ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ПО МАТЕМАТИКЕ
2023/2024 учебного года

11 КЛАСС

Решения

1. В левой нижней клетке доски размером 15 × 15 стоит ладья. За один ход ладья передвигается вправо или вверх, причем во время первого хода ладья передвигается ровно на одну клетку, во время второго хода – ровно на две клетки, во время третьего хода – ровно на три клетки и т. д. Сможет ли ладья, сделав несколько ходов, попасть точно в правую верхнюю клетку доски?

Ответ: да, сможет.

Решение. Для того чтобы попасть из левой нижней клетки доски в правую верхнюю, ладья должна сместиться на 14 полей по горизонтали и на 14 полей по вертикали, то есть всего ладья должна сместиться на $14 + 14 = 28$ полей. Пусть n – длина последнего хода ладьи. Тогда мы приходим к уравнению $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 28$, что равносильно $\frac{n(n+1)}{2} = 28$, то есть $n^2 + n - 56 = 0$. Отсюда получаем, что $n = 7$. Требуемый путь ладьи существует, если существует способ разделить числа от 1 до 7 на две группы, сумма чисел в каждой из которых равна 14 (числа первой группы – это длины горизонтальных ходов ладьи, а числа второй группы – это длины вертикальных ходов ладьи). Это возможно, например, $1 + 6 + 7 = 14$ и $2 + 3 + 4 + 5 = 14$. Следовательно, ладья может, соблюдая условия задачи, перейти из левой нижней клетки доски в правую верхнюю.

Критерии.

Приведён верный пример ходов, удовлетворяющий условию задачи – 7 баллов.

Ответ «да» без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Замечание. Возможны и другие примеры ходов.

---

2. Имеется две кучки камней по 10 камней в каждой. Петя и Вася играют в следующую игру. За один ход игрок может сделать одно из следующих двух действий (если оно возможно):

1) взять по одному камню из каждой кучки;

2) взять 2 камня из одной кучки, один оставить себе, а второй переложить в другую кучку.

Пропускать ходы нельзя. Если в какой-то кучке не хватает камней для хода вида 1) или 2), то такой ход выполнять нельзя. Проигрывает тот игрок, который не сможет сделать очередной ход. Первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Петя.

Решение. Ходы первого и второго вида назовём ходом А и ходом Б соответственно. Заметим, что сделав ход А после хода Б или наоборот, мы за 2 хода уменьшаем количество камней в одной кучке на 3, при этом количество камней в другой кучке остаётся прежним. Чтобы выиграть, Пете нужно вначале сделать ход А, после чего останется по 9 камней в каждой кучке. Затем на каждый ход Васи Пете нужно отвечать ходом противоположного вида: если Вася делает ход А, Петя должен сделать ход Б и наоборот. Так как после первого хода Пети количество камней в каждой кучке стало кратным трём, то и после каждого следующего его хода количество камней в каждой кучке останется кратным трём. Каждую игровую позицию будем описывать парой чисел (x, y), где x – количество камней в первой кучке, y – количество камней во второй. После первого хода Пети игровая позиция будет иметь вид

$(3n, 3k)$, где $n = k = 3$. Если перед ходом Васи игровая позиция имеет вид $(0,0)$, то Вася не сможет сделать ход, а значит проиграет. Если перед ходом Васи игровая позиция имеет вид $(3n, 3k)$, где $n + k \geq 1$, то Вася может перейти от неё к позиции $(3n - 1, 3k - 1)$, сделав ход А (при условии $n, k \geq 1$), либо к позициям $(3n - 2, 3k + 1)$ (при условии $n \geq 1$) или $(3n + 1, 3k - 2)$ (при условии $k \geq 1$), сделав ход Б; причём в каждом из перечисленных случаев у Пети есть возможность сделать ход противоположного вида. Таким образом, у Пети всегда будет возможность хода, следовательно, он не проиграет, а значит проиграет Вася.

Критерии.

