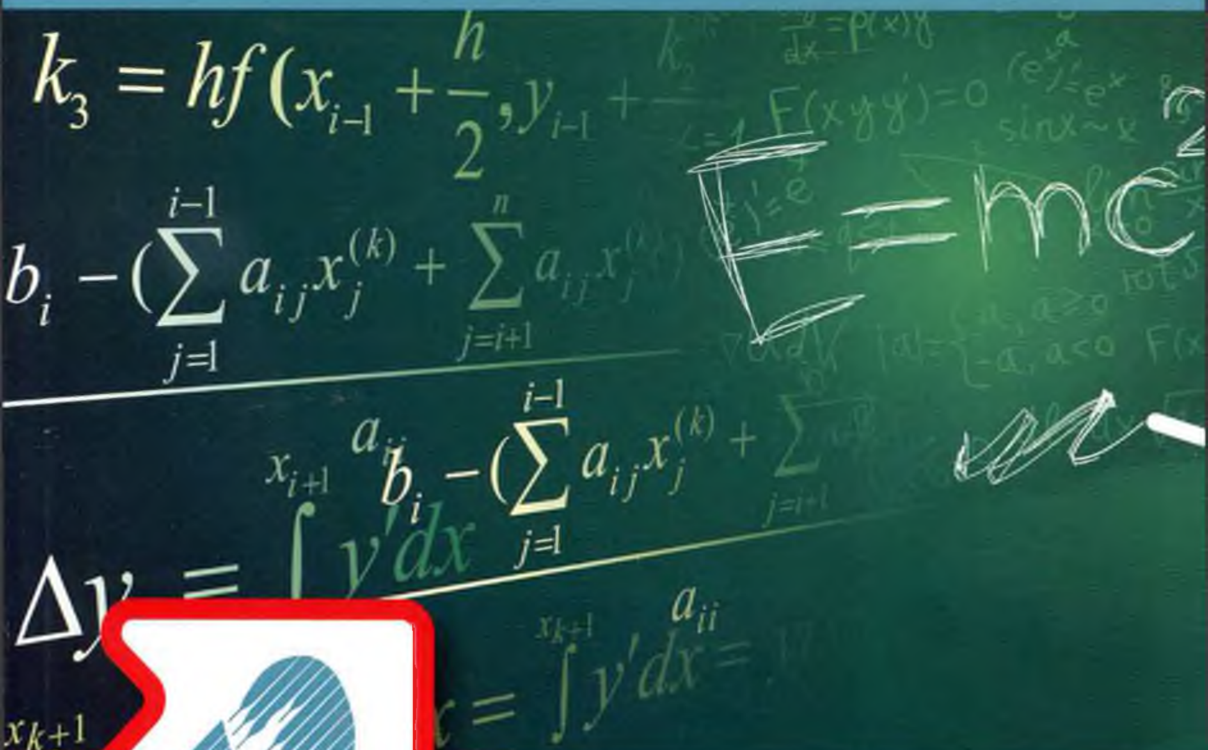
ЗНАТЬ
УМЕТЬ
ДОСТИЧЬ

А. И. КАПЛУН

МАТЕМАТИКА

Учебно-практический справочник



- *систематизированный теоретический материал*
- *практические задания разного уровня сложности*
- *тесты в формате ЕГЭ*

Схема работы с учебно-практическим справочником

Назначение этого универсального справочника — помочь выпускникам средних школ и абитуриентам быстро и эффективно подготовиться к Единому государственному экзамену (ЕГЭ).

В современных условиях стремительного развития технологий печатная книга не всегда может конкурировать с компьютером по легкости и удобству работы с информацией. Предлагаемый справочник опровергает подобное мнение, поскольку благодаря четкой структуризации и наглядной системе подачи материала работать с ним весьма комфортно. Для этого вверху на каждой странице размещена плашка, состоящая из «закладок»: «Теория», «Практика», «Тесты», « Задания ЕГЭ», которые актуализируются в соответствии с тем, какой вид работы следует выполнить на данном этапе.

Теория

На страницах, где актуализирована эта «закладка», размещен теоретический и справочный материал.

Теоретические сведения поданы с учетом их степени важности для запоминания. С этой целью в тексте использованы дополнительные средства:

— цветной фон, на котором помещены определения, правила, характеристики основных понятий курса;

— восклицательный знак, который можно трактовать как «Внимание!», «Важно!», «Запомните!».

Даже если у Вас не хватит времени еще раз повторить весь материал накануне экзамена, просмотрите помеченные материалы, чтобы быть уверенными в собственных знаниях.

Практика

На страницах, где актуализирована эта «закладка», размещены практические задания по соответствующей теме, которые можно выполнить или непосредственно на странице, или в рабочей тетради.

Тесты

На страницах, где актуализирована эта «закладка», даны тематические тестовые задания.

Задания ЕГЭ

На страницах, где актуализирована эта «закладка», Вы сможете выполнить задания тренировочного теста в формате ЕГЭ.

В конце книги Вы найдете ответы к тематическим практическим и тестовым заданиям, тренировочному тесту в формате ЕГЭ.

Комфортной и результативной Вам работы с учебно-практическим справочником!

Серия «ЗНАТЬ. УМЕТЬ. ДОСТИЧЬ»

А. И. КАПЛУН

МАТЕМАТИКА

Учебно-практический справочник

- систематизированный теоретический материал
- практические задания разного уровня сложности
- тесты в формате ЕГЭ

Ростов-на-Дону
«Феникс»
2014

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
К20

Соответствует стандартам полного (среднего) образования РФ и контрольно-измерительным материалам, утвержденным ФИПИ

Каплун А. И.

К20 Математика: учебно-практический справочник/ А.И. Каплун. — Ростов н/Д : Феникс, 2014. — 240 с. — (Знать. Уметь. Достичь).

ISBN 978-5-222-20936-3

Учебно-практический справочник подготовлен в соответствии с действующей программой по математике Министерства образования и науки Российской Федерации. Систематизированный и представленный в оригинальном формате теоретический материал позволяет читателю найти сжатый ответ на типичные вопросы важнейшего испытания — Единого государственного экзамена. Выполнение практической работы, тематических тестов, заданий ЕГЭ дает возможность выпускникам и абитуриентам попробовать свои силы в знании предмета, потренироваться в умении решать задачи разного уровня сложности.

Предназначается старшеклассникам, выпускникам средней школы, абитуриентам, учителям, репетиторам, а также всем поклонникам царицы наук — математики.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я 72

ISBN 978-5-222-20936-3

Предисловие

Математику называют царицей наук, и это безусловно так: она охватывает все сферы научной деятельности, в том числе и гуманитарную. Поэтому не удивительно, что в общеобразовательных учреждениях математика является обязательным, наряду с русским языком, выпускным предметом в форме Единого государственного экзамена. Если вы посмотрите на перечень вступительных испытаний, по которым при поступлении в вуз абитуриенты подают свидетельство о результатах ЕГЭ, то математика для большинства специальностей — профилирующее. Поэтому перед выпускниками средних школ и лицеев каждый год стоит непростая задача быстрой и качественной подготовки к экзамену по этому предмету.

Конечно, изучение математики требует системности и кропотливой работы на протяжении всех школьных лет, однако, как известно, учиться никогда не поздно. Ведь результат стоит приложенных усилий!

Предлагаемый учебно-практический справочник дает вам возможность эффективно, не растрачивая времени даром, подготовиться к экзамену. Он поможет систематизировать знания, полученные во время учебы в школе, усовершенствовать свои навыки выполнения расчетов, умение пользоваться теоретическими сведениями на практике. А это — самое главное для старшеклассника, абитуриента при выполнении любого экзаменационного задания по математике.

Справочник содержит необходимую информацию об основных математических понятиях и теоремы из школьного курса, материал для повторения, примеры решения задач и задания в формате ЕГЭ-2013. Этот материал можно с успехом использовать также и при подготовке к уроку, контрольной работе.

Издание отвечает действующей школьной программе по математике Министерства образования и науки Российской Федерации, форме контрольных измерительных материалов (КИМ), разработанных специалистами Федерального института педагогических измерений.

Весь материал систематизирован в соответствии с 16-ю темами по алгебре, началам математического анализа и геометрии. Каждый раздел состоит из сжато изложенных теоретических сведений, демонстрационных примеров, образцов решения типичных задач и тематического теста. Поэтому, повторив сначала теорию, смело беритесь за решение задач для самопроверки и тестовых заданий. Особое внимание обратите на задания открытой формы, потому что их выполнение предусматривает обоснование решения, возможно, с использованием графиков, схем, таблиц. Именно задания открытой формы с кратким (В — базовый уровень) и развернутым (С — повышенный и высокий уровни) ответами входят в КИМ, предназначенные для ЕГЭ.

Закрепить и проверить свои математические знания и навыки, готовность к прохождению государственной аттестации будущие абитуриенты смогут, справившись с заданиями в формате КИМ. Перед их выполнением следует ознакомиться с официальной информацией, размещенной на сайте www.ege.edu.ru. Правильность своих ответов можно проверить по соответствующему разделу книги. Если результаты вас не удовлетворят, надо повторить тему, вызвавшую затруднения.

Для удобства пользования учебно-практическим справочником в конце его расположен алфавитный указатель.

Работайте настойчиво — и цель будет достигнута!

1. Числа и операции с ними

1.1. Тождественные преобразования

Числа, которые используются для счета предметов, называются **натуральными**.

$N = \{1; 2; 3; ...\}$ — множество натуральных чисел.

Натуральные числа 1, 2, 3, ..., противоположные им числа $-1, -2, -3, ...$ и число 0 образуют множество **целых** чисел.

$Z = \{..., -3, -3, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ — множество целых чисел.

Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называются **рациональными**. Множество рациональных чисел обозначают символом Q.

Числа, которые нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называются **иррациональными**. Эти числа — бесконечные непериодические десятичные дроби.

Например: $\sqrt{2}$; $\pi = 3{,}1415926...$; $e = 2{,}7182818...$

Объединение рациональных и иррациональных чисел называют **действительными числами**. Множество действительных чисел обозначают символом R.

1.2. Обычные, десятичные, рациональные дроби. Смешанные числа

Числа $\frac{a}{b}$, где $a \in N$, $b \in N$, называются обычными дробями. Число b — ***знаменатель***, который показывает, на сколько равных частей делится число, число a — ***числитель*** — сколько таких частей взято. Дробная черточка означает знак деления.

Если $a < b$, то $\frac{a}{b}$ — правильная дробь.

Если $a \geq b$, то $\frac{a}{b}$ — неправильная дробь.

Смешанным числом называется сумма натурального числа и правильной дроби, записанная без знака «+».

Например: $3+\frac{7}{8}=3\frac{7}{8}$ — смешанное число.

Обычные дроби (и смешанные числа), знаменателями которых являются числа 10, 100, 1000, ..., называются **десятичными**.

Например: $\frac{3}{10}=0{,}3$; $\frac{2}{100}=0{,}02$; $\frac{5}{1000}=0{,}005$; $7\frac{6}{100}=7{,}06$.

Десятичная дробь, в которой бесконечно повторяется определенная группа цифр, называется **бесконечной десятичной периодической**. Минимальная группа цифр, которая повторяется, называется **периодом**. Период записывают в круглых скобках.

Например: $2{,}30404\ldots = 2{,}3(04)$; $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots = 0{,}(6)$.

Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется **чисто периодической**. Если период начинается не сразу после запятой, то дробь называется **смешанной периодической**.

Чтобы из неправильной дроби выделить целую часть, надо разделить с остатком числитель на знаменатель: неполное частное будет целой частью, остаток — числителем дробной части, а знаменатель — тот же.

Например: $\frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$, поскольку
$$\begin{array}{r|l} 39 & 5 \\ -35 & 7 \\ \hline 4\ (\text{ост.}) & \end{array}$$

Чтобы смешанное число представить в виде неправильной дроби, надо умножить его целую часть на знаменатель дробной части, прибавить числитель и записать сумму в числитель, а знаменатель оставить тот же.

Например: $8\frac{5}{9} = \frac{8 \cdot 9 + 5}{9} = \frac{77}{9}$.

Чтобы записать обычную дробь в виде десятичной, надо числитель дроби разделить на знаменатель.

Например:

$\frac{3}{4} = 0{,}75$, бо
$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ -0 & 0{,}75 \\ \hline 30 & \\ -28 & \\ \hline 20 & \\ -20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$
$2\frac{4}{5} = 2 + 0{,}8 = 2{,}8$; $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots = 0{,}(6)$.

Чтобы десятичную дробь записать в виде обычной дроби (смешанного числа), надо: число, которое стоит до запятой, записать целой частью; число, которое стоит после запятой, записать в числитель, а в знаменателе поставить единицу и столько нулей, сколько цифр после запятой.

Например: $0{,}07 = \frac{7}{100}$; $3{,}019 = 3\frac{19}{1000}$; $2{,}5 = 2\frac{5}{10} = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Чисто периодическая десятичная дробь равна обычной дроби, числителем которой является период, а знаменателем — цифра 9, записанная столько раз, сколько цифр в периоде.

Например: $0{,}(5) = \frac{5}{9}$; $0{,}(21) = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$.

Для того чтобы превратить смешанную бесконечную периодическую дробь в обычную, надо из числа, которое стоит до второго периода, вычесть число, которое стоит до первого периода, и записать разность числителем, в знаменателе записать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Например: $0{,}12(3) = \frac{123-12}{900} = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$; $0{,}0(51) = \frac{51-0}{990} = \frac{51}{990} = \frac{17}{330}$.

1.3. Признаки делимости

Число делится на	2	если его последняя цифра четная.
	5	если его последняя цифра 0 или 5.
	3	если сумма его цифр делится на 3.
	9	если сумма его цифр делится на 9.
	10	если его последняя цифра 0.
	4	если число, составленное из двух последних цифр, делится на 4.
	25	если число, составленное из двух последних цифр, делится на 25.

1.4. Наименьший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК)

Определение степени с натуральным показателем

Пусть a — действительное число, n — натуральное число, тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}},$$

где число a — основа степени, n — показатель степени.

$a^1 = a$; $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$; $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$.

Свойства степени с натуральным показателем

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2) $a^n : a^m = a^{n-m}$, если $n > m$;
3) $(a^n)^m = a^{nm}$;
4) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$;
5) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

Например: $a^2 \cdot a^{10} = a^{12}$; $a^{30} : a^{12} = a^{18}$; $(a^5)^6 = a^{30}$; $25^2 \cdot 4^2 = (25 \cdot 4)^2 = 100^2 =$
$= 10\,000$; $\frac{25^3}{5^3} = \left(\frac{25}{5}\right)^3 = 5^3 = 125$.

Натуральное число, на которое данное натуральное число делится без остатка, называется **делителем** данного натурального числа.

Например: 1; 2; 3; 6; 9; 18 — делители числа 18; а 1; 7 — делители числа 7.

Натуральное число, которое делится на данное натуральное число без остатка, называется **кратным** данного натурального числа.

Например: 4; 8; 12; 16; 20; 24; ... — числа, кратные 4;

5; 10; 15; 20; 25; 30; ... —числа, кратные 5.

Натуральное число называется **простым**, если оно имеет лишь два натуральных делителя: единицу и само это число.

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; ... — простые числа.

Натуральное число называется **составным**, если оно имеет больше чем два натуральных делителя.

4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; ... — составные числа.

Самое большое натуральное число, на которое делится каждое из данных чисел, называется **наибольшим общим делителем** этих чисел.

Например: НОД (5; 20) = 5;
НОД (2; 4; 6) = 2

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо:

1) разложить данные числа на простые множители;

2) вычислить произведение общих простых множителей с наименьшим показателем;

3) найти значение полученного произведения.

Например:

$$\begin{array}{r|l} 320 & 10 = 2\cdot 5 \\ 32 & 8 = 2\cdot 2\cdot 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$320 = 2^6 \cdot 5$

$$\begin{array}{r|l} 640 & 10 = 2\cdot 5 \\ 64 & 8 = 2\cdot 2\cdot 2 \\ 8 & 8 = 2\cdot 2\cdot 2 \\ 1 & \end{array}$$

$640 = 2^7 \cdot 5$

$$\begin{array}{r|l} 840 & 10 = 2\cdot 5 \\ 84 & 3 \\ 28 & 7 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$840 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^3$

НОД (320; 640; 840) $= 2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$.

Наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел, называется **наименьшим общим кратным** этих чисел.

Например: НОК (4; 12) = 12;
НОК (3; 8) = 24

Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо:

1) разложить заданные числа на простые множители;

2) вычислить произведение всех найденных простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим показателем;

3) найти значение полученного произведения.

Например:

$$\begin{array}{r|l} 396 & 9=3\cdot 3 \\ 44 & 11 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$396 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 11;$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 10=2\cdot 5 \\ 18 & 9=3\cdot 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

НОК (396; 180) = $3^2 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 11 = 36 \cdot 55 = 1980$.

- **Основное свойство дроби**

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим дробь, равную данной:

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a:n}{b:n}$$

Например: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$; $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$; $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

1.5. Формулы сокращенного умножения

Произведение разности двух выражений на их сумму

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Например: $(3x - 2y)(3x + 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2;$
$(5x^2 + 4y)(4y - 5x^2) = (4y)^2 - (5x^2)^2 = 16y^2 - 25x^4.$

Квадрат суммы двух выражений

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Например: $(5x + 3y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3y + (3y)^2 = 25x^2 + 30xy + 9y^2.$

Квадрат разности двух выражений

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Например: $(6x-1)^2 = (6x)^2 - 2\cdot 6x\cdot 1 + 1^2 = 36x^2 - 12x + 1.$

Произведение суммы двух выражений на неполный квадрат их разности

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Например: $(2x+3)(4x^2 - 6x + 9) = (2x)^3 + 3^3 = 8x^3 + 27.$

Произведение разности двух выражений на неполный квадрат их суммы

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Например: $(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1^3 = x^3 - 1.$

Куб суммы двух выражений

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Например: $(2+x)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot x + 3\cdot 2\cdot x^2 + x^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3.$

Куб разности двух выражений

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Например: $(3x-1)^3 = (3x)^3 - 3\cdot(3x)^2\cdot 1 + 3\cdot 3x\cdot 1^2 - 1^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1.$

1.6. Разложение многочленов на множители

Вынесение общего множителя за скобки

$a(b-c) - c(c-b) = a(b-c) + c(b-c) = (b-c)(a+c).$

$6a^2 - 3a + 12ba = 3a(2a - 1 + 4b).$

Использование формул сокращенного умножения «справа налево»

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Например: $9x^2 - 25y^2 = (3x)^2 - (5y)^2 = (3x-5y)(3x+5y);$

$25x^2 - 10xy + y^2 = (5x-y)^2;$

$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x+3y)^2;$

$8 + x^3 = 2^3 + x^3 = (2+x)(4 - 2x + x^2);$

$1 - 27x^3 = 1^3 - (3x)^3 = (1-3x)(1 + 3x + 9x^2).$

Способ группировки

$ac + bc - 2ad - 2bd = (ac + bc) - (2ad + 2bd) = c(a+b) - 2d(a+b) = (a+b)\cdot(c-2d).$

Использование нескольких способов разложения многочлена на множители

$x - y - x^2 + y^2 = (x-y) - (x^2 - y^2) = (x-y) - (x-y)(x+y) =$
$= (x-y)(1 - (x+y)) = (x-y)(1 - x - y);$

$4 - x^2 - 2xy - y^2 = 4 - (x^2 + 2xy + y^2) = 4 - (x+y)^2 = 2^2 - (x+y)^2 =$
$= (2 - (x+y))(2 + (x+y)) = (2 - x - y)(2 + x + y).$

1.7. Сложение и вычитание рациональных чисел и выражений

Определение модуля действительного числа

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a>0 \\ -a, \text{ если } a<0 \\ 0, \text{ если } a=0 \end{cases}$$

Например: $|3{,}2| = 3{,}2$; $|0| = 0$; $\left|-\frac{3}{7}\right|=\frac{3}{7}$; $|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$.

Чтобы сложить два отрицательных числа, надо сложить их модули и поставить перед результатом знак «–».

Например: $-15 + (-20) = -(15 + 20) = -35$.

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо из большего модуля вычесть меньший и поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больший.

Например: $-40 + 30 = -(40 - 30) = -10$; $50 + (-30) = 50 - 30 = 20$.

Чтобы из одного числа вычесть второе, надо к уменьшаемому добавить число, противоположное вычитаемому.

Например: $10 - 17 = 10 + (-17) = -(17 - 10) = -7$;
$-5 - 13 = -5 + (-13) = -(5 + 13) = -18$;
$-3 - (-5) = -3 + 5 = 5 - 3 = 2$.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тот же:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Например: $\frac{2}{7}+\frac{6}{7}=\frac{2+6}{7}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$; $\frac{a}{y}+\frac{2a}{y}=\frac{a+2a}{y}=\frac{3a}{y}$.

Чтобы выполнить вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тот же:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Например: $\frac{9}{14}-\frac{5}{14}=\frac{9-5}{14}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$; $5\frac{5}{7}-3\frac{2}{7}=2\frac{5-2}{7}=2\frac{3}{7}$; $5-\frac{3}{8}=4\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=4\frac{5}{8}$;

$3\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}=2+1\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}=2\frac{4}{3}-1\frac{2}{3}=1\frac{2}{3}$; $\frac{x+y}{8}-\frac{x}{8}=\frac{\cancel{x}+y-\cancel{x}}{8}=\frac{y}{8}$.

Сложение дробей с разными знаменателями

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, если НОД$(b; d) = 1$.

$\frac{{}^{k/}a}{b}+\frac{{}^{l/}c}{d}=\frac{ak+cl}{bd}$, где m = НОК$(b; d)$. $k=\frac{m}{b}$, $l=\frac{m}{d}$.

Например: $\frac{{}^{3/}1}{2}+\frac{{}^{2/}2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$; $\frac{{}^{4/}a}{5c}+\frac{{}^{5/}3a}{4c}=\frac{4a+15a}{20c}=\frac{19a}{20c}$;

$-5\frac{{}^{5/}7}{8}+\frac{{}^{4/}9}{10}=-5\frac{35}{40}+\frac{36}{40}=-\left(5\frac{35}{40}-\frac{36}{40}\right)=-\left(4+1\frac{35}{40}-\frac{36}{40}\right)=$

$$= -\left(4\frac{75}{40}-\frac{36}{40}\right) = -4\frac{39}{40};$$

$$ {}^{2b/}\frac{1-b^2}{3ab} + {}^{1/}\frac{2b^3-1}{6ab^2} = \frac{2b(1-b^2)+(2b^3-1)}{6ab^2} = \frac{2b-\cancel{2b^3}+\cancel{2b^3}-1}{6ab^2} = \frac{2b-1}{6ab^2}.$$

Вычитание дробей с разными знаменателями

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$, если НОД($b$; d) = 1.

$a-\frac{b}{d}=\frac{ad-b}{d}$

${}^{k/}\frac{a}{b}-{}^{l/}\frac{c}{d}=\frac{ak-cl}{bd}$, где m = НОК(b; d), $k=\frac{m}{b}$, $l=\frac{m}{d}$

Например: $10{}^{7/}\frac{1}{2}-4{}^{1/}\frac{9}{14}=10\frac{7}{14}-4\frac{9}{14}=9+1\frac{7}{14}-4\frac{9}{14}=9\frac{21}{14}-4\frac{9}{14}=5\frac{12}{14}=5\frac{6}{7};$

$$a+b-\frac{a-3}{3}={}^{3/}\frac{a+b}{1}-{}^{1/}\frac{a-3}{3}=\frac{3(a+b)-(a-3)}{3}=\frac{3a+3b-a+3}{3}=$$
$$=\frac{2a+3b+3}{3};$$

$$\frac{a}{2x+4}-\frac{a}{3x+6}={}^{3/}\frac{a}{2(x+2)}-{}^{2/}\frac{a}{3(x+2)}=\frac{3a-2a}{6(x+2)}=\frac{a}{6(x+2)};$$

$$\frac{a-1}{a^2-2a}-\frac{a}{a^2-4}={}^{a+2/}\frac{a-1}{a(a-2)}-{}^{a/}\frac{a}{(a-2)(a+2)}=\frac{(a+2)(a-1)-a^2}{a(a-2)(a+2)}=$$
$$=\frac{\cancel{a^2}-a+2a-2-\cancel{a^2}}{a(a-2)(a+2)}=\frac{\cancel{a-2}}{a\cancel{(a-2)}(a+2)}=\frac{1}{a^2+2a}.$$

1.8. Умножение и деление рациональных чисел и выражений

Умножение дробных чисел

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ $\qquad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$

$+\cdot+=+$	$+\cdot-=-$
$-\cdot-=+$	$-\cdot+=-$

Например: $\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3\cdot\cancel{5}^1}{{}_1\cancel{5}\cdot4}=-\frac{3}{4};$ $2\frac{2}{3}\cdot5\frac{4}{7}=\frac{8}{3}\cdot\frac{39}{7}=\frac{8\cdot\cancel{39}^{13}}{{}_1\cancel{3}\cdot7}=\frac{104}{7}=14\frac{6}{7};$

$$\frac{2b}{5a^3}\cdot10a^2=\frac{2b\cdot\cancel{10}^2\,\cancel{a^2}^1}{{}_1\cancel{5}\,\cancel{a^3}_a}=\frac{4b}{a};$$

$$\frac{6a}{x^2-x}\cdot\frac{2x-2}{3ax}=\frac{{}^2\cancel{6}\,\cancel{a}^1\cdot2\cancel{(x-1)}^1}{x\cdot{}_1\cancel{(x-1)}\cdot{}_1\cancel{3}\,{}_1\cancel{a}x}=\frac{4}{x^2}.$$

Деление десятичных дробей на натуральное число

Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натуральных чисел, только, окончив деление целой части числа, надо в ответе поставить запятую и продолжить деление.

Например:

$$20{,}75:5=4{,}15;\qquad \begin{array}{r|l} 20{,}75 & 5 \\ \cline{2-2} -\,20 & 4{,}15 \\ \cline{1-1} 7 & \\ -\,5 & \\ \cline{1-1} 25 & \\ -\,25 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$1{,}6:10=0{,}16;\ 21{,}3:100=0{,}213.$

Деление десятичной дроби на десятичную дробь

Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, надо в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько знаков, сколько их в делителе, а затем выполнить деление на натуральное число.

Например:

$$4{,}056:1{,}3=40{,}56:13=3{,}12;\qquad \begin{array}{r|l} 40{,}56 & 13 \\ \cline{2-2} -\,39 & 3{,}12 \\ \cline{1-1} 15 & \\ -\,13 & \\ \cline{1-1} 26 & \\ -\,26 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$0{,}052:0{,}1=0{,}52:1=0{,}52;\ 0{,}123:0{,}01=12{,}3:1=12{,}3.$

Деление дробных чисел

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\qquad a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}\qquad \begin{array}{c|c} +:+=+ & +:-=- \\ -:-=+ & -:+=- \end{array}$$

Например: $-\frac{2}{3}:\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{{}^{1}\cancel{2}\cdot\cancel{9}^{3}}{{}_{1}\cancel{3}\cdot{}_{2}\cancel{4}}=\frac{3}{2}=1{,}5;$

$$2\frac{1}{3}:3\frac{1}{9}=\frac{7}{3}:\frac{28}{9}=\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{28}=\frac{{}^{1}\cancel{7}\cdot\cancel{9}^{3}}{{}_{1}\cancel{3}\cdot{}_{4}\cancel{28}}=\frac{3}{4};$$

$$\frac{a^2-3a}{a^2-25}:\frac{a^2-9}{a^2+5a}=\frac{a(a-3)}{(a-5)(a+5)}\cdot\frac{a(a+5)}{(a-3)(a+3)}=$$

$$=\frac{a^2\,\cancel{(a-3)}^{1}\,\cancel{(a+5)}^{1}}{(a-5)\,{}_{1}\cancel{(a+5)}\,{}_{1}\cancel{(a-3)}(a+3)}=\frac{a^2}{(a-5)(a+3)}=\frac{a^2}{a^2-2a-15}.$$

Вычисление дроби от числа

Пусть A — некоторое число, тогда $\frac{a}{b}$ от $A = \frac{a}{b} \cdot A$.

Например: $\frac{3}{7}$ от $21 = \frac{3}{7} \cdot 21 = \frac{3}{7} \cdot \frac{21}{1} = \frac{3 \cdot \cancel{21}^{3}}{{}_{1}\cancel{7} \cdot 1} = 9.$

Проценты

Процент — это одна сотая часть.

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Например: $100\% = 1$; $50\% = \frac{1}{2}$; $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$;
$0{,}2 = 20\%$; $1{,}3 = 130\%$; $0{,}03 = 3\%$.

Вычисление процента от числа

$p\,\%$ от $a = \frac{p \cdot a}{100}$

Например: 3% от $15 = 0{,}03 \cdot 15 = 0{,}45$; 15% от $4 = 0{,}15 \cdot 4 = 0{,}6$;
25% от $40 = 0{,}25 \cdot 40 = 10$.

Вычисление числа по данному проценту

Если $p\,\%$ от некоторого числа x равно b, то $p\,\%$ от $x = b$.

$\frac{px}{100} = b$; $px = 100b$; $x = \frac{100b}{p}$

Например: 5% от $x = 10$; $0{,}05x = 10$; $x = 10 : 0{,}05$; $x = 1000 : 5$; $x = 200$.

Вычисление процентного соотношения

Число a составляет $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ от числа b.

Число 15 составляет $\frac{15}{75} \cdot 100\% = 20\%$ от числа 75.

1.9. Арифметический корень

Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) **неотрицательного числа** a называется **неотрицательное число, n-я степень которого равна a.**

Арифметический корень n-й степени обозначают символом $\sqrt[n]{a}$. Если $n = 2$, то пишут $\sqrt{a}$. Такое выражение называют арифметическим квадратным корнем.

Если $a < 0$, n — натуральное четное число, то среди действительных чисел $\sqrt[n]{a}$ не существует.

Если $a < 0$, n — натуральное нечетное число ($n > 1$), то $\sqrt[n]{a}$ существует, причем $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

$\sqrt{64}=8$, потому что $8^2 = 64$; $\sqrt[4]{16}=2$, потому что $2^4 = 16$; $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$;

$\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$; $\sqrt[10]{-15}$ — не существует; $\sqrt{-20}$ — не существует.

Свойства корня *n*-й степени

$\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}=a$, если $a \geq 0$ $\left(\sqrt[2n-1]{a}\right)^{2n-1}=a$, где $a \in R$	$\left(\sqrt{7}\right)^2=7$; $\left(\sqrt[7]{8}\right)^7=8$
$\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert=\begin{cases}a, \text{если } a \geq 0\\ -a, \text{если } a<0\end{cases}$ $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}}=a$, где $a \in R$	$\sqrt[6]{(-2)^6}=\lvert-2\rvert=2$; $\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$
$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0$, $m \in Z$, $k \in \mathrm{N}$	$\sqrt[4]{5^6}=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}$
$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$, $k \in \mathrm{N}$, $k \geq 2$, $a \geq 0$	$\sqrt{\sqrt{5}}=\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[15]{2}$
$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt[3]{27\cdot 8}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{8}=3\cdot 2=6$
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, где $a \geq 0$, $b>0$	$\sqrt[4]{\dfrac{625}{81}}=\dfrac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{81}}=\dfrac{5}{3}=1\dfrac{2}{3}$
$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$	$2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^3\cdot 4}=\sqrt[3]{8\cdot 4}=\sqrt[3]{32}$; $-5\sqrt{2}=-\sqrt{5^2\cdot 2}=-\sqrt{25\cdot 2}=-\sqrt{50}$
$\sqrt[n]{a^n\cdot b}=a\sqrt[n]{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{8\cdot 4}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{-16}=-\sqrt[3]{16}=-\sqrt[3]{8\cdot 2}=-\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}=-2\cdot\sqrt[3]{2}$

1.10. Избавление от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Например: $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

$$\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Например:

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$$

$$\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Например: $\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=\frac{8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{6-2}=$

$=\frac{8\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}=2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right).$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

Например: $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4^2}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{16}}{4}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{16}}{2}.$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}}=\frac{a\left(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}=\frac{a\cdot\left(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{b\pm c}$$

Например: $\frac{15}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{15\left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\cdot3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2\cdot3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}=\frac{15\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=$

$=\frac{15\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)}{2+3}=\frac{15\cdot\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)}{5}=3\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right).$

1.11. Степень с рациональным показателем

Пусть n — натуральное число и $a\neq0$, тогда

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$, $b\neq0$

$a^0=1$

Например: $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$; $0{,}2^{-1}=\left(\frac{2}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5^1=5$;

$\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}=5\frac{4}{9}$; $0{,}75^0=1$; $(-2)^{-2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$; $-2^{-2}=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$.

Пусть $a\geq0$, m, n — натуральные числа и $n\geq2$, тогда $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

Если $a>0$, то $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

Например: $2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$; $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=2^2=4$; $4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Выражение $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не определено.

Свойства степени с рациональным показателем

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a > 0$	$2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
$a^x : a^y = a^{x-y}$, $a > 0$	$3^{\frac{1}{4}} : 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
$(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $a > 0$, $b < 0$	$2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$, $a > 0$, $b < 0$	$\frac{16^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{16}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$
$(a^x)^y = a^{xy}$, $x > 0$	$\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{15}{2}} = 2^{\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

1.12. Логарифм числа

Логарифмом числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b$. $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ $\log_{10} x = \lg x$ — десятичный логарифм $\log_e x = \ln x$ — натуральный логарифм $e \approx 2,7$	$\log_3 27 = 3$, потому что $3^3 = 27$; $\lg 100 = 2$, потому что $10^2 = 100$; $\ln 1 = 0$, потому что $e^0 = 1$.
$\log_a a = 1$	$\log_7 7 = 1$
$\log_a 1 = 0$	$\log_7 1 = 0$
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $b > 0$, $c > 0$	$\lg 100 = \lg(10 \cdot 10) = \lg 10 + \lg 10 = 1 + 1 = 2$
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $b > 0$, $c > 0$	$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 1 - \log_3 9 = 0 - 2 = -2$
$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, $b > 0$	$\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \cdot \log_6 6 = 2 \cdot 1 = 2$
$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$, $b > 0$	$\log_{49} 7 = \log_{7^2} 7 = \frac{1}{2}\log_7 7 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = 0,5$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$ В частности, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$	$\log_4 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 4}$
Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$)	$7^{\log_7 13} = 13$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Упростите выражение $\dfrac{6xy+6-4x-9y}{x^2-12x+36}:\dfrac{9y^2-12y+4}{3xy-18y-2x+12}$.

Решение

$$\frac{6xy+6-4x-9y}{x^2-12x+36}:\frac{9y^2-12y+4}{3xy-18y-2x+12}=\frac{(6xy-9y)+(6-4x)}{(x-6)^2}:$$

$$:\frac{(3y-2)^2}{(3xy-18y)-(2x-12)}=\frac{3y(2x-3)+2(3-2x)}{(x-6)^2}:\frac{(3y-2)^2}{3y(x-6)-2(x-6)}=$$

$$=\frac{(2x-3)(3y-2)\cdot(x-6)(3y-2)}{(x-6)^2\cdot(3y-2)^2}=\frac{(2x-3)\cancel{(3y-2)^2}\cdot\cancel{(x-6)}}{(x-6)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(3y-2)^2}}=\frac{2x-3}{x-6}.$$

Ответ: $\dfrac{2x-3}{x-6}$.

Пример 2. Найдите значение выражения $\sqrt{4+2\sqrt3}-\sqrt{4-2\sqrt3}$.

Решение

$$\sqrt{4+2\sqrt3}-\sqrt{4-2\sqrt3}=\sqrt{\left(\sqrt3+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt3-1\right)^2}=\left|\sqrt3+1\right|-\left|\sqrt3-1\right|=$$

$$=\sqrt3+1-\left(\sqrt3-1\right)=\cancel{\sqrt3}+1-\cancel{\sqrt3}+1=2.$$

Ответ: 2.

Пример 3. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{2}{\sqrt3-1}+\frac{3}{\sqrt3-2}+\frac{15}{3-\sqrt3}\right)\cdot\left(\sqrt3+5\right)^{-1}.$$

Решение

$$\left(\frac{2}{\sqrt3-1}+\frac{3}{\sqrt3-2}+\frac{15}{3-\sqrt3}\right)\cdot\left(\sqrt3+5\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{2\left(\sqrt3+1\right)}{\left(\sqrt3-1\right)\left(\sqrt3+1\right)}+\frac{3\left(\sqrt3+2\right)}{\left(\sqrt3-2\right)\left(\sqrt3+2\right)}+\frac{15\left(3+\sqrt3\right)}{\left(3-\sqrt3\right)\left(3+\sqrt3\right)}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt3+5}=$$

$$=\left(\frac{\cancel{2}^1\left(\sqrt3+1\right)}{\cancel{2}_1}+\frac{3\left(\sqrt3+2\right)}{-1}+\frac{\cancel{15}^5\left(3+\sqrt3\right)}{{}_2\cancel{6}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt3+5}=$$

$$=\left(\sqrt3+1-3\sqrt3-6+\frac{5\left(3+\sqrt3\right)}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt3+5}=\left(-2\sqrt3-5+\frac{5\left(3+\sqrt3\right)}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt3+5}=$$

$$=\frac{-4\sqrt3-10+15+5\sqrt3}{2\left(\sqrt3+5\right)}=\frac{\cancel{\sqrt3+5}^1}{2_1\left(\cancel{\sqrt3+5}\right)}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 4. Найдите значение выражения $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

Решение

$$81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}} = (3^4)^{\log_3 5} + (3^3)^{\log_{3^2} 6^2} + (3^4)^{\log_{3^2} 7} = 3^{4\log_3 5^4} + 3^{3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\log_3 6} +$$

$$+3^{4\cdot\frac{1}{2}\log_3 7} = 5^4 + 6^3 + 7^2 = 625 + 216 + 49 = 890.$$

Ответ: 890.

Пример 5. Вычислите $\log_6 27$, если $\log_{12} 16 = a$.

Решение

$$\log_6 27 = \frac{1}{\log_{27} 6} = \frac{1}{\log_{3^3} 6} = \frac{1}{\frac{1}{3}\log_3 6} = \frac{3}{\log_3(2\cdot 3)} = \frac{3}{\log_3 3 + \log_3 2} = \frac{3}{1 + \log_3 2};$$

$$\log_{12} 16 = \frac{1}{\log_{16} 12} = \frac{1}{\log_{4^2} 12} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_4 12} = \frac{2}{\log_4 12} = \frac{2}{\log_4(4\cdot 3)} = \frac{2}{\log_4 4 + \log_4 3} =$$

$$= \frac{2}{1 + \log_4 3} = \frac{2}{1 + \log_{2^2} 3} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\log_2 3}.$$

По условию задачи: $\frac{2}{1 + \frac{1}{2}\log_2 3} = a$; $1 + \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{2}{a}$; $\frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{2}{a} - 1$; $\frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{2-a}{a}$;

$$\log_2 3 = \frac{4-2a}{a};\quad \log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{a}{4-2a}.$$

Следовательно, $\log_6 27 = \frac{3}{1 + \log_3 2} = \frac{3}{1 + \frac{a}{4-2a}} = \frac{3}{\frac{4-a}{4-2a}} = \frac{3(4-2a)}{4-a} = \frac{6(2-a)}{4-a}$.

Ответ: $\frac{6(2-a)}{4-a}$.

Пример 6. Решите задачу.

Цену на товар повысили на 12 %. На сколько процентов нужно уменьшить новую цену, чтобы получить начальную?

Решение

Пусть начальная цена товара составляет 100 %.

1) 100 % + 12 % = 112 %.

2) Пусть на x % нужно уменьшить новую цену, чтобы получить начальную. 112 — (x % от 112) равно 100; $112 - 1{,}12x = 100$; $1{,}12x = 12$;

$$x = \frac{1200}{112} = 10\frac{80}{112} = 10\frac{5}{7}.$$

Ответ: на $10\frac{5}{7}$ %.

Пример 7. Упростите выражение $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)^{-1}$.

Решение

1) $\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+\left(\sqrt{2}\right)^3}=\frac{^{a^2-\sqrt{2}a+2/}1}{a+\sqrt{2}}-\frac{^{1/}a^2+4}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^2-\sqrt{2}a+2\right)}=$

$=\frac{a^2-\sqrt{2}a+2-(a^2+4)}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^2-\sqrt{2}a+2\right)}=\frac{\cancel{a^2}-\sqrt{2}a+2-\cancel{a^2}-4}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^2-\sqrt{2}a+2\right)}=\frac{-\sqrt{2}a-2}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^2-\sqrt{2}a+2\right)}=$

$=-\frac{\sqrt{2}a+2}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^2-\sqrt{2}a+2\right)}=-\frac{\sqrt{2}\left(a+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^2-\sqrt{2}a+2\right)}=-\frac{\sqrt{2}\cancel{\left(a+\sqrt{2}\right)}^1}{_1\cancel{\left(a+\sqrt{2}\right)}\left(a^2-\sqrt{2}a+2\right)}=$

$=-\frac{\sqrt{2}}{a^2-\sqrt{2}a+2}$;

2) $\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)^{-1}=\left(\frac{^{1/}a}{2}-\frac{^{a/}\sqrt{2}}{2}+\frac{^{1/}1}{a}\right)^{-1}=\left(\frac{a^2-\sqrt{2}a+2}{2a}\right)^{-1}=\frac{2a}{a^2-\sqrt{2}a+2}$;

3) $-\frac{\sqrt{2}}{a^2-\sqrt{2}a+2}:\frac{2a}{a^2-\sqrt{2}a+2}=-\frac{\sqrt{2}\left(a^2-\sqrt{2}a+2\right)}{2a\left(a^2-\sqrt{2}a+2\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2a}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2a}$.

Пример 8. Найдите значение выражения $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$.

Решение

$\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2-\sqrt{3}$.

Ответ: $2-\sqrt{3}$.

Пример 9. Упростите выражение $\left(\frac{9}{a+8}-\frac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4}\right)\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{2}{3}}}+\frac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}$.

1) $\frac{9}{a+8}-\frac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4}=\frac{9}{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+2^3}-\frac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4}=\frac{^{1/}9}{\left(a^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4\right)}-$

$-\frac{^{a^{\frac{1}{3}}+2/}a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4}=\frac{9-\left(a^{\frac{1}{3}}+2\right)^2}{\left(a^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4\right)}=\frac{9-a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}-4}{a+8}=\frac{5-a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}}{a+8}$;

2) $\frac{5-a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}}{a+8}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{2}{3}}}=\frac{\left(5-a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}\right)\cdot a^{\frac{1}{3}}\cancel{(a+8)}}{\cancel{(a+8)}\left(1-a^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\left(5-a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(1-a^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{3}}\right)}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(5-a^{\frac{2}{3}}-4a^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(1-a^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{3}}\right)}+\dfrac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{\cancel{5a^{\frac{1}{3}}}-\cancel{a}-4a^{\frac{2}{3}}+5-a^{\frac{2}{3}}-\cancel{5a^{\frac{1}{3}}}+\cancel{a}}{\left(1-a^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{3}}\right)}=$

$=\dfrac{5-5a^{\frac{2}{3}}}{\left(1-a^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{3}}\right)}=\dfrac{5\cancel{\left(1-a^{\frac{2}{3}}\right)}}{\cancel{1-a^{\frac{2}{3}}}}=5.$

Ответ: 5.

Пример 10. Найдите значение выражения $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

Решение

$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}=-\log_2\log_2\sqrt[8]{2}=-\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}}=$

$=-\log_2\left(\dfrac{1}{8}\cdot\log_2 2\right)=-\log_2\dfrac{1}{8}=-\log_2 8^{-1}=\log_2 8=\log_2 2^3=3\cdot\log_2 2=3\cdot1=3.$

Ответ: 3.

Пример 11. Упростите выражение $\dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log^2_{\frac{1}{a}}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}$.

Решение

$\dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log^2_{\frac{1}{a}}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}=\dfrac{\log_a(a^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\log^2_{a^{-1}}(a^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\log_{a^2}(a^2-1)\cdot\log_{a^{\frac{1}{3}}}(a^2-1)^{\frac{1}{6}}}=$

$=\dfrac{\frac{1}{8}\cdot\log^3_a(a^2-1)}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\log_a(a^2-1)}=\dfrac{1}{2}\log_a(a^2-1)=0{,}5\log_a(a^2-1).$

Ответ: $0{,}5\log_a(a^2-1)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}}$.

2. Упростите выражение и найдите его значение.

$\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc}$, если $a=0{,}02$; $b=-11{,}05$; $c=1{,}–7$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 135}{\log_{15}3}-\dfrac{\log_3 5}{\log_{405}3}$.

