

ЗАДАЧА О РАЗОРЕНИИ ИГРОКА КАК МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ДЁМИНА Анна Александровна

Научный руководитель: КОЛОБОВ Алексей Николаевич

кандидат технических наук, доцент

Оренбургский государственный педагогический университет

г. Оренбург, Россия

В статье анализируется классическая задача о разорении игрока как ключевая модель теории вероятностей и случайных процессов, включая вероятность разорения и математическое ожидание времени до завершения игры. Особое внимание уделяется её интерпретации через случайное блуждание и применениям в страховании и финансовой математике. Показано, что даже при благоприятных параметрах вероятность разорения остаётся значимой характеристикой стохастической системы.

Ключевые слова: задача о разорении игрока, теория вероятностей, случайное блуждание, марковские цепи, риск разорения, стохастические процессы.

Задача о разорении игрока – фундаментальная модель случайных процессов с дискретным временем и конечным числом состояний, основанная на последовательности независимых стохастических изменений капитала и, несмотря на простоту, раскрывающая глубокие закономерности поведения вероятностных систем.

Задача о разорении игрока может быть представлена как однородная марковская цепь, где вероятность перехода в новое состояние зависит только от текущего состояния, благодаря марковскому свойству. Это упрощает анализ и позволяет получить аналитические выражения для ключевых характеристик процесса [1, с. 112].

Состояния системы при этом можно представить, как множество целых чисел от 0 до N , где 0 соответствует разорению первого игрока, а N – разорению второго. Переходы между состояниями происходят с вероятностями p и q , отражающими вероятность выигрыша и проигрыша соответственно. Граничные состояния являются поглощающими, поскольку после их достижения процесс прекращается. Это обстоятельство играет ключевую роль в исследовании вероятности завершения игры.

Одним из наиболее важных результатов является вероятность достижения поглощающего состояния: в симметричном случае (равные вероятности выигрыша и проигрыша) она линейно зависит от начального капитала,

показывая отсутствие устойчивого равновесия и неизбежную потерю капитала одним из участников со временем. Это отражает фундаментальное свойство случайных блужданий с ограниченными границами: процесс почти наверняка завершится поглощением в одной из границ [2, с. 87].

В асимметричном случае, когда вероятность выигрыша отличается от вероятности проигрыша, поведение системы существенно меняется. В этом случае появляется дрейф, направляющий процесс в сторону одного из состояний. При $p > q$ вероятность разорения уменьшается, однако не становится нулевой, если начальный капитал конечен. Это подчёркивает важный вывод теории вероятностей: даже при наличии преимущества в вероятностях риск неблагоприятного исхода не исчезает полностью.

Анализ времени до разорения также представляет интерес: в симметричном случае его математическое ожидание растёт квадратично с начальным капиталом, поэтому небольшие изменения начального состояния могут сильно менять длительность процесса, что существенно для реальных систем, где время протекания влияет на итоговый результат [3, с. 145].

С точки зрения теории случайных процессов задача о разорении игрока эквивалентна случайному блужданию, где изменения капитала рассматриваются как шаги на $+1$ или -1 , система развивается по законам вероятност-

ной динамики сумм независимых случайных величин, что позволяет применять предельные теоремы и переходить к непрерывным моделям, таким как броуновское движение.

Особый интерес представляет предельный переход от дискретной модели к непрерывной, при котором задача о разорении игрока переходит в диффузионную модель, описываемую уравнением Фоккера-Планка, а вероятность разорения находится из решений дифференциальных уравнений с граничными условиями, что широко применяется в финансовой математике для моделирования непрерывных случайных процессов изменения цен активов [4].

Задача о разорении игрока применяется в страховой математике для анализа устойчивости компаний, моделируя капитал как случайный процесс под влиянием взносов и выплат. Модель оценивает вероятность отрицательного капитала (банкротства), что важно для формирования резервов и управления рисками.

В финансовой теории задача о разорении используется для анализа инвестиционных

стратегий, показывая, что даже при положительном математическом ожидании доходности вероятность полной потери капитала ненулевая из-за накопления случайных отклонений. Модель подчёркивает необходимость учёта риска при принятии решений в условиях неопределённости.

Дополнительно следует отметить, что задача о разорении игрока имеет связь с теорией оптимальных стратегий. В некоторых модификациях рассматриваются стратегии с ограничениями на размер ставок, что приводит к изменению вероятностных характеристик процесса. В этих случаях задача становится более сложной и требует применения методов оптимизации и теории управления.

Таким образом, задача о разорении игрока является не только классической вероятностной моделью, но и мощным инструментом анализа сложных стохастических систем, позволяющим исследовать свойства случайных процессов, оценивать риски и разрабатывать стратегии управления в условиях неопределённости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
2. Ширяев, А. Н. Вероятность. – Москва : МЦНМО, 2007. – 656 с.
3. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей. – Москва : Едиториал УРСС, 2001. – 448 с.
4. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин / В. В. Петров. – Москва : Физматлит, 1987. – 320 с.
5. Фролов А. Н. Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин и случайных процессов : диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук : 01.01.05. – Москва, 2004.

GAMBLER'S RUIN PROBLEM AS A MODEL OF STOCHASTIC PROCESSES IN PROBABILITY THEORY

DEMINA Anna Alexandrovna

Scientific Supervisor: KOLOBOV Alexey Nikolaevich
Candidate of Sciences in Technology, Associate Professor
Orenburg State Pedagogical University
Orenburg, Russia

The article examines the classical gambler's ruin problem as a fundamental model in probability theory and random processes, analyzing key probabilistic characteristics such as the probability of ruin and the expected time until the game ends. Particular attention is given to its interpretation through random walks and applications in insurance and financial mathematics. It is shown that even under favorable parameters, the probability of ruin remains a significant characteristic of stochastic systems.

Keywords: gambler's ruin problem, probability theory, random walk, Markov chains, ruin probability, stochastic processes.