Приведено верное решение – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

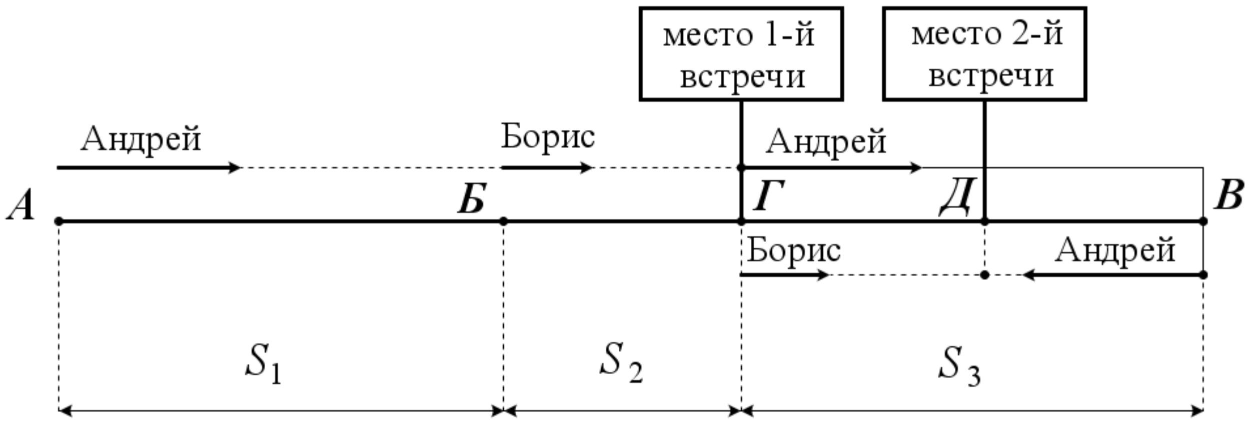
Замечание. Если вначале Петя сделает ход Б, то выиграет при правильной игре Вася, повторив за Петей его ход и получив после своего хода игровую позицию (6,12) или (12,6). После Васе нужно делать ходы, противоположные ходам Пети. Поэтому первый ход Петиной выигрышной стратегии определён однозначно.

---

3. На пути из города Андреевска в город Васильевск на дороге расположена деревня Борисовка. Из Андреевска в Васильевск выехал на автомобиле Андрей, а одновременно с ним из Борисовки в том же направлении вышел пешеход Борис. Скорости автомобиля и пешехода постоянны. Через 27 минут после выезда Андрей догнал Бориса. Доехав до Васильевска, автомобиль сразу же развернулся и той же дорогой и с той же скоростью поехал обратно в Андреевск, встретив на обратном пути идущего навстречу Бориса через 8 минут после первой встречи. Андрей вернулся в Андреевск в тот же момент, когда Борис пришёл в Васильевск. За сколько минут Борис дошёл до Васильевска?

Ответ: за 63 минуты (или за 1 час 3 минуты).

Решение. Будем для краткости называть Андреевск пунктом А, Борисовку пунктом Б, а Васильевск пунктом В, обозначив их одноимёнными точками на отрезке, изображающем дорогу. Пусть точка Г – место первой встречи, точка Д – место второй встречи. Пусть S_1, S_2 и S_3 – длины отрезков АБ, БГ и ГВ соответственно (в км), v – скорость Бориса (в км/мин), t – время Бориса на путь до Васильевска (в мин), k – отношение скоростей Андрея и Бориса. Тогда скорость Андрея равна kv.



Андрей за 27 минут проехал до места первой встречи расстояние, равное $S_1 + S_2$, следовательно,

$$S_1 + S_2 = 27kv.$$

Борис за 27 минут прошёл расстояние S_2, значит,

$$S_2 = 27v.$$

От момента первой встречи в точке Г до момента второй встречи в точке Д прошло 8 минут, за это время Борис прошёл отрезок ГД, а Андрей проехал два отрезка: ГВ и ВД. Таким образом, сумма расстояний, пройденных Андреем и Борисом за 8 минут, равна удвоенной длине отрезка ГВ, то есть $2S_3$. Таким образом $2S_3 = 8v + 8kv$, то есть

$$S_3 = 4(k+1)v.$$

Так как Андрей за t минут проехал удвоенное расстояние от А до В, то имеем равенство $2(S_1 + S_2 + S_3) = tkv$, то есть $2(27kv + 4(k+1)v) = tkv$. Поделив обе части равенства на ненулевое число v, после упрощения получим

$$62k + 8 = tk. \qquad (1)$$

Так как Борис за t минут прошёл расстояние от Б до В, то имеем равенство $S_2 + S_3 = tv$, то есть $27v + 4(k+1)v = tv$. Поделив обе части равенства на ненулевое число v, после упрощения получим

$$4k + 31 = t. \qquad (2)$$

Подставив выражение для t из равенства (2) в (1), получим $62k + 8 = (4k+31)k$. Имеем квадратное уравнение $4k^2 - 31k - 8 = 0$, его корни равны 8 и $-\frac{1}{4}$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Поставив 8 вместо k в равенство (2) получим, что $t = 63$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Один только верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Задача решена для частного случая с выбором конкретных значений скоростей или расстояний – 3-4 балла.

