ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

ЗУЛПУКАРОВ Жакшылык Алибаевич
кандидат физико-математических наук
Ошский технологический университет
АЛИЕВА Жаркынай Анарбаевна
магистр
Ошский государственный педагогический университет
г. Ош, Кыргызсан

В данной работе рассматриваются краевая задача для вырождающегося уравнения второго порядка с тремя независимыми переменными. Для этой задачи методом неотрицательных квадратичных форм доказана теорема единственности.
Ключевые слова: вырожденные дифференциальные уравнения, частные производные, краевые задачи с тремя независимыми переменными, теорема единственности.

Рассмотрим следующие уравнения

$$a_1(t,x,y)u_{tx}+a_2(t,x,y)u_{ty}+a_3(t,x,y)u_{xy}+b_1(t,x,y)u_t+ +b_2(t,x,y)u_x+b_3(t,x,y)u_y+c(t,x,y)u=f(t,x,y) \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &u(0,x,y)=0, \quad (x,y)\in[0,X]\times[0,Y],\\ &u(t,0,y)=0, \quad (t,y)\in[0,T]\times[0,Y], \qquad (2)\\ &u(t,x,0)=0, \quad (t,x)\in[0,T]\times[0,X],\end{aligned}$$

где $a_1(t,x,y)$, $a_2(t,x,y)$, $a_3(t,x,y)$, $b_1(t,x,y)$, $b_2(t,x,y)$, $b_3(t,x,y)$, $c(t,x,y)$ и $f(t,x,y)$ – заданные функции, а $u(t,x,y)$ – неизвестная функция в области $G=\{(t,x,y):0\le t\le T, 0\le x\le X, 0\le t\le Y\}$.

Обозначим через $Z_2(G)$ – пространство функций $u(t,x,y)$, таких что $u(t,x,y), u_t(t,x,y), u_x(t,x,y), u_y(t,x,y), u_{tx}(t,x,y), u_{xy}(t,x,y), u_{ty}(t,x,y), u_{txy}(t,x,y)\in L_2(G)$

Различные вопросы для вырождающихся скалярных и систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследовались в [2; 4-6]. Вырождающиеся дифференциальные уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными изучено в [1]. Краевая задача (1)-(2) является некорректным [3]. В данной работе методом неотрицательных квадратичных форм доказано теорема единственности краевой задачи (1)-(2).

Предполагаем выполнение условий:

а) функции $a_i(t,x,y), a'_{it}(t,x,y), a'_{ix}(t,x,y), a'_{iy}(t,x,y), b_i(t,x,y), b'_{itx}(t,x,y), b'_{ity}(t,x,y), b'_{ixy}(t,x,y), c(t,x,y), c'''_{txy}(t,x,y)$ – непрерывные функции в области G, $(i=1,2,3)$;

б) главные миноры матричной функции

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

неотрицательны при всех $(t,x,y,s,z,w)\in G_1=\{(t,x,y,s,z,w):0\le s\le t\le T, 0\le z\le x\le X, 0\le w\le y\le Y\}$,

где $a_{11}=(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-(y-w)a'_{lw}(s,z,w)]$,

$a_{22}=(t-s)(y-w)[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)]$,

$a_{33}=(x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)-(t-s)a'_{3s}(s,z,w)]$,

$a_{12}=a_{21}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_1(s,z,w)$,

$a_{13}=a_{31}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_2(s,z,w)$;

$a_{32}=a_{23}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_3(s,z,w)$;

в) главные миноры матричной функции

$$B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{12} & b_{22} & b_{23}\\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{pmatrix}$$

неотрицательны при всех $(t,x,y,s,z,w)\in G_1$, где

$$(t,x,y,s,z,w)\in G_1=\{(t,x,y,s,z,w):0\le s\le t\le T,0\le z\le x\le X,0\le w\le y\le Y\},$$
где $a_{11}=(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-(y-w)a'_{1w}(s,z,w)]$,
$$a_{22}=(t-s)(y-w)[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)],$$
$$a_{33}=(x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)-(t-s)a'_{3s}(s,z,w)],$$
$$a_{12}=a_{21}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_1(s,z,w),$$
$$a_{13}=a_{31}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_2(s,z,w),$$
$$a_{32}=a_{23}=-(t-s)(x-z)(y-w)b_3(s,z,w);$$

где $0<K$ – некоторая постоянная.

Теорема. Пусть выполняются условия *а) – г)*. Тогда решение $u(t,x,y)$ краевой задачи (1)-(2) единственно в классе $Z_2(G)$.

