ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

ЗУЛПУКАРОВ Жакшылык Алибаевич
кандидат физико-математических наук
Ошский технологический университет
АЛИЕВА Жаркынай Анарбаевна
магистр
Ошский государственный педагогический университет
г. Ош, Кыргызсан

В данной работе для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву, и доказана единственность решения как следствие.

Ключевые слова: функция, уравнение, малый параметр, лемма, теорема, следствие, неравенство.

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t,x,y,s)u(s,x,y)ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u(s,z,y)dzds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u(s,z,w)dwdzds = f(t,x,y), \quad (t,x,y)\in G, \qquad (1)$$

где $u(t,x,y)$ – неизвестная функция, $K(t,x,y,s)$, $N(t,x,y,s,z)$ и $M(t,x,y,s,z,w)$ – ядра,

$f(t,x,y)$ – известная функция; $f(0,x,y)=0$ при $x\in[0,X]$, $y\in[0,Y]$, $G=\{(t,x,y):0\le t\le T, 0\le x\le X, 0\le y\le Y\}$.

Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого рода исследовались в [1-5]. В частности, в [4] для линейных интегральных уравнений Вольтера первого рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. В [5] изучены вопросы регуляризации и единственности решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Здесь $K(t,x,y,s)$, $N(t,x,y,s,z)$ и $M(t,x,y,s,z,w)$ могут быть негладкими.

Пусть выполняются следующие условия:

а) функции $K(t,x,y,s)$, $N(t,x,y,s,z)$ и $M(t,x,y,s,z,w)$ – непрерывны соответственно в областях $G_1=\{(t,x,y,s): 0\le s\le t\le T, 0\le x\le X, 0\le y\le Y\}$, $G_2=\{(t,x,y,s,z): 0\le s\le t\le T, 0\le z\le x\le X, 0\le y\le Y\}$, $G_3=\{(t,x,y,s,z,w): 0\le s\le t\le T, 0\le z\le x\le X, 0\le w\le y\le Y\}$, $K(t,x,y,t)\ge K_0(t)>0$ при $t\in[0,T]$, $|K(t,x,y,t)|\le N_0K_0(t)$ при любых $(t,x,y)\in G$;

б) при $t>\tau$ и для любых (t,x,y,s), $(\tau,x,y,s)\in G_1$ справедливо неравенство

$$|K(t,x,y,s)-K(\tau,x,y,s)|\le C\int_\tau^t K_0(s)ds,$$

где $0<C$ – некоторая постоянная;

в) при $t>\tau$ для любых (t,x,y,s,z), $(\tau,x,y,s,z)\in G_2$ справедливо неравенство

$$|N(t,x,y,s,z)-N(\tau,x,y,s,z)|\le C_1\int_\tau^t K_0(s)ds,$$

где $0<C_1$ – некоторая постоянная и $N(t,x,y,\ t,z)\equiv 0$ при $(t,x,y,z)\in G_4=\{(t,x,y,z):\ 0\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$;

г) при $t>\tau$ для любых (t,x,y,s,z,w), $(\tau,x,y,s,z,w)\in G_3$ справедливо неравенство

$$\left|M(t,x,y,s,z,w)-M(\tau,x,y,s,z,w)\right|\le C_2\int_\tau^t K_0(s)ds\,,$$

где $0<C_2$ – некоторая постоянная и $M(t,x,y,t,z,w)\equiv 0$ при $(t,x,y,z,w)\in G_5=\{(t,x,y,z,w):\ 0\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le w\le y\le Y\}$.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать следующее уравнение

$$\varepsilon u(t,x,y,\varepsilon)+\int_0^t K(t,x,y,s)u(s,x,y,\varepsilon)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u(s,z,y,\varepsilon)dzds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u(s,z,w,\varepsilon)dwdzds=f(t,x,y),\quad (t,x,y)\in G\,, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр.