---

4. Найдите все пары простых чисел p и q такие, что все числа $2p+q$, $2q+p$, $pq-4$, $2pq+3$ и p^2+q^2-pq+2 также являются простыми.

Ответ: $p = 5, q = 7$ или $p = 7$, $q = 5$.

Решение. Заметим, что если пара (p,q) является подходящей, то пара (q,p) тоже подходящая. Поэтому будем искать пары (p,q), где $p \le q$, все остальные пары будут получаться перестановкой чисел в найденных парах. Пусть

$a = 2p + q$,

$b = 2q + p$,

$c = pq - 4$,

$d = 2pq + 3$,

$e = p^2 + q^2 - pq + 2$.

Если $p = 2$, то b чётно и больше 2, значит, b – составное, противоречие. Следовательно, $p, q \ge 3$.

Если $p = 3$, то d кратно 3 и $d > 3$, значит, d – составное, противоречие. Следовательно, $p, q \ge 5$.

Если $p > 5$, то $q > 5$, следовательно, p и q не кратны 5. Покажем, что при любых значениях ненулевых остатков, которые дают p и q при делении на 5, хотя бы одно из чисел a, b, c или d будет делиться на

5, а так как все эти числа больше 5, то это даёт противоречие с их простотой. Составим таблицу, где в левом столбце указан остаток i, который даёт p при делении на 5; в верхней строке указан остаток j, который даёт q при делении на 5; на пересечении i-й строки и j-го столбца указано число, которое будет делиться на 5 при $p \equiv i \pmod 5$ и $q \equiv j \pmod 5$.

$p \backslash q$	1	2	3	4
1	d	b	a	c
2	a	c	d	b
3	b	d	c	a
4	c	a	b	d

Таким образом при $p > 5$ одно из чисел a, b, c или d будет делиться на 5, следовательно, не будет простым. Значит, $p = 5$. Тогда

$a = 10 + q$,

$b = 2q + 5$,

$c = 5q - 4$,

$d = 10q + 3$,

$e = q^2 - 5q + 27$.

Если $q = 5$, то $a = b = 15$ – составные, противоречие.

Если $q = 7$, то $a = 17$, $b = 19$, $c = 31$, $d = 73$, $e = 41$ – все простые, значит, пара $(5,7)$ – подходит.

Если $q > 7$, то q не кратно 7, следовательно, q даёт ненулевой остаток при делении на 7. Покажем, что при всех ненулевых значениях остатков хотя бы одно из чисел a, b, c, d или e будет кратно 7, а так как все эти числа больше 7, то это даёт противоречие с их простотой.

Если $q \equiv 1 \pmod 7$, то $b \equiv 2 + 5 \equiv 0 \pmod 7$, то есть $b \vdots 7$.

Если $q \equiv 2 \pmod 7$, то $e \equiv 4 - 10 + 27 \equiv 0 \pmod 7$, то есть $e \vdots 7$.

Если $q \equiv 3 \pmod 7$, то $e \equiv 9 - 15 + 27 \equiv 0 \pmod 7$, то есть $e \vdots 7$.

Если $q \equiv 4 \pmod 7$, то $a \equiv 10 + 4 \equiv 0 \pmod 7$, то есть $a \vdots 7$.

Если $q \equiv 5 \pmod 7$, то $c \equiv 25 - 4 \equiv 0 \pmod 7$, то есть $c \vdots 7$.

Если $q \equiv 6 \pmod 7$, то $d \equiv 60 + 3 \equiv 0 \pmod 7$, то есть $d \vdots 7$.

Итак, мы показали, что единственная подходящая пара (p, q) при условии $p \leq q$ – это пара $(5,7)$. Также подходит пара $(7,5)$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 1 балл.

