МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПИСАНИЯ В ВУЗЕ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ГРАФОВ

ДЕРЕВЯНЧУК Екатерина Дмитриевна
кандидат физико-математических наук, доцент
ЛЕЖНЕВ Игорь Алексеевич
студент
Пензенский государственный университет
г. Пенза, Россия

Данная работа посвящена методике решения задачи оптимизации расписания в вузе с помощью теории графов. Для решения данной задачи применяется аппарат теории графов. Предложен метод раскраски графа с учётом условий необходимых для составления расписания. Разработанный алгоритм позволяет составить расписание и дать оценку о минимальном количестве аудиторий необходимое для проведения занятий.
Ключевые слова: раскраска графа, теория графов, составление расписания.

С задачей составления расписания сталкиваются как в образовательных системах, так и на любых производствах [1-8].

При составлении расписания необходимо учитывать множество факторов:

– один и тот же преподаватель не может вести сразу несколько курсов;

– курсы не могут быть проведены одновременно, потому что для них нужна какая-нибудь специально оборудованная аудитория.

Целью данной работы – *на основе, разработанного метода в работе [1]*

предложить варианты оптимального расписания, а также дать оценку оптимального количества пар в день и минимального количества аудиторий.

Сформулируем постановку задачи.

Постановка задачи – *составить оптимальное расписание с учётом следующих условий: оптимального количества пар в день и наличия аудиторий.*

Составим граф G(X, A), в котором вершинам будут соответствовать предметы, а две вершины будут соединены между собой ребром, если эти предметы не могут быть проведены одновременно. Тогда исходный граф будет задан таблицей смежности, где элемент $A_{ij}=1$ – тогда, когда вершина i-тая соединена с вершиной j-той, что на практике означает, что предметы i-тый и j-тый не могут быть проведены одновременно (рисунок 1).

	X1	X2	…	Xn
X1	A_{11}	A_{12}	…	A_{1n}
X2	A_{21}	A_{22}	…	A_{2n}
…	…	…	…	…
Xn	A_{n1}	…		A_{nn}

Рисунок 1. **Матрица смежности[1] графа в общем виде**

[1]Как правило, в теории графов матрицу смежности изображают в виде таблицы, как показано на рисунке 1.

Сформулируем **математическую постановку задачи:**

1. Найти оптимальную раскраску графа.

2. Определить максимальное количество пар в день.

3. Определить необходимое количество аудиторий для одновременного проведения занятий.

Решение.

1. Пусть задан граф G(X, A) (рисунок 2а), где X – множество вершин, которым будут соответствовать учебные дисциплины, а A – множество рёбер, причём каждое ребро соединяет две вершины, если изучаемые дисциплины не могут быть проведены одновременно.

На основе методики, предложенной в работе [1], рассмотрим **первый этап алгоритма** для заданного графа.

