СРАВНЕНИЕ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕНОК КАНАЛОВ ДЛЯ ДВУХМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

АНКИЛОВ Григорий Андреевич
аспирант
ЖАРКОВА Алина Сергеевна
аспирант
Ульяновский государственный технический университет
г. Ульяновск, Россия

В работе произведен сравнительный анализ условий устойчивости упругой стенки канала для случаев трехмерного канала квадратного сечения и плоского канала. Через канал протекает поток несжимаемой газожидкостной среды. Математические модели описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. Поведение упругого материала пластины описывается линейной моделью. Для исследования динамической устойчивости построены функционалы типа Ляпунова и получены условия устойчивости, налагающие ограничения на параметры механических систем.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, устойчивость, аэрогидроупругость, канал, упругая пластина, функционал.

Работа посвящена актуальной проблеме исследования динамической устойчивости упругих каналов, через которые протекает поток газожидкостной среды. Нижняя стенка канала, моделируемая упругой пластиной, считается деформируемой. Целью исследований является построение функционалов для двух- и трехмерных математических моделей совместных колебаний упругой пластины и потока среды и на основе исследования этих функционалов получение условий динамической устойчивости упругих пластин. В плоском случае исследования отражены в работах [1-4].

Рассматривается движение потока газожидкостной среды в трехмерном канале $J=\{(x,y,z)\in R^3:\ 0<x<l,\ \ 0<y<h,\ \ 0<z<h\}$ прямоугольного сечения. Скорость невозмущенного дозвукового потока среды плотностью ρ равна V (м/с) и направлена вдоль оси *Ox* (рисунок 1). Предполагается, что упругой является стенка $y=0$, а остальные стенки $y=h$, $z=0$, $z=h$ считаются недеформируемыми.

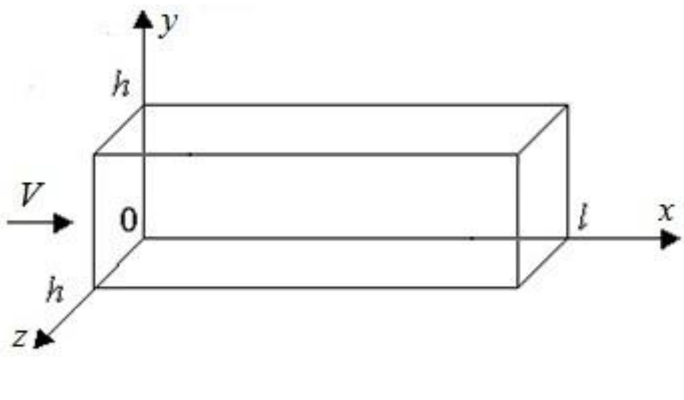


Рисунок 1. **Трехмерная модель канала квадратного сечения**

Введем обозначения:
$T_1=\{(x,z)\in R^2:0<x<l,0<z<h\}$;
$T_2=\{(x,y)\in R^2:\ 0<x<l,0<y<h\}$;
$T_3=\{(y,z)\in R^2:0<y<h,0<z<h\}$ – сечения воздуховода; $w(x,z,t)$ – прогиб упругой стенки (пластины), $(x,z)\in T_1$,; $\phi=\phi(x,y,z,t)$ – потенциал скорости возмущенного потока газа, $(x,y,z)\in J$.

Математическая формулировка трехмерной задачи имеет вид

$$\phi_{xx}(x,y,z,t)+\phi_{yy}(x,y,z,t)+\phi_{zz}(x,y,z,t)=0, \quad (x,y,z)\in J; \tag{1}$$

$$\phi_y(x,0,z,t)=w_t(x,z,t)+Vw_x(x,z,t), \quad (x,z)\in T_1; \tag{2}$$

$$\phi_y(x,h,z,t)=0, \quad (x,z)\in T_1; \tag{3}$$

$$\phi_z(x,y,0,t)=0, \ \phi_z(x,y,h,t)=0, \quad (x,y)\in T_2; \tag{4}$$

$$\phi(0,y,z,t)=0, \quad \phi(l,y,z,t)=0, \quad (y,z)\in T_3; \tag{5}$$

$$P(x,z,t)=\rho\Big(\phi_t(x,0,z,t)+V\phi_x(x,0,z,t)\Big), \quad (x,z)\in T_1; \tag{6}$$

