МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ОБЗОРА МЕТОДОВ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ САУ

ДЕРЕВЯНЧУК Наталия Владимировна
кандидат технических наук, доцент
Пензенский филиал Военной академии материально-технического обеспечения
им. генерала армии А.В. Хрулёва
г. Пенза, Россия

Данная работа посвящена методике изложения методов анализа нелинейных САУ. Приведено решение конкретной задачи по данному вопросу. Применяется: математический аппарат дифференциального исчисления, а также математический анализ. Рассмотрена методика изложения методов анализа нелинейных САУ.

Ключевые слова: методика, система автоматического управления (САУ), линеаризация, припасовывание, метод фазовой плоскости, гармоническая линеаризация.

При анализе и синтезе нелинейных САУ используются приближенные методы решения практических задач, так как общих аналитические методов решения нелинейных дифференциальных уравнений пока нет. Приближенные методы решения практических задач можно разделить на методы, основанные на приближенном решении нелинейных дифференциальных уравнений (методы «припасовывания», фазовых траекторий, точечных преобразований, графо-аналитические, частотный В.М. Попова, численные, моделирования) и методы, использующие линеаризацию нелинейных характеристик звеньев САУ с последующим применением разработанных методов анализа и синтеза линейных САУ (методы малого параметра, гармонического баланса, статистической линеаризации).

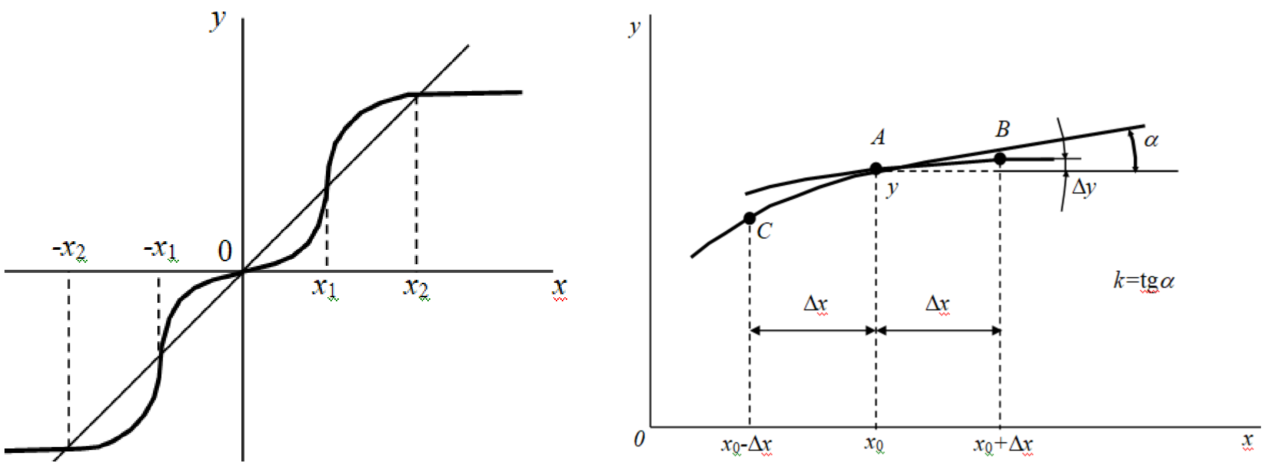
Рассмотрим часто используемые методы для расчетов переходных процессов в нелинейных САУ.

1. Нелинейные САУ можно линеаризировать, если статические характеристики элементов САУ имеют плавный характер (без разрывов). Существует два основных метода линеаризации нелинейных статических характеристик: методик осреднения и метод малых отклонений. При использовании метода осреднения линеаризуемая нелинейная зависимость $y = f(x)$ (рисунок 1а) заменяется прямой линией с таким расчетом, чтобы на рабочем участке изменения x отклонение действительной зависимости от прямой было наименьшим. Очевидно, этот метод линеаризации не является строгим и по существу сводится к пренебрежению нелинейной зависимостью. Однако, несмотря на это, результаты линеаризации довольно близки к истинным при изменении входного сигнала в пределах: x1 < x < x2. Линеаризация по методу малых отклонений состоит в том, что нелинейная зависимость $y = f(x)$ непрерывная, с непрерывными производными в некоторой области изменения x (рисунок 1б). Она всегда может быть разложена в ряд Тейлора в окрестностях точки x_0, принадлежащей этой области:

$$\boldsymbol{y(x) = y(x_0) + \frac{\dot{y}(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{\ddot{y}(x_0)}{2!}\Delta x_2 + \dots}$$

При достаточно малых значениях отклонений Δx приближенно можно полагать:

$$\boldsymbol{y(x) \cong y(x_0) + k\Delta x}, \text{ где } \boldsymbol{k} = \frac{dy}{dx} \text{ при } \boldsymbol{x = x_0}.$$



а б

Рисунок.1. **Линеаризация: а) статических характеристик методом осреднения; б) непрерывной статической характеристики**

Перенося начало координат в точку А, получим простую линейную зависимость: $\boldsymbol{\Delta y(x) = y(x)\text{-}y(x_0) = k\,\Delta x}$

Геометрическая интерпретация данной линеаризации состоит в том, что нелинейная зависимость $y = f(x)$, графически выраженная кривой САВ, аппроксимируется касательной в точке А при малых значениях приращений Δx.

Таким образом, уравнение линеаризованной характеристики $y = f(x)$, записанное в отклонениях, будет иметь вид:

$\boldsymbol{\Delta y = k\,\Delta x}$, где $\boldsymbol{k = tga}$.

Данный метод линеаризации особенно удобен, когда зависимость $y = f(x)$ представлена графически.

Линеаризация уравнений систем автоматического управления методом малых отклонений широко применяется на практике, поскольку нормальным режимом работы САУ является режим малых отклонений.

2. Метод **припасовывания** представляет собой точный метод расчета динамики нелинейных систем. Он основан на исследовании динамики системы по участкам рассчитываемой кривой переходного процесса. При этом допускается, что на каждом участке движение системы описывается линейными дифференциальными уравнениями. Практически это возможно в системах, имеющих нелинейные звенья с кусочно-линейными статическими характеристиками. Особенностью решения дифференциальных уравнений в данном случае является то, что они имеют ненулевые начальные условия. Последовательно припасовывая, или «сшивая» найденные решения на участках, получают искомую результирующую кривую переходного процесса. Другими словами, метод припасовывания заключается в том, что решение нелинейного уравнения осуществляется по отдельным участкам, на которых процесс управления описывается с требуемой точностью линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Таким образом, переходной процесс этим методом определяется путем последовательного решения отдельных линейных уравнений по участкам, границы которых определяются пороговыми значениями нелинейной характеристики.

Метод припасовывания получил такое название, так как решение этим методом заключается в том, что нелинейная характеристика заменяется несколькими линейными участками и на каждом участке решается система линейных дифференциальных уравнений САУ. Полученные решения припасовывают (сшивают), принимая конечные значения решения и его производных на предыдущем участке за начальные условия решения на последующем участке.

Метод характеризуется громоздкостью расчетов, он трудоемок и в инженерной практике применяется сравнительно редко.

3. Метод **фазовой плоскости** был впервые введен академиком А.А. Андроновым [1]. Этот метод широко используется в инженерной практике при анализе нелинейных САУ, описываемых дифференциальными уравнениями 2-го или 3-го порядка.

Состояние САУ в любой момент времени характеризуется значением выходной координаты и (n-1) ее производных. В результате образуется n –мерное пространство, которое называется базовым. Точка, указывающая текущее состояние системы, называется изображающей точкой, а само пространство – фазовым. Если координаты будут изменяться, то изображающая точка будет перемещаться по траектории, которая называется фазовой траекторией. По виду фазовой траектории можно судить о динамических свойствах САУ. Если этот метод применяется для исследования САУ 2-го порядка, то фазовое пространство превращается в фазовую плоскость). Переходному процессу в системе будет соответствовать перемещение изображающей точки по фазовой траектории. Множество фазовых траекторий для различных начальных условий называется базовым фазовым портретом САУ. Метод визуальный, поэтому наглядность обеспечивается только для 2-го порядка.

Сущность метода фазовой плоскости заключается в построении фазовых траекторий по дифференциальным уравнениям в системе координат: отклонение регулируемой величины x и скорости ее изменения $y=\frac{dx}{dt}$. Процесс изменения траектории представляет собой движение изображающей точки на плоскости. Начальные условия системы определяют первоначальное положение изображающей точки по фазовой плоскости. Совокупность фазовых траекторий в плоскости (x, y) представляет собой фазовый портрет САУ.

Рассмотрим наиболее характерные фазовые портреты САУ. Для этого воспользуемся дифференциальным уравнением второго порядка

$$T^2\frac{d^2x}{dt^2}+2\xi T\frac{dx}{dt}+x(t)=0 \qquad (1)$$

Пусть коэффициент демпфирования $\xi = 0$. При $\xi = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$T^2\frac{d^2x}{dt^2}+x(t)=0 \qquad (2)$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем решения этого уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cdot\sin\omega t \\ y(t) &= A\omega\cos\omega t \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

где $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Из уравнения (3) получаем следующее соотношение

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{A^2\omega^2}=1, \qquad (4)$$

которое представляет собой уравнение эллипса с полуосями A и **ωA**. При различных начальных значениях A_i на фазовой плоскости получится семейство эллипсов. Эллипсы не пересекаются и имеют общий центр.

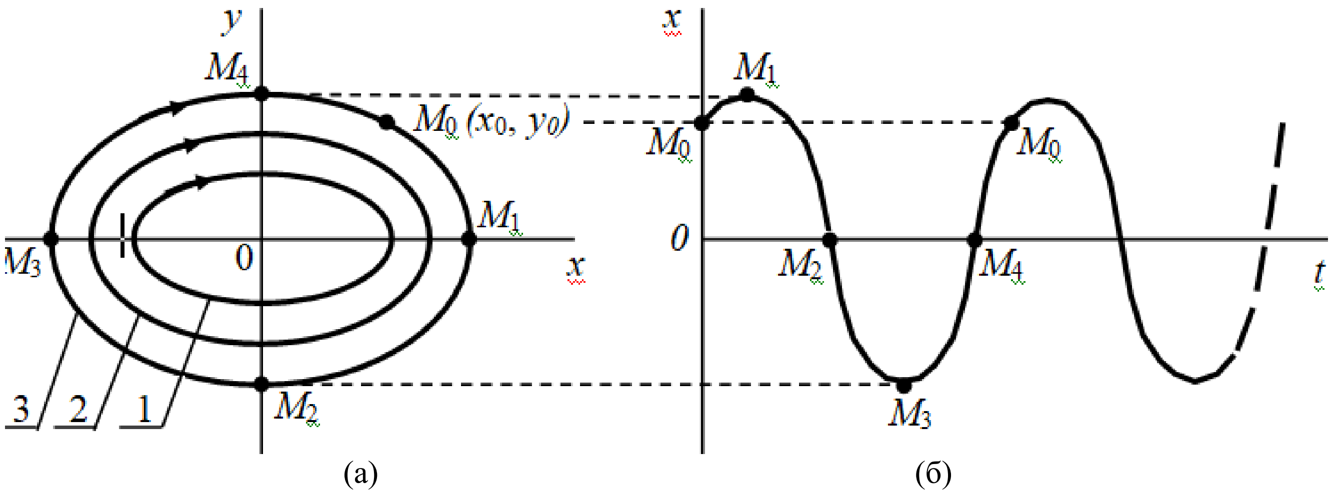


Рисунок 2. **Фазовый портрет (а) системы второго порядка и переходной процесс (б) в ней при ξ = 0**

Выберем на эллипсе 3 точку с координатами (x_0 y_0). Соответствующее положение этой точки в координатах x, t покажем на рисунке 2б. Точке M_4 на рисунке 2а соответствует точка M_1 на рисунке 2б и т. д.