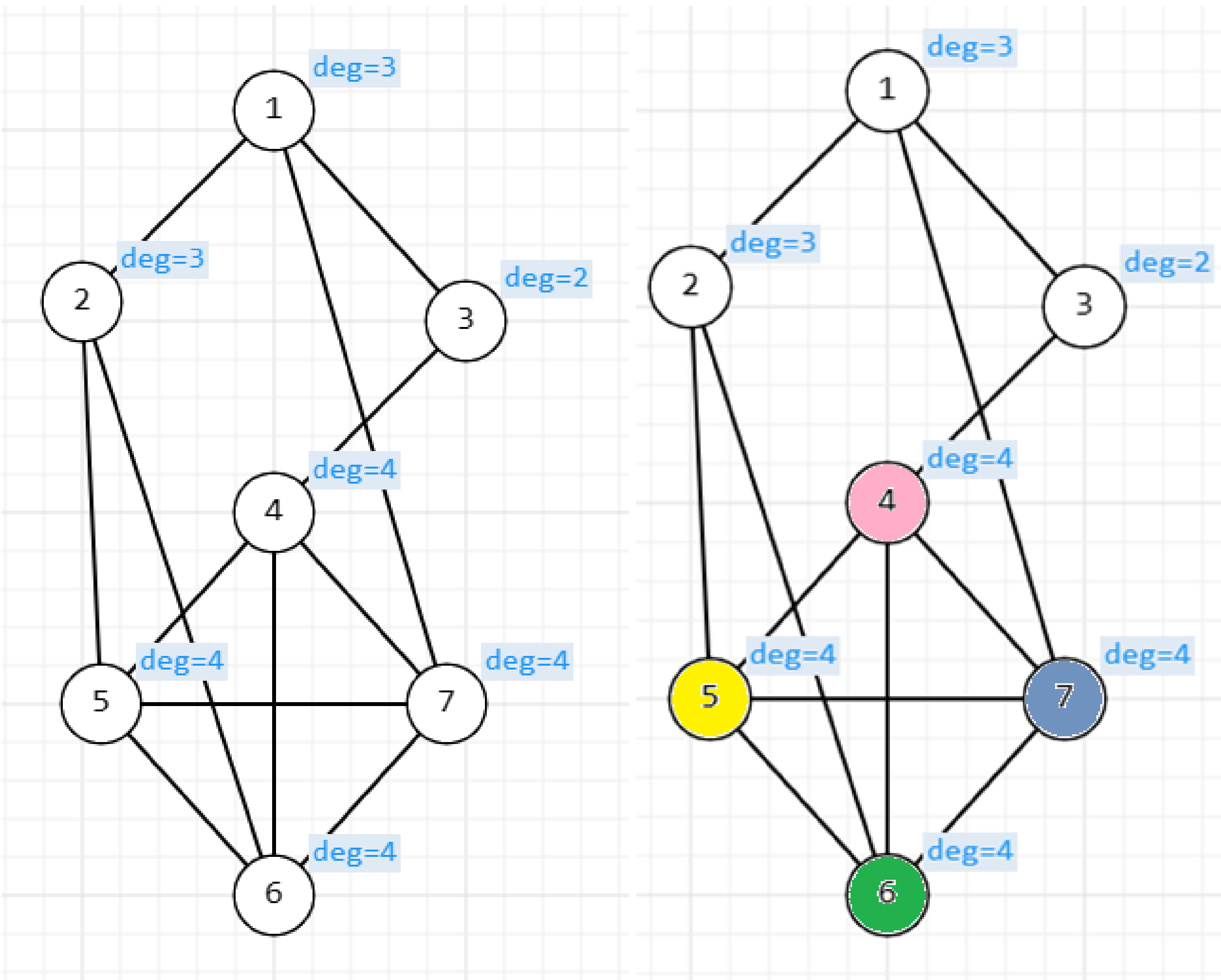


Рисунок 2. **Исходный граф G(X, A) (а). Полный подграф K_4 (б)**

Выделим максимальный полный подграф[2] графа G(X, A) (рисунок 2б). Он состоит из четырех вершин: x4, x5, x6, x7. Размер максимального подграфа показывает минимальное число цветов для раскраски вершин исходного графа G.

[2]**Полный подграф графа** – это подграф, в котором каждая вершина соединена со всеми остальными вершинами. **Максимальный полный подграф** – это полный подграф, который среди всех подграфов исходного графа имеет наибольшее число вершин.

В общем случае, когда граф задан матрицей смежности, можно использовать любой метод поиска максимально сильного подграфа. Далее определив вершины, которые входят в такой максимальный сильный подграф, переставляем столбцы и строки исходной матрицы смежности (рисунок 3а) так, чтобы сначала располагались вершины максимально сильного подграфа. В результате получаем матрицу β (рисунок 3б).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	1	1	0	0	0	1
x_2	1	0	0	0	1	1	0
x_3	1	0	0	1	0	0	0
x_4	0	0	1	0	1	1	1
x_5	0	1	0	1	0	1	1
x_6	0	1	0	1	1	0	1
x_7	1	0	0	1	1	1	0

(а)

	x_4	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3
x_4	0	1	1	1	0	0	1
x_5	1	0	1	1	0	1	0
x_6	1	1	0	1	0	1	0
x_7	1	1	1	0	1	0	0
x_1	0	0	0	1	0	1	1
x_2	0	1	1	0	1	0	0
x_3	1	0	0	0	1	0	0

(б)

Рисунок 3. **Матрица смежности графа G(X, A): исходная (а); преобразованная матрица смежности β (б)**

