

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЁРА: ПОЧЕМУ ОНА ТАК СЛОЖНА И КАК ЕЁ РЕШАЮТ

ПРОЯЕВА Ирина Владимировна

кандидат физико-математических наук, доцент

СТОЛБЕЦОВ Александр Александрович

студент

БИСИНГАЛИЕВ Амир Норбулатович

студент

Оренбургский государственный педагогический университет

г. Оренбург, Россия

Задача коммивояжёра (TSP – Travelling Salesman Problem) – одна из самых знаменитых и фундаментальных проблем в теории оптимизации и компьютерных наук. Эта статья исследует природу её вычислительной сложности, объясняет, почему поиск точного решения для большого числа городов является невероятно трудной задачей, и рассматривает основные подходы к её практическому решению, от точных алгоритмов до эвристических методов.

Ключевые слова: Задача, сложность, методы, оптимизация, алгоритм, маршрут.

Введение. Представьте себе коммивояжёра, который должен посетить с товарами несколько городов, побывав в каждом по одному разу, и в конце вернуться обратно. Его цель – проехать кратчайший возможный путь. Эта, на первый взгляд, простая формулировка скрывает в себе одну из величайших головоломок математики, которая уже более века не даёт покоя учёным и инженерам.

Несмотря на простоту постановки, задача коммивояжёра имеет огромное практическое значение. Её решения находят применение в логистике и доставке почты, проектировании микросхем и сверлении печатных плат, планировании маршрутов для лазерной резки и даже в расшифровке ДНК. Понимание её сложности и методов решения – ключ к оптимизации многих процессов в современном мире.

1. В чём заключается сложность? Проклятие факториала.

Главная причина сложности задачи коммивояжёра заключается в комбинаторном взрыве количества возможных маршрутов. Для n городов существует $(n-1)! / 2$ возможных замкнутых маршрутов (гамильтоновых циклов). Это число растёт с угрожающей скоростью, известной как факториальный рост.

5 городов: 12 возможных маршрутов. Решить перебором легко.

10 городов: 181 440 маршрутов. Компьютер справится за доли секунды.

20 городов: $\approx 10^{18}$ (10 квинтиллионов) маршрутов. Даже самому мощному суперкомпьютеру, перебирающему триллионы маршрутов в секунду, потребуются годы.

50 городов: Количество маршрутов превышает число атомов в нашей галактике.

Задача коммивояжёра принадлежит к классу так называемых NP-трудных (NP-hard) задач. Это означает, что не существует известного алгоритма, который мог бы найти точное решение за время, растущее не быстрее полинома от числа городов ($P \neq NP$).

2. Как находят точное решение?

Для решения TSP точными методами применяются утончённые алгоритмы, которые, хотя и не избегают комбинаторного взрыва в худшем случае, позволяют находить оптимальное решение для задач среднего размера (несколько тысяч городов) за разумное время.

Метод ветвей и границ (Branch and Bound): Это самый распространённый точный метод. Алгоритм систематически перебирает все возможные решения, но отсекает целые ветви перебора, если становится ясно, что они не могут привести к решению лучше уже найденного. Для этого вычисляются нижние оценки стоимости маршрута. Если оценка для ветви превышает стоимость текущего лучшего решения, эта ветвь игнорируется.

Динамическое программирование (алгоритм Хелд-Карпа): Этот алгоритм запомина-

ет решения подзадач, чтобы не вычислять их повторно. Его сложность составляет $O(n^2 * 2^n)$, что, хотя и является экспоненциальным, значительно лучше факториала. Он позволяет решить задачу для 20-30 городов за приемлемое время.

3. Практические подходы: Эвристики и метаэвристики.

Поскольку точные методы неприменимы для задач с миллионами городов (как, например, при планировании ежедневных маршрутов доставки), на практике широко используются приближённые алгоритмы. Они находят не идеальное, но очень хорошее решение за короткое время.

Алгоритмы локального поиска (2-opt, 3-opt): Эти методы начинают с какого-либо маршрута и затем пытаются его улучшить, «переставляя» рёбра. Например, 2-opt алгоритм удаляет два ребра и пересоединяет тур другим способом, если это сокращает общую

длину. Процесс повторяется, пока улучшения возможны.

Метаэвристики: Это более сложные и мощные методы, управляющие процессом поиска.

Генетические алгоритмы: Работают с «популяцией» маршрутов. «Хорошие» маршруты «скрещиваются» и «мутируют», порождая новое поколение, в котором выживают наиболее приспособленные (кратчайшие) решения.

Заключение. Несмотря на свою NP-трудность, задача не является нерешаемой на практике. Комбинация мощных точных методов для задач среднего размера и изоощрённых эвристик для крупномасштабных проблем позволяет человечеству успешно находить оптимальные или почти оптимальные маршруты, экономя колоссальные ресурсы в логистике, производстве и науке. Исследования в этой области продолжают, приближая нас к пониманию границ возможного в мире оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лавров И.А., Лаврова Н.А. Задачи по теории алгоритмов. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2018. – 256 с.
2. Applegate D.L., Bixby R.E., Chvátal V. & Cook W. J. (2006). The Traveling Salesman Problem: A Computational Study. Princeton University Press, 2006. 593 p.
3. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L. & Stein C. (2009). Introduction to Algorithms (3rd ed.). The MIT Press, 2009.
4. Gutin G., & Punnen A.P. (Eds.) The Traveling Salesman Problem and Its Variations. Springer, 2006.