Решение уравнения (2) будем искать в виде $u(t,x,y,\varepsilon)=u(t,x,y)+\xi(t,x,y,\varepsilon)$.

$$(t,x,y)\in G \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) и учитывая, что $u(t,x,y)$ – решение уравнения (1), имеем

$$\varepsilon\xi(t,x,y,\varepsilon)+\int_0^t K(t,x,y,s)\xi(s,x,y,\varepsilon)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)\xi(s,z,y,\varepsilon)dzds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)\xi(s,z,w,\varepsilon)dwdzds+\varepsilon u(t,x,y)=0\,.$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$\xi(t,x,y,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,y,s)\xi(s,x,y,\varepsilon)ds=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t[K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)]\xi(s,x,y,\varepsilon)ds-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)\xi(s,z,y,\varepsilon)dzds-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)\xi(s,z,w,\varepsilon)dwdzds-u(t,x,y).$$

Применив резольвенту ядра $-\dfrac{K(s,x,y,s)}{\varepsilon}$

и, используя формулу Дирихле, учитывая, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_o^t K(s,x,y,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}ds=1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,y,s)ds}$$

и заменив τ на s, имеем

$$\xi(t,x,y,\varepsilon)=\int_0^t H(t,x,y,s,\varepsilon)\xi(s,x,y,\varepsilon)ds+\int_0^t\int_0^x N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)\xi(s,z,y,\varepsilon)dsdz+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)\xi(s,z,w,\varepsilon)dsdzdw+F(t,x,y,\varepsilon), \quad (4)$$

где $H(t,x,y,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}[K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}-$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}[K(t,x,y,s)-K(\tau,x,y,s)]d\tau; \quad (5)$$

$$N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}N(t,x,y,s,z)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}\times$$

$$\times[N(t,x,y,s,z)-N(\tau,x,y,s,z)]d\tau; \quad (6)$$

$$M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}M(t,x,y,s,z,w)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}\times$$

$$\times[M(t,x,y,s,z,w)-M(\tau,x,y,s,z,w)]d\tau; \quad (7)$$

$$F(t,x,y,s,\varepsilon)=-u(t,x,y)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,y,s)ds}-\frac{1}{\varepsilon}\int_o^t K(s,x,y,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}\times$$

$$\times[u(t,x,y)-u(s,x,y)]ds. \quad (8)$$

Для доказательства этого соотношения предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть

$$F(t,x,y,s,\varepsilon)=-u(t,x,y)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}-\frac{1}{\varepsilon}\int_o^t K(s,x,y,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,x,y,\tau)d\tau}[u(t,x,y)-u(s,x,y)]ds$$

где $u(t,x,y)\in C(G)$, $u(0,x,y)=0$ при $x\in[0;X]$, $y\in[0;Y]$, $K_0(t)>0$ при $t\in[0,T]$; $\varphi(t)=\int_0^t K_0(s)ds$, $t\in[0,T]$. В этом случае справедлива оценка

$$\|F(t,x,y,\varepsilon)\|\le 3\|u(t,x,y)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}+\omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta)=C_0(\varepsilon),$$

где β – произвольное число из интервала (0,1), в нём

$$\omega_{\bar{u}}(\delta)=\sup_{\substack{|\upsilon-\upsilon_0|<\delta\\ x\in[0,X]\\ y\in[0,Y]}}\left|u(\varphi^{-1}(\upsilon),x,y)-u(\varphi^{-1}(\upsilon_0),x,y)\right|,$$

$\varphi^{-1}(\upsilon)$ – обратная функция к функции $\upsilon=\varphi(t)$.

Доказательство. 1) если $0\le t\le\varphi^{-1}(\varepsilon^\beta)$, то из (8) имеем

$$\left|F(t,x,y,s,\varepsilon)\right| \le \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^{\beta})e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^{\beta})\int_{o}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau}ds = \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^{\beta}). \quad (9)$$

2) если $\varphi^{-1}(\varepsilon^{\beta}) \le t \le T$ то $\left|u(t,x,y)\right|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} \le \left\|u(t,x,y)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}$; (10)

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})} K_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau}[u(t,x,y)-u(s,x,y)]ds \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{t} K_0(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau} \times\right.$$

$$\left.\times[u(t,x,y)-u(s,x,y)]ds\right| \le 2\left\|u(t,x,y)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^{\beta}), \quad (11)$$

из (9), (10) и (11) следует справедливость леммы 1.

Лемма 2. Пусть функция $H(t,x,y,s,\varepsilon)$ определена в форме (5) и выполняются условия *а)* и *б)*. Тогда справедлива следующая оценка

$|H(t,x,y,s,\varepsilon)| \le C_3$,

где $C_3=C(1+e^{-1})$.