Тестовые задания

1. Разместите в порядке возрастания числа $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; 1,6.

А	Б	В	Г	Д
1,6; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$;	$\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; 1,6	1,6; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$; 1,6; $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$; 1,6; $\frac{5}{3}$

2. Найдите значение выражения $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

А	Б	В	Г	Д
6	$-\frac{49}{9}$	$\frac{49}{9}$	$\frac{9}{49}$	$-\frac{9}{49}$

3. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
2,5	5	$\sqrt{30}$	11	12

4. Вычислите $\frac{\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[3]{64}}{\sqrt{8}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{2}$	2	4	0,5

5. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{7}{\sqrt[3]{7}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{7}$	$\sqrt[3]{49}$	$\frac{\sqrt{7}}{7}$	$\sqrt{7}$	$7\sqrt[3]{7}$

6. Упростите выражение $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}:\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$	$\sqrt[6]{3}$	3	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. Установите соответствие между числами (1–4) и процентами (А–Д).

1 0,02
2 0,05
3 0,2
4 0,5

А 2 %
Б 50 %
В 100 %
Г 5 %
Д 20 %

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установите соответствие между числовыми выражениями (1–4) и их значением (А–Д).

1 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$

2 $\sqrt{\dfrac{18}{2}}$

3 $\sqrt{9+16}$

4 $\sqrt{9\cdot 16}$

А 3
Б 5
В 6
Г 7
Д 12

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Установите соответствие между выражениями (1–4) и их числовым значением (А–Д).

1 $\log_2 10 - \log_2 5$

2 $\dfrac{\log_2 3}{\log_2 9}$

3 $\log_{20} 4 + \log_{20} \dfrac{1}{4}$

4 log2 3 · log3 4

А 0,5
Б 1
В 2
Г 5
Д 0

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Найдите значение выражения $\left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}$.

11. Выполните действия: $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+4}{a^{\frac{1}{4}}-4}+\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-4}{a^{\frac{1}{4}}+4}-\dfrac{64}{a^{\frac{1}{2}}-16}\right)^{-2}$.

12. Цена товара возросла на 25 %. На сколько процентов нужно ее снизить, чтобы получить начальную цену?

2. Алгебраические уравнения и системы алгебраических уравнений

2.1. Определение уравнения. Корни уравнения. Равносильность уравнений

Уравнением называется равенство с переменной, относительно которой надо установить, для каких ее значений (возможно, таких значений и не существует) это равенство превращается в правильное числовое.

Корнем (решением) уравнения с одной переменной называется значение переменной, при котором уравнение превращается в правильное равенство.

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что уравнение корней не имеет.

Два **любых уравнения** будут **равносильными**, если все корни первого уравнения являются корнями второго, а все корни второго — корнями первого, или если оба уравнения не имеют решения.

Равносильность уравнений обозначают символом «$\Leftrightarrow$».

Преобразования, в результате которых уравнение сводится к равносильному ему уравнению

Если в уравнении поменять местами левую и правую части, то получим уравнение, равносильное данному.	$2x - 1 = 3x + 5 \Leftrightarrow 3x + 5 = 2x - 1$
Если в уравнении какое-либо слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получим уравнение, равносильное данному.	$6x - 7 = 3x - 9 \Leftrightarrow 6x - 3x = -9 + 7$
Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.	$\frac{x-2}{8} = x \Leftrightarrow x - 2 = 8x$; $3x - 6 = 12 \Leftrightarrow x - 2 = 4$
Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному	$x + 3 = 7x \Leftrightarrow x + 3 + 2 = 7x + 2$; $x - 4 = 9x \Leftrightarrow x - 4 - 5 = 9x - 5$

2.2. Линейные уравнения

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — действительные числа, называется **линейным уравнением с одной переменной x.**

Если $a \neq 0$, $b \in R$, то $x = \frac{b}{a}$	$7x = 1$; $x = \frac{1}{7}$

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение решений не имеет	$0 \cdot x = 13$; уравнение корней не имеет
Если $a = b = 0$, то уравнение имеет множество решений, то есть x — любое действительное число	$0 \cdot x = 0$, $x \in R$

2.3. Уравнения вида $A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot An(x) = 0$ и $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$

$$A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_n(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A_1(x)=0, \\ A_2(x)=0, \\ \ldots \\ A_n(x)=0. \end{array}\right.$$

Например: $(x - 2) \cdot (3 + x) \cdot (7 - x) = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ 3+x=0, \\ 7-x=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-3, \\ x=7. \end{array}\right.$
Ответ: –3; 2; 7.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=0, \\ B(x)\neq 0. \end{cases}$$

Например: $\dfrac{x^2-16}{x+4}=0;$ $\begin{cases} x^2-16=0, \\ x+4\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-4)(x+4)=0, \\ x+4\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-4, \end{array}\right. \\ x\neq -4. \end{cases}$
Ответ: 4.

2.4. Пропорции

! Равенство двух отношений называют **пропорцией**.

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ или $a : b = c : d$,
где a, d — крайние члены, b и c — средние члены.
Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних ее членов.

Если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то $ad = bc$.	$\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{3}{2};$ $\begin{cases} 2(x-2)=3x, \\ x\neq 0; \end{cases}$ $2x - 4 = 3x;$ $2x - 3x = 4; -x = 4; x = -4.$ *Ответ:* –4.
Если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то $a=\dfrac{bc}{d}$.	$\dfrac{x}{4}=\dfrac{5}{2};$ $x=\dfrac{4\cdot 5}{2};$ $x = 10.$ *Ответ:* 10.
Если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то $b=\dfrac{ad}{c}$.	$\dfrac{7}{x}=\dfrac{14}{5};$ $x=\dfrac{7\cdot 5}{14};$ $x=\dfrac{5}{2}=2{,}5.$ *Ответ:* 2,5.

Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $c=\frac{ad}{b}$.	$\frac{3}{8}=\frac{x}{16}$; $x=\frac{3\cdot 16}{8}$; $x=6$. *Ответ*: 6.
Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $d=\frac{bc}{a}$.	$\frac{3}{7}=\frac{9}{x}$; $x=\frac{7\cdot 9}{3}$; $x=21$. *Ответ*: 21.

2.5. Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$, называют **квадратным**. Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют **приведенным**.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант.

Если $c = 0$, $b \neq 0$, то $ax^2 + bx = 0$ — неполное квадратное уравнение.

Например: $5x^2 - 3x = 0$; $x(5x-3)=0$; $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ 5x-3=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=0{,}6. \end{array}\right.$

Ответ: 0; 0,6.

Если $b = 0$, $c \neq 0$, то $ax^2 + c = 0$ — неполное квадратное уравнение.

Например: $2x^2 - 6 = 0$; $2x^2 = 6$; $x^2 = 3$; $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=-\sqrt{3}$.

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

Если $b = c = 0$, то $ax^2 = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$.

Например: $-7x^2 = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$.

Ответ: 0.

Если $b \neq 0$, $c \neq 0$, $D > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два разных корня:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\quad x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Например: $3x^2 - x - 2 = 0$; $D = (-1)^2 - 4\cdot 3\cdot(-2) = 1 + 24 = 25 > 0$;

$$x_1=\frac{1+\sqrt{25}}{2\cdot 3}=\frac{1+5}{6}=\frac{6}{6}=1;\quad x_2=\frac{1-\sqrt{25}}{2\cdot 3}=\frac{1-5}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$; 1.

Если $b \neq 0$, $c \neq 0$, $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней.

Например: $2x^2 + 3x + 5 = 0$; $D = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$.

Ответ: уравнение действительных корней не имеет.

Если $b \neq 0$, $c \neq 0$, $D = 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два одинаковых корня: $x_{1,2}=\frac{-b}{2a}$.

Например: $x^2 - 10x + 25 = 0$; $D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$; $x_{1,2} = \frac{10}{2} = 5$.
Ответ: 5.

Теорема Виета

Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение — q, то есть $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

Пример. Не решая квадратное уравнение $3x^2 - 4x - 2 = 0$, вычислите $x_1^2 + x_2^2$.

Решение

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 > 0$; $3x^2 - 4x - 2 = 0 \mid : 3$; $x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = 0$.

Согласно теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4}{3}, \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3}. \end{cases}$

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9} + \frac{4}{3} =$$
$$= \frac{16 + 12}{9} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}.$$

Ответ: $3\frac{1}{9}$.

2.6. Квадратный трехчлен и его корни

Квадратным трехчленом называется многочлен $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$.

Корень квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ — это число x_0, для которого $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$.

Корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ находят по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ **в случае, если $D \geq 0$.**

Например: Вычислите корни квадратного трехчлена $7x^2 - 2x - 5$.

Решение

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-5) = 4 + 140 = 144 > 0$; $x_1 = \frac{2 + \sqrt{144}}{2 \cdot 7} = \frac{2 + 12}{14} = \frac{14}{14} = 1$;

$x_2 = \frac{2 - \sqrt{144}}{2 \cdot 7} = \frac{2 - 12}{14} = -\frac{10}{14} = -\frac{5}{7}$.

Ответ: $-\frac{5}{7}$; 1.

Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}.$$

Например: $3x^2-4x+1=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right)=$

$$=3\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right)=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}.$$

Разложение квадратного трехчлена на множители

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то выполняется равенство $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

Например: Разложите квадратный трехчлен $3x^2-5x+2$ на множители.

Решение

$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot2=25-24=1>0;$ $x_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1;$ $x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

Следовательно, $3x^2-5x+2=3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(x-1)(3x-2).$

2.7. Дробные рациональные уравнения

!

Уравнение вида $A(x)=B(x)$ называется **рациональным**, если $A(x)$ и $B(x)$ — рациональные выражения. Если $A(x)$ и $B(x)$ — целые выражения, то уравнение называется **целым**; если же хотя бы одно из выражений $A(x)$, $B(x)$ дробное, то рациональное уравнение называется **дробным**.

$\frac{x-2}{4}+\frac{(3x-5)^2}{6}=2-\frac{x}{3}$ — целое рациональное уравнение, поскольку ни одно из слагаемых не содержит деления на переменную.

$\frac{2x-3}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{x}{4}$ — дробное рациональное уравнение.

Алгоритм решения дробных рациональных уравнений

1) Найти область допустимых значений (ОДЗ) уравнения.

2) Свести его к виду $\frac{A}{B}=0$, где A и B — целые рациональные выражения.

3) Решить уравнение $\frac{A}{B}=0$.

4) Проверить, все ли найденные корни входят в ОДЗ уравнения. Корни, которые не входят в ОДЗ уравнения,— посторонние.

5) Записать ответ.

Например: $\frac{2x+1}{x+1}-\frac{3}{x^2-1}=\frac{2}{3}$; ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 1,\\ x\neq -1.\end{cases}$ $\frac{^{3(x-1)/}2x+1}{x+1}-\frac{^{3/}3}{x^2-1}-\frac{^{x^2-1/}2}{3}=0;$

$$\frac{(2x+1)(3x-3)-9-2(x^2-1)}{3(x-1)(x+1)}=0;\quad \frac{6x^2-6x+3x-3-9-2x^2+2}{3(x-1)(x+1)}=0;$$

$$\frac{4x^2-3x-10}{3(x-1)(x+1)}=0;\quad \begin{cases} 4x^2-3x-10=0,\\ x\neq 1,\\ x\neq -1.\end{cases}$$

$D = (-3)^2 - 4\cdot 4\cdot(-10) = 9 + 160 = 169 > 0;$

$$x_1=\frac{3+13}{8}=\frac{16}{8}=2;\quad x_2=\frac{3-13}{8}=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}=-1{,}25.$$

Ответ: $-1{,}25$; 2.

2.8. Уравнения, решаемые методом введения новой переменной

Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется **биквадратным**.

Введя новую переменную $t = x^2 \geq 0$, получим квадратное относительно t уравнение:

$at^2 + bt + c = 0$; $t=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; $x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$, где $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\geq 0$.

Например: $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$. *Замена:* $x^2 = t \geq 0$. $t^2 + 3t - 4 = 0$; $t_1 = -4 < 0$; $t_2 = 1$; $x^2 = 1$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$.

Ответ: -1; 1.

$$\frac{ax}{px^2+nx+q}+\frac{bx}{px^2+mx+q}=c$$

1) Делим числитель и знаменатель каждой дроби на $x \neq 0$: $\frac{a}{px+\frac{q}{x}+n}+\frac{b}{px+\frac{q}{x}+m}=c.$

2) Производим замену: $px+\frac{q}{x}=t.$

3) Решаем уравнение $\frac{a}{t+n}+\frac{b}{t+m}=c.$

4) Возвращаемся к замене и находим x.

5) Случай $x = 0$ рассматриваем отдельно.

6) Записываем ответ.

Например: $\frac{3x}{2x^2+5x+1}+\frac{x}{2x^2+3x+1}=\frac{13}{24}$; $\frac{3}{2x+\frac{1}{x}+5}+\frac{1}{2x+\frac{1}{x}+3}=\frac{13}{24}.$

Замена: $2x+\frac{1}{x}=t.$ $\frac{3}{t+5}+\frac{1}{t+3}=\frac{13}{24};$ $\frac{3(t+3)+(t+5)}{(t+3)(t+5)}=\frac{13}{24};$ $\frac{4t+14}{(t+3)(t+5)}=\frac{13}{24};$

$24(4t + 14) = 13(t + 5)(t + 3)$; $96t + 336 = 13t^2 + 104t + 195$; $13t^2 + 8t - 141 = 0$;

$D = 64 - 4 \cdot 13 \cdot (-141) = 64 + 7332 = 7396$; $t_1 = \frac{-8+86}{26} = \frac{78}{26} = 3$, $t_2 = \frac{-8-86}{26} = -\frac{94}{26} = -\frac{47}{13}$,

$$\left[\begin{array}{l} 2x + \frac{1}{x} = 3, \\ 2x + \frac{1}{x} = -\frac{47}{13}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{2x^2+1}{x} = 3, \\ \frac{2x^2+1}{x} = -\frac{47}{13}; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x + 1 = 0, \\ 26x^2 + 47x + 13 = 0, \end{array}\right. \\ x \neq 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 0{,}5, \\ x = \frac{-47 \pm \sqrt{857}}{52}. \end{array}\right.$$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, если $a + b = c + d$.

$(x^2 + xb + xa + ab)(x^2 + xd + xc + cd) = m$;

$(x^2 + x(a + b) + ab)(x^2 + x(c + d) + cd) = m$.

В результате замены $x^2 + x(a + b) = t$ получаем уравнение $(t + ab)(t + cd) = m$.

$(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 1) = 120$; $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x + 4) = 120$.

Замена: $x^2 + 5x = t$. $(t + 6)(t + 4) = 120$; $t^2 + 10t - 96 = 0$; $t_1 = -16$; $t_2 = 6$.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x = -16, \\ x^2 + 5x = 6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 + 5x = -16\,(D < 0), \\ x^2 + 5x - 6 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -6, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: –6; 1.

2.9. Уравнения с модулями и параметрами

Уравнение $|x| = a$

1) если $a < 0$, то уравнение решений не имеет;
2) если $a = 0$, то $x = 0$;
3) если $a > 0$, то $x_1 = a$, $x_2 = -a$.

Например: 1. $|x| = -\frac{1}{3}$. Поскольку $-\frac{1}{3} < 0$, то уравнение решений не имеет.
2. $|x| = 0$, $x = 0$;
3. $|x| = 10$. Поскольку $10 > 0$, то $x_1 = -10$, $x_2 = 10$.

Уравнение $|x - b| = a$

1) если $a < 0$, то уравнение решений не имеет;
2) если $a = 0$, то $x = b$;
3) если $a > 0$, то $x_1 = a + b$; $x_2 = -a + b$.

Например: 1. $|x - 10| = -13$. Поскольку $-13 < 0$, то уравнение решений не имеет.
2. $|x - 25| = 0$; $x - 25 = 0$; $x = 25$.
3. $|x - 7| = 3$; $\left[\begin{array}{l} x - 7 = 3, \\ x - 7 = -3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 10, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Алгоритм решения более сложных уравнений с модулем

1) Приравнять к нулю выражения, которые содержатся под модулями.
2) Решить данные уравнения.
3) Нанести полученные числа на координатную прямую и обозначить промежутки, на которые они ее разбивают.

4) На каждом из промежутков раскрыть модули, используя его определение, и решить полученные уравнения.

5) Проверить, принадлежат ли корни уравнения промежуткам, на которых оно решалось. Если корень промежутку не принадлежит, то он посторонний.

6) Записать ответ.

Например: $|x - 2| - |3 - x| = 1$; $x - 2 = 0$, $x = 2$; $3 - x = 0$, $x = 3$.

1) $x \in (-\infty; 2]$; $-(x - 2) - (3 - x) = 1$; $-x + 2 - 3 + x = 1$; $-x + x = 1 + 3 - 2$; $0 \cdot x = 2$; $x \in \varnothing$;

2) $x \in (2; 3]$; $(x - 2) - (3 - x) = 1$; $x - 2 - 3 + x = 1$; $x + x = 1 + 2 + 3$; $2x = 6$; $x = 3$. Поскольку $3 \in (2; 3]$, то $x = 3$ — корень уравнения.

3) $x \in (3; +\infty)$; $(x - 2) + (3 - x) = 1$; $x - 2 + 3 - x = 1$; $x - x = 1 + 2 - 3$; $0 \cdot x = 0$; x — любое число в промежутке $(3; +\infty)$.

Ответ: $[3; +\infty)$.

Уравнение с параметрами — это уравнение, в запись которого, кроме переменной и числовых коэффициентов, входят также буквенные *коэффициенты-параметры*.

Любое уравнение с параметром можно решать как обычное уравнение до тех пор, пока все преобразования или допущения, необходимые для решения, можно выполнить однозначно.

Если определенное преобразование нельзя выполнить однозначно, то решение необходимо разбить на несколько действий, чтобы в каждом из них ответ через параметры записывался однозначно.

Например: $ax + 3 = x - 7$; $ax - x = -7 - 3$; $x(a - 1) = -10$.

Если $a = 1$, то $0x = -10$, $x \in \varnothing$.

Если $a \neq 1$, то $x = -\dfrac{10}{a-1} = \dfrac{10}{1-a}$.

Ответ: если $a = 1$, то уравнение решений не имеет; если $a \neq 1$, то $x = \dfrac{10}{1-a}$.

2.10. Уравнения высших степеней

Если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ имеет целый корень, то он является делителем свободного члена.

Если $x = a$ — корень многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, то остаток от деления многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ на двучлен $x - a$ равен нулю.

Например: $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$.

Чтобы проверить наличие целых корней в этом уравнении, выпишем все делители его свободного члена: 1; –1; 2; –2. Проверкой устанавливаем, что $x = -1$ является корнем данного уравнения. Следовательно, многочлен, который стоит в левой части уравнения, делится целиком на двучлен $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 5x - 2 & x+1 \\ \underline{2x^3 + 2x^2} & \overline{2x^2 - 3x - 2} \\ -3x^2 - 5x & \\ \underline{-3x^2 - 3x} & \\ -2x - 2 & \\ \underline{-2x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Поэтому $(x + 1)(2x^2 - 3x - 2) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ 2x^2-3x-2=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \\ x=-0{,}5. \end{array}\right.$

Ответ: –1; –0,5; 2.

2.11. Системы уравнений

Системой уравнений называются два или несколько уравнений, в которых нужно найти все общие решения.

Решить систему уравнений — ***значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.***

Решением системы уравнений с двумя переменными называют пары значений переменных, которые превращают каждое уравнение системы в правильные равенства.

Количество решений системы двух линейных уравнений

1. Система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ не имеет решений, если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\ne\dfrac{c_1}{c_2}$.

2. Система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ имеет единственное решение, если $\dfrac{a_1}{a_2}\ne\dfrac{b_1}{b_2}$.

3. Система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ имеет бесконечное количество решений, если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$.

Например: 1) $\begin{cases} 3x+4y=5, \\ 6x+8y=7. \end{cases}$ Поскольку $\dfrac{3}{6}=\dfrac{4}{8}\ne\dfrac{5}{7}$, то система решений не имеет.

2) $\begin{cases} 3x+4y=5, \\ 6x+5y=7. \end{cases}$ Поскольку $\dfrac{3}{6}\ne\dfrac{4}{5}$, то система имеет единственное решение.

3) $\begin{cases} 3x+4y=5, \\ 6x+8y=10. \end{cases}$ Поскольку $\dfrac{3}{6}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{5}{10}$, то система имеет бесконечное количество решений.

Способ подстановки в решении систем двух уравнений

1) В одном уравнении системы выразить одну переменную через другую, например у через x.

2) Найденное выражение подставить во второе уравнение системы; при этом получим уравнение с одной переменной.

3) Решив это уравнение, найдем значение x.

4) Найти значение y, подставив значение x в выражение для y.

Например: $\begin{cases}3x-y=1,\\7x+2y=11;\end{cases}$ $y = 3x - 1$; $7x + 2(3x - 1) = 11$; $7x + 6x - 2 = 11$; $7x + 6x = 11 + 2$; $13x = 13$; $x = 1$; $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$.

Ответ: (1; 2).

Способ сложения в решении систем двух уравнений

1) Уравниваем модули коэффициентов при любой переменной, например при переменной x.

2) Складываем или вычитаем почленно полученные уравнения, находим значение переменной y.

3) Подставляем найденное значение y в одно из уравнений системы, находим значение x.

Например: $\begin{cases}2x+3y=7,\\x-5y=-3;\,|\cdot(-2)\end{cases}$ $+\begin{cases}2x+3y=7,\\-2x+10y=6;\end{cases}$

$13y = 13$; $y = 1$; $x - 5 \cdot 1 = -3$; $x = -3 + 5$; $x = 2$.

Ответ: (2; 1).

Метод введения новых переменных

$\begin{cases}\dfrac{5}{x-5}-\dfrac{4}{y-6}=-1,\\[2mm]\dfrac{10}{x-5}+\dfrac{6}{y-6}=5.\end{cases}$ Пусть $\dfrac{1}{x-5}=u$, $\dfrac{1}{y-6}=v$, тогда $\begin{cases}5u-4v=-1,\,|(-2)\\10u+6v=5;\end{cases}$

$+\begin{cases}-10u+8v=2,\\10u+6v=5;\end{cases}$ $14v=7$; $v=\dfrac{1}{2}$; $5u-4\cdot\dfrac{1}{2}=-1$; $5u - 2 = -1$; $5u = -1 + 2$; $5u = 1$;

$u=\dfrac{1}{5}$. $\begin{cases}\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{5},\\[2mm]\dfrac{1}{y-6}=\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x-5=5,\\y-6=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=10,\\y=8.\end{cases}$

Ответ: (10; 8).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решите уравнение $\frac{x-1}{2}-\frac{5-x}{8}=2-\frac{3(x-2)}{4}$.

Решение

Умножим обе части уравнения на 8 (НОК знаменателей 2; 4; 8):

$8\cdot\left(\frac{x-1}{2}-\frac{5-x}{8}\right)=8\cdot\left(2-\frac{3(x-2)}{4}\right)$; $4(x-1)-(5-x)=16-6(x-2)$;

$4x-4-5+x=16-6x+12$; $4x+x+6x=16+12+4+5$; $11x=37$; $x=\frac{37}{11}=3\frac{4}{11}$.

Ответ: $3\frac{4}{11}$.

Пример 2. Решите уравнение $\frac{7x+6}{x^3-27}=\frac{1}{x^2+3x+9}+\frac{1}{x-3}$.

Решение

$\frac{{}^{1/}7x++6}{(x-3)(x^2+3x+9)}-\frac{{}^{x-3/}1}{x^2+3x+9}-\frac{{}^{x^2+3x+9/}1}{x-3}=0$; $\frac{7x+6-(x-3)-(x^2+3x+9)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=0$;

$\frac{7x+6-x+3-x^2-3x-9}{(x-3)(x^2+3x+9)}=0$; $\frac{-x^2+3x}{(x-3)(x^2+3x+9)}=0$; $\begin{cases}-x^2+3x=0;\\ x\neq 3;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-3x=0;\\ x\neq 3;\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-3)=0;\\ x\neq 3;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0;\\ x-3=0;\end{array}\right.\\ x\neq 3;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0;\\ x=3;\end{array}\right.\\ x\neq 3.\end{cases}$

Ответ: 0.

Пример 3. Решите уравнение $(x^2+2x)^2-3(x+1)^2-37=0$.

Решение

$(x^2+2x)^2-3(x^2+2x+1)-37=0$. *Замена:* $x^2+2x=t$. $t^2-3(t+1)-37=0$;

$t^2-3t-3-37=0$; $t^2-3t-40=0$; $t_1=-5$; $t_2=8$; $\left[\begin{array}{l}x^2+2x=-5;\\ x^2+2x=8;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2+2x+5=0;\\ x^2+2x-8=0;\end{array}\right.$

$x^2+2x+5=0$; $D=2^2-4\cdot1\cdot5=4-20<0$.
Следовательно, уравнение $x^2+2x+5=0$ действительных корней не имеет.
$x^2+2x-8=0$; $x_1=-4$; $x_2=2$.
Ответ: –4; 2.

Пример 4. Решите уравнение $\frac{x^2+3x}{1-x}+\frac{5x-5}{3x+x^2}=4$.

Решение

$\frac{x^2+3x}{1-x}+\frac{5(x-1)}{3x+x^2}=4$; $\frac{x^2+3x}{1-x}-\frac{5(1-x)}{3x+x^2}=4$.

Пусть $\frac{x^2+3x}{1-x}=t$, тогда $\frac{1-x}{x^2+3x}=\frac{1}{t}$; $t-\frac{5}{t}=4$; $\frac{t^2-5}{t}=4$; $\begin{cases}t^2-5=4t,\\ t\neq 0;\end{cases}$

$t^2 - 4t - 5 = 0$; $t_1 = 5$; $t_2 = -1$; $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+3x}{1-x}=5;\\ \dfrac{x^2+3x}{1-x}=-1;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+3x=5(1-x);\\ x^2+3x=x-1;\end{array}\right.\\ x\neq 1;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+8x-5=0;\\ x^2+2x+1=0;\end{array}\right.\\ x\neq 1.\end{array}\right.$

$x^2 + 8x - 5 = 0$; $D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 64 + 20 = 84$;

$$x_1=\frac{-8+\sqrt{84}}{2}=\frac{-8+\sqrt{4\cdot 21}}{2}=\frac{-8+2\sqrt{21}}{2}=\frac{2\left(-4+\sqrt{21}\right)}{2}=-4+\sqrt{21};\ \ x_2=-4-\sqrt{21};$$

$x^2 + 2x + 1 = 0$; $(x + 1)^2 = 0$; $x = -1$.

Ответ: -1; $-4\pm\sqrt{21}$.

Пример 5. Решите уравнение $4x^4 - (5x + 3)^2 = 0$.

Решение

$(2x^2)^2 - (5x + 3)^2 = 0$; $(2x^2 - (5x + 3))(2x^2 + (5x + 3)) = 0$;
$(2x^2 - 5x - 3)(2x^2 + 5x + 3) = 0$;

$\left[\begin{array}{l}2x^2-5x-3=0;\\ 2x^2+5x+3=0;\end{array}\right.$ $2x^2 - 5x - 3 = 0$; $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$;

$$x_1=\frac{5+7}{4}=\frac{12}{4}=3;\ \ x_2=\frac{5-7}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=-0{,}5;$$

$2x^2 + 5x + 3 = 0$; $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$; $x_3=\dfrac{-5+1}{4}=-\dfrac{4}{4}=-1$;

$$x_4=\frac{-5-1}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}=-1{,}5.$$

Ответ: $-1{,}5$; $-0{,}5$; -1; 3.

Пример 6. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=34;\\ x+y+xy=23.\end{cases}$

Решение

$\begin{cases}x^2+y^2=34,\\ x+y+xy=23;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+y^2=34,\\ 2(x+y)+2xy=46;\end{cases}$ $x^2 + y^2 + 2xy + 2(x + y) = 80$;

$(x + y)^2 + 2(x + y) = 80$. Пусть $x + y = t$, тогда $t^2 + 2t - 80 = 0$; $t_1 = 8$; $t_2 = -10$.

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=8,\\ 8+xy=23;\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-10,\\ -10+xy=23;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=8,\\ xy=15;\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-10,\\ xy=33.\end{cases}\end{array}\right.$

Решением первой системы совокупности являются пары чисел: $(3; 5)$ и $(5; 3)$.

Решим вторую систему совокупности: $x = -10 - y$; $y(-10 - y) = 33$; $y^2 + 10y + 33 = 0$; $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33 = 100 - 132 < 0$. Следовательно, вторая система совокупности решений не имеет.

Ответ: $(3; 5)$, $(5; 3)$.

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2-xy+y^2=2,\\ x^2+7xy-3y^2=5.\end{cases}$

Решение

$$\left\{\begin{array}{l}2x^2-xy+y^2=2,\\ x^2+7xy-3y^2=5;\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\cdot 5\\ \cdot(-2)\end{array}\right.\qquad +\begin{cases}10x^2-5xy+5y^2=10,\\ -2x^2-14xy+6y^2=-10;\end{cases}\ 8x^2-19xy+11y^2=0.$$

Разделим левую и правую части уравнения на $x^2\neq 0$. Случай $x^2=0$ надо рассматривать отдельно.

$\frac{8x^2}{x^2}-\frac{19xy}{x^2}+\frac{11y^2}{x^2}=0$; $8-19\cdot\frac{y}{x}+11\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$. Пусть $\frac{y}{x}=t$, тогда $11t^2-19t+8=$ $=0$; $D=(-19)^2-4\cdot 11\cdot 8=361-352=9$; $t_1=\frac{19+3}{22}=\frac{22}{22}=1$; $t_2=\frac{19-3}{22}=\frac{16}{22}=\frac{8}{11}$;

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{y}{x}=1,\\ \frac{y}{x}=\frac{8}{11},\end{array}\right.\\ 2x^2-xy+y^2=2;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x,\\ 2x^2-xy+y^2=2;\end{cases}\\ \begin{cases}y=\frac{8x}{11},\\ 2x^2-xy+y^2=2;\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-x^2+x^2=2,\\ y=x;\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-\frac{8x^2}{11}+\frac{64x^2}{121}=2,\\ y=\frac{8x}{11};\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=1,\\ y=x;\end{cases}\\ \begin{cases}218x^2=242,\\ y=\frac{8x}{11};\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1,\end{array}\right.\\ y=x;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{\frac{121}{109}},\\ x=\sqrt{\frac{121}{109}},\end{array}\right.\\ y=\frac{8x}{11};\end{array}\right.\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1,\\ y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\ y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt{\frac{121}{109}},\\ y=-\frac{8}{11}\sqrt{\frac{121}{109}};\end{cases}\\ \begin{cases}x=\sqrt{\frac{121}{109}},\\ y=-\frac{8}{11}\sqrt{\frac{121}{109}}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;\ 1)$; $(-1;\ -1)$; $\left(-\sqrt{\frac{121}{109}};\ -\frac{8}{11}\sqrt{\frac{121}{109}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{121}{109}};\ \frac{8}{11}\sqrt{\frac{121}{109}}\right)$.

Пример 8. Решите задачу.

Первый рабочий может выполнить задание на 5 ч быстрее второго. Работая вместе, они выполняют это задание за 6 ч. За сколько часов выполнит задание первый рабочий, работая самостоятельно?

Решение

Пусть второй рабочий может выполнить задание за x ч, тогда первый рабочий выполнит это задание за $(x-5)$ ч.

$\dfrac{1}{x}$ — работа, которую выполняет второй рабочий за 1 ч (производительность второго рабочего); $\dfrac{1}{x-5}$ — работа, которую выполняет первый рабочий за 1 ч (производительность первого рабочего).

Составляем уравнение: $6\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-5}\right)=1$; $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{^{6(x-5)/}1}{x}+\dfrac{^{6x/}1}{x-5}-\dfrac{^{x(x-5)/}1}{6}=0$;

$\dfrac{6(x-5)+6x-x(x-5)}{6x(x-5)}=0$; $\dfrac{6x-30+6x-x^2+5x}{6x(x-5)}=0$; $\begin{cases}-x^2+17x-30=0,\\ x\neq 0,\\ x\neq 5;\end{cases}$

$x^2-17x+30=0$; $x_1=2$ (условию задачи не отвечает); $x_2=15$. $x-5=15-5=10$.
Ответ: за 10 часов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решите уравнение $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=0$.

2. Решите уравнение $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|=1$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2y+y^2x=20,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}.\end{cases}$

Тестовые задания

1. Решите уравнение $-2\frac{2}{3}x = 4$.

А	Б	В	Г	Д
-6	$-\frac{32}{3}$	$-1,5$	$1,5$	$\frac{32}{3}$

2. Решите уравнение $\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-5}=0$.

А	Б	В	Г	Д
3; 4; 5	3; 4	4	3	5

3. Решите уравнение $x^2 + 4x - 21 = 0$ и найдите различие между большим и меньшим корнями.

А	Б	В	Г	Д
-10	-4	-3	4	10

4. Какому из указанных промежутков принадлежит корень уравнения

$$\frac{6x+7}{7}+x=\frac{80+4x}{5}-\frac{30-2x}{2}?$$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3]$	$(-3; 3)$	$(3; 10)$	$[10; +\infty)$	$(-10; -3)$

5. Найдите x_0y_0, где x_0 и y_0 — решение системы уравнений $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x-3y=-4. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
-2	3	-3	2	6

6. При каком значении m уравнение $\frac{4m+1}{x-2}=3-2m$ не имеет корней?

А	Б	В	Г	Д
1,5	2	3	4	-2

7. Установите соответствие между уравнениями (1–4) и корнями (А–Д).

1 $\frac{x-2}{3}=2$

2 $\frac{2}{3x}=\frac{1}{6}$

3 $5x + 8 = 33$

4 $\frac{5x-13}{4}=x-1$

А 9

Б 4

В 8

Г 5

Д 6

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установите соответствие между уравнениями (1–4) и количеством корней (А–Д).

1 $\frac{2x-3}{2}=2x-1$

2 $\frac{2x-4}{2}=x-2$

3 $\frac{2x-3}{2}\cdot(x-2)=0$

4 $\frac{2x-3}{2}=x-2$

А множество

Б только один

В только два

Г только три

Д ни одного

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Установите соответствие между системами уравнений (1–4) и решениями (А–Д).

1 $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=3 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 6x-y=4, \\ 3x-y=1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 5x-3y=-4, \\ x+3y=10 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 6x+5y=27, \\ 2x-y=1 \end{cases}$

А (1; 3)

Б (3; 2)

В (2; 1)

Г (2; 3)

Д (1; 2)

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. При каком значении a система $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=2, \\ 5x+2y=a \end{cases}$ имеет множество решений?

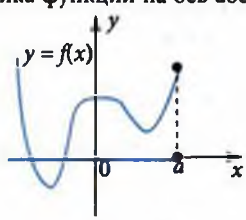
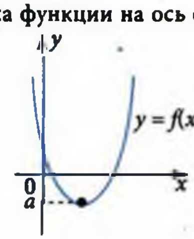
11. Решите уравнение $x^2+x-3=|2x-1|$. Если уравнение имеет один корень, то запишите его в ответ. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответ запишите их произведение.

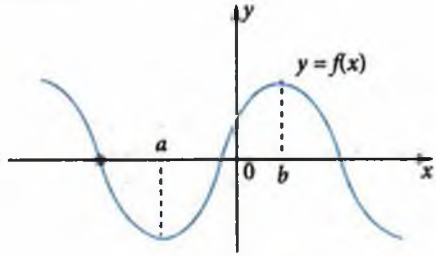
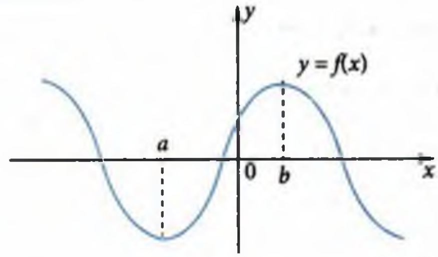
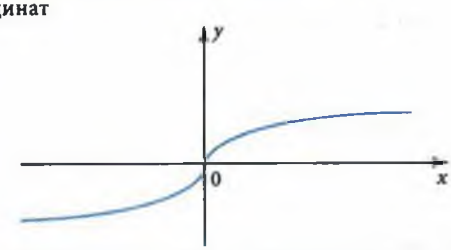
12. За 4 дня общей работы два трактора вспахали $\frac{2}{3}$ поля. За сколько дней мог бы вспахать все поле первый трактор, если он может вспахать его на 5 дней быстрее, чем второй?

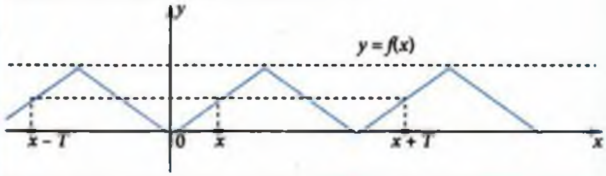
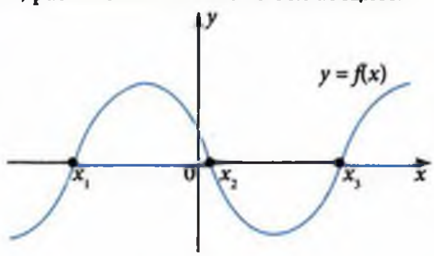
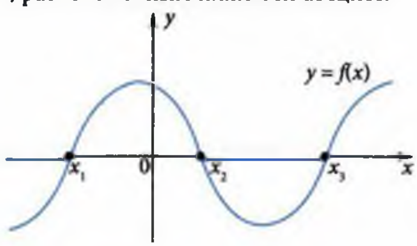
3. Функции и их графики

Зависимость переменной y от переменной x называется **функцией**, если каждому значению x отвечает одно и только одно значение y. Переменную x называют **независимой переменной**, или **аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной**. Значение y, которое отвечает данному значению x, называют **значением функции** f в точке x и обозначают символом $f(x)$.

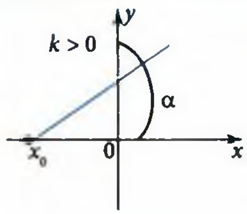
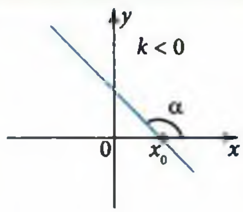
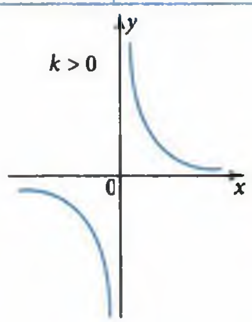
3.1. Свойства функций

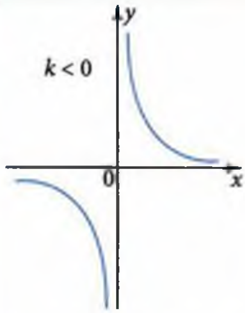
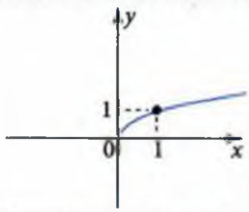
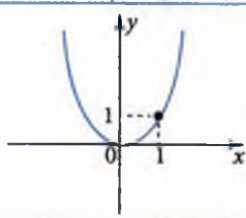
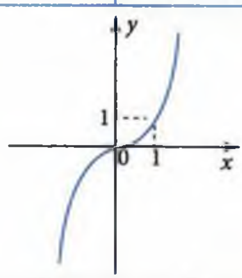
Свойства функции $y = f(x)$	**Геометрическая интерпретация**
Область определения функции — множество тех действительных значений аргумента x, при которых выражение $f(x)$ не теряет смысл и приобретает только действительные значения. Область определения функции $y = f(x)$ обозначается символом $D(f)$ или $D(y)$.	Проекция графика функции на ось абсцисс  $D(y) = (-\infty; a]$.
Область значений функции f — множество, которое состоит из всех чисел $f(x)$, где x проходит область определения. Ее обозначают символом $E(f)$ или $E(y)$.	Проекция графика функции на ось ординат  $E(y) = [a; +\infty)$.
Нули функции — корни уравнения $f(x) = 0$.	Точки пересечения графика функции с осью абсцисс  x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — нули функции $y = f(x)$.

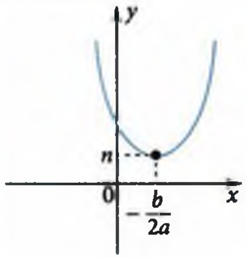
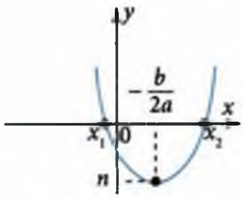
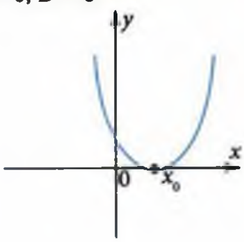
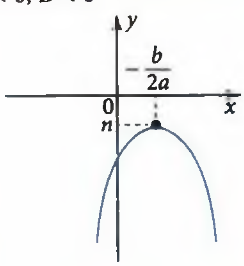
Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из X при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то есть если меньшему значению аргумента в этом множестве соответствует меньшее значение функции.	Отрезки оси абсцисс, где график идет вверх (смотреть слева направо)  Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[a; b]$.
Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из X при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то есть если меньшему значению аргумента в этом множестве соответствует большее значение функции.	Отрезки оси абсцисс, где график идет вниз (смотреть слева направо)  Функция $y = f(x)$ убывает в промежутках $(-\infty; a]$; $[b; +\infty)$.
Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если область ее определения симметрична относительно начала координат и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.	График функции симметричен относительно оси ординат 
Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если область ее определения симметрична относительно начала координат и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.	График функции симметричен относительно начала координат 

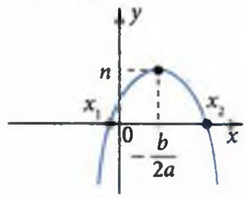
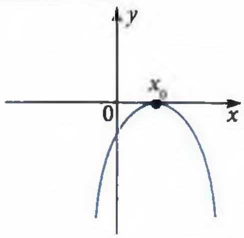
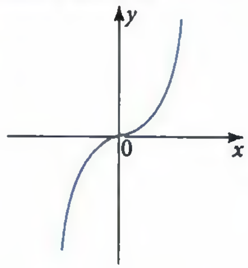
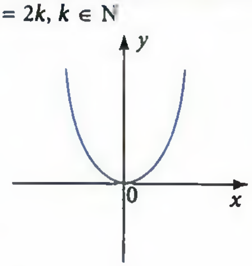
Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x в области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.	График функции повторяется на каждом отрезке оси абсцисс, который имеет длину T. 
Промежутки, на которых функция положительная, то есть $f(x) > 0$.	Отрезки оси абсцисс, которые отвечают точкам графика функции, расположенным выше оси абсцисс.  $f(x) > 0$ на $(x_1; x_2) \cup (x_3; +\infty)$.
Промежутки, на которых функция отрицательная, то есть $f(x) < 0$.	Отрезки оси абсцисс, которые отвечают точкам графика функции, расположенным ниже оси абсцисс.  $f(x) < 0$ на $(-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3)$.