Таким образом, движению изображающей точки M на фазовой плоскости (x, y) по эллипсу соответствует периодический колебательный процесс с постоянной амплитудой A и частотой $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (режим автоколебаний).

Пусть коэффициент демпфирования $\xi \neq 0$. $0 < \xi < 1$.

В этом случае характеристическое уравнение, соответствующее уравнение (1), имеет комплексно сопряженные корни

$$\lambda = -a+j\omega \text{ и } \lambda_2 = -a - j\omega, \qquad (5)$$

а решение уравнения (1) будет иметь вид

$$x(t)e^{-at}(C_1e^{j\omega t}+C_2e^{-j\omega t}). \qquad (6)$$

Используя формулу Эйлера $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$ выражение (6) может быть представлено в виде

$$x(t)=e^{-at}\left[(C_1+C_2)\cos\omega t+j(C_1-C_2)\sin\omega t\right] \qquad (7)$$

Так как при любых начальных условиях C1 = C2 окончательно получим

$$x(t)A\cdot e^{-at}\cos\omega t, \qquad (8)$$

где A = C1 + C2.

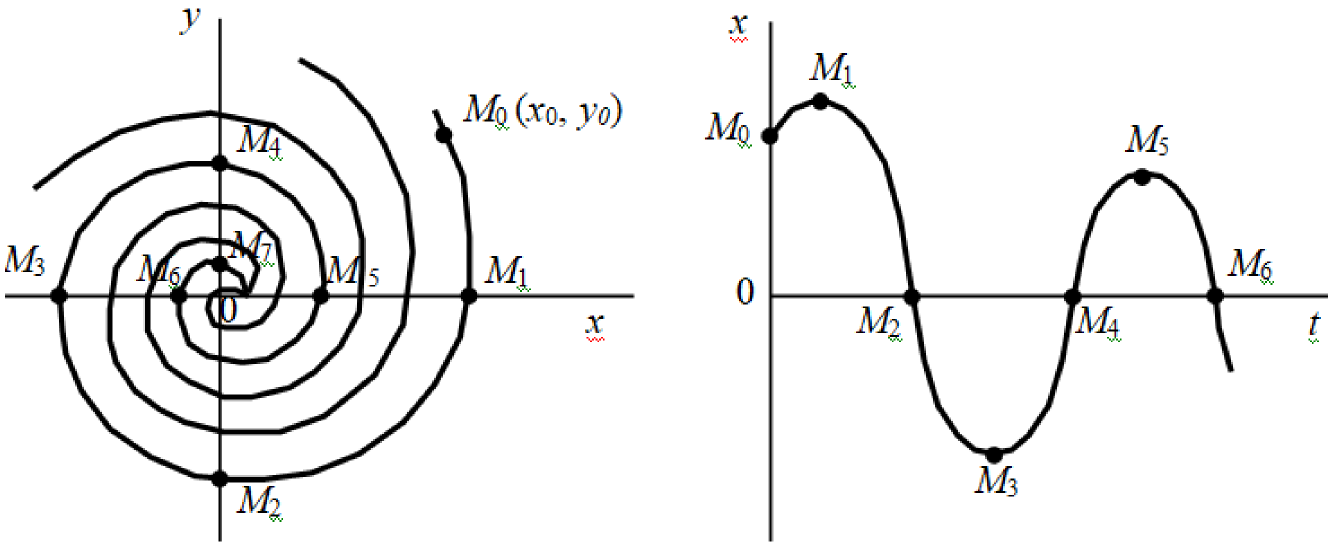
Значение второй координаты y определится из выражения (8)

$$y=\frac{dx}{dt}= -A\cdot e^{-at}(\alpha\cos\omega t+\omega\sin\omega t). \qquad (9)$$

