Данная работа посвящена исследованию задачи оптимизации маршрута в дорожной сети с учетом ***треугольной*** планировки города и является продолжением работ [1-2].

Постановка задачи: требуется найти оптимальный маршрут из одной точки города до другой с учетом ***треугольной*** планировки города.

Математическая постановка задачи: