

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМА ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА ДЛЯ СЕТИ С НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОКАМИ И СТОКАМИ

ДЕРЕВЯНЧУК Екатерина Дмитриевна

кандидат физико-математических наук, доцент

Пензенский государственный университет

ДЕРЕВЯНЧУК Наталия Владимировна

кандидат технических наук, доцент

Пензенский филиал Военной академии материально-технического обеспечения

им. генерала армии А.В. Хрулёва

г. Пенза, Россия

В данной статье предложена методика изложения модификации алгоритма Форда-Фалкерсона для сети с несколькими истоками и стоками. Использование модифицированного алгоритма способствует увеличению пропускной способности сети при минимальных затратах. Результаты работы могут быть применены при выборе оптимального решения многих задач логистики.

Ключевые слова: алгоритм Форда-Фалкерсона, поток в сетях, сеть с одним истоком и одним стоком, максимальный поток.

Данная работа является продолжением работ [1-5]. В отличие от работы [3], в которой была подробно изложена модификация алгоритма Форда-Фалкерсона для сети с одним истоком и одним стоком, в данной статье будет рассмотрена методика изложения алгоритма Форда-Фалкерсона для нескольких истоков и стоков.

Основные определения.

Исток – это вершина графа, которая имеет только исходящие дуги.

Сток – это вершина графа, которая имеет только входящие дуги.

Сеть – это ориентированный граф, у которого есть, по крайней мере, один исток и один сток, и каждая дуга имеет вес.

Пропускная способность дуги – это вес дуги графа. Поток в сети – это задание некоторой дополнительной нагрузки на дуги графа.

Свойства потока:

– поток по дуге не может превышать пропускной способности дуги и всегда неотрицателен;

– в любую вершину (кроме истока и стока) количество втекающей жидкости равно количеству вытекающей.

Величина потока – это сумма исходящего потока из истока. Очевидно, что она равна сумме входящего потока в сток. Максимальный поток в сети может отличаться от про-

пускной способности сети.

Основной целью данного исследования является разработка и оптимизация плана транспортировки газа с учетом потоков в сетях с использованием алгоритма Форда-Фалкерсона. Для достижения этой цели необходимо следующее:

1. Изучение существующих методов оптимизации транспортных потоков.

2. Разработка математической модели системы газоснабжения.

3. Применение алгоритма Форда-Фалкерсона для нахождения оптимального плана транспортировки.

4. Проведение вычислительных экспериментов для оценки эффективности предложенного метода.

В предыдущих работах [1-5] анализ сети и решение задачи о максимальном потоке в сети позволяет увидеть различие между имеющимися ресурсами сети и задействованными. Как правило, максимальный поток сети меньше, чем имеющиеся ресурсы.

В некоторых случаях при модификации графа с несколькими истоками и стоками некоторых участков сети можно добиться увеличения максимального значения пропускной способности исходной сети [5].

Алгоритм модификации Форда-Фалкерсона для сети с несколькими истоками и

несколькими стоками:

- 1) Необходимо объединить несколько истоков (стоков) в одну вершину
- 2) Задача будет решаться при условии, что выполнена топологическая сортировка $(X_i; X_j)$ вершин. Напомним, что **топологическая сортировка вершин** – это сортировка

вершин ориентированного графа такая, что для каждого ориентированного ребра (u, v) из вершины u в вершину v , номер вершины u будет идти раньше, чем номер вершины v в отсортированном результате.

- 3) Необходимо определить сумму весов входящих и исходящих дуг по матрице весов:

	X1	X2	...	Xn
X1	x11	x12	...	x1n
X2	x21	x22	...	x2n
...
Xn	xn1	xn2	...	xnn

4) Элементы столбца X_j матрицы весов определяют веса всех входящих дуг. Тогда сумма элементов столбца X_j определяет сумму весов всех входящих дуг вершин X_j . Элементы i -ой строки матрицы определяют веса исходящих дуг из вершины X_i .

Для каждой вершины $X_i (i = \overline{1, n})$ вычислим по матрице весов сумму j -го столбца и i -ой строки. Сравним сумму элементов i -ой строки R_i и сумму элементов i -го столбца C_i соответственно:

$$R_i = \sum_{j=1}^n X_{ij},$$

$$C_i = \sum_{j=1}^n X_{ji}$$

Если $R_i = C_i$, то значение номера вершины согласно алгоритму в памяти компьютера не хранится, и далее осуществляется переход на следующий шаг.

