# КИНЕТИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА

**РЫЧКОВ Виктор Афанасьевич**
кандидат физико-математических наук, доцент
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
г. Самара, Россия

*Рассматривается непрерывная и дифференцируемая в двух областях, примыкающих к поверхности с двух сторон, функция. На поверхности функция и ее частные производные могут претерпевать разрыв. Получены геометрические и кинетические условия совместности для производных первого порядка. Далее получены и доказаны условия совместности для скачков производных n-го порядка.*
**Ключевые слова:** нормальные скачки производных, кинетические и геометрические условия совместности, скачки, контравариантный тензор, Адамар.

Пусть $f(x_{\mathrm{i}})$ – некоторая функция декартовых координат $x_{\mathrm{i}}$

Если точка $x_{\mathrm{i}}$ лежит на поверхности $\sum$, то $x_{\mathrm{i}} = x_{\mathrm{i}}(y^{\alpha})$, и функцию $f$ можно рассматривать как функцию, $y^1, y^2$ на поверхности.

Частные производные функции $f$ определяются соотношениями

$$f_{,\mathrm{i}} = f_{\mathrm{n}}\nu_{\mathrm{i}} + g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} x_{\mathrm{i},\beta}, \tag{1}$$

где $f_{\mathrm{n}} = f_{,\mathrm{i}}\nu_{\mathrm{i}}$ – производная по нормали к $\sum$.

Пусть функция $f(x_{\mathrm{i}}, \mathrm{t})$ – непрерывная и дифференцируемая в каждой из обастей и $V^+$, $V^-$примыкающих к поверхности $\sum$ с двух сторон. На самой поверхности $\sum$ функция $f$ и ее частные производные могут претерпевать разрыв. Пусть $f^+$ значение $f$ на поверхности $\sum$ на подходе к $\sum$ по точкам области $V^+$, а $f^-$ по точкам области $V^-$.

Продолжим $f^+$ в область $V^-$, а $f^-$ в область $V^+$ так, чтобы каждая из них была непрерывной и дифференцируемой в области $V^+$ , $V^-$.

Тогда имеем из (1):

$$f_{i}^{+} = f_n^{+}\nu_{\mathrm{i}} + g^{\alpha\beta} f_{,\alpha}^{+} x_{\mathrm{i},\beta};$$
$$f_{,i}^{-} = f_n^{-}\nu_{\mathrm{i}} + g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} x_{\mathrm{i},\beta} \tag{2}$$
$$\frac{\delta f^+}{\delta \mathrm{t}} = \dot{f}^+ + f_n^+ c; \quad \frac{\delta f^-}{\delta \mathrm{t}} = \dot{f}^- + f_n^- c \tag{3}$$

Вычитая из первых соотношений (2) и (3) соответственно вторые соотношения, получим:

$$[f_{,i}] = [f_n]\nu_{\mathrm{i}} + g^{\alpha\beta}[f]_{,\alpha} x_{\mathrm{i},\beta} \tag{4}$$
$$[\dot{f}] = -[f_n]\mathrm{c} + \frac{\delta[f]}{\delta \mathrm{t}}, \tag{5}$$

Здесь $[f_{,i}] = f_{,i}^{+} - f_{,i}^{-}$; $[\dot{f}] = \dot{f}^+ - \dot{f}^-$, $[f_n] = f_n^+ - f_n^-$, $[f_{,i}] = f^+ - f^-$.

Выражения (4) и (5) – геометрические и кинематические условия совместности для производных первого порядка соответственно.

Если $f$ непрерывна на $\sum$, то из (4) и (5) получаем условия совместности Адамара

$$[f_{,i}] = [f_n]\nu_{\mathrm{i}}\,, [\dot{f}] = -[f_n]\mathrm{c} \tag{6}$$

Обобщая формулу (1), имеем

$$f_{,in\dots n}^{(k)} = f_{,n\dots n}^{(k)}\nu_{\mathrm{i}} + g^{\alpha\beta} x_{\mathrm{i},\beta}\left(f_{,n\dots n}^{(k-1)}\right)_{,\alpha} + (\mathrm{k}-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\gamma} b_{\alpha\sigma} x_{i,\beta} x_{e,\gamma} f_{,en\dots n}^{(k-1)},$$
$$f_{,in\dots n}^{(k)} = \frac{\partial^k f}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_e}\nu_{\mathrm{i}} \dots \nu_{\mathrm{e}}\,; f_{,n\dots n}^{(k)} = \frac{\partial^k f}{\partial x_i \partial x_j \cdot\cdot\cdot \partial x_e}\nu_{\mathrm{i}} \dots \nu_{\mathrm{e}} \tag{7}$$

Докажем справедливость формулы (7). Для этого спроектируем это равенство на три неколлинеарные направления.