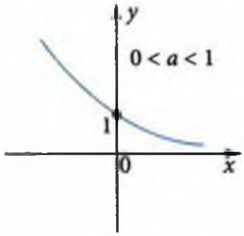
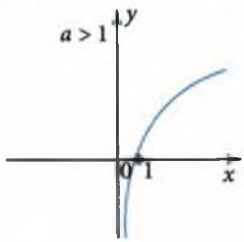
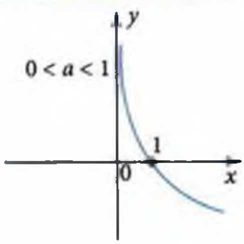
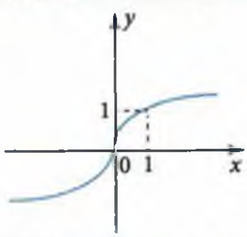
3.2. Графики и свойства некоторых функций

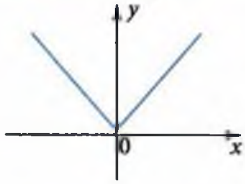
<table>
<tr><th rowspan="2">Функция</th><th colspan="2">График</th><th rowspan="2">Промежутки монотонности (возрастание, убывание)</th><th colspan="2">Промежутки знакопостоянства</th></tr>
<tr><th>$D(f)$</th><th>$E(f)$</th><th>$f(x) > 0$</th><th>$f(x) < 0$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Линейная функция
$y = kx + b$,
k — угловой коэффициент,
$k = \operatorname{tg} \alpha$</td><td colspan="2">
</td><td rowspan="2">Возрастает при $x \in R$</td><td rowspan="2">$(x_0; +\infty)$</td><td rowspan="2">$(-\infty; x_0)$</td></tr>
<tr><td>R</td><td>R</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td rowspan="2">Убывает при $x \in R$</td><td rowspan="2">$(-\infty; x_0)$</td><td rowspan="2">$(x_0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>R</td><td>R</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Обратная пропорциональность
$y = \frac{k}{x}$</td><td colspan="2">
</td><td rowspan="2">Убывает при $x \in (-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$</td><td rowspan="2">$(0; +\infty)$</td><td rowspan="2">$(-\infty; 0)$</td></tr>
<tr><td>$(-\infty; 0) \cup$
$\cup (0; +\infty)$</td><td>$(-\infty; 0) \cup$
$\cup (0; +\infty)$</td></tr>
</table>

		$(-\infty; 0) \cup$ $\cup\ (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup\ (0; +\infty)$	Возрастает при $x \in (-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$
$y = \sqrt{x}$		$[0;+\infty)$	$[0; +\infty)$	Возрастает при $x \in [0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	—
$y = x^2$		R	$[0; +\infty)$	Возрастает при $x \in [0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0]$	$(-\infty; 0) \in (0; +\infty)$	—
$y = x^3$		R	R	Возрастает при $x \in R$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$

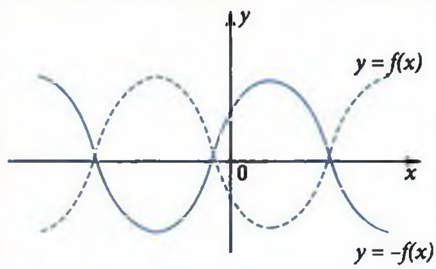
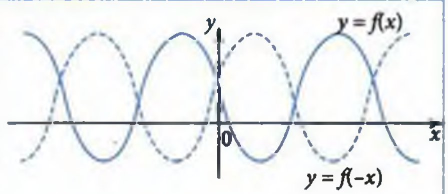
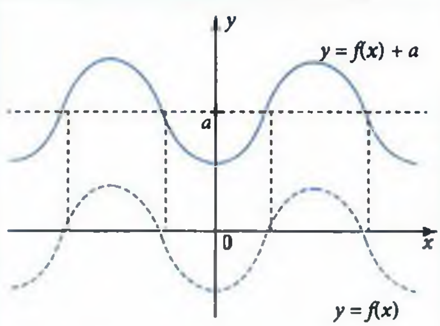
Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. $(m; n)$ — **вершина параболы:** $m = -\frac{b}{2a}$; $n = y(m)$	$a > 0,\ D < 0$ 	R	$[n; +\infty)$	**Возрастает при** $x \in \left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, **убывает при** $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$,	R	—
	$a > 0,\ D > 0$ 	R	$[n; +\infty)$	**Возрастает при** $x \in \left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, **убывает при** $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$,	$(-\infty; x_1) \cup$ $\cup\ (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$
	$a > 0,\ D = 0$ 	R	$[0; +\infty)$	**Возрастает при** $x \in [x_0; +\infty)$, **убывает при** $x \in (-\infty; x_0]$	$(-\infty; x_1) \cup$ $\cup\ (x_2; +\infty)$	—
	$a < 0,\ D < 0$ 	R	$(-\infty; n]$	**Возрастает при** $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, **убывает при** $x \in \left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$,	—	R

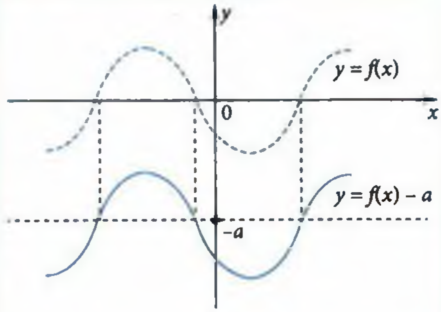
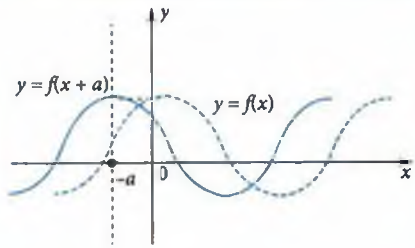
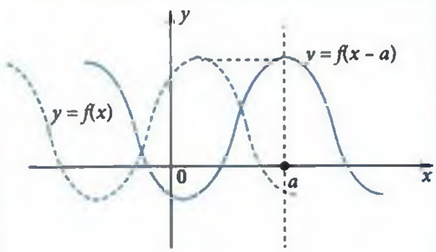
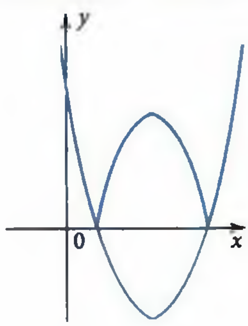
	$a < 0,\ D > 0$ 	R	$(-\infty; n]$	Возрастает при $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, убывает при $x \in \left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$,	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup \cup (x_2; +\infty)$
	$a < 0,\ D = 0$ 	R	$(-\infty; 0]$	Возрастает при $x \in (-\infty; x_0]$, убывает при $x \in [x_0; +\infty)$	—	$(-\infty; x_0) \cup \cup (x_0; +\infty)$
Степенная функция $y = x^n$	$n = 2k + 1,\ n \in \mathrm{N}$ 	R	R	Возрастает при $x \in R$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$
	$n = 2k,\ k \in \mathrm{N}$ 	R	$[0; +\infty)$	Возрастает при $x \in [0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0)$	$(-\infty; 0) \cup \cup (0; +\infty)$	—

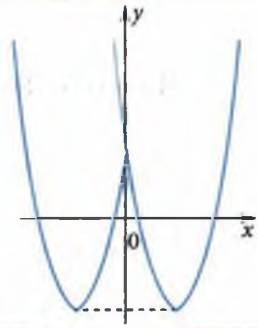
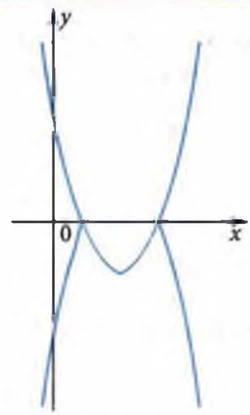
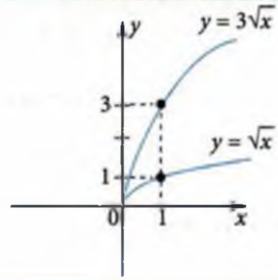
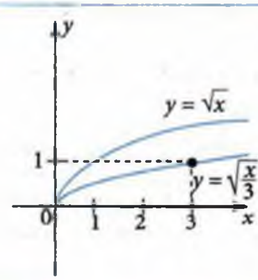
Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$		R	$(0; +\infty)$	Возрастает при $x \in R$	$(-\infty; +\infty)$	—
		R	$(0; +\infty)$	Убывает при $x \in R$	$(-\infty; +\infty)$	—
Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$		$(0; +\infty)$	R	Возрастает при $x \in (0; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(0; 1)$
		$(0; +\infty)$	R	Убывает при $x \in (0; +\infty)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
$y = \sqrt[3]{x}$		R	R	Возрастает при $x \in R$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$

$y = \|x\|$		R	$[0; +\infty)$	Возрастает при $x \in [0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0]$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup\ (0; +\infty)$	—

3.3. Геометрические преобразования графиков функций

Построить график зависимости	Преобразование графика функции $y = f(x)$	Построение
$y = -f(x)$	Отобразить график функции $y = f(x)$ симметрично относительно оси абсцисс	
$y = f(-x)$	Отобразить график функции $y = f(x)$ симметрично относительно оси ординат	
$y = f(x) + a$, $a > 0$	Параллельно перенести график функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на a единиц вверх	

$y = f(x) - a,\ a > 0$	Параллельно перенести график функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на a единиц вниз	
$y = f(x + a)$, $a > 0$	Параллельно перенести график функции $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс на a единиц влево	
$y = f(x - a),\ a > 0$	Параллельно перенести график функции $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс на a единиц вправо	
$y = \|f(x)\|$	Объединить график функции $y = f(x)$ для $y \geq 0$ и отобразить график функции $y = f(x)$ для $y < 0$, симметрично оси абсцисс	

$y = f(\lvert x \rvert)$. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $D > 0$	Объединить график функции $y = f(x)$ для $x \geq 0$ и отобразить его симметрично оси ординат	
$\lvert y \rvert = f(x)$. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $D > 0$	Объединить график функции $y = f(x)$ для $y \geq 0$ и отобразить его симметрично оси абсцисс	
$y = af(x)$, $a > 0$	Растянуть график функции $y = f(x)$ от оси абсцисс в a раз ($a > 1$) или сжать к оси абсцисс в a раз ($0 < a < 1$)	
$y = f(ax)$, $a > 0$	Сжать график функции $y = f(x)$ к оси ординат в a раз ($a > 1$) или растянуть от оси ординат в a раз $0 < a < 1$)	

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Исследуйте функцию на четность или нечетность.

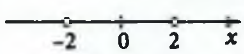
1) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{8-4x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+7}{x^2-4}$; 3) $f(x) = 3x^3 - 7x^7$.

Решение

1) $8 - 4x \neq 0$; $4x \neq 8$; $x \neq 2$.

$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Поскольку область определения функции не симметрична относительно начала координат, то функция $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{8-4x}$ не является четной и не является нечетной.

2) $x^2 - 4 \neq 0$; $\begin{cases} x \neq -2; \\ x \neq 2. \end{cases}$



$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Область определения данной функции симметрична относительно начала координат. $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+7}{(-x)^2-4}=\dfrac{x^2+7}{x^2-4}=f(x)$.

Следовательно, функция $f(x)=\dfrac{x^2+7}{x^2-4}$ является четной.

3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Область определения данной функции симметрична относительно начала координат. $f(-x) = 3 \cdot (-x)^3 - 7 \cdot (-x)^7 = -3x^3 + 7x^7 = -(3x^3 - 7x^7) =$ $= -f(x)$. Следовательно, функция $f(x) = 3x^3 - 7x^7$ является нечетной.

Пример 2. Найдите область значений функции $y=\dfrac{2x-1}{3x+5}$.

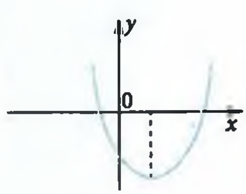
Решение

Пусть $a \in E(y)$. Тогда задача сводится к нахождению всех значений a, при которых уравнение $\dfrac{2x-1}{3x+5}=a$ имеет решения: $a(3x + 5) = 2x - 1$; $3ax + 5a = 2x - 1$;

$3ax - 2x = -1 - 5a$; $x(3a - 2) = -1 - 5a$. Если $a=\dfrac{2}{3}$, то $0x=-\dfrac{13}{3}$ и данное уравнение решений не имеет; если $a\neq\dfrac{2}{3}$, то $x=\dfrac{-1-5a}{3a-2}=-\dfrac{1+5a}{3a-2}=\dfrac{1+5a}{2-3a}$.

Ответ: $E(y)=\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Пример 3. Пользуясь графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенным на рисунке, определите знаки чисел a, b, c и знак дискриминанта квадратного трехчлена $ax^2 + bc + c$.



Решение

Поскольку ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$.

$y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ — ордината точки пересечения параболы с осью ординат.

Согласно рисунку $c < 0$. $-\dfrac{b}{2a} > 0$, поскольку вершина параболы находится в IV координатной четверти $-b > 0$; $b < 0$.

Поскольку данная функция имеет два нуля, то $D > 0$.

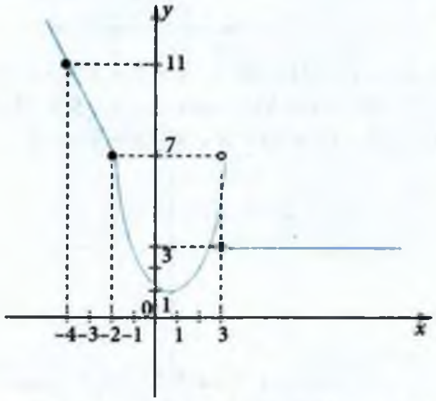
Ответ: $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D > 0$.

Пример 4. Дана функция $f(x) = \begin{cases} -2x+3, \text{ если } x \le -2, \\ x^2 - x + 1, \text{ если } -2 < x < 3, \\ 3, \text{ если } x \ge 3. \end{cases}$

Найдите $f(1)$, $f(3)$, $f(-4)$, $f(-2)$ и постройте график данной функции.

Решение

$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$; $f(3) = 3$; $f(-4) = -2 \cdot (-4) + 3 = 8 + 3 = 11$;
$f(-2) = -2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 3 = 7$.



$(-2)^2 - (-2) + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$; $3^2 - 3 + 1 = 9 - 3 + 1 = 7$; $m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$;

$n = y(m) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$; $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$ — вершина параболы.

Пример 5. Найдите количество корней уравнения $|x^2 - 4x + 3| = a$ в зависимости от значений параметра a.

Решение

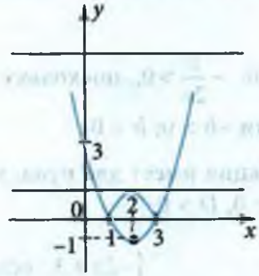
Построим графики функций $y = |x^2 - 4x + 3|$ и $y = a$ в одной системе координат.

Построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$, не обращая внимания на модуль. Графиком функции $y = x^2 - 4x + 3$ является парабола, ветви которой направлены вверх. $y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$. Следовательно, $(0; 3)$ — точка пересечения параболы с осью ординат. Найдем нули функции: $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Найдем вершину параболы $(m; n)$: $m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$;

$n = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$. Следовательно, $(2; -1)$ — вершина параболы.

График данной функции на оси абсцисс и выше оси абсцисс оставляем без изменения, а часть графика, который находится ниже оси абсцисс, симметрично отображаем относительно оси абсцисс.



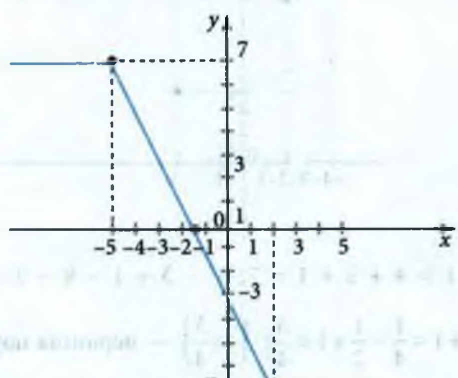
Если $a = 1$, то уравнение имеет три корня; если $a = 0$, или если $a > 1$, то уравнение имеет два корня; если $0 < a < 1$, то уравнение имеет четыре корня; если $a < 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример 6. Постройте график функции $y = |x - 2| - |x + 5|$.

Решение

$x - 2 = 0$ или $x + 5 = 0$; $x = 2$ или $x = -5$.

1) $(-\infty; -5]$. $y = -(x - 2) + (x + 5) = -x + 2 + x + 5 = 7$.
2) $(-5; 2]$. $y = -(x - 2) - (x + 5) = -x + 2 - x - 5 = -2x - 3$.
3) $(2; +\infty)$. $y = (x - 2) - (x + 5) = x - 2 - x - 5 = -7$.



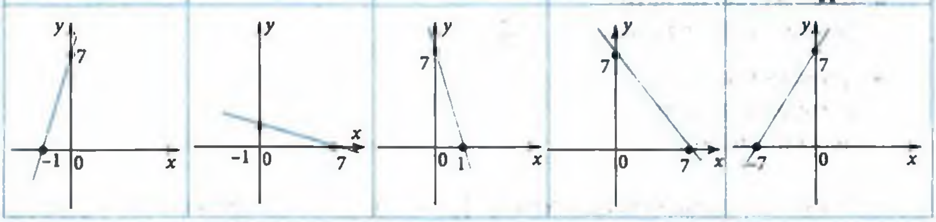
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Постройте график функции $y = \dfrac{x-1}{x}$.
2. Постройте график функции $y = |x^2 + 2|x| - 3|$.
3. Сколько решений имеет уравнение $||x+1| - 2| = a$ при различных значениях параметра a?

Тестовые задания

1. Какой из приведенных графиков является графиком функции $y = 7 - x$?

А	Б	В	Г	Д



2. Укажите нечетную функцию.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2 - 4$	$y = -x^2$	$y = x^3 - 1$	$y = \sqrt{x-2}$	$y = x^3 - x$

3. Какая из функций убывает на промежутке $[0; +\infty]$?

А	Б	В	Г	Д
$y = \dfrac{1}{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = 3x + 1$	$y = 2 - x$	$y = x^2$

4. Какая функция возрастает для всех $x \in R$?

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{x}$	$y = 5 - 2x$	$y = 6x - 5$	$y = -\dfrac{5}{x}$	$y = \dfrac{2}{x}$

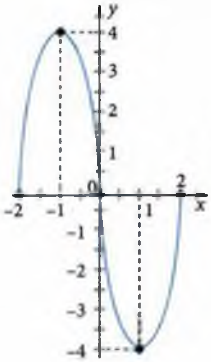
5. Найдите точку пересечения графика функции $y = x^3 - 64$ с осью абсцисс.

А	Б	В	Г	Д
(0; 4)	(2; 0)	(0; 2)	(8; 0)	(4; 0)

6. Сколько корней имеет уравнение $x^2 - 5|x| = 0$?

А	Б	В	Г	Д
больше трех	три	два	один	ни одного

7. Установите соответствие между свойствами (1–4) функции, график которой изображен на рисунке, и числовыми характеристиками (А–Д).



1 область определения функции

2 область значений функции

3 промежуток, на котором функция убывает

4 промежуток, на котором функция неотрицательная

А $[-2; 0]$

Б $(-2; 0)$

В $[-2; 2]$

Г $[-4; 4]$

Д $[-1; 1]$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. **Установите соответствие между функциями (1–4) и областями определения (А–Д).**

1 $y=\sqrt{x}$

2 $y=\sqrt{-x}$

3 $y=\frac{3}{x}$

4 $y=\log_5 x$

А $(-\infty; 0]$

Б $(-\infty; 0)$

В $(0; +\infty)$

Г $[0; +\infty)$

Д $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. **Установите соответствие между функциями (1–4) и областями определения (А–Д).**

1 $y=7^x$

2 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

3 $y=-\sqrt{x}$

4 $y=-\frac{5}{x}$

А $(-\infty; +\infty)$

Б $(-\infty; 0]$

В $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Г $(0; +\infty)$

Д $[0; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Найдите нули функции $f(x)=\frac{2x^2-3x+4}{x-1}$. Если функция имеет несколько нулей, в ответ запишите их сумму.

11. Найдите область определения функции $y=\log_{0,3}(x-2)+3$. В ответ запишите наименьшее целое число из области определения данной функции.

12. Найдите промежуток, на котором функция $y=x^2+5x+6$ не является положительной. В ответ запишите целое число из этого промежутка. Если на промежутке несколько целых чисел, в ответ запишите их сумму.

4. Алгебраические неравенства и системы алгебраических неравенств

Любое значение переменной, при котором данное неравенство с переменной превращается в правильное числовое неравенство, называется **решением неравенства**.

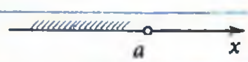
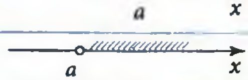
Решить неравенство с переменной означает найти все его решения или доказать, что их нет.

Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.

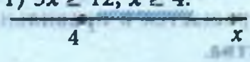
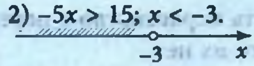
Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

4.1. Числовые промежутки

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись на языке неравенств
Интервал (открытый промежуток)		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок (замкнутый промежуток)		$[a; b]$	$a \le x \le b$
Полуинтервал (полуоткрытый промежуток)		$(a; b]$	$a < x \le b$
Полуинтервал (полуоткрытый промежуток)		$[a; b)$	$a \le x < b$
Луч (бесконечный промежуток)		$(-\infty; a]$	$x \le a$
Луч (бесконечный промежуток)		$[a; +\infty)$	$x \ge a$
Открытый луч		$(-\infty; a)$	$x < a$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Числовая прямая		$(-\infty; +\infty)$, R	$-\infty < x < +\infty$

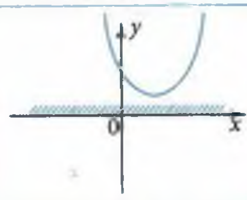
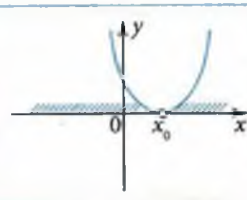
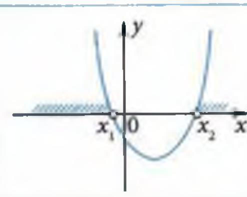
4.2. Линейные неравенства

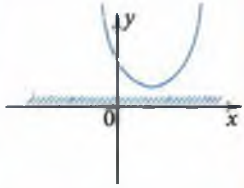
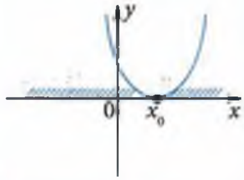
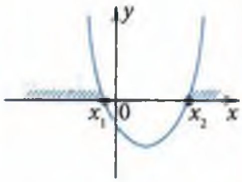
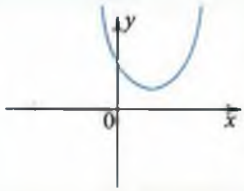
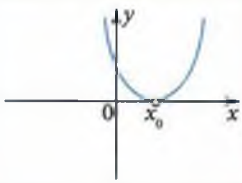
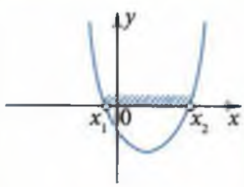
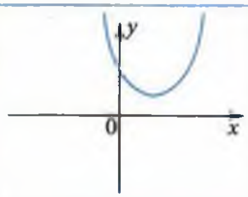
Неравенства вида $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, где a и b — ≈некоторые числа, x — переменная, называются **линейными неравенствами с одной переменной**.