Если $R_i \neq C_i$, то запоминается номер вер-

шины, при этом если $R_i < C_i$, то значение R_i необходимо увеличить на $\Delta_i = C_i - R_i$.

Случай, когда $R_i > C_i$ возможен, если, например, до топологической сортировки была удалена дуга или, если при формировании графа был “заложен” запас производительности для дополнительного подключения [3-4].

Алгоритм завершен.

На практике это означает, что задействованы все имеющиеся ресурсы сети.

Рассмотрим алгоритм более подробно на конкретном примере. Пусть задан граф с двумя истоками и двумя стоками.

Необходимо определить какой максимальный поток можно пропустить через эту сеть за единицу времени.

Прежде всего, необходимо преобразовать исходный граф так, чтобы в нем было ровно один исток и один сток.

Затем к полученному графу нужно применить алгоритм Форда-Фалкерсона для поиска максимального потока (рисунок 1).

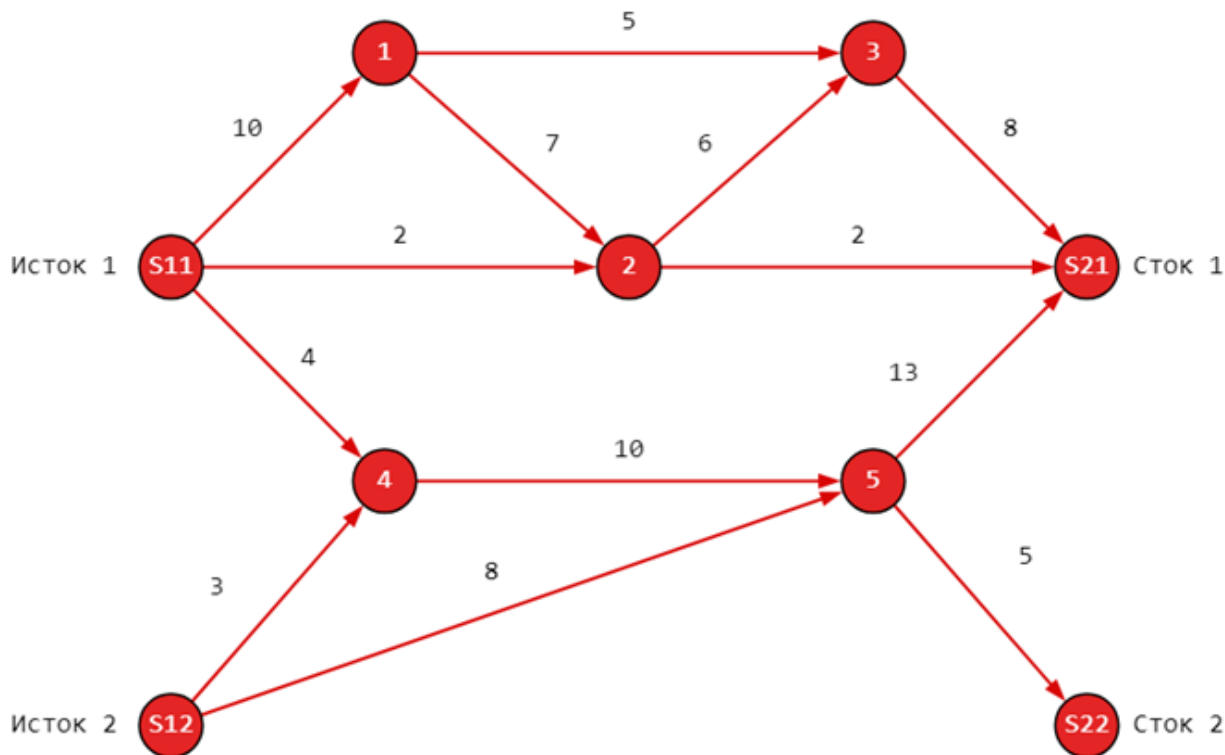


Рисунок 1. Граф G

Если у графа несколько истоков, создаем дополнительный исток S1 и соединяем его дугами со всеми остальными истоками S11 и S12 (рисунок 2). Пропускные способности этих дуг равны сумме пропускных способностей дуг, исходящих из первоначальных истоков (Для S11: $10+2+4=16$. Для S12: $3+8=11$).

Аналогично, если у графа несколько стоков, создаем дополнительный сток S2 и соединяем его входящими дугами со всеми остальными стоками S21 и S22. (Для S21: $8+2+13=23$. Для S22: 5). На рисунке 2 пока-

зано, как преобразуется граф. Теперь граф имеет **1 исток и 1 сток**.

