

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ КАК ФАКТОР ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

РЫБАКОВА Татьяна Вячеславовна

кандидат педагогических наук, доцент

доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин

ГОУ ВО МО «Государственный социально-гуманитарный университет»

г. Коломна, Россия

В статье рассматриваются нетрадиционные способы решения задач на поиск наибольшего значения некоторой величины. Дифференциальное исчисление – хороший помощник в решении таких задач, но алгебраические и геометрические способы делают решение неожиданным и нетрудоемким. Чем больше математических моделей для одной задачи может составить обучающийся, тем выше его математическая грамотность.

Ключевые слова: математическая грамотность, алгебраические способы, геометрические способы, задача с экономическим содержанием, введение параметра.

Решение задач с экономическим содержанием – хороший способ формирования математической грамотности у старшеклассников. Но каждая задача приобретает особый вес в этом процессе, если показать учащемуся возможности ее решения теми способами, которые «не лежат на поверхности», но хорошо знакомы каждому одиннадцатикласснику.

Рассмотрим задачу следующего содержания:

Василий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые изделия при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Василий платит рабочему 300 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 200 рублей. Василий готов выделить 30000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество товаров можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Разумеется, у прочитавшего условие этой задачи сразу возникает желание применить знание дифференциального исчисления. И это прекрасное желание. Труды овладевшего техникой дифференцирования скорее всего увенчаются успехом.

Однако,

– введя переменные x и y , где x изделий – количество изделий, произведенных рабочими на первом заводе, а y изделий – количество изделий, произведенных рабочими на втором заводе,

– записав ограничение $300x^2 + 200y^2 = 30000000$, непосредственно следующее из условия задачи и преобразовав его к виду $3x^2 + 2y^2 = 300000$,

– представив количество товаров, которое необходимо максимизировать, в виде $x + y = a$, где a – некий параметр,

решающий задачу вдруг увидит возможность решения обычной системы уравнений с параметром, который должен принять наибольшее из возможных значений.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 300000 \\ x + y = a \end{cases}.$$

Выразив одну переменную через другую из второго уравнения системы и подставив полученное выражение в первое уравнение, получим квадратное относительно переменной x уравнение

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2(a - x)^2 - 300000 &= 0, \\ 5x^2 - 4ax + 2a^2 - 300000 &= 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет решения в том случае, если его дискриминант неотрицателен, т. е.

$$16a^2 - 4 \cdot 5 \cdot (2a^2 - 300000) \geq 0.$$

Тогда

$$-24a^2 + 6000000 \geq 0,$$

$$a^2 \leq 250000.$$

Исходя из того, что a – это общее количество выпущенных изделий, можем утверждать, что a – число неотрицательное.

$$\text{Значит, } 0 \leq a \leq 500.$$

Наибольшее из возможных значений параметра – число 500.

Ответ: 500 изделий.

Особо следует отметить геометрический способ решения этой задачи.

Если ввести новые переменные

$$p = x\sqrt{3} \text{ и } q = y\sqrt{2},$$

То ограничение $300x^2 + 200y^2 = 30000000$ примет вид уравнения окружности

$$p^2 + q^2 = 300000,$$

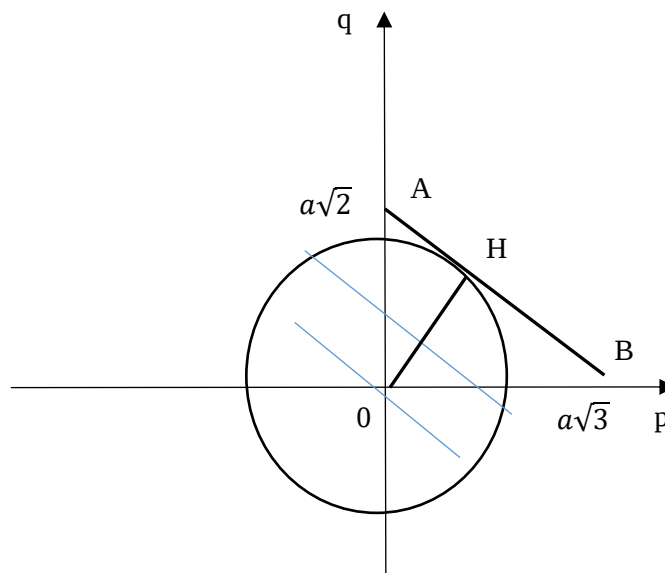
а уравнение с параметром $x+y=a$ преобразуется в уравнение

$$\frac{p}{\sqrt{3}} + \frac{q}{\sqrt{2}} = a,$$

$$q = a\sqrt{2} - \frac{p\sqrt{6}}{3}.$$

Это уравнение задает множество параллельных прямых, и $a\sqrt{2}$ – ордината точки пересечения прямой с осью ординат.