Проектируя (7) на $\nu_{\mathrm{i}}$, и учитывая, что $x_{\mathrm{i},\beta}\nu_{\mathrm{i}} = 0$, получаем

$$f_{n\dots n}^{(k)} = f_{,in\dots n}^{(k)}\nu_{\mathrm{i}} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_j \cdot\cdot\cdot \partial x_e}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\nu_{\mathrm{j}} \dots \nu_{\mathrm{e}}\nu_{\mathrm{i}}$$

Проектируя (7) на $x_{j,\tau}$,находим

$$f_{,in\dots n}^{(k)} x_{j,\tau} = g^{\alpha\beta} g_{\tau\beta}\left(f_{,n\dots n}^{(k-1)}\right)_{,\alpha} + (\mathrm{k}-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\gamma} b_{\alpha\sigma} g_{\tau\beta} x_{e,\gamma} f_{,en\dots n}^{(k-1)} = \left(f_{,n\dots n}^{(k-1)}\right)_{,\tau} +$$
$$+(\mathrm{k}-1) g^{\sigma\gamma} b_{\tau\sigma} x_{e,\gamma} f_{,en\dots n}^{(k-1)} = \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_j \dots \partial x_e}\right)_{,\tau} \cdot \nu_{\mathrm{j}} \dots \nu_{\mathrm{e}} + \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_j \dots \partial x_e}(\nu_{\mathrm{j}} \dots \nu_{\mathrm{e}})_{,\tau} + (\mathrm{k}-1) g^{\sigma\gamma} b_{\tau\sigma} x_{e,\gamma} f_{,en\dots n}^{(k-1)}.$$

Подставляя (7), получаем
$\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x_j \dots \partial x_e}(\mathrm{\nu_j \dots \nu_e})_{,\tau} + (\mathrm{k}-1)g^{\sigma\gamma}b_{\tau\sigma}x_{e,\gamma}f^{(k-1)}_{,en\dots n} = 0,$

А так как
$f^{(k)}_{,in\dots n}x_{j,\tau} = (\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x_j \dots \partial x_e})_{,\tau}\cdot \mathrm{\nu_j \dots \nu_e},$

То равенство (7) справедливо и при проектировании на $x_{j,\tau}$. Таким образом формула (7) доказана.

Обобщающая формула имеет вид:

$$f^{(k)}_{,tn\dots n} = \frac{\delta f^{(k-1)}_{,n\dots n}}{\delta t} - cf^{(k)}_{n\dots n} + (\mathrm{k}-1)g^{\alpha\beta}c_{,\alpha}x_{\alpha\beta}f^{(k-1)}_{,en\dots n} \quad (8)$$

Покажем справедливость (8). Для чего вычислим производную.

$$\frac{\delta f^{(k-1)}_{n\dots n}}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t}f^{(k-1)}_{n\dots n} + c\frac{\partial}{\partial x_i}f^{(k-1)}_{n\dots n}\mathrm{\nu_j} = f^{(k)}_{,tn\dots n} + cf^{(k)}_{n\dots n} + \frac{\partial^{k-1}f}{\partial x_j \dots \partial x_e}\frac{\delta}{\delta t}(\mathrm{\nu_j \dots \nu_e}) =$$
$$= f^{(k)}_{,tn\dots n} + cf^{(k)}_{n\dots n} + (\mathrm{k}-1)f^{(k-1)}_{en\dots n}\frac{\delta \mathrm{\nu_e}}{\delta t}$$

Подставляя $\delta \mathrm{\nu_e}/\delta t$ , получаем
$\frac{\delta f^{(k-1)}_{n\dots n}}{\delta t} = f^{(k)}_{,tn\dots n} + cf^{(k)}_{n\dots n} + +(\mathrm{k}-1)g^{\alpha\beta}c_{,\alpha}x_{e},f^{(k-1)}_{,en\dots n}$

Последняя формула эквивалентна равенству (8).