Отметим, что сумма пропускных способностей дуг, входящих в первоначальные истоки не равна сумме пропускных способностей дуг, входящих в первоначальные стоки ($16+11=27$, а $23+5=28$). Но какой будет максимальный поток в сети можно определить с помощью численного алгоритма. Наиболее распространенным алгоритмом является алгоритм Форда-Фалкерсона.

Применим данный алгоритм к сети с истоком S1 со стоком S2 (рисунок 2).

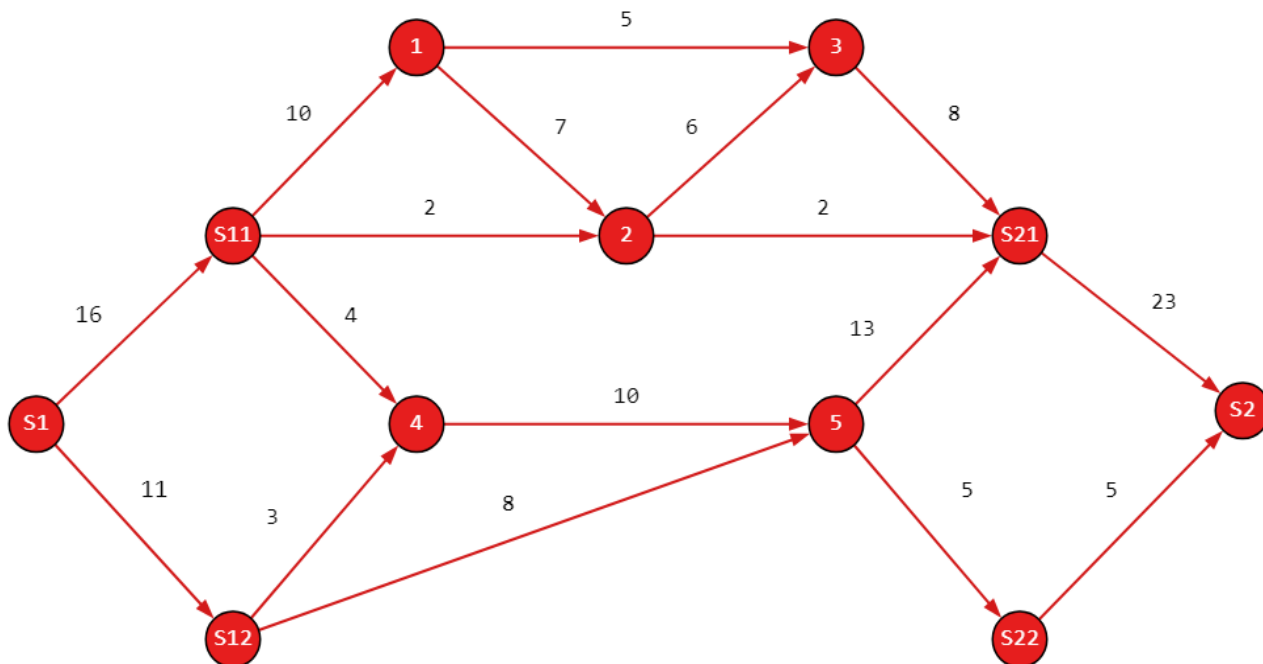


Рисунок 2. Граф G с добавлением вершин S1 и S2

Далее алгоритм осуществляется, как в задаче с сетью с одним истоком и одним стоком как было показано в предыдущих работах [2]-[3].

В результате применения алгоритма Фор-

да-Фалкерсона получаем максимальный поток сети, равный $14+11=20+5=25$. На рисунке 3 это веса дуг из истока и дуг, входящих в сток, со знаком «+» ($+14+11=25$; $+20+5=25$).