Из выражения (8) и (9) определим выражение для радиуса – вектора R

$$R^2 = x^2+y^2=A^2e^{-2at}\left[\cos^2\omega t+(\alpha\cos\omega t+\omega\sin\omega t)^2\right] \qquad (10)$$

При изменении t от 0 до ∞ конец радиуса – вектор R на фазовой плоскости опишет кривую, которая имеет вид свертывающейся логарифмической спирали, так как при $t \to \infty$ $R \to 0$.



(а) (б)

Рисунок 3. **Фазовый портрет (а) системы второго порядка и переходной процесс; (б) в ней при $0 < \xi < 1$**

Возьмем на одной из фазовых траекторий (рисунок 3а) точку M0 (x_0, y_0). Перенесем эту точку на плоскость x,t (рисунок 3б). Двигаясь по фазовой траектории на графике переходного процесса (рисунок 3б), получим затухающий колебательный процесс (т. M1, M2, M3, M4 и т. д.).

Точкой равновесия будет начало координат фазовой плоскости. Эта точка фазовой плоскости является особой и называется устойчивым фокусом.

Пусть коэффициент демпфирования

$-1 < \xi < 0$.

Для этого случая корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (1) будут комплексно сопряженными и иметь положительные вещественные части

$\lambda_1 = \alpha + j\omega$ и $\lambda_2 = \alpha - j\omega$. (11)

Решение уравнения (1) при условии (11) будет иметь вид:

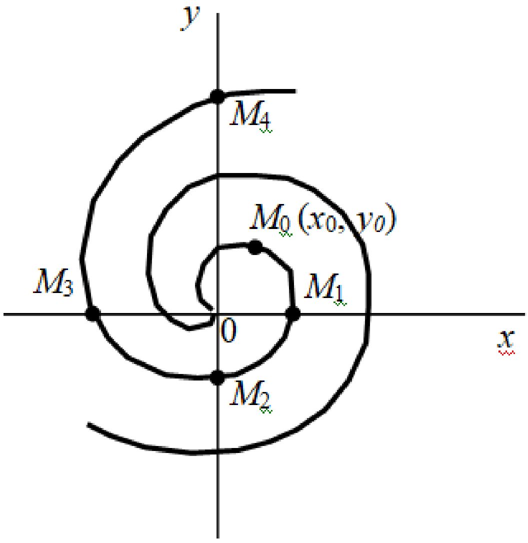
$x(t) = Ae^{\alpha t}\cos\omega t$ (12)

и $y(t) = \frac{dx}{dt} = Ae^{\alpha t}(\alpha\cos\omega t - \omega\sin\omega t)$. (13)

Из выражений (12) и (13) определится

$$R^2 = x^2 + y^2 = A^2e^{2\alpha t}\left[\cos^2\omega t + (\alpha\cos\omega t - \omega\sin\omega t)^2\right]. \quad (14)$$

Из анализа выражения (13) следует, что фазовой траекторией САУ в этом случае будет развертывающаяся логарифмическая спираль, т.к. при $t \to \infty$ $R \to \infty$.