$$\begin{gathered}Mw_{tt}(x,z,t)+D\Big(w_{xxxx}(x,z,t)+2w_{xxzz}(x,z,t)+w_{zzzz}(x,z,t)\Big)+\\+\beta_2\Big(w_{xxxxt}(x,z,t)+2w_{xxzzt}(x,z,t)+w_{zzzzt}(x,z,t)\Big)+N_{(x)}w_{xx}(x,z,t)+\\+N_{(z)}w_{zz}(x,z,t)+\beta_1 w_t(x,z,t)+\beta_0 w(x,z,t)=P(x,z,t);\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}w(0,z,t)=0, \quad w_x(0,z,t)=0, \quad w(l,z,t)=0, \quad w_x(l,z,t)=0;\\ w(x,0,t)=0, \quad w_z(x,0,t)=0, \quad w(x,h,t)=0, \quad w_z(x,h,t)=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Индексы снизу обозначают частные производные по соответствующим переменным. Обозначения в формулах (6), (7): $P(x,z,t)$ – аэродинамическое воздействие (Па); M – погонная масса пластины (кг/м^2); D – изгибная жесткость пластины (Па$\cdot$м^3); β_0 – жесткость слоя обжатия пластины (Па/м); β_1 – коэффициент демпфирования слоя обжатия пластины (Па$\cdot$с/м); β_2 – коэффициент демпфирования пластины (Па$\cdot$с); $N_{(x)}$, $N_{(z)}$ – сжимающие (растягивающие) пластину силы в направлении осей Ox и Oz (Па$\cdot$м).

На основе исследования функционала

$$\Phi(t)=\iiint_J\left(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2\right)dxdydz+2V\iint_{T_1}\phi(x,0,z,t)w_x(x,z,t)dxdz+$$
$$+\frac{1}{\rho}\iint_{T_1}\Big(Mw_t^2+Dw_{xx}^2+2Dw_{xz}^2+Dw_{zz}^2-N_{(x)}w_x^2-N_{(z)}w_z^2+\beta_0 w^2\Big)dxdz$$

получены условия

$$\beta_2\ge 0, \quad \beta_1\ge 0, \quad 4\pi^2 D-h^2N_{(z)}\ge 0, \tag{9}$$

$$N_{(x)}<\frac{2\pi^2D(l^2+2h^2)}{l^2h^2}-\frac{V^2h\rho\Big(\pi^2\left(4h^2+l^2\right)+8l^2\Big)}{2\pi^2\left(4h^2+l^2\right)}, \tag{10}$$

при выполнении которых функционал положителен с отрицательной производной, что доказывает устойчивость нулевого решения задачи (1)–(8) по отношению к начальным условиям.

Соответствующая математическая формулировка двухмерной задачи (рисунок 2) имеет вид

$$\phi_{xx}(x,y,t)+\phi_{yy}(x,y,t)=0, \quad (x,y)\in T_2; \tag{11}$$

$$\phi_y(x,0,t)=w_t(x,t)+Vw_x(x,t), \quad x\in[0,l]; \tag{12}$$

$$\phi_y(x,h,t)=0, \quad x\in[0,l]; \tag{13}$$

$$\phi(0,y,t)=0, \ \ \phi(l,y,t)=0, \quad y\in[0,h]; \tag{14}$$

$$P(x,t)=\rho\left(\phi_t(x,0,t)+V\phi_x(x,0,t)\right), \quad x\in[0,l]; \tag{15}$$

$$\begin{gathered} Mw_{tt}(x,t)+Dw_{xxxx}(x,t)+\beta_2 w_{xxxxt}(x,t)+N_{(x)}w_{xx}(x,t)+ \\ +\beta_1 w_t(x,t)+\beta_0 w(x,t)=P(x,t); \end{gathered} \tag{16}$$