Соотношения (7) и (8) выражают значения производных $f^{(k)}_{,in\dots n}$ и $f^{(k)}_{,tn\dots n}$ через $f^{(k)}_{n\dots n}$, $f^{(k-1)}_{n\dots n}, f^{(k-1)}_{,en\dots n}x_{e\gamma}$. Для определения последнего значения (7) положим вместо $k$ индекс $k-1$, получим

$$f^{(k-1)}_{,en\dots n}x_{e\gamma} = (f^{(k-2)}_{n\dots n})_{,\gamma} + (\mathrm{k}-2)g^{\rho\tau}b_{\gamma\rho}x_{e,\tau}f^{(k-2)}_{,en\dots n}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в равенство (7), находим

$$f^{(k)}_{,in\dots n} = f^{(k)}_{n\dots n}\mathrm{\nu_i} + g^{\alpha\beta}x_{i,\beta}(f^{(k-1)}_{n\dots n})_{,\alpha} + (k-1)g^{\alpha\beta}g^{\sigma\gamma}b_{\alpha\sigma}g_{\tau\beta}x_{i,\beta}(f^{(k-2)}_{n\dots n})_{,\gamma} +$$
$$+(k-1)(k-2)g^{\alpha\beta}g^{\sigma\gamma}b_{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}x_{i,\beta}b_{\gamma\rho}x_{e,\tau}f^{(k-2)}_{,en\dots n} \quad (10)$$

Соотношение (10) выражает значения $f^{(k)}_{,in\dots n}$ через $f^{(k)}_{,n\dots n}$, $f^{(k-1)}_{,n\dots n}, f^{(k-2)}_{,n\dots n}$, $f^{(k-2)}_{,en\dots n}x_{e,\tau}$, причем последнюю величину можно вычислить по (9) при значении k на единицу меньше и исключить из соотношений (10). Проделав эту процедуру (M-1) раз, получим

$$f^{(k)}_{,in\dots n} = f^{(k)}_{n\dots n}\mathrm{\nu_i} + g^{\alpha\beta}x_{i,\beta}(f^{(k-1)}_{n\dots n})_{,\alpha} + \sum_{R=2}^{M} C^{k-R}_{R-1}(R-1)!\, g^{\alpha_1\beta_1}x_{i,\beta_1}(f^{(k-R)}_{n\dots n})_{,\alpha_R}B^{\alpha_R}_{\alpha_1} +$$
$$+ C^{k-M-1}_{R-1}M!\ g^{\alpha_1\beta_1}x_{i,\beta_1}x_{e,\alpha_{M+1}}f^{(R-M)}_{,en\dots n}B^{\alpha_{M+1}}_{\alpha_1}, \quad (11)$$

Здесь

$$B^{\alpha_R}_{\alpha_1} = \prod_{N=2}^{R} b^{\alpha_N}_{\alpha_{N-1}} = \prod_{N=2}^{R} b_{\alpha_{N-1}}\beta_N g^{\alpha_N\beta_N} = b_{\alpha_1\beta_2}g^{\alpha_2\beta_2}\, b_{\alpha_2\beta_3}\dots b_{\alpha_{R+1}\beta_R}g^{\alpha_R\beta_R}. \quad (12)$$

Доказательство (11) построим методом индукции. При M=1 правая часть (11) преобразуется к виду

$$f^{(k)}_{,in\dots n} = f^{(k)}_{n\dots n}\mathrm{\nu_i} + g^{\alpha\beta}x_{i,\beta}(f^{(k-1)}_{n\dots n})_{,\alpha} + (R-1)g^{\alpha_1\beta_1}b_{\alpha_1\beta_2}g^{\alpha_2\beta_2}x_{i,\beta_1}x_{i,\beta_2}f^{(R-1)}_{n\dots n}$$

При M=2, расписав правую часть равенства (11), получаем формулу (10).

Пусть формула (11) верна для M, покажем, что тогда она верна и для M+1. Из (9) получаем

$$f_{,en\dots n}^{(k-M)} x_{e,\alpha_{M+1}} = (f_{n\dots n}^{(R-M-1)})_{,\alpha_{M+1}} + (R-M-1) g^{\rho\tau} b_{\alpha_{M-1}} x_{e,\tau} f_{,en\dots n}^{R-M-1}. \qquad (14)$$

