

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ПО МАТЕМАТИКЕ  
2023/2024 учебного года

10 КЛАСС

1. Дорога из деревни Антоновки в деревню Борисовку идёт сначала в гору, потом с горы. Автомобиль выехал из Антоновки и доехал до Борисовки, а затем вернулся обратно, затратив на обратный путь на 40% больше времени. Известно, что с горы на пути до Борисовки и обратно автомобиль едет с одной и той же скоростью, которая в полтора раза выше скорости при движении в гору. Во сколько раз длина спуска на пути в Борисовку больше длины подъёма?
2. Андрей написал на доске квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$ , имеющее два корня. Потом он поменял местами коэффициенты  $p$  и  $q$ , получив новое уравнение, и нашёл его корни. Оказалось, что корни исходного уравнения увеличились на 1. Найдите  $p$  и  $q$ .
3. На клетчатом поле для игры в «Морской бой» находится один пятипалубный корабль (то есть прямоугольник размера  $1 \times 5$  или  $5 \times 1$ ). Корабль тонет только в том случае, если в него произведено не менее двух попаданий (в разные клетки корабля). Положение корабля неизвестно. Определите, какое наименьшее количество выстрелов надо сделать, чтобы гарантированно потопить корабль, если поле для игры имеет размеры  $9 \times 9$ .
4. Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $3 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n + 14n - 1$  является составным.
5. Около остроугольного треугольника  $ABC$  описана окружность, через точку  $C$  к ней проведена касательная  $CD$ . Точки  $E$  и  $F$  – проекции точки  $D$  на прямые  $AC$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что прямая  $EF$  перпендикулярна  $AB$ .

***Все ответы необходимо обосновать!***