Доказательство. С учетом условия *а)* и *б)* из (5) получим неравенство

$$\left|H(t,x,y,s,\varepsilon)\right| \le \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau} C\int_s^t K_0(\tau)d\tau + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K_0(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\tau)d\tau} C\int_s^t K_0(\tau)d\tau$$

В этом случае для первого слагаемого имеем

$$Ce^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau\right) = \left|\eta = \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau\right| = C\eta e^{-\eta} \le Ce^{-1}.$$

А для второго слагаемого уже справедливо соотношение

$$C\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\tau)d\tau}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\upsilon)d\upsilon\right)d\tau = \left|\begin{array}{l}\eta = -\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\tau)d\tau \\ \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau \le \eta \le 0\end{array}\right| = C\int_{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau)d\tau}^{0}\eta e^{-\eta}d\eta \le .$$

$$\le C\int_0^{\infty}\eta e^{-\eta}d\eta \le C$$

Следовательно, отсюда вытекает справедливость леммы 2.

Лемма 3. Пусть функция $N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)$ определяется формулой (6).

Если выполняются условия *а)* и *в)* то справедлива оценка в виде

$|N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)| \le C_4$,

где $C_4=C_1(1+e^{-1})$.

Доказательство. Принимая во внимание условия *а)* и *в)* из (6) получаем требуемую оценку. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть функция $M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)$ определяется по формуле (7). Если выполняются условия *а)* и *г)* то справедлива оценка

$|M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)| \le C_5$

где $C_5=C_1(1+e^{-1})$.

Доказательство. Принимая во внимание условия *а)* и *г),* из (7) получаем требуемую оценку.

Далее, в силу лемм 1, 2, 3 и 4 из (4) имеем

$$\left|\xi(t,x,y,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon) + \int_0^t C_3\left|\xi(s,x,y,\varepsilon)\right|ds + \int_0^t\int_0^x C_4\left|\xi(s,z,y,\varepsilon)\right|dzds +$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_5\left|\xi(s,z,w,\varepsilon)\right|dwdzds.$$

Если обозначим

$$a(t,x,y,\varepsilon) = C_0(\varepsilon) + C_4\int_0^t\int_0^x\left|\xi(s,z,y,\varepsilon)\right|dzds + C_5\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left|\xi(s,z,w,\varepsilon)\right|dwdzds\,, \tag{12}$$

то тогда получим неравенство

$$\left|\xi(t,x,y,\varepsilon)\right| \le a(t,x,y,\varepsilon) + \int_0^t C_3\left|\xi(s,x,y,\varepsilon)\right|ds\,. \tag{13}$$

Далее, применим лемму 5-[5] к неравенству (13) получим

$$\left|\xi(t,x,y,\varepsilon)\right| \le a(t,x,y,\varepsilon) + C_3\int_0^t e^{C_3(t-s)}a(s,x,y,\varepsilon)ds\,. \tag{14}$$

Подставляя (12) в (14) имеем

$$\left|\xi(t,x,y,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon) + C_4\int_0^t\int_0^x\left|\xi(s,z,y,\varepsilon)\right|dzds + C_5\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left|\xi(s,z,w,\varepsilon)\right|dwdzds +$$
$$+C_3\int_0^t e^{C_3(t-s)}\{C_0(\varepsilon) + C_4\int_0^s\int_0^x\left|\xi(s_1,z,y,\varepsilon)\right|dzds_1 + C_5\int_0^s\int_0^x\int_0^y\left|\xi(s_1,z,w,\varepsilon)\right|dwdzds_1\}ds\,.$$

Интегрируя последнее неравенство и применяя формулу Дирихле, получим

$$\left|\xi(t,x,y,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon)e^{C_3t} + C_4\int_0^t\int_0^x e^{C_3(t-s)}\left|\xi(s,z,y,\varepsilon)\right|dzds + C_5\int_0^t\int_0^x\int_0^y e^{C_3(t-s)}\left|\xi(s,z,w,\varepsilon)\right|dwdzds.$$

Затем заменив t на T запишем в следующем виде

$$\left|\xi(t,x,y,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon)e^{C_3T} + C_4e^{C_3T}\int_0^t\int_0^x\left|\xi(s,z,y,\varepsilon)\right|dzds + C_5e^{C_3T}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\left|\xi(s,z,w,\varepsilon)\right|dwdzds. \tag{15}$$