Подставляем (14) в правую часть (11), находим

$$f_{,in\dots n}^{(k)} = f_{n\dots n}^{(k)} \nu_{\mathrm{i}} + g^{\alpha\beta} x_{i,\beta} (f_{n\dots n}^{(k-1)})_{,\alpha} + \sum_{R=2}^{M} C_{k-1}^{k-R} (R-1)!\, g^{\alpha_1\beta_1} x_{i,\beta_1} (f_{n\dots n}^{(k-R)})_{,\alpha_R} B_{\alpha_1}^{\alpha_R} + \\ + C_{k-1}^{k-M-1} M!\; g^{\alpha_1\beta_1} x_{i,\beta_1} (f_{n\dots n}^{(R-M-1)})_{,\alpha_{M+1}} B_{\alpha_1}^{\alpha_{M+1}} + C_{R-1}^{R-M-1} M!\, g^{\alpha_1\beta_1} x_{i,\beta_1} (R-M- \\ -1) g^{\rho\tau} b_{\alpha_{M+1}} x_{e,\tau} f_{,en\dots n}^{R-M-1} B_{\alpha_1}^{\alpha_{M+1}} = f_{n\dots n}^{(k)} \nu_{\mathrm{i}} + g^{\alpha\beta} x_{i,\beta} (f_{n\dots n}^{(k-1)})_{,\alpha} + \sum_{R=2}^{M} C_{k-1}^{k-R} (R- \\ -1)!\, g^{\alpha_1\beta_1} x_{i,\beta_1} (f_{n\dots n}^{(k-R)})_{,\alpha_R} B_{\alpha_1}^{\alpha_R} + C_{k-1}^{k-M-1} M!\, (R-M-1)\, g^{\alpha_1\beta_1} x_{i,\beta_1} g^{\rho\tau} b_{\alpha_{M+1}\rho} x_{e,\tau} f_{,en\dots n}^{R-M-1} B_{\alpha_1}^{\alpha_{M+1}}.$$

Так как $C_{k-1}^{k-M-1} M!\,(R-M-1) = = C_{k-1}^{k-(M+1)-1} (M+1)!$, то для доказательства исходного соотношения достаточно показать, что $g^{\rho\tau} b_{\alpha_{M+1}} x_{e,\tau} B_{\alpha_1}^{\alpha_{M+1}} = x_{e,\alpha_{M+2}} B_{\alpha_1}^{\alpha_{M+2}}$.

Последнее равенство следует из (12), если положить $\tau = \alpha_{M+2}, \rho = \beta_{M+2}$

Равенство (11) доказано для M= 1,2,…, (K-1), так как при k=1 формула (7) переходит в (1), и при M=k

$$f_{,in\dots n}^{(k)} = f_{n\dots n}^{(k)} \nu_{\mathrm{i}} + g^{\alpha\beta} x_{i,\beta} (f_{n\dots n}^{(k-1)})_{,\alpha} + \sum_{R=2}^{k} C_{k-1}^{k-R} (R-1)!\, g^{\alpha_1\beta_1} x_{i,\beta_1} (f_{n\dots n}^{(k-R)})_{,\alpha_R} B_{\alpha_1}^{\alpha_R}. \qquad (15)$$

Рассмотрим контравариантный тензор $g^{\alpha_1\beta_1} B_{\alpha_1}^{\alpha_R}$, имеем

$$g^{\alpha_1\beta_1} B_{\alpha_1}^{\alpha_2} = g^{\alpha_1\beta_1} b_{\alpha_1\beta_2} g^{\alpha_2\beta_2} = b^{\alpha_2\beta_1}$$
$$g^{\alpha_1\beta_1} B_{\alpha_1}^{\alpha_3} = g^{\alpha_1\beta_1} b_{\alpha_1\beta_2} g^{\alpha_2\beta_2} b_{\alpha_2\beta_3} g^{\alpha_3\beta_3} = g^{\alpha_1\beta_1} g^{\alpha_3\beta_3} c_{\alpha_1\beta_3} = 2H b^{\beta_1\alpha_3} - K g^{\beta_1\alpha_3} \qquad (16)$$

При получении (16) использовались равенства

$$c_{\alpha_1\beta_3} = g^{\alpha_2\beta_2} b_{\alpha_1\beta_2} b_{\alpha_2\beta_3} = 2H b_{\alpha_1\beta_3} - K g_{\alpha_1\beta_3} \qquad (17)$$

Можно показать, что тензор $\mathrm{g}^{\alpha_1\beta_1} \mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_R}$, можно представить в виде

$$\mathrm{g}^{\alpha_1\beta_1} \mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_R} = \mathrm{A_R} \mathrm{b}^{\beta_1\alpha_R} + \mathrm{B_R} \mathrm{b}^{\beta_1\alpha_R} \qquad (18)$$

Здесь $\mathrm{A_R}$ и $\mathrm{B_R}$ – функции H и K.