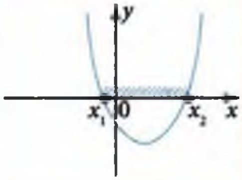
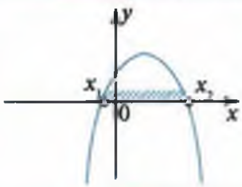
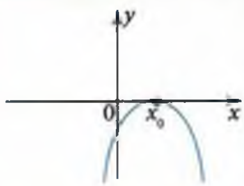
Если $a \neq 0$, то для решения линейного неравенства с одной переменной нужно разделить обе части неравенства на a. При этом если $a > 0$, то знак неравенства сохраняется; если $a < 0$, то знак неравенства меняется на противоположный.	**1) $3x \geq 12$; $x \geq 4$.**  ***Ответ:* $x \in [4; +\infty)$.** **2) $-5x > 15$; $x < -3$.**  ***Ответ:* $x \in (-\infty; -3)$.**
Если $a = 0$, то или решением линейного неравенства с одной переменной является любое число, или неравенство решений не имеет.	**1) $0x < 10$.** ***Ответ:* $x \in (-\infty; +\infty)$.** **2) $0x \geq 10$.** ***Ответ:* $x \in \varnothing$.**

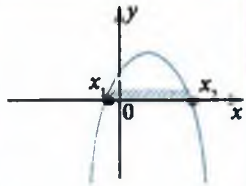
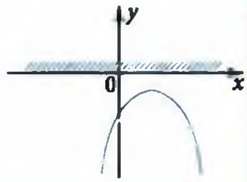
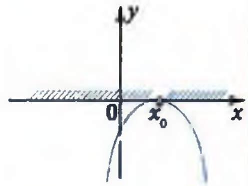
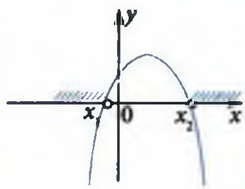
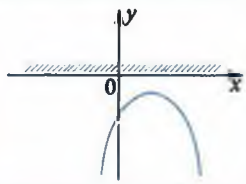
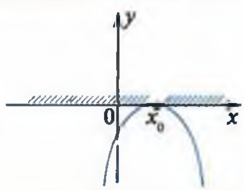
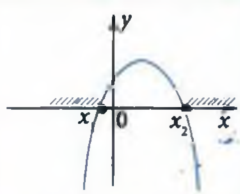
4.3. Неравенства второй степени с одной переменной

Неравенства вида $ax^2 + bc + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + x \leq 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называются **неравенствами второй степени с одной переменной** (или квадратными неравенствами).

Неравенство	Знак коэффициента a	Знак дискриминанта	Графическое решение	Ответ
$ax^2 + bx + c > 0$	$a > 0$	$D < 0$		$x \in R$
$ax^2 + bx + c > 0$	$a > 0$	$D = 0$		$x \in (-\infty; x_0) \cup$ $\cup (x_0; +\infty)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
$ax^2 + bx + c > 0$	$a > 0$	$D > 0$		$x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$

$ax^2 + bx + c \geq 0$	$a > 0$	$D < 0$		$x \in R$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$a > 0$	$D = 0$		$x \in R$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$a > 0$	$D > 0$		$x \in (-\infty; x_1] \cup$ $\cup [x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$a > 0$	$D < 0$		$\varnothing$
$ax^2 + bx + c < 0$	$a > 0$	$D = 0$		$\varnothing$
$ax^2 + bx + c < 0$	$a > 0$	$D > 0$		$x \in (x_1; x_2)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$a > 0$	$D < 0$		$\varnothing$

$ax^2 + bx + c \le 0$	$a > 0$	$D = 0$		$x = x_0$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
$ax^2 + bx + c \le 0$	$a > 0$	$D > 0$		$x \in [x_1; x_2]$
$ax^2 + bx + c > 0$	$a < 0$	$D < 0$		$\varnothing$
$ax^2 + bx + c > 0$	$a < 0$	$D = 0$		$\varnothing$
$ax^2 + bx + c > 0$	$a < 0$	$D > 0$		$x \in (x_1; x_2)$
$ax^2 + bx + c \ge 0$	$a < 0$	$D < 0$		$\varnothing$
$ax^2 + bx + c \ge 0$	$a < 0$	$D = 0$		$x = x_0$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

$ax^2 + bx + c \geq 0$	$a < 0$	$D > 0$		$x \in [x_1; x_2]$
$ax^2 + bx + c < 0$	$a < 0$	$D < 0$		$x \in R$
$ax^2 + bx + c < 0$	$a < 0$	$D = 0$		$x \in (-\infty; x_0) \cup$ $\cup (x_0; +\infty)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
$ax^2 + bx + c < 0$	$a < 0$	$D > 0$		$x \in (-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$a < 0$	$D < 0$		$x \in R$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$a < 0$	$D = 0$		$x \in R$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$a < 0$	$D > 0$		$x \in (-\infty; x_1] \cup$ $\cup [x_2; +\infty)$

4.4. Решение неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)}>0$, $\frac{f(x)}{g(x)}<0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$ методом интервалов, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены

1. На числовую ось наносят точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено и сохраняет знак. Такими точками могут быть корни уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$.

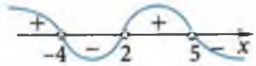
2. Отыскивают и обозначают на числовой оси знак выражения $\frac{f(x)}{g(x)}$ для значений x, которые относятся к каждому из полученных промежутков. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются многочленами и не содержат множителей вида $(x-a)^{2n}$, где $x \in N$, то достаточно определить знак функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ в любом промежутке, а в остальных промежутках знаки «+» и «–» будут чередоваться. Если же в числителе и знаменателе дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ является множителем вида $(x-a)^{2n}$, где $n \in N$, то, принимая $x \neq a$, делят обе части заданного неравенства на множитель $(x-a)^{2n}$, положительный при всех значениях $x \neq a$, и непосредственной проверкой выясняют, удовлетворяет ли значение $x = a$ заданному неравенству.

Кроме того, множители с нечетными показателями степени заменяют соответствующими множителями первой степени. В результате получают более простое неравенство, равносильное данному.

3. При исследовании знака выражения $\frac{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_k)}{(x-a_{k+1})\cdot(x-a_{k+2})\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}$

$(a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n)$ не обязательно проверять знак выражения на каждом из полученных промежутков. Для крайнего правого промежутка линия знакочередности всегда будет лежать над осью.

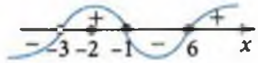
Например: 1) $\frac{(x-2)(5-x)}{x+4}>0$; $\frac{(x-2)(5-x)}{x+4}=0$; $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x-2=0,\\ 5-x=0,\end{array}\right.\\ x+4\neq 0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=5,\end{array}\right.\\ x-4.\end{array}\right.$



Определим знак функции $f(x)=\frac{(x-2)(5-x)}{x+4}$ на любом из четырех промежутков, например, на промежутке (–4; 2): $f(0)=\frac{(0-2)(5-0)}{0+4}<0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (2; 5)$.

2) $\frac{(x+2)^2\cdot(x-6)^5\cdot(x+1)}{(x+3)^3}\leq 0$. Разделим левую и правую части неравенства на $(x+2)^2$, если $x \neq -2$. При этом $x = -2$ является решением данного неравенства. Выражения $(x-6)^5$ и $(x+3)^3$ заменим соответствующими выражениями первой степени: $\frac{(x-6)(x+1)}{x+3}\leq 0$.



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup [-1; 6] \cup \{-2\}$.

3) $\dfrac{(3x-6)\cdot(x+4)^6\cdot(3-x)}{(x+2)\cdot(x-5)^7} \ge 0$; $\quad \dfrac{-3(x-2)\cdot(x+4)^6\cdot(x-3)}{(x+2)\cdot(x-5)^7} \ge 0 \Big| : -3(x+4)^6$;

$x = -4$ — решение неравенства; $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-5)} \le 0$; $\quad \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-5)} = 0$; $\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3, \end{array} \right. \\ x \ne -2, \\ x \ne 5. \end{cases}$

Ответ: $x \in (-2; 2] \cup [3; 5) \cup \{-4\}$.

4.5. Обобщенный метод интервалов

Чтобы решить неравенства $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \ge 0$, $f(x) \le 0$, надо:

1) найти область определения функции $y = f(x)$;

2) найти нули функции $y = f(x)$ ($f(x) = 0$);

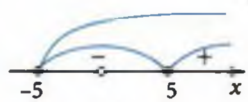
3) на координатной прямой обозначить нули функции и определить знак функции на каждом промежутке, на которые нули разбивают область определения;

4) записать ответ (выбрать те интервалы, где функция имеет нужный знак).

Например: $(2x-10)\cdot\sqrt{x+5} \ge 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = (2x-10)\cdot\sqrt{x+5}$; $x + 5 \ge 0$; $x \ge -5$.
$D(f) = [-5; +\infty)$.

Найдем нули функции $f(x)$: $(2x-10)\cdot\sqrt{x+5} = 0$; $\left[\begin{array}{l} 2x-10 = 0, \\ \sqrt{x+5} = 0; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -5. \end{array} \right.$



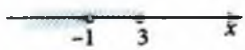
$f(0) = (2\cdot 0 - 10)\cdot\sqrt{0+5} = -10\sqrt{5} < 0$; $\quad f(6) = (2\cdot 6 - 10)\cdot\sqrt{6+5} = 2\sqrt{11} > 0$.

Ответ: $x \in [5; +\infty)$.

4.6. Системы неравенств с одной переменной. Совокупность неравенств с одной переменной. Двойные неравенства

Чтобы решить систему неравенств с одной переменной, надо:
1) отдельно решить каждое неравенство;
2) найти пересечение найденных решений.

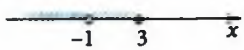
Например: $\begin{cases} 2x-6\le 0, \\ 6-x>7; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 3, \\ -x>7-6; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 3, \\ -x>1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 3, \\ x<-1. \end{cases}$



Ответ: $x \in (-\infty; -1)$.

Чтобы решить совокупность неравенств с одной переменной, надо:
а) отдельно решить каждое неравенство;
2) найти объединение найденных решений.

Например: $\left[\begin{array}{l} 2x-6\le 0, \\ 6-x>7; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x\le 3, \\ -x>1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x\le 3, \\ x<-1. \end{array}\right.$



Ответ: $x \in (-\infty; 3]$.

Двойные неравенства сводятся к решению соответствующих систем неравенств.

Двойные неравенства можно решать, опираясь на такие свойства:

1) если ко всем частям двойного неравенства прибавить (вычесть) любое число, то получим равносильное неравенство;

2) если каждую из трех частей двойного неравенства умножить или разделить на любое положительное число, то получим равносильное неравенство;

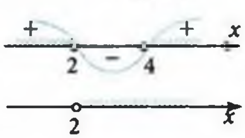
3) если каждую из трех частей двойного неравенства умножить или разделить на любое отрицательное число и поменять при этом знаки неравенства на противоположные, то получим равносильное неравенство.

Например: 1) $-3 < 3 - 2x < 1$; $-6 < -2x < -2$; $1 < x < 3$.

Ответ: $x \in (1; 3)$.

2) $1<\dfrac{x}{x-2}<2;$ $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2}<2, \\ \dfrac{x}{x-2}>1; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2}-2<0, \\ \dfrac{x}{x-2}-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-2(x-2)}{x-2}<0, \\ \dfrac{x-(x-2)}{x-2}>0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{4-x}{x-2}<0, \\ \dfrac{2}{x-2}>0; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x-2}>0, \\ \dfrac{2}{x-2}>0. \end{cases}$



Ответ: $x \in (4; +\infty)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решите неравенство $\frac{3x^2-2}{12}-\frac{5x-3}{18}-\frac{4-2x}{6}\le-\frac{13}{56}$.

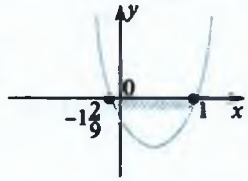
Решение

Умножим левую и правую части неравенства на 36 (наименьшее общее кратное знаменателей):

$3(3x^2 - 2) - 2(5x - 3) - 6(4 - 2x) \le -13$; $9x^2 - 6 - 10x + 6 - 24 + 12x + 13 \le 0$;

$9x^2 + 2x - 11 \le 0$.

Графиком функции $y = 9x^2 + 2x - 11$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем нули функции: $9x^2 + 2x - 11 = 0$; $D = 2^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-11) = = 4 + 396 = 400$; $x_1=\frac{-2+20}{18}=\frac{18}{18}=1$; $x_2=\frac{-2-20}{18}=-\frac{22}{18}=-\frac{11}{9}$.



Ответ: $x\in\left[-1\frac{2}{9};1\right]$.

Пример 2. Решите систему неравенств $\begin{cases}x^2+x-6<0,\\-x^2+2x+3>0.\end{cases}$

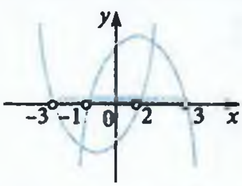
Решение

Графиком функции $y = x^2 + x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем нули данной функции:

$x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = 2$.

Графиком функции $y = -x^2 + 2x + 3$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдем нули данной функции:

$-x^2 + 2x + 3 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x_1 = 3$; $x_2 = -1$.



Ответ: $x \in (-1; 2)$.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{(1-4x)(x^2-x)(x^2-2x+3)}{(2+7x)(5-x)(x-7)(x+8)^2}\le0$.

Решение

$1-4x=-4\left(x-\frac{1}{4}\right)$; $x^2 - x = x(x - 1)$; $x^2 - 2x + 3 > 0$ для любых x, поскольку $D=4-4\cdot3<0$; $2+7x=7\left(x+\frac{2}{7}\right)$; $5-x=-(x-5)$; $\frac{-4\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot x(x-1)(x^2-2x+3)}{-7\left(x+\frac{2}{7}\right)(x-5)(x-7)(x+8)^2}\le0$.

Принимая $x \neq -8$, разделим обе части неравенства на положительную дробь $\dfrac{4(x^2-2x+3)}{7(x+8)^2}$ и сразу замечаем, что $x=-8$ удовлетворяет данному неравенству:

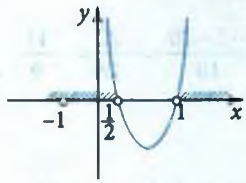
$$\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot x(x-1)}{\left(x+\frac{2}{7}\right)(x-5)(x-7)} \leq 0.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{2}{7}; 0\right] \cup \left[\frac{1}{4}; 1\right] \cup (5; 7) \cup \{-8\}$.

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{(x-7)(10-x)}{\sqrt{2x^2-3x+1}\cdot(x+1)} < 0$.

Решение

$$\begin{cases} 2x^2-3x+1>0, \\ x+1 \neq 0. \end{cases}$$

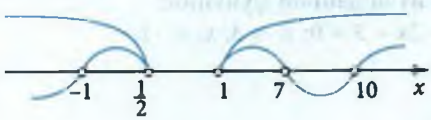


Рассмотрим функцию $y = \dfrac{(x-7)(10-x)}{\sqrt{2x^2-3x+1}\cdot(x+1)}$.

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$$

Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-3x+1}} > 0$, то $\dfrac{(x-7)(10-x)}{x+1} < 0$; $\dfrac{-(x-7)(x-10)}{x+1} < 0$;

$$\frac{(x-7)(x-10)}{x+1} > 0.$$



Ответ: $x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 7) \cup (10; +\infty)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решите неравенство $1 < \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2$.
2. Решите неравенство $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \geq 0$.
3. Решите систему неравенств $\begin{cases} |x^2+5x| < 6, \\ |x+1| \leq 1. \end{cases}$

Тестовые задания

1. Сколько натуральных решений имеет неравенство $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<4$?

А	Б	В	Г	Д
множество	20	23	25	30

2. Сколько целых решений имеет двойное неравенство $7 < 1 - 3x < 16$?

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

3. Решите неравенство $a^2 > a$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 1)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (1; +\infty)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$

4. Решите неравенство $\frac{1}{x^2}>1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$(-1; 1)$	$(-\infty; -1) \cup$ $\cup (0; 1)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; 1)$	$(-1; 0) \cup$ $\cup (0; 1)$

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} 17x-2>12x-1, \\ 3-9x<1-x. \end{cases}$

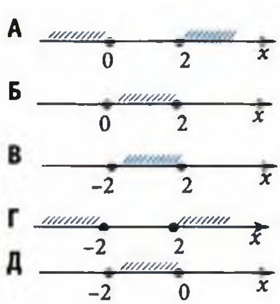
А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$	$\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$	$(-\infty; +\infty)$

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3>0. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-2; -1)$	$(-1; 4)$	$(1; 4)$	$(-1; 2)$	$(2; 4)$

7. Установите соответствие между неравенствами (1–4) и геометрическими изображениями (А–Д).

1 $|x| \geq 2$
2 $x^2 \geq 2x$
3 $x^2 \leq 4$
4 $x^4 \leq 8x$



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установите соответствие между неравенствами (1–4) и решениями (А–Д).

1 $3x - 5 > 3x + 10$

2 $\dfrac{2x+13}{2} > x+7$

3 $\dfrac{2+x}{2} > \dfrac{3x+5}{3}$

4 $\dfrac{3x-2}{3} < \dfrac{x-2}{2}$

А решений не имеет

Б $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right)$

В $(5; +\infty)$

Г $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$

Д $(-\infty; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Установите соответствие между функциями (1–4) и промежутками, которые являются областями их определения ((А–Д).

1 $y=\dfrac{3}{(x-2)(x+2)}$

2 $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+3$

3 $y=\dfrac{3}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}$

4 $y=\sqrt{{}^2-x-6}$

А $[-2; 2]$

Б $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

В $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup$
$\cup\ (2; +\infty)$

Г $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Д $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Найдите длину отрезка, на котором выполняется неравенство

$$\frac{x^2-2{,}5x-1{,}5}{x^2-x+9} \le 0.$$

11. Укажите наименьшее целое число, которое является решением неравенства

$$\frac{(x-3)(x+10)(x^2+8x-9)}{x^2+8x-9} < 0.$$

12. Найдите наименьшее целое решение неравенства
$(x^2 - 2x + 1)(x - 3)^7(4 - x) \ge 0.$

5. Иррациональные, показательные, логарифмические уравнения и неравенства

5.1. Иррациональные уравнения

Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются **иррациональными**.

Иррациональные уравнения чаще всего сводят к рациональным с помощью таких преобразований:

— замена переменных;

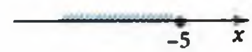
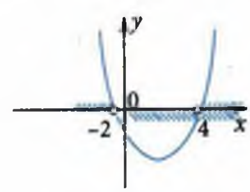
— возведение обеих частей уравнения к одной степени.

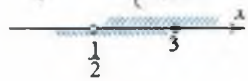
При возведении обеих частей иррационального уравнения к нечетной степени получаем уравнение, равносильное данному.

При возведении обеих частей иррационального уравнения к четной степени могут появиться посторонние корни, которые отбрасываются проверкой. В некоторых случаях целесообразнее отсеивать посторонние корни не проверкой, а определением области допустимых значений переменной.

Уравнение	Решение	Пример
$\begin{cases}\sqrt[2n]{x}=a, n\in \mathrm{N},\\ a<0\end{cases}$	$\varnothing$	$\sqrt[11]{x}=-11.$ *Ответ:* $x\in\varnothing$.
$\begin{cases}\sqrt[2n]{x}=a, n\in \mathrm{N},\\ a\ge 0\end{cases}$	$x=a^{2n}$	$\sqrt{x}=6;\ \left(\sqrt{x}\right)^2=6^2;\ x=36.$ *Ответ:* 36.
$\begin{cases}\sqrt[2n+1]{x}=a, n\in \mathrm{N},\\ a\in \mathbf{R}\end{cases}$	$x=a^{2n+1}$	$\sqrt[3]{x}=-3;\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^3=(-3)^3;\ x=-27.$ *Ответ:* –27.
$\sqrt[2n]{u(x)}=v(x), n\in \mathrm{N}$	$\begin{cases}u(x)=v^{2n}(x),\\ v(x)\ge 0\end{cases}$	$\sqrt{x-3}=x-5;\ \begin{cases}x-3=(x-5)^2;\\ x-5\ge 0,\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-11x+28=0;\\ x\ge 5,\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=7,\end{array}\right.\\ x\ge 5.\end{cases}$ *Ответ:* 7.
$\sqrt[2n]{u(x)}=\sqrt[2n]{v(x)}, n\in \mathrm{N}$	$\begin{cases}u(x)=v(x),\\ u(x)\ge 0.\end{cases}$ (I способ) $\begin{cases}u(x)=v(x),\\ v(x)\ge 0.\end{cases}$ (II способ)	$\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-5};\ \begin{cases}3x+1=2x-5,\\ 3x+1\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-6,\\ 3x\ge -1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-6,\\ x\ge -\frac{1}{3}.\end{cases}$ *Ответ:* $\varnothing$.

5.2. Иррациональные неравенства

Неравенство	Решение	Пример
$\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x), n\in N$	$f(x)<g^{2n+1}(x)$, $n\in N$	$\sqrt[3]{x-2}>3$; $x-2>3^3$; $x>27+2$; $x>29$.  *Ответ:* $x\in(29;+\infty)$.
$\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x), n\in N$	$f(x)>g^{2n+1}(x)$, $n\in N$	$\sqrt[3]{3-x}\ge 2$; $3-x\ge 2^3$; $-x\ge 8-3$; $-x\ge 5$; $x\le -5$.  *Ответ:* $x\in(-\infty;-5]$.
$\sqrt[2n]{f(x)}<g(x), n\in N$	$\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)\ge 0,\\ f(x)<g^{2n}(x), n\in N\end{cases}$	$\sqrt{2x+8}<x$; $\begin{cases}x>0,\\ 2x+8\ge 0,\\ 2x+8<x^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\\ x\ge -4,\\ x^2-2x-8>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\\ x^2-2x-8>0.\end{cases}$  *Ответ:* $x\in(4;+\infty)$.
$\sqrt[2n]{f(x)}>g(x), n\in N$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ f(x)>g^{2n}(x);\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$	$\sqrt{3x-2}>x$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ 3x-2>x^2;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ 3x-2\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2-3x+2<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ 3x\ge 2;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x\in(1;2);\end{cases} \quad x\in(1;2);\\ \begin{cases}x<0,\\ 3x\ge 2;\end{cases} \quad \varnothing.\end{array}\right.$ *Ответ:* $x\in(1;2)$.

$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}, n \in N$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$	$\sqrt{x+2} > \sqrt{3-x};$ $\begin{cases} x+2 > 3-x, \\ 3-x \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x > 1, \\ x \le 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x \le 3. \end{cases}$  *Ответ:* $x \in (0{,}5;\ 3]$.
$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}, n \in N$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\sqrt{x+2} < \sqrt{3-x};$ $\begin{cases} x+2 < 3-x, \\ x+2 \ge 0, \\ 3-x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x < 1, \\ x \ge -2, \\ x < 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0{,}5, \\ x \ge -2. \end{cases}$  *Ответ:* $[-2;\ 0{,}5)$.