Для неравенства (15), применим лемму 6 из источника [5] получим

$$\left|\xi(t,x,y,\varepsilon)\right| \le C_0(\varepsilon)e^{C_3T} + \int_0^t\int_0^x\int_0^y C_5e^{C_3T}\left|\xi(s,z,w,\varepsilon)\right|dwdzds + \int_0^t\int_0^x R(t,x,s,z)\times$$

$$\times[C_0(\varepsilon)e^{C_3T}+C_5e^{C_3T}\int_0^s\int_0^z\int_0^y|\xi(s_1,z_1,w,\varepsilon|dwdz_1ds_1]dzds\,.$$

В таком случае, применяя формулу Дирихле, имеем

$$|\xi(t,x,\varepsilon)|\le C_0(\varepsilon)e^{C_3T}+\int_0^t\int_0^x C_0(\varepsilon)e^{C_3T}R(t,x,s,z)dzds+\int_0^t\int_0^x\int_0^y[C_5e^{C_3T}+$$

$$+C_5e^{C_3T}\int_s^t\int_z^x R(t,x,s_1,z_1)dz_1ds_1]|\xi(s,z,w,\varepsilon)|dwdzds\,, \qquad (16)$$

$$\text{где } R(t,x,s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_4e^{C_3T}\right)^{n+1}\frac{(t-s)^n(x-z)^n}{(n!)^2}\,.$$

Из (16) можно получить неравенство

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)|\le C_6+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_7|\xi(s,z,w,\varepsilon)|dwdzds\,, \qquad (17)$$

где $C_6=C_0(\varepsilon)e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX]$, $C_7=C_4e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX]$.

К (17) применяем лемму 7 – [5], получим

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)|\le C_6+\int_0^t\int_0^x\int_0^y R(t,x,y,s,z,w)C_6dwdzds\,, \qquad (18)$$

$$\text{где } R(t,x,y,s,z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}C_7^{n+1}\frac{(t-s)^n(x-z)^n(y-w)^n}{(n!)^3}\,.$$

Из (18) имеем

$$|\xi(t,x,y,\varepsilon)|\le C_0(\varepsilon)C_8\,,\ (t,x,y)\in G\,, \qquad (19)$$

где $C_0(\varepsilon)=3\|u(t,x,y)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}+\omega_{\bar{u}}(\varepsilon^{\beta})$,

$C_8=e^C$

$C_8=e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX][1+R(T,X,Y,0,0,0)TXY]$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия *а)-г)* и уравнения (1) имеет непрерывное решение *u(t,x,y)* на *G* и *u(0,x,y)=0* при $x\in[0;X]$, $y\in[0;Y]$, кроме того, пусть $K_0(t)>0$ при $t\in[0,T]$. Тогда решение уравнения (2) представимо в виде (3), причем это решение при $\varepsilon\to 0$, сходится к непрерывному решению уравнения (1) в области *G* и справедлива оценка (19).

Следствие. Пусть выполняются условия *а)-г)* и $\int_0^t K_0(s)ds>0$, при $t\in[0,T]$. Тогда решение уравнения (1) в пространстве *C(G)* единственно.

Доказательство: Пусть $u(t,x,y)\in C(G)$ – ненулевое решение (1), при $f(t,x,y)\equiv 0$. Тогда, в силу условий *а) – г)* можно показать, что $u(0,x,y)=0$ на $x\in[0,X]$, $y\in[0,Y]$.

В самом деле, пусть

$$\int_0^t K(t,x,y,s)u(s,x,y)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u(s,z,y)dzds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u(s,z,w)dsdzdw=0\,,\ \text{при } (t,x,y)\in G.$$

Это уравнение преобразуем к эквивалентному ему уравнению

$$u(0,x,y)\int_0^t K(s,x,y,s)ds = -\int_0^t [K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)]u(s,x,y)ds -$$
$$-\int_0^t K(s,x,y,s)[u(s,x,y)-u(0,x,y)]ds - \int_0^t\int_0^x [N(t,x,y,s,z)-N(s,x,y,s,z)]\times$$
$$u(s,z,y)dzds - \int_0^t\int_0^x\int_0^y [M(t,x,y,s,z,w)-M(s,x,y,s,z,w)]u(s,z,w)dwdzds .$$