Определим $\mathrm{A_R}$ и $\mathrm{B_R}$ . Для этого вычислим $\mathrm{g}^{\alpha_1\beta_1} \mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_{R+1}}$

$$\mathrm{g}^{\alpha_1\beta_1} \mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_{R+1}} = \mathrm{g}^{\alpha_1\beta_1} \mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_R} \mathrm{b}_{\alpha_R\beta_{R+1}} \mathrm{g}^{\alpha_R\beta_{R+1}} = \left(\mathrm{A_R} \mathrm{b}^{\beta_1\alpha_R} + \mathrm{B_R} \mathrm{b}^{\beta_1\alpha_R}\right) \mathrm{b}_{\alpha_R\beta_{R+1}} \mathrm{g}^{\alpha_R\beta_{R+1}} = \\ \mathrm{A_R} \mathrm{b}^{\alpha\beta_1} \mathrm{g}^{\alpha_R} \mathrm{b}_{\alpha_R\beta_{R+1}} \mathrm{g}^{\alpha_R+1\beta_{R+1}} + \mathrm{B_R} \mathrm{b}^{\beta_1\alpha_{R+1}} = \mathrm{A_R} \mathrm{b}^{\alpha\beta_1} \mathrm{c}_{\alpha\beta_{R+1}} \mathrm{g}^{\alpha_{R+1}\beta_{R+1}} + \mathrm{B_R} \mathrm{b}^{\beta_1\alpha_{R+1}} = \\ (2\mathrm{A_R} \mathrm{H} + \mathrm{B_R}) \mathrm{g}^{\beta_1\alpha_{R+1}} - \mathrm{A_R} \mathrm{K} \mathrm{g}^{\beta_1\alpha_{R+1}}. \qquad (19)$$

Так как согласно (18) имеем:

$$\mathrm{g}^{\alpha_1\beta_1} \mathrm{B}_{\alpha_1}^{\alpha_{R+1}} = \mathrm{A_{R+1}} \mathrm{b}^{\beta_1\alpha_{R+1}} + \mathrm{B_{R+1}} \mathrm{b}^{\beta_1\alpha_{R+1}} \qquad (20)$$

Из (20) получаем систему рекуррентных уравнений для определения $\mathrm{A_R}$ и $\mathrm{B_R}$ :

$$\mathrm{A_{R+1}} = 2\mathrm{A_R} \mathrm{H} + \mathrm{B_R},\ \mathrm{B_{R+1}} = -\mathrm{A_R} \mathrm{K} \qquad (21)$$

Представляя выражения H и K через главные кривизны $2\mathrm{H} = \aleph_1 + \aleph_2$, $\mathrm{K} = \aleph_1 \cdot \aleph_2$ получаем из (21)

$$\mathrm{A_{R+1}} = \mathrm{A_R}(\aleph_1 + \aleph_2) - \mathrm{A_{R-1}} \aleph_1 \cdot \aleph_2,$$
$$\mathrm{B_{R+1}} = -\mathrm{A_R} \aleph_1 \cdot \aleph_2 \qquad (22)$$

Из соотношений (16) следует, что

$\mathrm{A_2} = 1,\ \mathrm{B_2} = 0.$

$\mathrm{A_3} = \aleph_1 + \aleph_2$, $\mathrm{B_3} = -\aleph_1 \cdot \aleph_2$. Решение бесконечной системы рекуррентных уравнений (22) при указанных начальных значениях можно записать в виде

$$\mathrm{A_R} = \sum_{\mathrm{p}=0}^{\mathrm{R}-2} \aleph_1^{\mathrm{R}-2-\mathrm{p}} \aleph_2^{\mathrm{p}},$$
$$\mathrm{B_R} = \sum_{\mathrm{p}=0}^{\mathrm{R}-3} \aleph_1^{\mathrm{R}-2-\mathrm{p}} \aleph_2^{\mathrm{p}+1} \qquad (23)$$

Соотношения (23) выполняются при $\mathrm{R} \gg 3$ , при $\mathrm{R} = 2$ следует положить $\mathrm{B_2} = 0$.