$$w(0,t)=0, \quad w_x(0,t)=0, \quad w(l,t)=0, \quad w_x(l,t)=0. \tag{17}$$

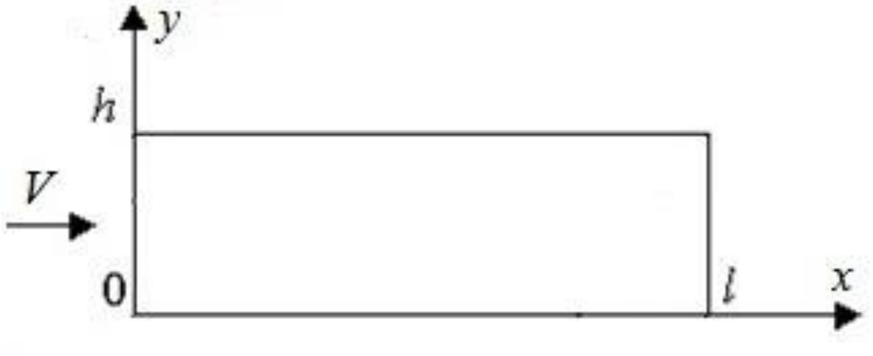


Рисунок 2. **Двухмерная модель канала**

Аналогично трехмерному случаю произведено исследование функционала

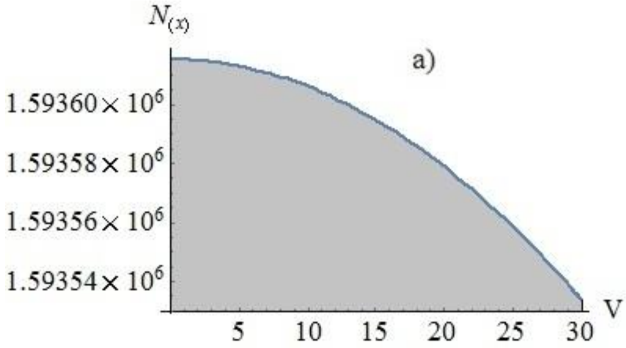
$$\Phi(t)=\iint\limits_{T_2}\left(\phi_x^2+\phi_y^2\right)dxdy+2V\int\limits_0^l \phi(x,0,t)w_x(x,t)dx+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^l\left(Mw_t^2+Dw_{xx}^2-N_{(x)}w_x^2+\beta_0 w^2\right)dx$$

и получены условия устойчивости нулевого решения задачи (11)–(17):

$$\beta_2\geq 0, \quad \beta_1\geq 0, \quad N_{(x)}<\frac{4\pi^2 D}{l^2}-\frac{V^2\rho\left(\pi^2h^2+2l\right)}{2\pi^2 h}. \tag{18}$$

Произведем расчеты области устойчивости на плоскости $(V,N_{(x)})$ колебаний упругой пластины для следующих параметров механической системы: $\rho=1$, $l=5$, $h=0{,}1$, $N_{(z)}=3\cdot 10^5$, $\beta_1=4$, $\beta_2=4$, $M=42{,}4$, $D=806{,}7$. Размерность величин указана в описании параметров задачи. Условия (9) выполняются.

На рисунке 3 изображены области устойчивости (серая область) на плоскости «усилие $N_{(x)}$ – скорость потока *V*» для неравенств (10) (рис. 3а) и (18) (рис. 3б) при $V\in(0;30)$.



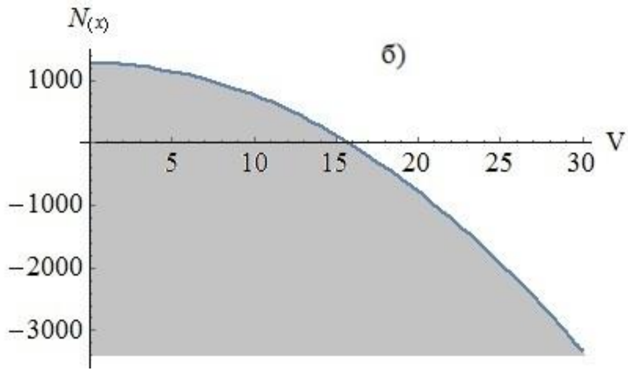


Рисунок 3. **Области устойчивости**

Можно сделать вывод, что двухмерная модель плохо описывает реальные физические процессы. Как видно из рисунка 3 при $V = 20$ в двухмерной модели требуется растягивающее усилие, чтобы избежать неустойчивости колебаний упругой пластины, что не соответствует экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анкилов А.В., Вельмисов П.А.* Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 220 с.
2. *Анкилов А.В., Вельмисов П.А.* Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск: УлГТУ, 2013. – 322 с.
3. *Анкилов А.В., Вельмисов П.А.* Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – 146 с.
4. *Анкилов А.В., Вельмисов П.А.* Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. – Ульяновск: УлГТУ, 2019. – 201 с.
5.*Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503 с.

COMPARISON OF STABILITY CONDITIONS OF ELASTIC WALLS OF CHANNEL FOR TWO AND THREE DIMENSIONAL MODELS

ANKILOV Grigory Andreevich
Postgraduate Student
ZHARKOVA Alina Sergeevna
Postgraduate Student
Ulyanovsk State Technical University
Ulyanovsk, Russia

The paper presents a comparative analysis of the stability conditions of an elastic channel wall for the cases of a three-dimensional square channel and a flat channel. An incompressible gas-liquid medium flows through the channel. Mathematical models are described by systems of partial differential equations. The behavior of the elastic material of the plate is described by a linear model. To study dynamic stability, Lyapunov-type functionals are constructed and stability conditions that impose restrictions on the parameters of mechanical systems are obtained.

Key words: partial differential equations, stability, aerohydroelasticity, channel, elastic plate, functional.