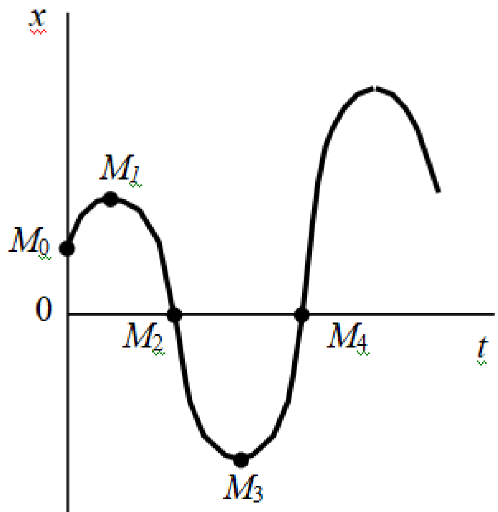


Рисунок 4. **Фазовый портрет (а) системы второго порядка и переходной процесс; (б) при -1 < ξ < 0**

Как видно из рисунка 4, переходной процесс представляет собой незатухающий колебательный процесс с неограниченно возрастающей амплитудой. Точка равновесия фазовой плоскости называется неустойчивым фокусом.

Таким образом, рассмотрена сущность метода фазовой плоскости применительно систем второго порядка. Достоинством данного метода является его простота и наглядность. Однако его применение ограничивается невысоким порядком САУ.

4. Идея метода **гармонической линеаризации** принадлежит Н.М. Крылову и Н.Н. Боголюбову [2]. Необходимо отметить также работы Е.П. Попова и И.П. Пальтова, в которых метод гармонической линеаризации обобщен, развит и применен к разнообразным конкретным задачам теории автоматического регулирования и управления. Метод гармонической линеаризации является приближенным способом отыскания периодических режимов в нелинейных динамических системах. Он основан на том, что при выполнении ряда условий, даже при наличии нелинейностей, установившиеся в системе колебания оказываются близкими к гармоническим.

Особенности поведения нелинейных систем создают трудности их математического описания. Во многих случаях возможно и целесообразно заменить реальные нелинейные характеристики некоторыми приближенными линейными зависимостями. Метод гармонической линеаризации позволяет получить приближенные частотные характеристики для существенно нелинейных элементов. Если на вход безынерционного элемента с характеристикой $y = f(x)$ подается гармонический сигнал x = $A\sin(\omega t)$ он, то на выходе элемента устанавливаются периодические колебания, которые можно представить с помощью ряда Фурье в виде суммы гармонических составляющих.

Другим словами, в основе метода лежит предположение, что колебания в нелинейной системе имеют гармонический характер (синусоидальный характер). Колебание любого вида может быть представлено в виде суммы бесконечного ряда гармоник. Метод гармонической линеаризации учитывает при анализе периодических колебаний влияние лишь первой гармоники. Так как реальные САУ в силу инерционных свойств можно рассматривать как фильтры нижних частот, которые не пропускают высших гармоник составляющих реального колебания, появляется возможность нелинейную функцию, характеризующую нелинейное звено, заменить линейным выражением, что существенно упрощает анализ нелинейной САУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесекерский В.А, Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления.– СПб.: Профессия, 2003. – 747 с.
2. *Дикарева О.Н., Дербуш Д.А.* Исследование режима автоколебаний методом гармонической линеаризации на примере маятника Фроуда // Современная наука: актуальные вопросы, достижения и инновации: сборник статей XVII Международной научно-практической конференции. В 2 ч. Ч. 1. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – 2024. – № 1. – С. 10-13.

THE METHODOLOGY OF THE PRESENTATION OF THE REVIEW OF METHODS ANALYSIS OF NONLINEAR ACS

DEREVYANCHUK Natalia Vladimirovna
Candidate of Science in Technology, Associate Professor
Penza branch of the Military Academy of Logistics named after Army General A.V. Khrulev
Penza, Russia

This work is devoted to the methodology of the presentation of methods for the analysis of nonlinear ACS. The solution of a specific problem on this issue is given. Applied: mathematical apparatus of differential calculus, as well as mathematical analysis. The methodology of the presentation of methods for the analysis of nonlinear ACS is considered.

Keywords: methodology, automatic control system (ACS), linearization, stocking, phase plane method, harmonic linearization.