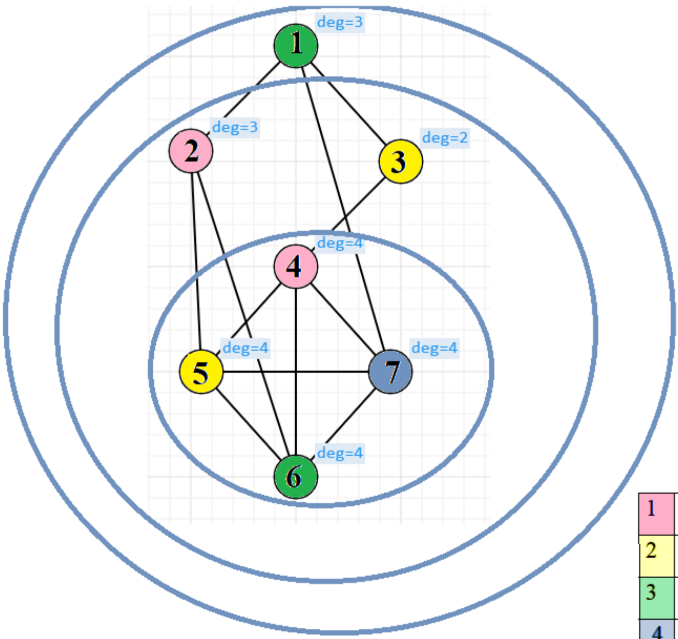
Число вершин максимально сильного подграфа определяет минимальное количество красок – **хроматическое число подграфа**.

Тогда минимальное количество красок для раскраски всего графа будет равно хроматическому числу максимального сильного подграфа.

Таким образом, возвращаясь к задаче составления расписания, на первом этапе алгоритма определим оптимальное количество пар в день. Для рассматриваемого примера, на практике потребуется минимум четыре пары, чтобы провести все занятия за один день всеми преподавателями.

Вершины 4, 5, 6, 7 – это занятия, которые не могут быть одновременно проведены, а следовательно, они будут проводиться в разные часы. Так как подграф максимальный можно раскрасить четырьмя красками, то, следовательно, четырех цветов будет достаточно, чтобы раскрасить остальные вершины. На практике это означает, что при наличии достаточного числа аудиторий, т. е. больше одной аудитории, все оставшиеся дисциплины можно распределить и провести одновременно с 4, 5, 6, 7 дисциплинами.

Для графа G(X, A) возможны следующие варианты расписаний. Например, на рисунке 4а представлен первый вариант расписания для графа G(X,A) в случае проведения занятий с первой пары и при наличии двух свободных аудиторий.



1	4-черчение	1	2-физика
2	5-русский язык	2	3-химия
3	6-геометрия	3	1-алгебра
4	7-физическая культура		

(а)

1	4-черчение	1	
2	5-русский язык	2	3-химия
3	6-геометрия	3	1-алгебра
4	7-Физическая культура	4	2-физика

(б)

1	4-черчение	1	1-алгебра	1	2-физика
2	5-русский язык	2	3-химия		
3	6-геометрия	3			
4	7-физическая культура	4			

(в)

Рисунок 4. **Графо-кольцевая схема для первого варианта расписания. Варианты расписания для графа G(X, A): первый вариант (а); второй вариант (б); третий вариант (в)**

На рисунке 4б представлен второй вариант расписания для G(X,A) в случае проведения занятий с первой пары и при наличии двух свободных аудиторий.

На рисунке 4в представлен вариант расписания для G(X,A) в случае проведения занятий, начиная с первой пары и при наличии трёх свободных аудиторий.

Таким образом, анализ результатов раскраски графа позволяет оценить минимальное количество часов и аудиторий для проведения всех занятий за один день, а именно: для того, чтобы провести все занятия минимум в двух аудиториях, необходимо четыре пары. Но, как видно, из примера, раскраска вершин, не входящих в максимальный полный подграф, может иметь множество вариантов. Поэтому в зависимости от задачи можно предложить различные варианты расписания.

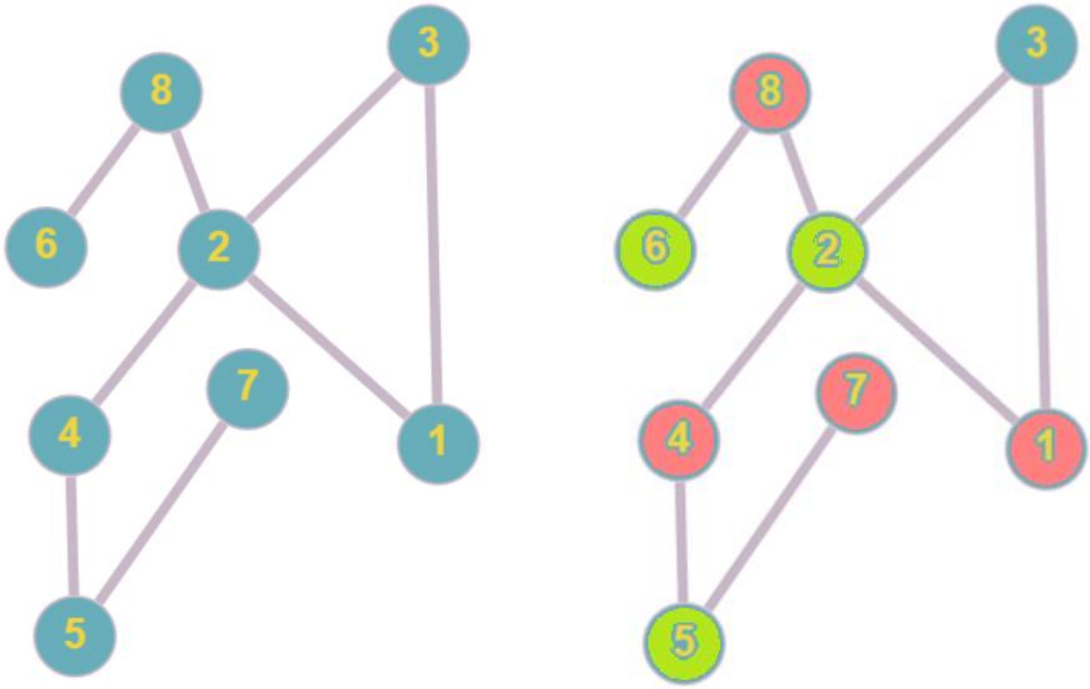
2 этап алгоритма.

