Некрасов В. Б., Санкт-Петербург
www.решуегэ.рф

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ
ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

1. Формулы сокращенного умножения

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

2. Модуль числа

Определение: $|\,a\,| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Основные свойства модуля:

1. $|\,a\,| \ge 0.$
2. $|\,a\,| = |-a\,|.$
3. $\begin{cases} |\,a\,| \ge a, \\ |\,a\,| \ge -a. \end{cases}$
4. $|\,a\,| = a \Leftrightarrow a \ge 0,$ $|\,a\,| = -a \Leftrightarrow a \le 0.$

3. Степень с действительным показателем

a	x	a^x
$a\in\mathbb{R}$	$x\in\mathbb{N},\quad x\ge 2$	$a^x = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{x\ \text{сомножителей}}$
$a\in\mathbb{R}$	$x=1$	$a^1 = a$
$a\in\mathbb{R},\ \ a\ne 0$	$x=0$	$a^0=1$
$a\in\mathbb{R},\ \ a\ne 0$	$x\in\mathbb{Z},\ x<0$	$a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$
$a\ge 0$	$x=\dfrac{m}{n},\ \ m,n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$a>0$	$x=\dfrac{m}{n},\ \ m,n\in\mathbb{Z},\ m<0,\ n\ge 2$	$a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$
$a>0$	$.\, x\in\mathbb{R}\, .$	$a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$ *)

Свойства степени с действительным показателем

Пусть $a>0,\ b>0,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$. Тогда верны следующие соотношения:

$a^x\cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}$

$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

$(ab)^x = a^x\cdot b^x$

$(a:b)^x = a^x : b^x$

$a^x > 0$

$a^x = a^y \underset{a\ne 1}{\Leftrightarrow} x=y$

$a^x > a^y \underset{a>1}{\Leftrightarrow} x>y$

$a^x > a^y \underset{0<a<1}{\Leftrightarrow} x<y$

---

*) $\{x_n\}$ — последовательность десятичных приближений числа x, взятых с избытком или недостатком (здесь n — число знаков после запятой в десятичной записи числа x).

4. Корень *n*-ой степени из числа

Корнем n-ой степени $(n \in \mathbb{N},\ n \ge 2)$ из числа a называется число, n-ая степень которого равна a.

Арифметическим корнем четной степени n $(n = 2k,\ k \in \mathbb{N})$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-ая степень которого равна a.

Основные свойства арифметического корня:

$a \ge 0$: $\quad (\sqrt[n]{a})^n = a,\ \sqrt[n]{a^n} = a,\ \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m,\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

$a \in \mathbb{R}$: $\quad \sqrt[n]{a^n} = |a|$.

$a \ge 0, b \ge 0$: $\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\ \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b \ne 0)$.

$a < 0, b < 0$: $\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b},\ \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$.

$a \ge 0, b \ge 0$: $\quad a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

$a < 0, b \ge 0$: $\quad a\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b}$.

5. Логарифмы

Определение логарифма: $\quad \log_a b = c \underset{a>0,\ a\ne 1}{\Leftrightarrow} a^c = b$.

Основное логарифмическое тождество: $\quad a^{\log_a b} = b$.

Основные свойства логарифмов

Пусть $a > 0,\ a \ne 1,\ b > 0,\ b \ne 1,\ x > 0,\ y > 0,\ p \in \mathbb{R}$. Тогда верны следующие соотношения:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^p = p\log_a x \qquad \log_a x = \tfrac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a(\tfrac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y \qquad \log_{a^p} x = \tfrac{1}{p}\log_a x,\quad p \ne 0 \qquad x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$$

6. Арифметическая прогрессия

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $\quad a_n = a_1 + d(n-1)$.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии: $\quad a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ n \ge 2$.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии $\quad S_n = \dfrac{a_1 + a}{2} n$.

При решении задач, связанных с арифметической прогрессией, могут оказаться полезными также следующие формулы:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n; \qquad S_n = \frac{2a_n - d(n-1)}{2} n; \qquad a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},\ k < n;$$

$$a_k + a_n = a_{k-m} + a_{n+m},\ m < k; \qquad d = \frac{a_n - a_k}{n-k}.$$

7. Геометрическая прогрессия

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии: $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$, $n \ge 2$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}$, $q \ne 1$.

При решении задач, связанных с геометрической прогрессией, могут оказаться полезными также следующие формулы:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}; \qquad a_n^2 = a_{n-k}a_{n+k},\ k<n; \qquad a_k a_n = a_{k-m}a_{n+m},\ m<k; \qquad |q| = \sqrt[n-k]{\frac{a_n}{a_k}}.$$

8. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

9. Основные формулы тригонометрии

Зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$$

Формулы тригонометрических функций двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$$

Формулы приведения

Все формулы приведения получаются из соответствующих формул сложения.

П р и м е р 1. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha$.

Нет необходимости запоминать такое количество формул, так как их применение легко укладывается в следующую схему:

- определяется координатная четверть, в которой лежит аргумент приводимой функции, считая, что $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;
- определяется знак приводимой функции;
- определяется название приведенной функции по следующему правилу:

если аргумент приводимой функции имеет вид $(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)$ или $(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha)$, то функция меняется на кофункцию, если аргумент приводимой функции имеет вид $(\pi\pm\alpha)$, то функция названия не меняет.

П р и м е р 2. $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$

- $\frac{3\pi}{2}+\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ (IV четверть);
- $\frac{3\pi}{2}+\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right) \Rightarrow \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)<0$;
- аргумент приводимой функции имеет вид $(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$, следовательно, название функции меняется. Таким образом: $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

10. Производная и интеграл

Таблица производных некоторых элементарных функций

Функция	Производная
c	0
$kx+b$	k
$x^p,\ p\neq 0,\ p\neq 1$	px^{p-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x\ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x},\ x>0$

Функция	Производная
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a},\ x>0$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила дифференцирования:

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

$$\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$$

$$\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left[f(g(x))\right]'=f'(g(x))g'(x)$$

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в его точке $(x_0;\, f(x_0))$:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Таблица первообразных для некоторых элементарных функций

Функция	Первообразные
a	$ax+C$
$x^p,\ p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln x+C$
$\frac{1}{x},\ x<0$	$\ln(-x)+C$
e^x	e^x+C

Функция	Первообразные
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$

Правила нахождения первообразных

Пусть $F(x)$, $G(x)$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, a, b, k — постоянные, $k\neq 0$. Тогда:

$F(x)+G(x)$ — первообразная для функции $f(x)+g(x)$;

$aF(x)$ — первообразная для функции $af(x)$;

$\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.