5.3. Показательные уравнения

Уравнения вида $a^x = b$, где $a > 0$, $a \ne 1$, $b > 0$, называются **простейшими показательными**.

$x = \log_a b$ — решение простейшего показательного уравнения $a^x = b$.
Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b$, где $b \le 0$, решений не имеют.

Например: 1) $9^{3x-5} = -3$. *Ответ:* $\varnothing$.
2) $7^{8-x} = 0$. *Ответ:* $\varnothing$.

Показательное уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $x > 0$, $a \ne 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Например: 1) $8^x = 4^{x-1}$; $2^{3x} = 2^{2(x-1)}$; $3x = 2(x-1)$; $3x - 2x = -2$; $x = -2$.
Ответ: –1.
2) $7^{x+5} = 1$; $7^{x+5} = 7^0$; $x + 5 = 0$; $x = -5$.
Ответ: –5.

Например: 3) $5^x = 7^x$; $\dfrac{5^x}{7^x} = 1$; $\left(\dfrac{5}{7}\right)^x = \left(\dfrac{5}{7}\right)^0$; $x = 0$.
Ответ: 0.

$$b_1 a^{mx+k_1} + b_2 a^{mx+k_2} + \ldots + b_n a^{mx+k_n} = c \Leftrightarrow a^{mx}(b_1 a^{k_1} + b_2 a^{k_2} + \ldots + b_n a^{k_n}) = c$$

Например: $7^x + 7^{x+2} = 350$; $7^x + 7^x \cdot 7^2 = 350$; $7^x \cdot (1 + 49) = 359$; $7^x \cdot 50 = 350$;
$7^x = 7$; $x = 1$.
Ответ: 1.

$$Aa^{2x}+Ba^x+C=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^x=t>0, \\ At^2+Bt+C=0 \end{cases}$$

Например: $49^x - 8\cdot 7^x + 7 = 0$; $(7^x)^2 - 8\cdot 7^x + 7 = 0$; $\begin{cases} 7^x=t>0, \\ t^2-8t+7=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 7^x=t>0, \\ \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=7; \end{array}\right. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} 7^x=1, \\ 7^x=7; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 7^x=7^0, \\ 7^x=7; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1. \end{array}\right.$

Ответ: 0; 1.

$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

Например: $5^{2x-3} = 2$; $2x - 3 = \log_5 2$; $2x = 3 + \log_5 2$; $x=1{,}5+\frac{1}{2}\log_5 2$.

Ответ: $1{,}5+\frac{1}{2}\log_5 2$.

$$Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0 \Leftrightarrow A\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+B\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^x+C=0$$

Например: $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$; $3\cdot 4^{2x} + 2\cdot 9^{2x} - 5\cdot 4^x\cdot 9^x = 0$;

$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+2=0$; $\begin{cases} \left(\frac{4}{9}\right)^x=t>0, \\ 3t^2-5t+2=0; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{3}, \\ t=1, \end{array}\right. \\ \left(\frac{4}{9}\right)^x=t; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^x=1, \\ \left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{4}{9}\right)^0, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ 2x=1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=0{,}5. \end{array}\right.$

Ответ: 0; 0,5.

5.4. Показательные неравенства

$\begin{array}{l} a^{f(x)}<b, \\ a>1 \end{array} \Leftrightarrow f(x)<\log_a b$	$2^{2x-1} < 3$; $2x - 1 < \log_2 3$; $2x < 1 + \log_2 3$; $x < 0{,}5 + 0{,}5\log_2 3$. *Ответ:* $x \in (-\infty; 0{,}5 + 0{,}5\log_2 3)$.
$\begin{array}{l} a^{f(x)}<b, \\ 0<a<1 \end{array} \Leftrightarrow f(x)>\log_a b$	$(0{,}3)^{x+2} < 2$; $x + 2 > \log_{0{,}3} 2$; $x > \log_{0{,}3} 2 - 2$. *Ответ:* $x \in (\log_{0{,}3} 2 - 2; +\infty)$.
$\begin{array}{l} a^{f(x)}>b, \\ a>1 \end{array} \Leftrightarrow f(x)>\log_a b$	$3^{x-5} > 2$; $x - 5 > \log_3 2$; $x > \log_3 2 + 5$. *Ответ:* $x \in (\log_3 2 + 5; +\infty)$.
$\begin{array}{l} a^{f(x)}>b, \\ 0<a<1 \end{array} \Leftrightarrow f(x)<\log_a b$	$(0{,}7)^{x+2} < 5$; $x + 2 > \log_{0{,}7} 5$; $x > \log_{0{,}7} 5 - 2$. *Ответ:* $x \in (\log_{0{,}7} 5 - 2; +\infty)$.

$\begin{matrix} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ a > 1 \end{matrix} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$2^{3-x} > 4^x$; $2^{3-x} > 2^{2x}$. Поскольку функция $y = 2^t$ возрастает, то $3 - x > 2x$; $-x - 2x > -3$; $-3x > -3$; $x < 1$.  *Ответ:* $x \in (-\infty; 1)$.
$\begin{matrix} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ 0 < a < 1 \end{matrix} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$	$0,5^{2x+5} \geq 1$; $0,5^{2x+5} \geq 0,5^0$. Поскольку функция $y = 0,5^t$ убывает, то $2x + 5 \leq 0$; $2x \leq -5$; $x \leq -2,5$.  *Ответ:* $x \in (-\infty; -2,5]$.
$\begin{matrix} a^{f(x)} < a^{g(x)}, \\ a > 1 \end{matrix} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$	$27^{x+2} < 81^{x-1}$; $3^{3(x+2)} < 3^{4(x-1)}$. Поскольку функция $y = 3^t$ возрастает, то $3(x + 2) < 4(x - 1)$; $3x + 6 < 4x - 4$; $3x - 4x < -4 - 6$; $-x < -10$; $x > 10$.  *Ответ:* $x \in (10; +\infty)$.
$\begin{matrix} a^{f(x)} < a^{g(x)}, \\ 0 < a < 1 \end{matrix} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$\sqrt[3]{0,2^x} < \sqrt{0,2^{x+1}}$; $0,2^{\frac{x}{3}} < 0,2^{\frac{x+1}{2}}$. Поскольку функция $y = 0,2^t$ убывает, то $\left.\frac{x}{3} > \frac{x+1}{2}\right\vert \cdot 6$; $2x > 3(x + 1)$; $2x > 3x + 3$; $2x - 3x > 3$; $-x > 3$; $x < -3$.  *Ответ:* $x \in (-\infty; -3)$.

5.5. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения — это уравнения, которые содержат переменную под знаком логарифма.

Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Во время решения логарифмических уравнений может произойти расширение области определения и появятся посторонние корни.

Для того чтобы решить уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$, надо:

1) решить уравнение $f(x) = g(x)$;

2) из найденных корней отобрать те, что удовлетворяют неравенствам $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$; остальные корни уравнения $f(x) = g(x)$ являются посторонними для уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Например: 1) $\log_2(x - 1) = -1$; $-1 = -1 \cdot 1 = -1 \cdot \log_2 2 = \log_2 2^{-1} = \log_2 \frac{1}{2}$;

$\log_2(x - 1) = \log_2 \frac{1}{2}$; $x - 1 = \frac{1}{2}$; $x = 0,5 + 1$; $x = 1,5$.

Ответ: 1,5.

2) $\log_7(x^2 - 3x - 5) = \log_7(7 - 2x)$; $x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$; $x^2 - x - 12 = 0$; $x_1 = 4$; $x_2 = -3$.

Проверку найденных значений x выполним с помощью неравенств: $x^2 - 3x - 5 > 0$ и $7 - 2x > 0$. Число -3 этим неравенствам удовлетворяет, а число 4 — нет.

Ответ: -3.

$$\log_{g(x)} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g^b(x). \end{cases}$$

Например: $\log_{x-2} x = 2$; $\begin{cases} x > 0, \\ x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1, \\ x = (x-2)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ x^2 - 5x + 4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 1. \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ: 4.

5.6. Логарифмические неравенства

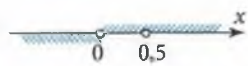
$$\log_a f(x) > \log_a g(x), a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

Например: $\log_5 x > \log_5(1-x)$; $\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x > 0, \\ x > 1 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \\ x > 0,5; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0,5, \\ x < 1. \end{cases}$

Ответ: $x \in (0,5; 1)$.

$$\log_a f(x) < \log_a g(x), a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Например: $\log_5 x < \log_5(1-x)$; $\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x > 0, \\ x < 1 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \\ x < 0,5; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0,5, \\ x > 0. \end{cases}$



Ответ: $x \in (0; 0,5)$.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), 0 < a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Например: $\log_{0,1} x > \log_{0,1}(1-x)$; $\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x > 0, \\ x < 1 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \\ x < 0,5; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0,5, \\ x > 0. \end{cases}$

Ответ: $x \in (0; 0,5)$.

$$\log_a f(x) < \log_a g(x), 0 < a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

Например: $\log_{0,1} x < \log_{0,1}(1-x)$; $\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x > 0, \\ x > 1 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \\ x > 0,5; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0,5, \\ x < 1. \end{cases}$

Ответ: $x \in (0,5; 1)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}=4$.

Решение

$\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}\right)^2=16$; $x-3+2\sqrt{(x-3)(x+5)}+x+5=16$;

$2\sqrt{(x-3)(x+5)}=-2x+14$; $\sqrt{(x-3)(x+5)}=7-x$; $\left(\sqrt{(x-3)(x+5)}\right)^2=(7-x)^2$;

$(x-3)(x+5)=49-14x+x^2$; $x^2+2x-15=49-14x+x^2$; $16x=64$; $x=4$.

Проверка: $\sqrt{4-3}+\sqrt{4+5}=4$; $\sqrt{1}+\sqrt{9}=4$; $1+3=4$; $4=4$.

Ответ: 4.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2$.

Решение

$\left(\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}\right)^3=2^3$; $2x+13-3\cdot\sqrt[3]{(2x+13)^2}\cdot\sqrt[3]{2x-13}+$

$+3\cdot\sqrt[3]{2x+13}\cdot\sqrt[3]{(2x-13)^2}-(2x-13)=8$;

$2x+13-2x+13-3\cdot\sqrt[3]{2x+13}\cdot\sqrt[3]{2x-13}\cdot\left(\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}\right)=8$;

$26-3\cdot\sqrt[3]{(2x-13)(2x+13)}\cdot 2=8$; $26-6\cdot\sqrt[3]{4x^2-169}=8$; $6\cdot\sqrt[3]{4x^2-169}=18$;

$\sqrt[3]{4x^2-169}=3$; $4x^2-169=27$; $4x^2=196$; $x^2=49$; $\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=-7.\end{array}\right.$

Проверка:

$\sqrt[3]{2\cdot 7+13}-\sqrt[3]{2\cdot 7-13}=2$; $\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{1}=2$; $3-1=2$; $2=2$.

$\sqrt[3]{2\cdot(-7)+13}-\sqrt[3]{2\cdot(-7)-13}=2$; $\sqrt[3]{-1}-\sqrt[3]{-27}=2$; $-1+3=2$; $2=2$.

Ответ: –7; 7.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x^3-x^2+4}+\sqrt{x^3-x^2+1}=3$.

Решение

Пусть $x^3-x^2+1=t$, тогда $\sqrt{t+3}+\sqrt{t}=3$; $\left(\sqrt{t+3}+\sqrt{t}\right)^2=9$;

$t+3+t+2\sqrt{t(t+3)}=9$; $\sqrt{t^2+3t}=3-t$; $\sqrt{t^2+3t}=(3-t)^2$; $t^2+3t=9-6t+t^2$;

$9t=9$; $t=1$; $x^3-x^2+1=1$; $x^3-x^2=0$; $x^2(x-1)=0$; $x=0$ или $x=1$.

Проверка:

$\sqrt{0^3-0^2+4}+\sqrt{0^3-0^2+1}=3$; $\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$; $2+1=3$; $3=3$.

$\sqrt{1^3-1^2+4}+\sqrt{1^3-1^2+1}=3$; $\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$; $2+1=3$; $3=3$.

Ответ: 0; 1.

Пример 4. Решите неравенство $\sqrt{3x-x^2}<4-x$.

Решение

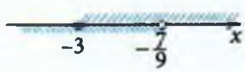
$$\begin{cases}4-x>0,\\3x-x^2\geq 0,\\3x-x^2<(4-x)^2;\end{cases}\quad\begin{cases}x<4,\\x(3-x)\geq 0,\\2x^2-11x+16>0;\end{cases}\quad\begin{cases}x<4,\\-x(x-3)\geq 0,\\x\in R;\end{cases}\quad\begin{cases}x<4,\\x(x-3)\leq 0,\\x\in R.\end{cases}$$

Ответ: $x\in[0;3]$.

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$.

Решение

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3<0,\\x^2-3x+2\geq 0;\end{cases}\\\begin{cases}x+3\geq 0,\\x^2-3x+2\geq 0,\\x^2-3x+2>(x+3)^2;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-3,\\(x-1)(x-2)\geq 0;\end{cases}\\\begin{cases}x\geq -3,\\-9x>7;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-3,\\(x-1)(x-2)\geq 0;\end{cases}\\\begin{cases}x\geq -3,\\x<-\frac{7}{9};\end{cases}\end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-3),\\x\in\left[-3;-\frac{7}{9}\right).\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\frac{7}{9}\right)$.

Пример 6. Решите уравнение $7^x-2^{x+2}=5\cdot 7^{x-1}-2^{x-1}$.

Решение

$7^x-5\cdot 7^{x-1}=2^{x+2}-2^{x-1}$; $7^{x-1}\cdot(7-5)=2^{x-1}(2^3-1)$; $2\cdot 7^{x-1}=7\cdot 2^{x-1}$; $\left(\frac{7}{2}\right)^{x-1}=\frac{7}{2}$; $x-1=1$; $x=2$.

Ответ: 2.

Пример 7. Решите уравнение $5^{1+\frac{2}{x}}-7\cdot 10^{\frac{1}{x}}+2\cdot 4^{\frac{1}{x}}=0$.

Решение

$5\cdot\left(5^{\frac{1}{x}}\right)^2+2\cdot\left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2-7\cdot 5^{\frac{1}{x}}\cdot 2^{\frac{1}{x}}=0\Big|:2^{\frac{2}{x}}\neq 0;$ $5\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{x}}+2-7\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=0.$

Пусть $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=t>0$, тогда $5t^2-7t+2=0$; $D=49-40=9$; $t_1=\frac{7+3}{10}=1$,

$t_2=\frac{7-3}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=1,\\\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{2}{5};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{0},\\\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-1};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}=0,\\\frac{1}{x}=-1.\end{array}\right.$

(уравнение решений не имеет); $x=-1$.

Ответ: -1.

Пример 8. Решите неравенство $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.

Решение

$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 < 0$. Пусть $5^x = t$, тогда $\begin{cases} t^2 - 6t + 5 < 0, \\ t > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (t-1)(t-5) < 0, \\ t > 0. \end{cases}$

$t \in [1; 5]$; $1 \le 5^x \le 5$; $5^0 \le 5^x \le 5$; $0 \le x \le 1$.

Ответ: $x \in [0; 1]$.

Пример 9. Решите неравенство $3^{2x+1} + 3 > 10 \cdot 3^x$.

Решение

$3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 > 0$. Пусть $3^x = t > 0$, тогда $\begin{cases} 3t^2 - 10t + 3 > 0, \\ t > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (t-3)\left(t - \dfrac{1}{3}\right) > 0, \\ t > 0. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} t \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right), \\ t \in (3; +\infty); \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 0 < 3^x < \dfrac{1}{3}, \\ 3^x > 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3^x < 3^{-1}, \\ 3^x > 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 1. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 10. Решите уравнение $\log_2^2 x - 2\log_2 x^3 + 5 = 0$.

Решение

ОДЗ: $x > 0$. $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 5 = 0$. Пусть $\log_2 x = t$, тогда $t^2 - 6t + 5 = 0$;

$t_1 = 1$, $t_2 = 5$. $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1, \\ \log_2 x = 5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \log_2 2, \\ \log_2 x = \log_2 2^5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 32. \end{array}\right.$

Ответ: 2; 32.

Пример 11. Решите уравнение $x^{1-\log_2 x} = \dfrac{1}{64}$.

Решение

ОДЗ: $x>0$. $\log_2 x^{1-\log_2 x} = \log_2 \dfrac{1}{64}$; $(1 - \log_2 x) \cdot \log_2 x = \log_2 2^{-6}$; $\log_2 x - \log_2^2 x = -6$;
$\log_2^2 - \log_2 x - 6 = 0$.

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $t^2 - t - 6 = 0$; $t_1 = 3$, $t_2 = -2$.

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3, \\ \log_2 x = -2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \log_2 2^3, \\ \log_2 x = \log_2 2^{-2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$

Ответ: 0,25; 8.

Пример 12. Решите неравенство $\log_{0,2}(x^2 + 4x) \geq -1$.

Решение

$$-1 = -1 \cdot 1 = -1 \cdot \log_{0,2} 0{,}2 = \log_{0,2}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \log_{0,2} 5;\ \log_{0,2}(x^2 + 4x) \geq \log_{0,2} 5;$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x \leq 5, \\ x^2 + 4x > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 4x - 5 \leq 0, \\ x(x+4) > 0; \end{cases} \begin{cases} (x+5)(x-1) \leq 0, \\ x(x+4) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-5; 1]; \\ x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty). \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-5; -4) \cup (0; 1]$.

Пример 13. Решите неравенство $\lg^2(3x+2) < \lg\left(x + \frac{2}{3}\right) + \lg 3$.

Решение

$$\lg^2(3x+2) < \lg\left(3\left(x + \frac{2}{3}\right)\right);\ \lg^2(3x + 2) - \lg(3x + 2) < 0.$$

Пусть $\lg(3x + 2) = t$, тогда $t^2 - t < 0$; $t(t - 1) < 0$.

$0 < t < 1$.

$$\begin{cases} 0 < \lg(3x+2) < 1, \\ 3x + 2 > 0; \end{cases} \begin{cases} \lg 1 < \lg(3x+2) < \lg 10, \\ 3x + 2 > 0; \end{cases} 1 < 3x + 2 < 10; -1 < 3x < 8;\ -\frac{1}{3} < x < \frac{8}{3}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}\right)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решите уравнение $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$.

2. Решите уравнение $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg\frac{1}{x}$.

3. Решите неравенство $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$.

Тестовые задания

1. Решите уравнение $3^x = \frac{2\sqrt{3}}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	–1	–0,5	0,5	1

2. Решите неравенство $0{,}7^{3x-1} > 0{,}49$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$(1; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	$\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

3. Найдите область определения функции $y = \log_{x+1}\sqrt{x+6-x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1; 0) \cup (0; 3)$	$(-2; 3)$	$[-2; 3]$	$(-2; 1)$	$(-1; 3)$

4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(1-4x) < -1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(1; 4)$	$\left(-1; \frac{1}{4}\right)$	$\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$

5. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{x^2+4x+4} = 1$.

А	Б	В	Г	Д
–1	–3	1	0	3

6. Какому промежутку принадлежит корень уравнения $\log_5(x-1) + \log_5(x-2) = \log_5(x+2)$?

А	Б	В	Г	Д
$(-1; 1)$	$(1; 3)$	$(3; 5)$	$(5; 7)$	$(7; 9)$

7. Установите соответствие между уравнением (1–4) и суммой корней (А–Д).

1 $3^{|x-4|} = 81$
2 $\log_5|x-5| = 1$
3 $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$
4 $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$

А 10
Б 7
В 1
Г 8
Д 12

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установите соответствие между неравенством (1–4) и решением (А–Д).

1 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} > \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$

2 $\log_2(x-3) < 3$

3 $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

4 $\lg x + \lg(x-3) < 1$

А $(0; 1)$

Б $(5; 11)$

В $(-3; 2)$

Г $(3; 5)$

Д $(3; 11)$.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Установите соответствие между уравнением (1–4) и произведением корней (А–Д).

1 $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$

2 $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2$

3 $(x+1)(2-x)(5-x)\sqrt{x-4} = 0$

4 $(x+1)\sqrt{x^2 - 5x + 5} = x+1$

А 5

Б 40

В 20

Г −2

Д −4

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \le x + 4$. В ответ запишите наименьшее целое решение этого неравенства.

11. Решите уравнение $\log_6(x-3) + \log_6(x-8) = 2$. Если уравнение имеет один корень, то запишите его в ответ. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответ запишите их сумму.

12. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}$. Если уравнение имеет один корень, то запишите его в ответ. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответ запишите их произведение.

6. Тригонометрические функции

Функции вида $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ называют **тригонометрическими**.

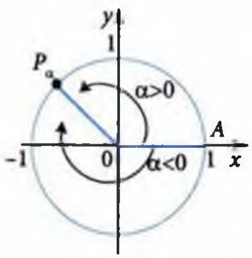
Радиан — единица измерения углов.

Углом в один радиан называют центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ радиан; $\quad$ 1 радиан $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$;

$n^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot n$ радиан; $\quad \pi = 180^\circ$.

Градусная мера угла	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

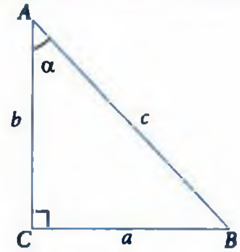


Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице, называется **единичной**.

OA — начальный радиус; P_α — точка на единичной окружности, которой соответствует угол α. Если от начального радиуса OA двигаться к радиусу OP_α против часовой стрелки, то $\alpha > 0$. Если от начального радиуса OA двигаться к радиусу OP_α по часовой стрелке, то $\alpha < 0$.

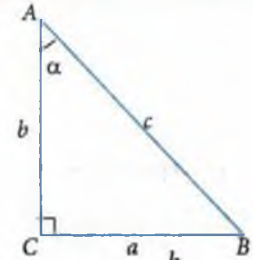
6.1. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса для острого угла прямоугольного треугольника и для произвольного угла поворота α

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **противолежащего** катета к гипотенузе.



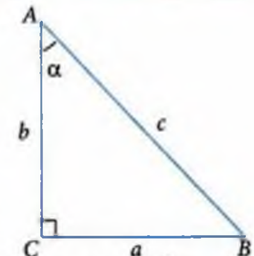
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **близлежащего** катета к гипотенузе.



