

Многочлены. Сложение и вычитание многочленов.

Учебник: пар 8 стр. 57-59, пар 9 стр 61-62, прочитать, посмотреть видео урок.

Теория

Определения и примеры

Многочлен — это сумма одночленов.

Например, выражение $2x + 4xy^2 + x + 2xy^2$ является многочленом. Проще говоря, многочлен это несколько одночленов, соединенных знаком «плюс».

В некоторых многочленах одночлены могут соединяться знаком «минус». Например, $3x - 5y - 2x$. Следует иметь ввиду, что это по-прежнему **сумма** одночленов. Многочлен $3x - 5y - 2x$ это сумма одночленов $3x$, $-5y$ и $-2x$, то есть $3x + (-5y) + (-2x)$. После раскрытия скобок образуется многочлен $3x - 5y - 2x$.

$$3x + (-5y) + (-2x) = 3x - 5y - 2x$$

Соответственно, рассматривая по отдельности каждый одночлен многочлена, его нужно рассматривать вместе со знаком, который перед ним располагается. Так, в многочлене $3x - 5y - 2x$ минус перед одночленом $5y$ относится к коэффициенту 5 , а минус перед одночленом $2x$ относится к коэффициенту 2 . Чтобы не противоречить определению многочлена, вычитание можно заменять сложением:

$$3x - 5y - 2x = 3x + (-5y) + (-2x)$$

Но это действие нагромождает многочлен скобками, поэтому вычитание на сложение не заменяют, учитывая в будущем, что каждый одночлен многочлена будет рассматриваться вместе со знаком, который перед ним располагается.

Одночлены, из которых состоит многочлен, называют **членами многочлена**.

Если многочлен состоит из двух членов, то такой многочлен называют **двучленом**. Например, многочлен $x + y$ является двучленом.

Если многочлен состоит из трёх членов, то такой многочлен называют **трехчленом**. Например, многочлен $x + y + z$ является трехчленом.

Если какой-нибудь многочлен содержит обычное число, то это число называют **свободным членом многочлена**. Например, в многочлене $3x + 5y + z + 7$ член 7 является свободным членом. Свободный член многочлена не содержит буквенной части.

Многочленом также является любое числовое выражение. Так, следующие выражения являются многочленами:

$$\begin{aligned}2 + 3 \\ 5 + 3 + 2 \\ 5 - 4 + 9\end{aligned}$$

Многочлен и его стандартный вид

Многочлен, как и одночлен, можно привести к стандартному виду. В результате получается упрощенный многочлен, с которым удобно работать.

Чтобы привести многочлен к стандартному виду, нужно привести подобные слагаемые в этом многочлене. Подобные слагаемые в многочлене называют **подобными членами многочлена**, а приведение подобных слагаемых в многочлене — **приведением его подобных членов**.

Подобные члены многочлена это члены, имеющие одинаковую буквенную часть.

Приведём многочлен $2x + 4xy^2 + x - xy^2$ к стандартному виду. Для этого приведём его подобные члены. Подобными членами в этом многочлене являются $2x$ и x , а также $4xy^2$ и $-xy^2$.

$$\underline{2x} + \underline{4xy^2} + \underline{x} - \underline{xy^2} = 3x + 3xy^2$$

В результате получили многочлен $3x + 3xy^2$, который не имеет подобных членов. Такой вид многочлена называют **многочленом стандартного вида**.

Как и у одночлена, у многочлена имеется степень. Чтобы определить степень многочлена, сначала его нужно привести к стандартному виду, затем выбрать тот одночлен, степень которого является наибольшей из всех.

В предыдущем примере мы привели многочлен $2x + 4xy^2 + x - xy^2$ к стандартному виду. В результате получили многочлен $3x + 3xy^2$. Он состоит из двух одночленов. Степенью первого одночлена является 1, а степенью второго одночлена является 3. Наибольшая из этих степеней является 3. Значит, многочлен $3x + 3xy^2$ является многочленом третьей степени.