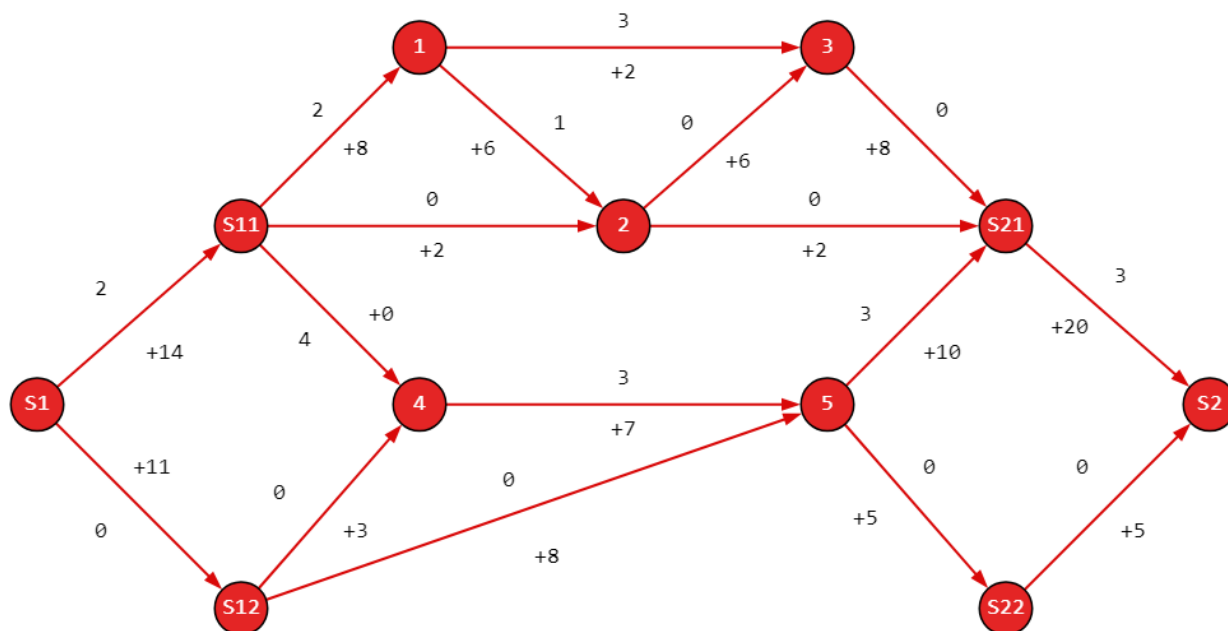


Рисунок 3. Решение задачи для исходного графа G

Но на рисунке 3 видно, что можно по дуге S1-S11 еще передать 2 условные единицы, а

по дуге S21-S2 принять 3 условные единицы. Получается ресурс самой сети – это поток в

27 единиц. Но для исходного графа G полностью его задействовать невозможно, применяя алгоритм Форда-Фалкерсона. Тогда применим модификацию алгоритма.

Модификация алгоритма Форда-Фалкерсона для данного примера состоит в том, что для максимального потока в 27 единиц, необходимо увеличить пропускную способность 3-S21 на 2 единицы (рисунок 4). Если рассмотреть путь S1-S11-1-3-S21-S2, то веса дуг будут равны 2, 2, 3, 0, 3. Увеличиваем вес дуги 3-S21 на 2 единицы, получаем веса дуг 2, 2, 3, 2, 3. Тогда поток по этому пути будет равен 2. А

максимальный поток увеличится на 2 условные единицы, то есть станет равным 27 (рисунок 4).

Следует отметить, что для проверки правильности решения необходимо

проверить величину потока, т. е. сравнить сумму исходящего потока из истока с суммой входящего потока в сток. Согласно определению, эти суммы должны быть равны.

Так, например, для графа G (рисунок 4) сумма исходящего потока из истока S1 равна $+16+11=27$. Сумма входящего потока в сток S2 равна $+22+5=27$. Суммы равны, следовательно, решение верно.

