ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ПО МАТЕМАТИКЕ
2023/2024 учебного года

9 КЛАСС

Решения

1. В математической школе два девятых класса: 9А и 9Б. Мальчиков в 9Б классе в 2 раза больше, чем девочек в 9А, а девочек в 9Б классе на 25% меньше, чем мальчиков в 9А. Мальчики составляют 64% от всех девятиклассников. В каком классе учеников больше и на сколько процентов?

Ответ: В 9Б учеников на 50% больше, чем в 9А.

Решение. Пусть m_1 и d_1 – количество мальчиков и девочек в 9А классе, а m_2 и d_2 – количество мальчиков и девочек в 9Б классе соответственно. Из условия задачи имеем равенства $m_2 = 2d_1$ и $d_2 = 0{,}75m_1$, то есть $m_1 = \frac{4}{3}d_2$. Так как мальчики составляют 64% от всех девятиклассников, то девочки составляют 36%, следовательно, соотношение мальчиков и девочек в девятых классах равно $64:36 = 16:9$. Отсюда имеем равенство

$$\frac{m_1 + m_2}{d_1 + d_2} = \frac{16}{9},$$

что равносильно $9(m_1 + m_2) = 16(d_1 + d_2)$. Подставив в это равенство выражения для m_1 и m_2, получим $9\left(\frac{4}{3}d_2 + 2d_1\right) = 16(d_1 + d_2)$. Раскрыв скобки, имеем $12d_2 + 18d_1 = 16d_1 + 16d_2$, откуда следует, что $d_1 = 2d_2$. Из равенства $m_1 = \frac{4}{3}d_2$ следует, что d_2 кратно 3, то есть $d_2 = 3n$ для некоторого натурального n. Тогда $d_1 = 2d_2 = 6n$, $m_2 = 2d_1 = 12n$, $m_1 = \frac{4}{3}d_2 = 4n$. Итого в 9А классе $m_1 + d_1 = 4n + 6n = 10n$ учеников, в 9Б классе $m_2 + d_2 = 12n + 3n = 15n$ учеников. Следовательно, в 9Б учеников на 50% больше, чем в 9А.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Верный ответ был получен с помощью рассуждений на конкретных числовых значениях, относящихся к частному случаю (например, «пусть всего мальчиков – 64, а девочек 36 …» или «пусть в 9А 100 мальчиков, тогда в 9Б 75 девочек» и т.д.), – не более 5 баллов.

---

2. На клетчатом поле для игры в «Морской бой» находится один пятипалубный корабль (то есть прямоугольник размера 1×5 или 5×1). Корабль тонет только в том случае, если в него произведено не менее двух попаданий (в разные клетки корабля). Положение корабля неизвестно. Определите, какое наименьшее количество выстрелов надо сделать, чтобы гарантированно потопить корабль, если поле для игры имеет размеры 8×8.

Ответ: 24.

Решение. Из рисунка 1 следует, что количество произведённых по доске выстрелов должно быть не менее 24. Действительно, если по полю было произведено 23 (или ещё меньше) выстрелов, то в какой-либо из 12 размещённых на поле пятипалубных кораблей было сделано менее двух попаданий, а значит, этот корабль не затонет. В то же время рисунок 2 показывает, что 24 выстрелов достаточно, поскольку, как бы ни был размещён на поле пятипалубный корабль, после произведения 24 выстрелов по отмеченным на рисунке клеткам поля корабль гарантированно затонет.

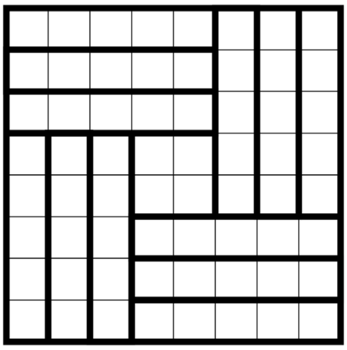


Рис. 1

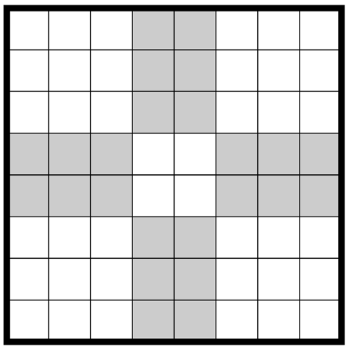


Рис. 2

Критерии.

Приведено полное решение – 7 баллов.

Приведена только верная оценка (рис.1) – 5 баллов.

Приведён только верный пример (рис.2) – 2 балла.

Замечание. Возможны и другие примеры, необходима их тщательная проверка.

---

3. Андрей написал на доске квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ ($p \neq q$), имеющее два корня. Потом он поменял местами коэффициенты p и q, получив новое уравнение, и нашёл его корни. Оказалось, что сумма квадратов корней уравнения не изменилась. Чему может равняться $p + q$? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: -2.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни исходного уравнения, x_3 и x_4 – корни нового уравнения. Применим к этим двум уравнениям теорему Виета. Получим систему из четырёх уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = q & (2) \\ x_3 + x_4 = -q & (3) \\ x_3 \cdot x_4 = p & (4) \end{cases}$$

Так как $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, то $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ и $x_3^2 + x_4^2 = q^2 - 2p$. Поскольку сумма квадратов корней не изменилась, имеем равенство $p^2 - 2q = q^2 - 2p$, что равносильно $p^2 - q^2 + 2(p - q) = 0$, то есть $(p - q)(p + q + 2) = 0$. Так как $p \neq q$, то $p + q + 2 = 0$, откуда имеем $p + q = -2$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Верный ответ получен для частного случая с конкретными числовыми значениями p и q – не более трёх баллов.