А поскольку многочлен $3x + 3xy^2$ тождественно равен предыдущему многочлену $2x + 4xy^2 + x - xy^2$, то и этот предыдущий многочлен является многочленом третьей степени.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней, входящих в него одночленов.

В некоторых многочленах прежде всего требуется привести к стандартному виду одночлены, входящие в него, и только потом приводить сам многочлен к стандартному виду.

Например, приведем многочлен $3xx^4 + 3xx^3 - 5x^2x^3 - 5x^2x$ к стандартному виду. Этот многочлен состоит из одночленов, которые не приведены к стандартному виду. Сначала приведём их к стандартному виду:

$$3xx^4 + 3xx^3 - 5x^2x^3 - 5x^2x = 3x^5 + 3x^4 - 5x^5 - 5x^3$$

Теперь получившийся многочлен $3x^5 + 3x^4 - 5x^5 - 5x^3$ можно привести к стандартному виду. Для этого приведем его подобные члены. Подобными являются члены $3x^5$ и $-5x^5$. Больше подобных членов нет.

Члены $3x^4$ и $-5x^3$ будут переписаны без изменений:

$$3xx^4 + 3xx^3 - 5x^2x^3 - 5x^2x = 3x^5 + 3x^4 - 5x^5 - 5x^3 = -2x^5 + 3x^4 - 5x^3$$

Пример 2. Привести многочлен $3ab + 4cc + ab + 3c^2$ к стандартному виду. Сначала приведем одночлен $4cc$, входящий в исходный многочлен, к стандартному виду, получим $4c^2$

$$3ab + 4cc + ab + 3c^2 = 3ab + 4c^2 + ab + 3c^2$$

Далее приведём подобные члены:

$$3ab + 4cc + ab + 3c^2 = 3ab + 4c^2 + ab + 3c^2 = 4ab + 7c^2$$

Пример 3. Привести многочлен $4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y$ к стандартному виду. Подобными членами в данном многочлене являются $4x^2$ и $-x^2$, а также $-4y$, $17y$ и $-y$. Приведем их:

$$4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y = 3x^2 + 12y$$

Приводя подобные члены, можно использовать скобки. Для этого подобные члены следует заключить в скобки, затем объединить выражения в скобках с помощью знака «плюс».

Решим предыдущий пример с помощью скобок. Подобными членами в нём были $4x^2$ и $-x^2$, а также $-4y$, $17y$ и $-y$. Заключим их в скобки и объединим с помощью знака «плюс»

$$4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y = (4x^2 - x^2) + (-4y + 17y - y)$$

Теперь в скобках выполним приведение подобных членов:

$$4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y = (4x^2 - x^2) + (-4y + 17y - y) = (3x^2) + (12y)$$

В получившемся выражении $(3x^2) + (12y)$ раскроем скобки:

$4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y = (4x^2 - x^2) + (-4y + 17y - y) = (3x^2) + (12y) = 3x^2 + 12y$
Конечно, такой подход нагромождает выражение, но зато позволяет свести к минимуму допущение ошибок.

Пример 4. Привести многочлен $12x^2 - 9y - 9x^2 + 6y + y$ к стандартному виду.

Заклучим в скобки подобные слагаемые и объединим их с помощью знака «плюс»

$$12x^2 - 9y - 9x^2 + 6y + y = (12x^2 - 9x^2) + (-9y + 6y + y)$$

Далее вычисляем содержимое скобок:

$$12x^2 - 9y - 9x^2 + 6y + y = (12x^2 - 9x^2) + (-9y + 6y + y) = (3x^2) + (-2y)$$

Избавляемся от скобок при помощи раскрытия:

$$12x^2 - 9y - 9x^2 + 6y + y = (12x^2 - 9x^2) + (-9y + 6y + y) = (3x^2) + (-2y) = 3x^2 - 2y$$

Сложение многочленов

К многочлену можно прибавить другой многочлен. Например, прибавим к многочлену $2x + y$ многочлен $3x + y$.