Изобразим графики уравнений в одной системе координат.



Очевидно, что наибольшее значение a мы получим, рассмотрев прямую AB из множества прямых, заданных уравнением $q = a\sqrt{2} - \frac{p\sqrt{6}}{3}$ и имеющих общие точки с окружностью.

Рассмотрев треугольник AOB с высотой OH, равной радиусу окружности с уравнением $p^2 + q^2 = 300000$, отметим, что

$$OA = a\sqrt{2}, OB = a\sqrt{3}, OH = 100\sqrt{30}.$$

Теорема Пифагора позволяет выразить гипотенузу этого треугольника через параметр a :

$$AB = \sqrt{2a^2 + 3a^2},$$

$$AB = a\sqrt{5}.$$

Вспомнив, что произведение катетов равно произведению гипотенузы и высоты, опущенной на гипотенузу, получим уравнение

$$a\sqrt{2} * a\sqrt{3} = a\sqrt{5} * 100\sqrt{30},$$

позволяющее найти a .

$$a^2\sqrt{6} = 100a\sqrt{150},$$

$$a \neq 0,$$

поэтому,

$$a = 500.$$

Ответ: 500 изделий.

Для эффектного решения этой задачи можно и векторы применить!

Из уравнения $300x^2 + 200y^2 = 30000000$ выразим y :

$$y = \sqrt{150000 - \frac{3}{2}x^2}$$

Тогда наибольшим должно стать число

$$x + \sqrt{150000 - \frac{3}{2}x^2}$$

Введем в решение векторы.

$$\text{Пусть } \vec{m} \left\{ x\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{150000 - \frac{3}{2}x^2} \right\},$$

$$а \quad \vec{n} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}}; 1 \right\}.$$

Легко убедиться, что

$$x + \sqrt{150000 - \frac{3}{2}x^2} = \vec{m} * \vec{n}.$$

Действительно, скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответственных координат этих векторов.

С другой стороны, по определению скалярного произведения

$$\vec{m} * \vec{n} = |\vec{m}| * |\vec{n}| * \cos(\widehat{\vec{m} \vec{n}}).$$

Наибольшее значение скалярного произведения векторов достигается при $\cos(\widehat{\vec{m} \vec{n}}) = 1$, тогда

$$\vec{m} * \vec{n} = |\vec{m}| * |\vec{n}|.$$

Поскольку

$$|\vec{m}| = \sqrt{\frac{3}{2}x^2 + 150000 - \frac{3}{2}x^2} = \sqrt{150000},$$

а $|\vec{n}| = \sqrt{\frac{5}{3}}$, то отсюда имеем искомое максимально возможное число

$$\sqrt{150000} * \sqrt{\frac{5}{3}} = 500.$$

Ответ: 500 изделий.

Следует заметить, что при применении рассмотренных способов необходимо убедиться в целочисленности неотрицательного значения переменной x .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шестаков С.А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 17 (профильный уровень) / под ред. И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2020. – 208 с.

ALGEBRAIC AND GEOMETRIC METHODS OF SOLVING PROBLEMS WITH ECONOMIC CONTENT AS A FACTOR OF THE FORMATION OF MATHEMATICAL LITERACY

RYBAKOVA Tatiana Vyacheslavovna

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor
Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods
of Teaching Mathematical Disciplines State Educational Institution
State Social and Humanitarian University
Kolomna, Russia

The article discusses non-traditional ways of solving problems to find the largest value of a certain value. Differential calculus is a good helper in solving such problems, but algebraic and geometric methods make the solution unexpected and labor-intensive. The more mathematical models a student can create for one task, the higher his mathematical literacy.

Key words: mathematical literacy, algebraic methods, geometric methods, problem with economic content, parameter introduction.