На основе методики, разработанной в работе [1], представим вариант раскраски, когда необходимо распределить все занятия в первые часы учебного дня при наличии трёх свободных аудиторий. В результате получим вариант расписания как показано на рисунке 4в.

Численные результаты.

Задача 1. Пусть задан граф $G_1(X, A)$ как показано на рисунке 5а. Требуется составить соответствующее ему расписание с помощью предложенного алгоритма.

Решение. Максимальный полный подграф состоит из трех вершин (вершины 1, 2, 3). Следовательно, для исходного графа будет достаточно трех красок для раскраски исходного графа $G_1(X, A)$. Это означает, что на практике, достаточно будет трёх часов, чтобы провести все занятия при условии наличия четырёх свободных аудиторий.



(а) (б)

Рисунок 5. **Граф G_1(X, A): исходный (а); после раскраски (б)**

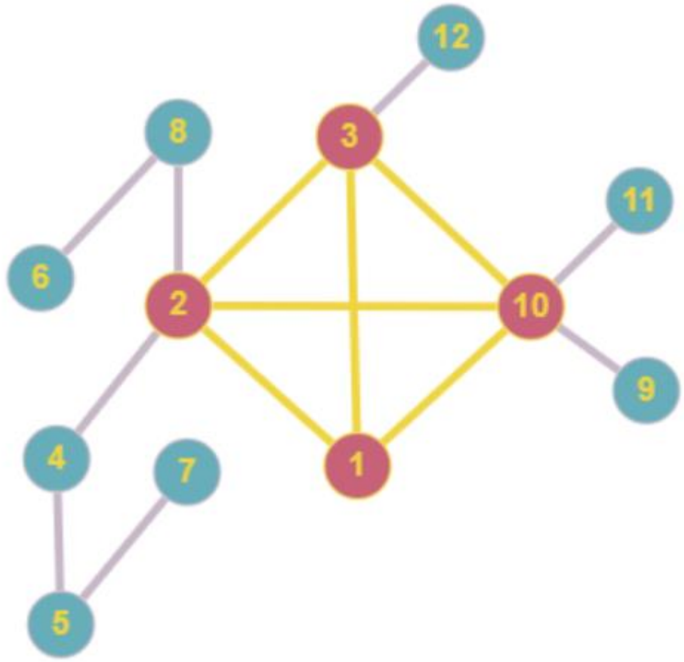
Для графа G_1(X, A) соответствующее расписание представлено на рисунке 6.

1	1-черчение	1	4-алгебра	1	7-физика	1	8- биология
2	2-русский язык	2	5-химия	2	6-биохимия		
3	3-геометрия						

