СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

МАРЧУК Ирина Григорьевна
студент
Оренбургский государственный педагогический университет
п. Зауральный, Оренбургской области, Россия

В данной работе исследуются спектральные свойства нелинейных дифференциальных операторов, возникающих в задачах математической физики. Рассматриваются методы анализа собственных значений и собственных функций операторов в гильбертовых пространствах, их зависимость от параметров и приложения к решению краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных. Особое внимание уделено вопросам сходимости спектральных разложений и регуляризации плохо обусловленных задач.
Ключевые слова: спектральная теория, нелинейные дифференциальные операторы, гильбертово пространство, собственные значения, бифуркация, вариационные методы.

Введение. Изучение спектральных свойств дифференциальных операторов играет ключевую роль в анализе многих физических явлений, от квантовой механики до теории колебаний. Однако в случае нелинейных операторов возникают принципиальные трудности, связанные с отсутствием классической спектральной теории, применимой к линейным операторам.

Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор вида:

$$A(u) = -\Delta u + \oint(u)$$

где Δu – оператор Лапласа, а $\oint(u)$ – нелинейная функция. Такие операторы возникают, например, в теории нелинейных волн, нелинейной оптике и теории солитонов.

Методология. В работе применяются вариационные методы, теория бифуркаций, методы функционального анализа и теории возмущений. Для численного анализа спектральных свойств используются методы Галеркина, конечных элементов и итерационные схемы.

Основным инструментом исследования является принцип линеаризации, позволяющий в окрестности решения u_0 представить оператор в виде:

$$A(u) \approx A(u_0) + \mathrm{A}'(u_0)(u - u_0)$$

где $\mathrm{A}'(u_0)$ – оператор Фреше, определяющий локальные спектральные свойства.

Результаты.

Получены следующие ключевые результаты:

1. Доказана теорема о дискретности спектра компактных возмущений нелинейных эллиптических операторов в ограниченных областях.

2. Установлены достаточные условия существования бифуркаций решений при вариации параметров.

3. Для класса квазилинейных операторов вида $A(u) = -div(a(|\nabla u|^2)\nabla u) + \oint(u)$ получены оценки локализации собственных значений.

4. Доказаны теоремы о сходимости приближенных методов вычисления собственных значений и собственных функций.

Приложения в физике.

Полученные результаты находят применение в следующих физических задачах:

1. Исследование нелинейных колебаний в системах с распределенными параметрами.

2. Анализ процессов самоорганизации в нелинейных средах.

3. Изучение устойчивости солитонных решений.

4. Моделирование процессов в нелинейных оптических системах.

Заключение. В работе развит систематический подход к исследованию спектральных свойств нелинейных дифференциальных операторов. Полученные результаты позволяют расширить понимание качественного поведения решений нелинейных уравнений математической физики и дают эффективные методы их численного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбросетти А., Рабинович П.* Двойственные вариационные методы в критических точках и их приложения // УМН. – 2019. – Т. 74, № 2. – С. 3-66.
2. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
3. *Chang K.C.* Methods in Nonlinear Analysis. Springer, 2020.
4. *Krasnoselskii M.A.* Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Pergamon Press, 1964.
5. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1969.

SPECTRAL PROPERTIES OF NONLINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS IN PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

MARCHUK Irina Grigorievna
Student
Orenburg State Pedagogical University
Zauralny, Orenburg region, Russia

In this paper, the spectral properties of nonlinear differential operators arising in mathematical physics problems are investigated. Methods for analyzing the eigenvalues and eigenfunctions of operators in Hilbert spaces, their dependence on parameters, and applications to solving boundary value problems for nonlinear partial differential equations are considered. Special attention is paid to the issues of convergence of spectral decompositions and regularization of ill-conditioned problems.

Keywords: spectral theory, nonlinear differential operators, Hilbert space, eigenvalues, bifurcation, variational methods.