За приведённую в ответе только одну из двух возможных пар оценка не снижается.

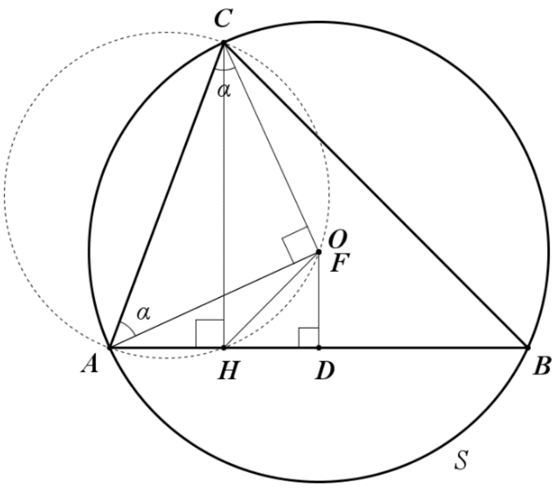
---

5. Остроугольный треугольник ABC ($AC \neq BC$) с высотой CH вписан в окружность с центром в точке O. Точка D – середина AB, точка F – проекция точки A на прямую OC. Докажите, что $DF = DH$. Рассмотрите все возможные случаи.

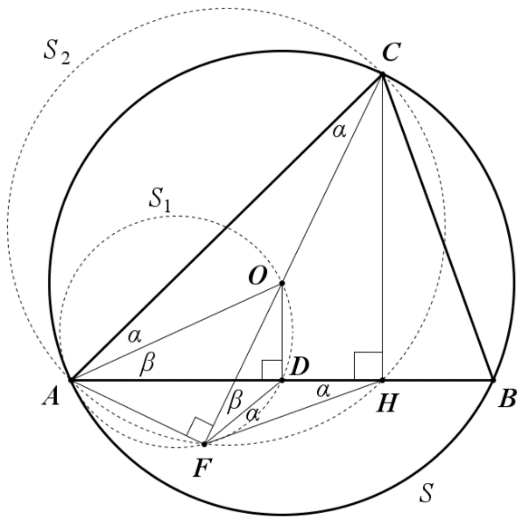
Решение. Пусть S – описанная окружность треугольника ABC, $\angle OAC = \alpha$, $\angle OAB = \beta$. Треугольник AOC – равнобедренный ($AO = CO$ – радиусы окружности S), следовательно, $\angle ACO = \angle CAO = \alpha$. Так как D – середина хорды AB, то $OD \perp AB$.

Сначала рассмотрим следующий частный случай.

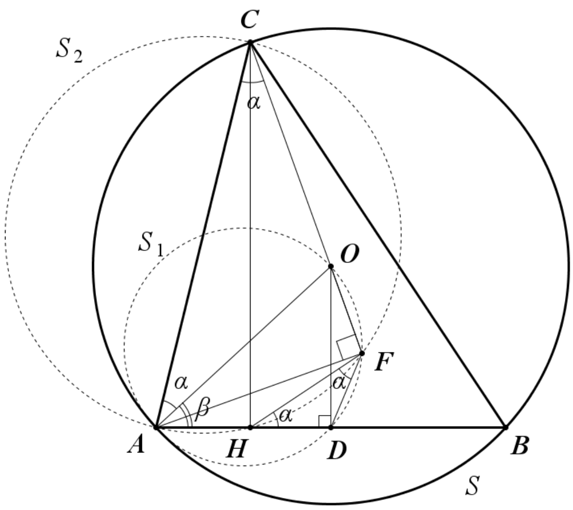
А) Точка F совпала с точкой O. Тогда треугольник ACO – прямоугольный и равнобедренный, следовательно, $\alpha = 45°$. Так как $\angle AOC = \angle AHC = 90°$, то четырёхугольник $ACOH$ – вписанный, следовательно, для его внешнего угла $\angle OHD$ имеем равенство $\angle OHD = \angle ACO = 45°$. Тогда в прямоугольном треугольнике ODH острые углы равны по $45°$, следовательно, он равнобедренный, то есть $DF = DO = DH$.