В силу условий *а) – г)*, имеем

$$|u(0,x,y)|\int_0^t K_0(s)ds \le \|u(t,x,y)\|_C C\int_0^t\int_s^t K_0(\tau)d\tau ds +$$
$$+\sup_{(s,x,y)\in G_t}|u(s,x,y)-u(0,x,y)|\int_0^t K_0(s)ds + \|u(t,x,y)\|_C C_1\int_0^t\int_0^x\int_s^t K_0(\tau)d\tau dzds +$$
$$+\|u(t,x,y)\|_C C_2\int_0^t\int_0^x\int_0^y\int_s^t K_0(\tau)d\tau dwdzds .$$

Отсюда, применяя формулу Дирихле, затем заменив τ на s и в силу теоремы о среднем, имеем

$$|u(0,x,y)|\int_0^t K_0(s)ds \le \|u(t,x,y)\|_C C\int_0^t K_0(s)ds\int_0^t ds + \sup_{(s,x,y)\in G_t}|u(s,x,y)-u(0,x,y)|\times$$
$$\times\int_0^t K_0(s)ds + \|u(t,x,y)\|_C C_1\int_0^t K_0(s)ds\int_0^x dz\int_0^t ds + \|u(t,x,y)\|_C C_2\int_0^t K_0(s)ds\int_0^y dw\int_0^x dz\int_0^t ds ,$$

где $G_t=\{(s,x,t):0\le s\le t,\ 0\le x\le X,\ 0\le Y\le y\}$.

По условию теоремы $\int_0^t K_0(s)ds > 0$, $t\in[0,T]$. Поэтому имеем

$$|u(0,x,y)| \le \|u(t,x,y)\|_C[Ct + C_1tx + C_2txy] + \sup_{(s,x,y)\in G_t}|u(s,x,y)-u(0,x,y)|.$$

Отсюда, переходя к пределу, при $t\to 0$ получим $u(0,x,y)=0$, для $x\in[0,X]$, $y\in[0,Y]$.

Ясно, что если $f(t,x,y)\equiv 0$, то $u(t,x,y,\varepsilon)\equiv 0$, $\varepsilon>0$, где $u(t,x,y,\varepsilon)$ – решения уравнения (2).

Далее в силу теоремы имеем

$\|u(t,x,y)\|_C = \|u(t,x,y) - u(t,x,y,\varepsilon) + u(t,x,y,\varepsilon)\|_C \le$
$\le \|u(t,x,y) - u(t,x,y,\varepsilon)\|_C + \|u(t,x,y,\varepsilon)\|_C \le$
$\le \|u(t,x,y) - u(t,x,y,\varepsilon)\|_C \to 0,\ \varepsilon\to 0.$

т. е. $u(t,x,y)\equiv 0$ при всех $(t,x,y)\in G$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРА

1. *Магницкий Н.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода // Вычисл. матем. и матем. Физики. – 1979, Т. 19. – № 4. – С. 970-988.
2. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Р.* Некорректные задачи математической физики и анализ. – М: Наука, 1980. – 286 с.

3. *Денисов А.М.* О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности // Вестн. Моск. унив-та, Сер. 15 Вычисл. матем. и киберн. – 1980. – № 3. – С. 49-52.
4. *Иманалиев М.И., Асанов А.* О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. – 1989, Т. 309. – № 5. – С. 1052-1055.
5. *Иманалиев М.И., Асанов А.* О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. – 1991, Т. 317. – № 1. – С. 22-35.

LINEAR INTEGRAL VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND WITH THREE INDEPENDENT VARIABLES

ZULPUKAROV Zhakshylyk Alibaevich
PhD in Physical and Mathematical Sciences
Osh Technological University
ALIEVA Zharkynai Anarbaevna
master
Osh State Pedagogical University
Osh, Kyrgyzstan

In this paper, for linear Volterra integral equations of the first kind with three independent variables, regularizing operators are constructed according to M.M. Lavrentiev, and the uniqueness of the solution is proved ac a corollary.
Key words: Function, equation, small parameter, lemma, theorem, corollary, inequality.