Доказательство. Сделаем следующую подстановку
$$u(t,x,y)=\int_0^t\int_0^x\int_0^y \vartheta(s,z,w)dwdzds\cdot$$
$(t,x,y)\in G$ (3)

Подставляя (3) в (1), имеем

$$a_1(t,x,y)\int_0^y\vartheta(t,x,w)dw+a_2(t,x,y)\int_0^x\vartheta(t,z,y)dz+a_3(t,x,y)\int_0^t\vartheta(s,x,y)ds+$$
$$+b_1(t,x,y)\int_0^x\int_0^y\vartheta(t,z,w)dwdz+b_2(t,x,y)\int_0^t\int_0^y\vartheta(s,x,w)dwds+$$
$$+b_3(t,x,y)\int_0^t\int_0^x\vartheta(s,z,y)dzds+c(t,x,y)\int_0^t\int_0^x\int_0^y\vartheta(s,z,w)dwdzds=f(t,x,y). \quad (4)$$

Обе части уравнения (4) умножив на $\vartheta(t,x,y)$, дважды интегрируя по частям в области $G_{txy}=\{(s,z,w):0\le s\le t,\ 0\le z\le x,\ 0\le w\le y\}$ и применяя, формулу Дирихле, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{(t-s)(x-z)[a_1(s,z,w)-(y-w)a'_{1w}(s,z,w)]\left(\int_0^w\vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)^2+(t-s)(y-w)\times$$
$$\times[a_2(s,z,w)-(x-z)a'_{2z}(s,z,w)]\left(\int_0^z\vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)^2+(x-z)(y-w)[a_3(s,z,w)-$$
$$-(t-s)a'_{3s}(s,z,w)]\left(\int_0^s\vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)^2-2(t-s)(x-z)(y-w)[b_1(s,z,w)\left(\int_0^w\vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)\times$$
$$\times\left(\int_0^z\vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)+b_2(s,z,w)\left(\int_0^w\vartheta(s,z,\eta)d\eta\right)\left(\int_0^s\vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)+b_3(s,z,w)\left(\int_0^z\vartheta(s,\xi,w)d\xi\right)\times$$
$$\times\left(\int_0^s\vartheta(\tau,z,w)d\tau\right)]\}dwdzds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y\{(t-s)[b_1(s,z,w)-(x-z)b'_{1z}(s,z,w)-$$
$$-(y-w)b'_{1w}(s,z,w)+(x-z)(y-w)b''_{1zw}(s,z,w)]\left(\int_0^z\int_0^w\vartheta(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)^2+$$
$$+(x-z)[b_2(s,z,w)-(t-s)b'_{2s}(s,z,w)-(y-w)b'_{2w}(s,z,w)+(t-s)(y-w)b''_{2sw}(s,z,w)]\times$$
$$\times\left(\int_0^s\int_0^w\vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)^2+(y-w)[b_3(s,z,w)-(t-s)b'_{3s}(s,z,w)-(x-z)b'_{3z}(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(x-z)b''_{3sz}(s,z,w)]\left(\int\limits_0^s\int\limits_0^z \vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)^2-(t-s)(x-z)[c(s,z,w)-$$

$$-(y-w)c'_w(s,z,w)]\left(\int\limits_0^z\int\limits_0^w \vartheta(s,\xi,\eta)d\xi d\eta\right)\left(\int\limits_0^s\int\limits_0^w \vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)-(t-s)(y-w)\times$$

$$\times[c(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)]\left(\int\limits_0^z\int\limits_0^w \vartheta(s,\xi,\eta)d\eta d\xi\right)\left(\int\limits_0^s\int\limits_0^z \vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)-(x-z)\times$$

$$\times(y-w)[c(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)]\left(\int\limits_0^s\int\limits_0^w \vartheta(\tau,z,\eta)d\eta d\tau\right)\left(\int\limits_0^s\int\limits_0^z \vartheta(\tau,\xi,w)d\xi d\tau\right)\}dwdzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\{[c(s,z,w)-(y-w)c'_w(s,z,w)-(x-z)c'_z(s,z,w)-(t-s)c'_s(s,z,w)+$$

$$+(t-s)(y-w)c''_{sw}(s,z,w)+(x-z)(y-w)c''_{zw}(s,z,w)+(t-s)(x-z)c''_{sz}(s,z,w)-$$

$$-(y-w)(x-z)(t-s)c'''_{szw}(s,z,w)]\left(\int\limits_0^s\int\limits_0^z\int\limits_0^w \vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2\}dwdzds=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\left\{\int\limits_0^s\int\limits_0^z\int\limits_0^w f(\tau,\xi,\eta)\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right\}dwdzds. \qquad (5)$$

