ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ПО МАТЕМАТИКЕ
2023/2024 учебного года

8 КЛАСС

Решения

1. Вася поменял местами числитель и знаменатель обыкновенной дроби. В результате дробь изменилась на 19 процентов. Возможно ли это? Ответ обоснуйте.

Ответ: да, если эта дробь равна $\frac{10}{9}$.

Решение. Пусть искомая дробь равна $\frac{a}{b}$, где a, b – натуральные взаимно простые числа. Тогда новая дробь равна $\frac{81}{100} \cdot \frac{a}{b}$ или $\frac{119}{100} \cdot \frac{a}{b}$, что должно равняться $\frac{b}{a}$. Следовательно, имеем 2 уравнения:

1) $\frac{b}{a} = \frac{81}{100} \cdot \frac{a}{b}$, что равносильно $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{81}{100}$, откуда имеем $\frac{b}{a} = \frac{9}{10}$, следовательно, $\frac{a}{b} = \frac{10}{9}$.

2) $\frac{b}{a} = \frac{119}{100} \cdot \frac{a}{b}$, что равносильно $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{119}{100}$. Но 119 не является квадратом, следовательно, этот случай невозможен.

Проверка: $\frac{10}{9} \cdot \frac{81}{100} = \frac{9}{10}$.

Критерии.

Приведён верный пример дроби с проверкой – 7 баллов.

Приведён верный пример дроби без проверки – 3 балла.

Ответ «да» без примера или с неверным примером – 0 баллов.

Замечание. Приводить в решении способ получения такой дроби не обязательно. За отсутствие в решении способа получения этой дроби баллы не снимаются. Если приведён способ получения этой дроби, то проверка не требуется и за её отсутствие баллы не снимаются. Также засчитывается сократимая дробь, равная $\frac{10}{9}$, без снижения баллов.

---

2. На доске написано число 1. С этим числом, а также со всеми последующими числами, появляющимися на доске, за один ход разрешается сделать одно из двух действий: можно прибавить к нему 4 или вычесть 9, при этом имеющееся число стирается, а вместо него на доску записывается результат действия. Все числа, появляющиеся на доске, должны быть положительными и не должны быть больше 20. Какое число может оказаться на доске после тысячного хода? Укажите все возможные варианты и докажите, что других вариантов нет.

Ответ: 10.

Решение. Пусть было сделано x ходов первого вида (прибавление числа 4) и y ходов второго вида (вычитание числа 9). Тогда на доске окажется число $a = 1 + 4x - 9y$. Так как всего должно быть 1000 ходов, то имеем равенство $x + y = 1000$, откуда $y = 1000 - x$. Подставив это выражение в формулу для a, получим $a = 1 + 4x - 9(1000 - x) = 13x - 8999$. Поскольку должно выполняться условие $1 \le a \le 20$, то $13x - 8999 \ge 1$ и $13x - 8999 \le 20$. Из первого неравенства имеем $x \ge 692\frac{4}{13}$, из второго получаем $x \leq 693\frac{10}{13}$. Таким образом, единственное подходящее значение x равно 693. Тогда $a = 13 \cdot 693 - 8999 = 10$. Итак, единственное возможное значение числа после 1000-го хода – это 10.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Ход решения в целом верный, при этом получен неверный ответ в результате вычислительной ошибки – 4-5 баллов.

Приведены рассуждения такого типа:

«Применив к числу 1 последовательность из 13 ходов $+4+4+4+4-9+4+4+4-9-9+4+4-9$, получим снова 1. Повторим эту последовательность 77 раз (всего 1001 ход), снова получим 1, тогда после предыдущего хода было число $1+9=10$» – 3 балла.

Замечание. Приведённое выше решение не доказывает, что не может получиться других чисел.

---

3. Имеются двухчашечные весы без стрелки и две гири с массой 200 г и 400 г, а также неограниченное количество пустых ёмкостей, куда можно ссыпать крупу. Как за два взвешивания разделить 13 кг крупы на две части – 3 кг и 10 кг? Крупу можно сыпать непосредственно на чаши весов, при этом можно некоторое количество крупы с известной массой распределять по двум чашам весов (возможно, с имеющимися гирями), добиваясь их равновесия.

Решение.

1) Положим на левую чашу весов обе гири (600 г). После этого рассыплем всю крупу (13 кг) по двум чашам так, чтобы установилось равновесие. На левой чаше, как легко сосчитать, будет 6200 г, а на правой 6800 г.