Подставляя значения (23) в (18) и (15) окончательно имеем для производных

$$f^{(k)}_{,in\dots n} = f^{(k)}_{n\dots n}\nu_i + g^{\alpha\beta}x_{i,\beta}\{(f^{(k-1)}_{n\dots n})_{,\alpha} - \sum_{R=3}^{k}\sum_{p=0}^{R-3} C^{k-R}_{k-1}(R-1)!\,\aleph_1^{R-2-p}\aleph_2^{p+1}(f^{(k-R)}_{n\dots n})_{,\alpha}\} +$$
$$+g^{\alpha\beta}x_{i,\beta}\sum_{R=2}^{k}\sum_{p=0}^{R-2} C^{k-R}_{k-1}(R-1)!\,\aleph_1^{R-2-p}\aleph_2^{p+1}(f^{(k-R)}_{n\dots n})_{,\alpha}. \quad (24)$$

Вычисляя $f^{(k-1)}_{,en\dots n}$по формуле (24), окончательное выражение для производной

$$f^{(k)}_{,tn\dots n} = \frac{\delta f^{(k-1)}_{n\dots n}}{\delta t} - cf^{(k)}_{n\dots n} + (k-1)g^{\alpha\beta}c_{,\beta}\{(f^{(k-2)}_{n\dots n})_{,\alpha} - \sum_{R=3}^{k-1}\sum_{p=0}^{R-3} C^{k-R-1}_{k-2}(R-$$
$$-1)!\,\aleph_1^{R-2-p}\aleph_2^{p+1}(f^{(k-R-1)}_{n\dots n})_{,\alpha}\} + (R-1)b^{\alpha\beta}c_{,\beta}\sum_{R=2}^{k-1}\sum_{p=0}^{R-2} C^{k-R-1}_{k-2}(R-1)!\,\aleph_1^{R-2-p}\aleph_2^{p}(f^{(k-R-1)}_{n\dots n})_{,\alpha}. \quad (25)$$

Применяя (24) и (25) к $f^+(x_i,t)$ и$f^-(x_i,t)$ , получим кинематические и геометрические условия совместности для скачков производных n-го порядка в виде.

$$[f^{(k)}_{,in\dots n}] = [f^{(k)}_{n\dots n}]\nu_i + g^{\alpha\beta}x_{i,\beta}\{[f^{(k-1)}_{n\dots n}]_{,\alpha} - \sum_{R=3}^{k}\sum_{p=0}^{R-3} C^{k-R}_{k-1}(R-1)!\,\aleph_1^{R-2-p}\aleph_2^{p+1}[f^{(k-R)}_{n\dots n}]_{,\alpha}\} +$$
$$+ b^{\alpha\beta}x_{i,\beta}\sum_{R=2}^{k}\sum_{p=0}^{R-2} C^{k-R}_{k-1}(R-1)!\,\aleph_1^{R-2-p}\aleph_2^{p}[f^{(k-R)}_{n\dots n}]_{,\alpha} \quad (26)$$
$$[f^{(k)}_{,tn\dots n}] = \frac{\delta[f^{(k-1)}_{n\dots n}]}{\delta t} - c[f^{(k)}_{n\dots n}] + (k-1)g^{\alpha\beta}c_{,\beta}\{[f^{(k-2)}_{n\dots n}]_{,\alpha} - \sum_{R=3}^{k-1}\sum_{p=0}^{R-3} C^{k-R-1}_{k-2}(R-$$
$$-1)!\,\aleph_1^{R-2-p}\aleph_2^{p+1}[f^{(k-R-1)}_{n\dots n}]_{,\alpha}\} + (R-1)b^{\alpha\beta}c_{,\beta}\sum_{R=2}^{k-1}\sum_{p=0}^{R-2} C^{k-R-1}_{k-2}(R-1)!\,\aleph_1^{R-2-p}\aleph_2^{p}[f^{(k-R-1)}_{n\dots n}]_{,\alpha} \quad (27)$$

В правые части уравнений (26) и (27) входят только нормальные скачки производных до k-го порядка включительно, и их производные по направлениям, касательным к поверхности разрыва $\sum(t)$.

# KINETIC AND GEOMETRIC COMPATIBILITY CONDITIONS ON A SURFACE OF DISCONTINUITY

**RYCHKOV Viktor Afanasyevich**
Candidate of Sciences in Physical and Mathematical, Associate Professor
Povolzskiy State University of Telecommunications and Informatics
Samara, Russia

*We consider a function that is continuous and differentiable in two domains adjacent to the surface on both sides. On the surface, the function and its partial derivatives may undergo a discontinuity. Geometric and kinematic compatibility conditions for first-order derivatives are obtained. Formulas for kinetic and geometric compatibility conditions for n-order derivative jumps are then derived and proven.*
**Keywords:** Normal jumps of derivatives, compatibility conditions, contravariant tensor, Hadamard.