Заклучим в скобки каждый многочлен и соединим их знаком «плюс», указывая тем самым, что мы складываем многочлены:

$$(2x + y) + (3x + y)$$

Теперь раскрываем скобки:

$$2x + y + 3x + y$$

Далее приведём подобные слагаемые:

$$2x + y + 3x + y = 5x + 2y$$

Таким образом, при сложении многочленов $2x + y$ и $3x + y$ получается многочлен $5x + 2y$.

Разрешается также сложение многочленов в столбик. Для этого их следует записать так, чтобы подобные слагаемые располагались друг под другом, затем выполнить само сложение. Решим предыдущий пример в столбик:

$$\begin{array}{r}
 + \quad 2x + y \\
 \quad 3x + y \\
 \hline
 5x + 2y
 \end{array}$$

Если в одном из многочленов окажется слагаемое, которое не имеет подобного слагаемого в другом многочлене, оно переносится к результату без изменений. Как говорят при сложении обычных чисел — «сносится».

Например, сложим в столбик многочлены $2x^2 + y^3 + z + 2$ и $5x^2 + 2y^3$. Для начала запишем их так, чтобы подобные слагаемые располагались друг под другом, затем выполним их сложение. Обнаруживаем, что во втором многочлене не содержатся слагаемые, которые можно было бы сложить со слагаемыми z и 2 из первого многочлена. Поэтому слагаемые z и 2 переносятся к результату без изменений (вместе со своими знаками)

$$\begin{array}{r}
 + \quad 2x^2 + y^3 + z + 2 \\
 \quad 5x^2 + 2y^3 \\
 \hline
 7x^2 + 3y^3 + z + 2
 \end{array}$$

Решим этот же пример с помощью скобок:

$$(2x^2 + y^3 + z + 2) + (5x^2 + 2y^3) = 2x^2 + y^3 + z + 2 + 5x^2 + 2y^3 = (2x^2 + 5x^2) + (y^3 + 2y^3) + z + 2 = 7x^2 + 3y^3 + z + 2$$

Пример 3. Сложить многочлены $7x^3 + y + z^2$ и $x^3 - z^2$

Решим этот пример в столбик. Запишем второй многочлен под первым так, чтобы подобные слагаемые располагались друг под другом:

$$\begin{array}{r}
 + \quad 7x^3 + y + z^2 \\
 \quad x^3 \quad \quad - z^2 \\
 \hline
 8x^3 + y
 \end{array}$$

Во втором многочлене не было слагаемого, которого можно было бы сложить со слагаемым y из первого многочлена, поэтому это слагаемое было перенесено к результату без изменений. А сложение подобных

слагаемых z^2 и $-z^2$ дало в результате 0. Ноль по традиции не записываем. Поэтому окончательный ответ это $8x^3 + y$. Решим этот же пример с помощью скобок:

$$(7x^3 + y + z^2) + (x^3 - z^2) = 7x^3 + y + z^2 + x^3 - z^2 = (7x^3 + x^3) + (z^2 - z^2) + y = 8x^3 + y$$

Вычитание многочленов

Из многочлена можно вычесть другой многочлен. Например, вычтем из многочлена $2x + y$ многочлен $3x + y$.

Заклучим в скобки каждый многочлен и соединим их знаком «минус», указывая тем самым, что мы выполняем вычитание:

$$(2x + y) - (3x + y)$$

Теперь раскроем скобки:

$$2x + y - 3x - y$$

Приведём подобные слагаемые. Слагаемые y и $-y$ являются противоположными. Сумма противоположных слагаемых равна нулю

$$y + (-y) = 0$$

Приводя подобные слагаемые, мы обычно складываем их. Но в качестве знака операции можно использовать знак одночлена. Так, приводя подобные слагаемые y и $-y$ мы сложили их по правилу приведения подобных слагаемых. Но можно не складывая, записать их друг за другом

$$y - y$$

Получится тот же результат, поскольку выражения $y + (-y)$ и $y - y$ одинаково равны нулю:

$$y - y = 0$$

Возвращаемся к нашему примеру. Вычеркнем члены y и $-y$:

$$2x \cancel{+ y} - 3x \cancel{- y}$$

А сложение подобных слагаемых $2x$ и $-3x$, даст в результате $-x$

$$2x + (-3x) = -x$$

Или без сложения, записав члены друг за другом:

$$2x - 3x = -x$$

Значит, при вычитании из

многочлена $(2x + y)$ многочлена $(3x + y)$ получится одночлен $-x$.