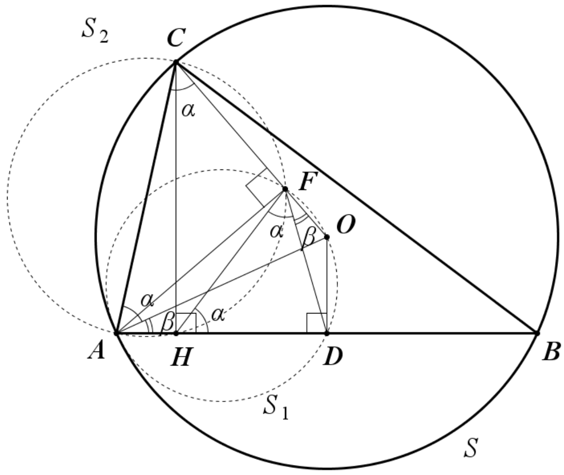
Случай А



Случай Б



Случай В



Случай Г

Пусть точка F не совпала с точкой O.

Поскольку $\angle ADO = \angle AFO = 90°$, то точки A, O, D и F лежат на одной окружности S_1. Так как $\angle AFC = \angle AHC = 90°$, то точки A, C, H и F лежат на одной окружности S_2. Возможны 3 случая.

Б) Точка F лежит на продолжении отрезка OC за точку O, при этом точки A и F лежат по одну сторону от прямой OD.

Тогда $\angle OFD = \angle OAD = \beta$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу окружности S_1); $\angle AHF = \angle ACF = \alpha$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу окружности S_2). Кроме того, $\angle CFH = \angle CAH = \alpha + \beta$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Отсюда следует, что $\angle DFH = \angle CFH - \angle OFD = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$.

В) Точка F лежит на продолжении отрезка OC за точку O, при этом точки A и F лежат по разные стороны от прямой OD.

Для внешнего угла $\angle DHF$ вписанного четырёхугольника $ACFH$ имеем равенство $\angle DHF = \angle ACF = \alpha$. Для угла $\angle CFH$ вписанного в окружность S_2 четырёхугольника $ACFH$ имеем равенство $\angle CFH = 180° - \angle CAH = 180° - (\alpha + \beta)$. Для угла $\angle DFO$ вписанного в окружность S_1 четырёхугольника $ADFO$ имеем равенство $\angle DFO = 180° - \angle OAD = 180° - \beta$. Отсюда следует, что $\angle DFH = \angle DFO - \angle CFH = 180° - \beta - (180° - (\alpha + \beta)) = \alpha$.

Г) Точка F лежит на отрезке OC. Тогда $\angle OFD = \angle OAD = \beta$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу окружности S_1). Для внешнего угла $\angle DHF$ вписанного четырёхугольника $ACFH$ имеем равенство $\angle DHF = \angle ACF = \alpha$. Кроме того, для внешнего угла $\angle OFH$ вписанного четырёхугольника $ACFH$ имеем равенство $\angle OFH = \angle CAH = \alpha + \beta$. Отсюда следует, что

$$\angle DFH = \angle OFH - \angle OFD = (\alpha + \beta) - \beta = \alpha.$$

Таким образом, для всех случаев имеем равенство $\angle DFH = \angle DHF = \alpha$, следовательно, треугольник DFH – равнобедренный, то есть $DF = DH$.

Критерии.

Приведено полное решение с разбором всех случаев – 7 баллов.

Приведено решение с разбором всех случаев, кроме случая А, – 7 баллов.

Приведено доказательство только случая А – 1 балл.

Приведено доказательство только для одного из случаев Б, В или Г – 3 балла.

Приведено доказательство только двух из трёх случаев Б, В или Г – 5 баллов.

Наличие доказательства случая А в двух предыдущих критериях добавляет к оценке 1 балл.

За каждый из следующих трёх пунктов даётся по 1 баллу, баллы за эти пункты суммируются:

а) Доказано равенство углов $\angle OFD$ и $\angle OAD$ (для случая Б и Г) или равенство $\angle OFD = 180° - \angle OAD$ (для случая В);

б) Доказано равенство углов $\angle DHF$ и $\angle ACF$;

в) Доказано равенство углов $\angle CFH$ и $\angle CAH$ (для случая Б), углов $\angle OFH$ и $\angle CAH$ (для случая Г) или равенство $\angle CFH = 180° - \angle CAH$ (для случая В).

Комментарий. Так как случай А является вырожденным вариантом случаев В и Г, то за его отсутствие баллы не снимаются.