Замечание. Пример уравнения приводить не нужно, если доказано, что $p + q$ не может принимать значения, отличные от -2.

---

4. Дима задумал простое трёхзначное число. Одну из цифр этого числа Дима увеличил на 1, ещё одну цифру – на 2, а оставшуюся цифру – на 3. В результате он получил число, которое разделилось без остатка на задуманное число. Какое число задумал Дима? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 107.

Решение. Пусть Дима задумал число A, а после увеличения цифр получил число B. Из условия задачи следует, что разность $B - A$ – это трёхзначное число, которое записывается цифрами 1, 2 и 3, то есть это одно из чисел 123, 132, 213, 231, 312, 321. Поскольку число B делится без остатка на число A, то разность $B - A$ тоже делится без остатка на число A. Разложим числа 123, 132, 213, 231, 312, 321 на простые множители (это легко сделать, поскольку у всех этих чисел сумма цифр 6, а значит, все эти числа делятся на 3):

$$123 = 3 \cdot 41, \quad 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11, \quad 213 = 3 \cdot 71, \quad 231 = 3 \cdot 7 \cdot 11, \quad 312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13, \quad 321 = 3 \cdot 107.$$

Единственное число, в разложении которого на простые множители присутствует трёхзначное число, это число 321. Следовательно, Дима мог задумать только число 107.

Проверим, что это число действительно подходит. Число $107 + 321 = 428$ получается из числа 107 увеличением первой цифры (цифры в разряде сотен) на 3, второй цифры (цифры в разряде десятков) на 2 и третьей цифры (цифры в разряде единиц) на 1, при этом $428 = 4 \cdot 107$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 2 балла.

Неверный ответ, приведённый наряду с верным (например, составное число), снижает оценку на 1 балл.

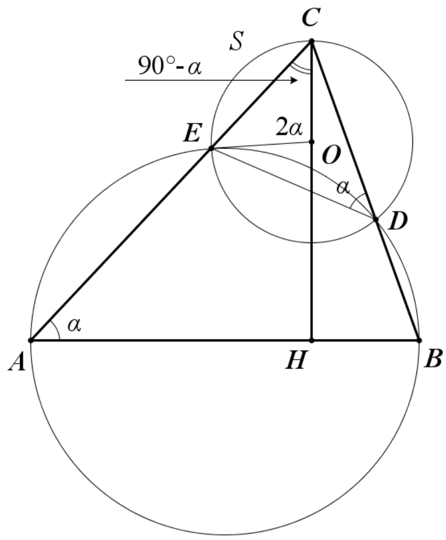
Правильный ответ, полученный в результате неполного перебора, – не более трёх баллов.

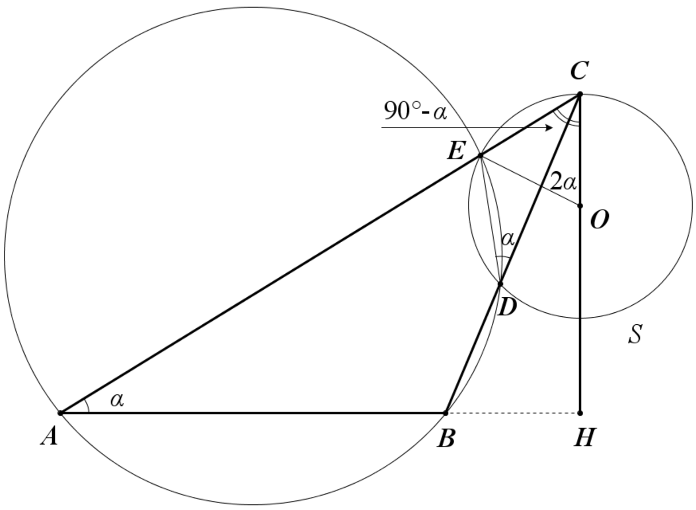
Замечание. Если показано, что числа, отличные от числа 107, не подходят, то проверка не требуется и за её отсутствие баллы не снимаются.

---

5. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность, пересекающая его стороны в точках D и E. Около треугольника CDE описана окружность с центром в точке O. Докажите, что прямая CO перпендикулярна прямой AB.

Решение. Обозначим описанную окружность треугольника CDE через S. Так как один из углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника ABC острый, то будем для определённости считать, что это угол $\angle A$. Обозначим его через α. Также пусть для определённости $D \in BC$, $E \in AC$. Так как четырёхугольник $ABDE$ – вписанный, то для его внешнего угла $\angle CDE$ имеем равенство $\angle CDE = \angle A = \alpha$. Так как центральный угол $\angle COE$ окружности S и вписанный угол $\angle CDE$ опираются на одну дугу, то $\angle COE = 2\angle CDE = 2\alpha$. Треугольник COE – равнобедренный, так как CO и EO – радиусы окружности S, следовательно, его углы при основании CE равны и $\angle OCE = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$. Таким образом, $\angle OCE + \angle CAB = 90° - \alpha + \alpha = 90°$, значит, прямые AB и CO пересекутся в некоторой точке H. Отсюда для треугольника ACH получаем, что $\angle AHC = 180° - (\angle OCE + \angle CAB) = 90°$, следовательно, $CO \perp AB$. Заметим, что это доказательство годится как для остроугольных, так и для прямоугольных и тупоугольных треугольников.





Критерии.

Приведено полное решение – 7 баллов.

Доказано равенство углов $\angle CDE$ и $\angle BAC$ – 2 балла.

Доказано, что $\angle COE = 2\angle BAC$ – 4 балла.

Доказано, что $\angle OCE = 90° - \angle BAC$ – 6 баллов.

Баллы за предыдущие пункты не суммируются.

За доказательство, которое относится к только к одному из случаев (например, когда $\angle A$ – острый), баллы не снимаются.