Решим этот же пример в столбик:

$$\begin{array}{r}
 - \quad 2x + y \\
 \quad 3x + y \\
 \hline
 - x
 \end{array}$$

Пример 2. Вычесть из

многочлена $13x - 11y + 10z$ многочлен $-15x + 10y - 15z$

Решим этот пример с помощью скобок, а затем в столбик:

$$\begin{aligned}
 (13x - 11y + 10z) - (-15x + 10y - 15z) &= 13x - 11y + 10z + 15x - 10y + 15z = \\
 (13x + 15x) + (-11y - 10y) + (10z + 15z) &= 28x + (-21y) + 25z = \\
 &28x - 21y + 25z
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 - \quad 13x - 11y + 10z \\
 \quad -15x + 10y - 15z \\
 \hline
 \quad 28x - 21y + 25z
 \end{array}$$

Следует быть внимательным при вычитании в столбик. Если не следить за знаками, вероятность допустить ошибку очень высока. Нужно учитывать не только знак операции вычитания, но и знак располагающийся перед слагаемым.

Так, в данном примере из слагаемого $10z$ вычиталось слагаемое $-15z$
 $10z - (-15z)$

Результат вычисления этого выражения должен быть положительным, поскольку $10z - (-15z) = 10z + 15z$.

Складывая или вычитая многочлены при помощи скобок, первый многочлен в скобки можно не заключать. Так, в данном примере из многочлена $13x - 11y + 10z$ требовалось вычесть многочлен $-15x + 10y - 15z$

Вычитание было записано так:

$$(13x - 11y + 10z) - (-15x + 10y - 15z)$$

Но первый многочлен можно не заключать в скобки:

$$13x - 11y + 10z - (-15x + 10y - 15z)$$

Заключение первого многочлена в скобки на первых порах позволяет начинающим наглядно увидеть, что второй многочлен полностью вычитается из первого, а не из определенной его части.

Задания

Задание 1. Сложить многочлены $8x + 11$ и $7x + 5$

Задание 2. Вычесть из многочлена $8x + 11$ многочлен $7x + 5$

Задание 3. Выполнить сложение

$$8a + (3b + 5a)$$

Задание 4. Выполнить сложение

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) + \left(2\frac{1}{2} - x\right)$$

Задание 5. Выполнить сложение

$$(4a^2b - 3ab^2) + (-a^2b + 2ab^2)$$

Задание 6. Выполнить сложение

$$(2y^2 - 4y - 1) + (-1 + 4y - 2y^2)$$

Задание 7. Приведите следующий многочлен к стандартному виду:

$$2a^2b^3 - ab^3 - a^4 - a^2b^3 + ab^3 + 2a^4$$

Задание 8. Приведите следующий многочлен к стандартному виду:

$$5a \times 2b^2 - 5a \times 3ab - a^2b + 6ab^2$$

Задание 9. Упростите следующее выражение:

$$(x^2 - 0,45x + 1,2) + (0,8x^2 - 1,2x) - (1,6x^2 - 2x)$$

Задание 10. Упростите следующее выражение:

$$-(2xy^2 - xy + y) + 3xy^2 - 4y - (5xy - xy^2)$$

Задание 11. Упростите следующее выражение:

$$(4a^2 - 2ab - b^2) - (-a^2 + b^2 - 2ab) + (3a^2 - ab + b^2)$$

Из учебника 296,306,307,309

Геометрия

Учебник: параграф 30,31

Номера 223,229,230