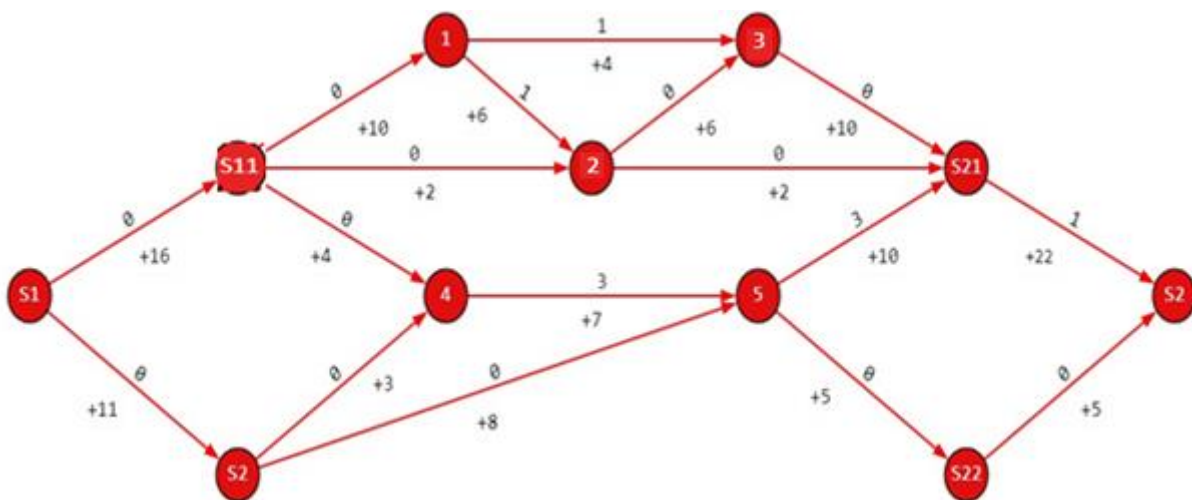


Рисунок 4. Оптимальное решение задачи для графа G с изменённым весом дуги 3-S21

Сведение задачи с несколькими истоками и несколькими стоками к задаче с 1 истоком и 1 стоком позволяет решить поставленную задачу за минимальное время.

Интерпретация задачи нахождения оптимального транспортного потока природных ресурсов к задаче о максимальном потоке позволяет быстро и наглядно найти решение.

Таким образом, в данной работе была представлена методика изложения модификации алгоритма Форда-Фалкерсона для сети с несколькими истоками и стоками. В результате проведенного теоретического и практического анализа были достигнуты следующие основные выводы и результаты.

Был рассмотрен самый общий случай, а именно поток в сетях с двумя истоками и двумя стоками, который можно обобщить для потока с несколькими истоками и несколькими стоками.

Применен для решения задачи аппарат теории графов, а именно алгоритм Форда-Фалкерсона. Этот алгоритм является одним из наиболее распространенных методов для поиска потоков, прост в понимании и реализации на компьютере.

Предложенная в работе [5] модификация алгоритма Форда-Фалкерсона применена для исследуемой задачи с подробными пояснениями.

Работа открывает возможности для дальнейших исследований и применения методов теории графов в управлении логистическими операциями.

В частности, перспективным представляется внедрение более сложных и адаптивных алгоритмов, учитывающих динамические изменения в сети, такие как использование ремонта участка сети для повышения потока в сети и объем передачи за единицу времени.

Таким образом, проведенное исследование подтверждает, что применение теории графов, алгоритма Форда-Фалкерсона, модификация алгоритма Форда-Фалкерсона [5] для оптимизации планов перевозок с учетом потоков в сетях может значительно улучшить

поток в сети.

На практике это означает использование имеющихся ресурсов в максимальном объеме, например, при транспортировке раненых, при увеличении объемов поставки газа в единицу времени, улучшении логистики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деревянчук Е.Д., Широков А.А. Оптимальный план транспортировки газа для газопроводной сети с двумя поставщиками и одним потребителем // Научный потенциал. – 2024. – № 3(46).
2. Деревянчук Е.Д. Методика построения алгоритмов для практических задач с применением теории графов // Научный потенциал. – 2024. – № 2(45). – С. 37-44.
3. Деревянчук Е.Д., Широков А.А. Методика решения задачи создания оптимального плана перевозок с учётом потоков в сетях с одним истоком и одним стоком // Педагогика современности. – 2024. – № 2.
4. Деревянчук Е.Д., Широков А.А. Оптимальный план транспортировки газа для газопроводной сети с одним поставщиком и двумя потребителями // Научный потенциал. – 2024. – № 3(46).
5. Деревянчук О.Д. Транспортировка больных из одного госпиталя в другой с остановками во временных пунктах размещения // Общество. – 2024. – № 1(32). Часть 2. – С. 19-23.

THE METHOD OF PRESENTATION IS A MODIFICATION OF THE FORD-FULKERSON ALGORITHM FOR A NETWORK WITH MULTIPLE SOURCES AND SINKS

DEREVYANCHUK Ekaterina Dmitrievna

Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor
Penza State University
Penza, Penza region, Russia

DEREVYANCHUK Natalia Vladimirovna

Candidate of Sciences in Technology, Associate Professor
Penza Branch of the Military Academy of Logistics named after Army General A.V. Khrulev
Penza, Russia

This article proposes a methodology for presenting a modification of the Ford-Fulkerson algorithm for a network with multiple sources and sinks. The use of a modified algorithm helps to increase network bandwidth at minimal cost. The results of the work can be applied in choosing the optimal solution for many logistics tasks.

Keywords: Ford-Fulkerson algorithm, flow in networks, network with one source and one drain, maximum flow.