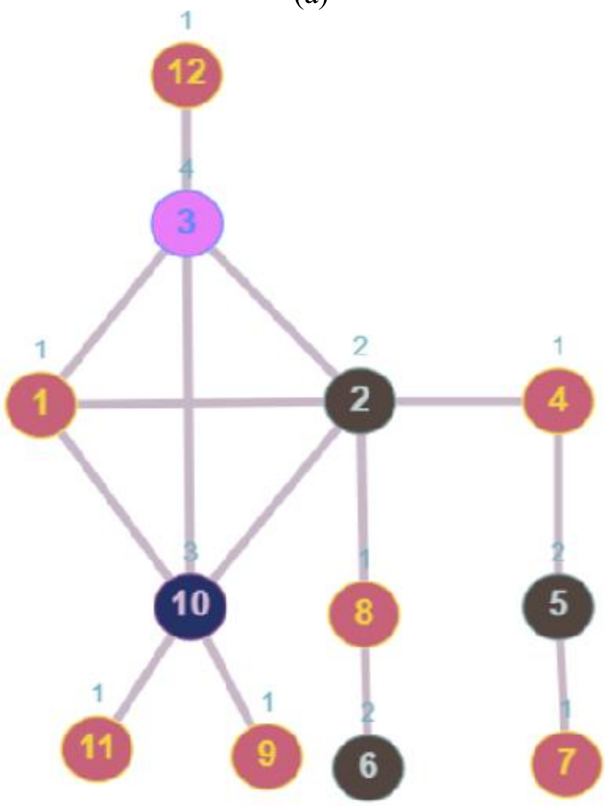
Рисунок 6. **Расписание на основе графа G_1(X, A)**

Задача 2. Пусть задан граф G_2(X, A) как показано на рисунке 7а. Требуется найти соответствующее ему расписание с помощью предложенного алгоритма.

*Решение.*1) Видно, что максимальный полный подграф состоит из четырех вершин (вершины № 1, № 2, № 3 и № 10). Тогда для исходного графа будет достаточно четырёх красок для раскраски исходного графа.



(а)



(б)

Рисунок 7. **Исходный граф $G_2(X, A)$ (а); граф $G_2(X, A)$ после раскраски (б)**

Следовательно, на практике достаточно будет четырёх часов, чтобы провести все занятия при условии наличия семи свободных аудиторий. На рисунке 8 представлено соответствующее раскраске графа расписание. Вершинам соответствуют предметы: вершине № 1 – черчение; № 2 – русский язык; № 3– геометрия; № 4 – алгебра; № 5 – химия; № 6 – биохимия; № 7 – иностранный язык; № 8 – физика; № 9 – биология; № 10 – история; № 11 – правоведение; № 12 – физическая культура.

1	**№1**	**1**	**№4**	**1**	**№8**	**1**	**№9**	**1**	**№ 11**	**1**	**№ 12**	**1**	**№7**
2	**№2**	**2**	**№5**	**2**	**№6**								
3	**№3**												
4	**№10**												

Рисунок 8. **Расписание на основе графа G_2(X, A)**

Таким образом, в данной работе дано подробное описание методики, разработанной в работе [1], по оптимальной раскраске графа, а именно:

– найдена оптимальная раскраска графа, при этом определено минимальное количество пар в день, а также необходимое минимальное количество аудиторий для проведения всех занятий;

– в работе показано на примерах, что раскраска вершин графа может быть разной, а на практике это приводит ко множеству вариантов расписания, а следовательно и ко множеству вариантов расписания.

Результаты исследования могут быть использованы при составлении и анализе расписания в вузах, а также при составлении расписания конференций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анищик Т. А.* Дискретная математика. Элементы теории графов. – Краснодар: КубГАУ, 2020. – 79 с.
2. *Волченская Т.В.* Теория графов: учеб. пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1998. – 63 с.
3. *Гладков Л.А.* Дискретная математика: учебное пособие / Л.А. Гладков, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик: под редакцией В.М. Курейчика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 496 с.
4. *Деревянчук Е.Д.* Методика построения алгоритмов для практических задач с применением теории графов // Научный потенциал.– 2024. – № 2(45). – С. 37-44.
5. *Калугин Н.А., Калугин А.Н.* Элементы теории графов: учеб. пособие. – Самара: Изд-во Самар, гос. аэрокосм, ун-та, 2013. – 48 с.
6. *Омельченко А.В.* Теория графов. – М.: МЦНМО, 2021. – 415 с.
7. *Хаггарти Р.* Дискретная математика для программистов. – М.: Техносфера, 2003. – 320 с.
8. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.

METHODOLOGY FOR SOLVING THE OPTIMIZING THE SCHEDULE PROBLEM AT THE UNIVERSITY WITH THE HELP OF GRAPH THEORY

DEREVYANCHUK Ekaterina Dmitrievna
Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor
LEZHNEV Igor Alekseevich
Student
Penza State University
Penza, Russia

This work is devoted to the methodology of solving the problem of optimizing the schedule in higher education using graph theory. To solve this problem, the apparatus of graph theory is used. A graph coloring method is proposed, taking into account the conditions necessary for scheduling. The developed algorithm allows you to create a schedule and give an estimate of the minimum number of classrooms needed for classes.

Keywords: graph coloring, graph theory, scheduling.