2) Положим на левую чашу весов гирю 200 г, после чего рассыплем кучку массой 6200 г по двум чашам так, чтобы установилось равновесие. На левой чаше, как легко сосчитать, будет 3000 г, а на правой 3200 г.

Критерии.

В решении приведён верный алгоритм взвешивания – 7 баллов.

---

4. Для некоторых простых чисел p и q числа $p^q + q$ и $q^p + p$ тоже простые. Найдите все такие пары (p, q) и докажите, что других таких пар нет.

Ответ: (2,3) и (3,2).

Решение. Заметим, что если пара (p, q) является подходящей, то и пара (q, p) тоже подходящая. Если оба числа p и q нечётные или оба чётные, то $p^q + q$ и $q^p + p$ – чётные, причём оба этих числа больше 2, следовательно, они составные. Таким образом, одно из чисел p и q чётное (то есть равно 2), другое нечётное. Можно считать для определённости, что $p = 2$, q – нечётное. Тогда число $q^p + p = q^2 + 2$ должно быть простым. Если $q = 3$, то $q^p + p = 3^2 + 2 = 11$ и $p^q + q = 2^3 + 3 = 11$, это простое число, следовательно, пара (2,3) подходит. Пусть $q > 3$. Так как q – простое, то q не кратно 3, значит, q при делении на 3 даёт в остатке 1 или 2. Таким образом, $q = 3n \pm 1$. Но тогда

$$q^2 + 2 = (3n \pm 1)^2 + 2 = 9n^2 \pm 6n + 3 = 3(3n^2 \pm 2n + 1),$$

то есть $q^2 + 2 \vdots 3$ и при этом $q^2 + 2 > 3$. Значит, $q^2 + 2$ – составное, получили противоречие. Следовательно, q не может быть больше 3. Поэтому подходящих пар только две: (2,3) и (3,2).

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Доказано, что одно из чисел должно равняться 2, а другое должно быть нечётным, при этом верный ответ не найден – 1 балл.

Доказано, что одно из чисел должно равняться 2, а другое должно быть нечётным, при этом получен верный ответ – 2 балла.

Утверждается, что квадрат числа, не кратного трём, при делении на 3 даёт в остатке 1 (без обоснования) – оценка не снижается.

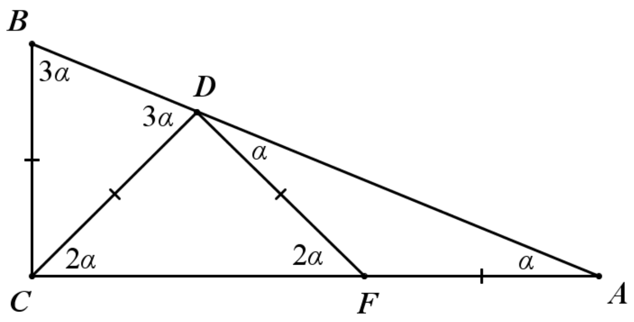
За приведённую в ответе только одну из двух возможных пар оценка не снижается.

---

5. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB и катете AC выбрали точки D и F соответственно так, что $BC = CD = DF = AF$. Найдите острые углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = 22{,}5°$ и $\angle B = 67{,}5°$.

Решение. Пусть $\alpha = \angle BAC$. Так как треугольник ADF – равнобедренный, то $\angle ADF = \angle BAC = \alpha$. Угол CFD – внешний угол треугольника ADF, следовательно, $\angle CFD = \angle ADF + \angle DAF = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Треугольник CDF – равнобедренный, следовательно, $\angle DCF = \angle CFD = 2\alpha$. Угол CDB – внешний угол треугольника ACD, следовательно, $\angle CDB = \angle CAD + \angle DCA = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. Так как $BC = CD$, то $\angle DBC = \angle CDB = 3\alpha$. Сложив острые углы треугольника ABC, получим $3\alpha + \alpha = 90°$, следовательно, $\alpha = 90°:4 = 22{,}5°$. Таким образом, $\angle A = \alpha = 22{,}5°$ и $\angle B = 3\alpha = 67{,}5°$.



Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Только верный ответ без обоснования или с полностью неверным обоснованием – 0 баллов.

Задача сведена к решению уравнения, причём уравнение составлено верно, а решено неверно из-за вычислительной ошибки (включая ошибку в знаке при переносе слагаемых) – 4-5 баллов.