В силу условий *а) – г)* левая часть соотношения (5) неотрицательна, поэтому отсюда вытекает следующее неравенство

$$\frac{K}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\left(\int\limits_0^s\int\limits_0^z\int\limits_0^w \vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau\right)^2 dwdzds\le$$

$$\le\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^s\int\limits_0^z\int\limits_0^w f(\tau,\xi,\eta)\vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau dwdzds\right|.$$

Пусть $f(t,x,y)=0,$ для любых $(t,x,y)\in G$. В силу условий *а) – г)* и теоремы Сильвестра, получим,

$\int\limits_0^s\int\limits_0^z\int\limits_0^w \vartheta(\tau,\xi,\eta)d\eta d\xi d\tau=0$ т. е. $\vartheta(t,x,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение

$(1-y)u_{tx}+(1-x)u_{ty}+(1-t)u_{xy}+u_t+u_x+u_y+u=f(t,x,y)$

с краевыми условиями

$u(0,x,y)=0,\quad (x,y)\in[0;1]\times[0;1],$

$u(t,0,y)=0,\quad (t,y)\in[0;1]\times[0;1],$

$u(t,x,0)=0,\quad (t,x)\in[0;1]\times[0;1].$

Выполняется все условия *а)-г)* где $c(s,z,w)=1$, $0<K=1$. Так как в условия б) и в) элементы матрицы

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix},\ B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{12} & b_{22} & b_{23}\\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{pmatrix}$$

определяются по следующему формулу

$$a_{11}=(t-s)(x-z)(1+y-2w),\quad a_{22}=(t-s)(y-w)(1+x-2z),$$
$$a_{33}=(x-z)(y-w)(1+t-2s),\ a_{12}=a_{21}=-(t-s)(x-z)(y-w),$$
$$a_{13}=a_{31}=-(t-s)(x-z)(y-w),\quad a_{32}=a_{23}=-(t-s)(x-z)(y-w).$$
$$b_{11}=(t-s),\quad b_{22}=(x-z),\quad b_{33}=(y-w),\quad b_{12}=b_{21}=-\frac{1}{2}(t-s)(x-z),$$
$$b_{13}=b_{31}=-\frac{1}{2}(t-s)(y-w),\quad b_{23}=b_{32}=-\frac{1}{2}(x-z)(y-w).$$

Здесь $\det A = (t-s)^2(x-z)^2(y-w)^2\{[\frac{1}{4}(1+y-2w)(1+x-2z)(1+t-2s)-$

$-2(t-s)(x-z)(y-w)]+[\frac{1}{4}(1+y-2w)(1+x-2z)(1+t-s)-$

$-(t-s)(y-w)(1+x-2z)]+[\frac{1}{4}(1+y-2w)(1+t-2s)-(x-z)(y-w)(1+t-2s)]+$

$+[\frac{1}{4}(1+y-2w)(1+t-2s)-(t-s)(x-z)(1+y-2w)]\}\geq 0.$

$$\det B = (t-s)^2(x-z)^2(y-w)^2\{[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(t-s)(y-w)(x-z)]+$$

$$+[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(t-s)(y-w)]+[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(t-s)(x-z)]+[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(x-z)(y-w)]\}\geq 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физике. – М.: Наука, 1982. – 295 с.
2. *Бояринцев Ю.Е.* Метод решение обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – 154 с.
3. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
4. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск, 2003. – 320 с.
5. *Шлапак Ю.Д.* О приводимости линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Мат. Физик. – 1997. – Выпуск 21. – С. 60-64.
6. *Щеглова А.А.* Исследование и решение вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью замен переменных // Сиб. мат. жур. – 1995. – Т. 36. – № 6. – С.1436-1445.

UNIQUENESS OF THE SOLUNION OF THE DOUNDARY PROBLEM FOR A DEGREASING EQUANION IN SECOND ORDER PARTIAL DERIVATIVES WITH THREE INDEPENDENT VARIABLES

Zulpukarov Zhakshylyk Alibaevich
PhD in Physical and Mathematical Sciences
Osh Technological University
ALIEVA Zharkynai Anarbaevna
master
Osh State Pedagogical University
Osh, Kyrgyzstan

In paper, we consider a boundary value problem for a degenerate second-order equation with three independent variables. For this problem, uniqueness theorems are proved by the method of non-negative quadratic forms.
Key words: degenerate partial differential equations, boundary value problems with three independent variables, uniqueness theorem.