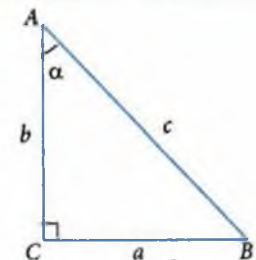
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **противолежащего** катета к близлежащему катету



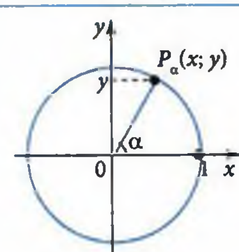
$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение близлежащего катета к **противолежащему** катету.



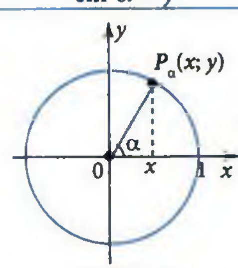
$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$

Синусом произвольного угла поворота α называется ордината точки на единичной окружности, которой соответствует угол α.

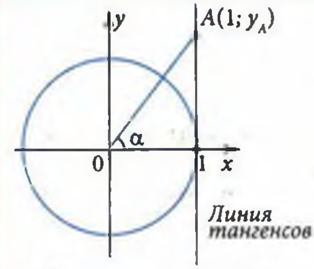


$\sin\alpha = y$

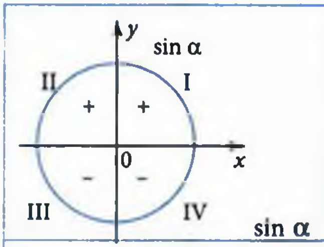
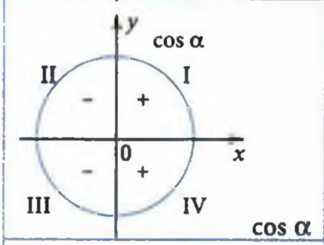
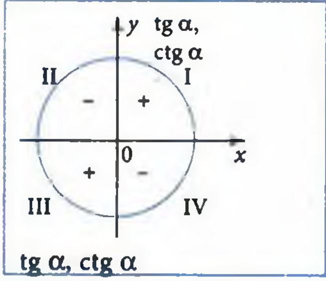
Косинусом произвольного угла поворота α называется абсцисса точки на единичной окружности, которой отвечает угол α.



$\cos\alpha = x$

Тангенсом произвольного угла поворота α называется отношение синуса этого угла к его косинусу.	 $\operatorname{tg}\alpha = y_A$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
Котангенсом произвольного угла поворота α называется отношение косинуса этого угла к его синусу.	 $\operatorname{ctg}\alpha = x_A$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

6.2. Знаки тригонометрических функций

	$\sin 172° > 0$; $\sin 0° = 0$; $\sin 90° = 1$; $\sin 180° = 0$; $\sin 200° < 0$; $\sin 270° = -1$
	$\cos 172° < 0$; $\cos 200° < 0$; $\cos 350° > 0$; $\cos 0° = 1$; $\cos 90° = 0$; $\cos 180° = -1$; $\cos 270° = 0$
	$\operatorname{tg} 172° < 0$; $\operatorname{tg} 200° > 0$; $\operatorname{tg} 180° = 0$; $\operatorname{ctg} 180°$ не существует; $\operatorname{tg} 90°$ не существует; $\operatorname{ctg} 90° = 0$

6.3. Значение тригонометрических функций некоторых углов

α									
α	**в градусах**	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

6.4. Периодичность и четность тригонометрических функций

Функция $y = \cos x$ — четная:
$\cos(-x) = \cos x$
Функция $y = \cos x$ — периодическая с периодом $2\pi k$, $k \in Z$.
$T = 2\pi$ — наименьший положительный период.

Например: $\cos 1110° = \cos(360°\cdot 3 + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos(-780°) = \cos 780° = \cos(360°\cdot 2 + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$;

$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{6\pi-\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Функция $y = \sin x$ — нечетная:
$\sin(-x) = -\sin x$
Функция $y = \sin x$ — периодическая с периодом $2\pi k$, $k \in Z$.
$T = 2\pi$ — наименьший положительный период.

Например: $\sin 1125° = \sin(360°\cdot 3 + 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin(-750°) = -\sin 750° = -\sin(360°\cdot 2 + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$;

$\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\frac{8\pi-\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Функции $y = \mathrm{tg}\,x$ и $y = \mathrm{ctg}\,x$ — нечетные:
$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\,x$; $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\,x$
Функции $y = \mathrm{tg}\,x$ и $y = \mathrm{ctg}\,x$ — периодические с периодом πk, $k \in Z$.
$T = \pi$ — наименьший положительный период.

Например: $\operatorname{tg}570^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 3 + 30^\circ) = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\operatorname{ctg}(-240^\circ) = -\operatorname{ctg}240^\circ = -\operatorname{ctg}(180^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{ctg}60^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$;

$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{4\pi - \pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1.$

Функции $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ — периодические:

$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ — наименьший положительный период.

Функции $y = A\operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$, $y = A\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ — периодические:

$T = \frac{\pi}{|\omega|}$ — наименьший положительный период.

Например: $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$; $T = \frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$;

$y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$; $T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$;

$y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$; $T = \frac{\pi}{3}$.

6.5. Формулы приведения

Соотношения, в которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$ выражаются через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, называются **формулами приведения**.

Чтобы записать любую формулу приведения, когда $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, полезно запомнить такие правила:

1. Если $\frac{\pi}{2}$ взято четное количество раз, то название данной функции не меняется; если $\frac{\pi}{2}$ взято нечетное количество раз, то название данной функции меняется на кофункцию: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот.

2. Перед образованной функцией ставят знак функции, которая преобразуется по формуле приведения.

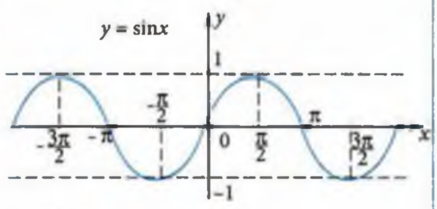
Например: 1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$;

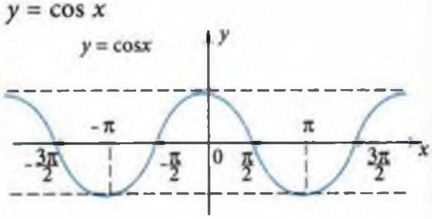
2) $\cos(\pi + \alpha) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$;

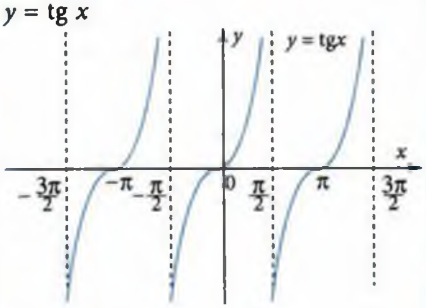
3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$;

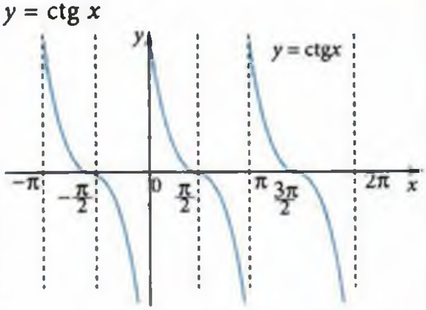
4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

6.6. Графики и свойства тригонометрических функций

<table>
<tr>
<td>


$y = \sin x$
</td>
<td>
1) $D(f) = R$.
2) $E(f) = [-1;\ 1]$.
3) Нули функции: $x = \pi n,\ n \in Z$.
4) Возрастает при
$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in Z$.
5) Убывает при
$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in Z$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
$y = \cos x$


</td>
<td>
1) $D(f) = R$.
2) $E(f) = [-1;\ 1]$.
3) Нули функции: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.
4) Возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$, $n \in Z$.
5) Убывает при $x \in [2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
$y = \mathrm{tg}\, x$


</td>
<td>
1)
$D(f) = \left\{x - \text{любое, кроме } \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$.
2) $E(f) = R$.
3) Возрастает при
$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.
4) Нули функции: $x = \pi n,\ n \in Z$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
$y = \mathrm{ctg}\, x$


</td>
<td>
1) $D(f) = \{x$ — любое, кроме $\pi n,\ n \in Z\}$.
2) $E(f) = R$.
3) Убывает при $x \in (\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$.
4) Нули функции: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.
</td>
</tr>
</table>

6.7. Основные тригонометрические формулы

Зависимость между тригонометрическими функциями одного угла

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ — секанс $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ — косеканс

$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad$ $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Например: 1) $\sin^2 1 = 1 - \cos^2 \alpha$;
2) $\cos^2 1 = 1 - \sin^2 \alpha$;
3) $\sin^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha$;
4) $\cos^2 - 1 = -\sin^2 \alpha$;
5) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$;
6) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$;
7) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

Формулы двойного угла

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$

Например: 1) $\sin\alpha = \sin 2\cdot\dfrac{\alpha}{2} = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $\cos\alpha = \cos 2\cdot\dfrac{\alpha}{2} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}2\cdot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Формулы понижения степени

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\quad$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Например: 1) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$;
2) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$;

3) $1-\cos\alpha = 1-\cos 2\cdot\dfrac{\alpha}{2} = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $1+\cos\alpha = 1+\cos 2\cdot\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$;

5) $1+\sin\alpha = 1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = 1+\cos 2\cdot\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Формулы сложения

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$$

Например: 1) $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ + \cos 30^\circ\cdot\sin 45^\circ =$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4};$$

2) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ + \sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ =$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4};$$

3) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

Например: 1) $\cos 48° - \cos 12° = -2\sin\frac{48°+12°}{2}\sin\frac{48°-12°}{2} = -2\sin 30°\sin 18° =$
$= -2\cdot\frac{1}{2}\sin 18° = -\sin 18°;$

2) $\sin 48° - \sin 12° = 2\sin\frac{48°-12°}{2}\cos\frac{48°+12°}{2} = 2\sin 18°\cos 30° =$
$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 18° = \sqrt{3}\sin 18°;$

3) $\sin 13°\cos 9° = \frac{\sin(13°-9°)+\sin(13°+9°)}{2} = \frac{\sin 4° + \sin 22°}{2};$

4) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} =$
$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$

5) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}(-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin(-\beta)} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

Формулы половинного угла

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\qquad$ $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

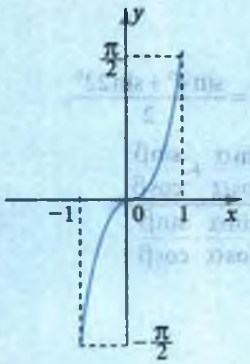
Например: 1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$

2) $\operatorname{tg}15° = \operatorname{tg}\frac{30°}{2} = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2-\sqrt{3}.$

6.8. Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа a (arcsin a) называется угол из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

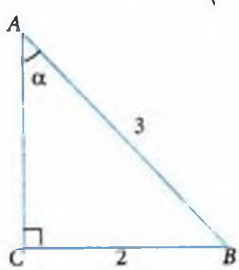


1) $D(\arcsin x) = [-1; 1]$; 2) $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Например: 1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$;

3) вычислите $\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$. Пусть $\arcsin\frac{2}{3} = \alpha$, тогда $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

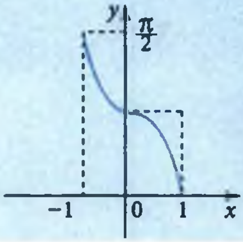


$AC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$; $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Арккосинусом числа a ($\arccos a$) называется угол из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$



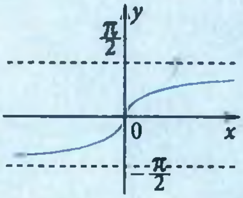
1) $D(\arccos x) = [-1; 1]$; 2) $E(\arccos x) = [0; \pi]$.

Например: 1) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ и $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Арктангенсом числа a ($\operatorname{arctg} a$) называется угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$



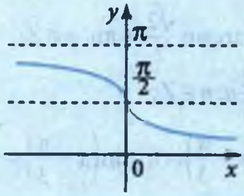
1) $D(\operatorname{arctg} x) = r$; 2) $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Например: 1) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$;

2) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Арккотангенсом числа a ($\operatorname{arcctg} a$) называется угол из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$



1) $D(\operatorname{arcctg} x) = r$; 2) $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$.

Например: 1) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$;

2) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

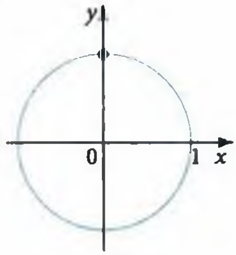
6.9. Простейшие тригонометрические уравнения

sin x = a

1) Если $\left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 1, \end{array}\right.$ то уравнение решений не имеет.

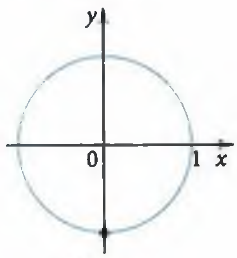
2) Если $-1 \leq a \leq 1$, то $x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$.

3) Если $a = 1$, то



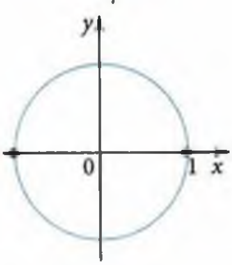
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

4) Если $a = -1$, то



$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

5) Если $a = 0$, то



$x = \pi n,\ n \in Z.$

Например: 1) $\sin x = -\frac{1}{2};\quad x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, n \in Z;$

$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z;$

2) $2\sin 3x = \sqrt{2};\quad \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad 3x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in Z;$

$3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;\quad x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z;$

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1;\quad \sin\left(-\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 1;\quad -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1;\quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1;$

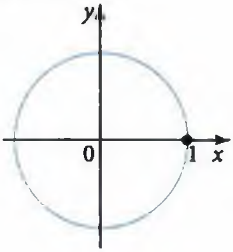
$x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;\quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$

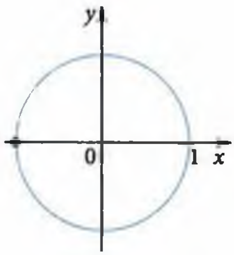
4) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x - \frac{\pi}{6} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;\quad x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

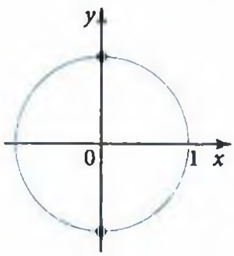
$\cos x = a$

1) Если $\left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 1, \end{array}\right.$ то уравнение решений не имеет.

2) Если $-1 \le a \le 1$, то $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$.

3) Если $a = 1$, то  $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

4) Если $a = -1$, то  $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

5) Если $a = 0$, то  $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

Например: 1) $\cos 7x = \pi$. Поскольку $\pi > 1$, то уравнение решений не имеет.

2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = -\dfrac{1}{2};\ \cos\left(-\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = -\dfrac{1}{2};\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2};$

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z;\quad x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$$

3) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1;\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = \pi + 2\pi n, n \in Z;$

$$2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;\quad 2x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;\quad x = \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$$

4) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$; $\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$; $1-\cos 2x = \frac{1}{2}$; $\cos 2x = \frac{1}{2}$;

$2x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

$\mathrm{tg}\, x = a, a \in R$

$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, n \in Z.$

Если $a = 0$, то $x = \pi n, n \in Z$.

Например: 1) $\mathrm{tg}\, 3x = 5$; $3x = \mathrm{arctg}\, 5 + \pi n, n \in Z$; $x = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, 5 + \frac{\pi}{3}n, n \in Z$;

2) $\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; $x - \frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}(-1) + \pi n, n \in Z$;

$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $x = \pi n, n \in Z.$

$\mathrm{ctg}\, x = a, a \in R$

$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, n \in Z.$

Если $a = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

Например: 1) $\mathrm{ctg}\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; $6x - \frac{\pi}{3} = \mathrm{arctg}\sqrt{3} + \pi n, n \in Z$;

$6x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; $6x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$;

$6x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}n, n \in Z$;

2) $\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$; $x + \frac{\pi}{3} = \mathrm{arcctg}(-1) + \pi n, n \in Z$;

$x + \frac{\pi}{3} = \pi - \mathrm{arcctg}\, 1 + \pi n, n \in Z$; $x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$;

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z.$

6.10. Тригонометрические уравнения

$a \sin^2 x + b \cos x + c = 0$

$a(1 - \cos^2 x) + b \cos x + c = 0$; $a - a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$;

$a\cos^2 x - b\cos x - (a + c) = 0.$

Замена: $\cos x = t$, $-1 \le t \le 1$; $at^2 - bt - (a + c) = 0.$

Например: $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$; $2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$; $2 - 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. *Замена:* $\cos x = t$; $2t^2 + t - 1 = 0$. $D = 1 + 8 = 9$;

$t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1.$ $\left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2},\\ \cos x = -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,\\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z.\end{array}\right.$

$a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$

$a(1 - \sin^2 x) + b\sin x + c = 0$; $a - a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$; $a\sin^2 x - b\sin x - (a + c) = 0$.

Замена: $\sin x = t$, $-1 \le t \le 1$; $at^2 - bt - (a + c) = 0$.

Например: $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$; $2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$; $2 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. *Замена:* $\sin x = t$, $2t^2 + t - 1 = 0$; $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -1$. $\left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{2},\\ \sin x = -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z,\\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.\end{array}\right.$

$a\sin x + b\cos x = 0$

Если $\cos x \ne 0$, то $a\frac{\sin x}{\cos x} + b\frac{\cos x}{\cos x} = 0$; $a\,\mathrm{tg}\,x + b = 0$; $\mathrm{tg}\,x = -\frac{b}{a}$;

$x = -\mathrm{arctg}\frac{b}{a} + \pi n, n \in Z$

При $\cos x = 0$ уравнение корней не имеет.

$\sin x - \cos x = 0$; $\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = 0$; $\mathrm{tg}\,x - 1 = 0$; $\mathrm{tg}\,x = 1$; $x = \mathrm{arctg}\,1 + \pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$

Если $\cos x \ne 0$, то $a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$; $a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c = 0$.

Замена: $\mathrm{tg}\,x = t$. $at^2 + bt + c = 0$.

Случай $\cos x = 0$ надо рассматривать отдельно.

$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$. Если $\cos x \ne 0$, то $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} - 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$; $\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0$.

Замена: $\mathrm{tg}\,x = t$; $t^2 + 2t - 3 = 0$; $t_1 = -3$; $t_2 = 1$. $\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,x = -3,\\ \mathrm{tg}\,x = 1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = -\mathrm{arctg}\,3 + \pi n, n \in Z,\\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.\end{array}\right.$
Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, что невозможно.

$a\sin x + b\cos x = c$, $c^2 \le a^2 + b^2$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, который

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\end{cases} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi n, n \in Z.$$

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$x + \varphi = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n, n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi n, n \in Z.$$

Например: $\sin x + 2\cos x = 1$; $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\sin x + \dfrac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}$;

$\dfrac{1}{\sqrt5}\sin x + \dfrac{2}{\sqrt5}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt5}$. Поскольку $\left(\dfrac{1}{\sqrt5}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt5}\right)^2 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5} = 1$, то существует такой угол φ, который $\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt5},\\ \sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt5};\end{cases}$ $\operatorname{tg}\varphi = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$.

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt5}; \quad \sin(x+\varphi) = \frac{1}{\sqrt5};$$

$$x + \varphi = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \pi n, n \in Z; \quad x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \operatorname{arctg}2 + \pi n, n \in Z.$$

6.11. Простейшие тригонометрические неравенства

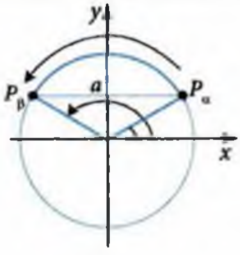
$\sin x \geq a$

Если $a < -1$, то $x \in R$.

Если $a > 1$, то $x \in \varnothing$.

Рассмотрим случай, когда $-1 \leq a \leq 1$.

Поскольку $\sin x$ — это ордината соответствующей точки P_x единичной окружности, то заштрихуем внутри единичной окружности на оси ординат промежуток, который лежит выше a. Найдем дугу, которая соответствует данному промежутку: P_α — начало дуги, P_β — конец дуги. Для того чтобы определить, где начало дуги, а где конец, договоримся обходить дугу с начала до конца против часовой стрелки. При этом необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\alpha < \beta$.



$\alpha = \arcsin a$; $\beta = \pi - \arcsin a$.

Следовательно, $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\sin x \geq -\frac{1}{2}$

$$\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6};\quad \beta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

Следовательно, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

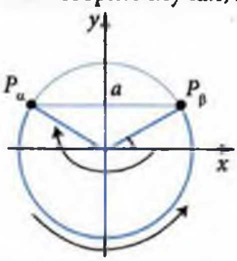
Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$.

$\sin x \leq a$

Если $a < -1$, то $x \in \varnothing$.

Если $a > 1$, то $x \in R$.

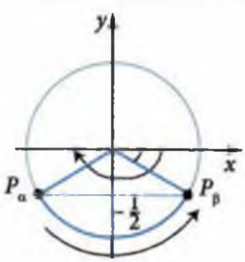
Рассмотрим случай, когда $-1 \leq a \leq 1$.



$\beta = \arcsin a$; $\alpha = -(\pi + \arcsin a) = -\pi - \arcsin a$.

Следовательно, $-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\sin x \leq -\frac{1}{2}$



$$\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};\quad \alpha = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6}.$$

Следовательно, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$.

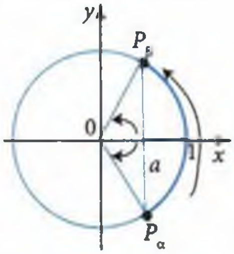
$\cos x \geq a$

Если $a < -1$, то $x \in R$.

Если $a > 1$, то $x \in \varnothing$.

Рассмотрим случай, когда $-1 \leq a \leq 1$.

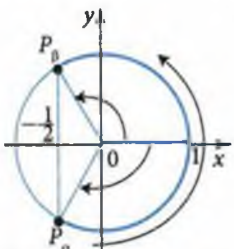
Поскольку $\cos x$ — это абсцисса соответствующей точки P_x единичной окружности, то заштрихуем внутри единичной окружности на оси абсцисс промежуток, который лежит справа от a. Найдем дугу, которая соответствует данному промежутку: P_α — начало дуги, P_β — конец дуги. Для того чтобы определить, где начало дуги, а где конец, договоримся обходить дугу с начала до конца против часовой стрелки. При этом необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\alpha < \beta$.



$\beta = \arccos a$; $\alpha = -\arccos a$.

Следовательно, $-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\cos \geq -\dfrac{1}{2}$



$$\beta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};\ \ \alpha = -\frac{2\pi}{3}.$$

Следовательно, $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

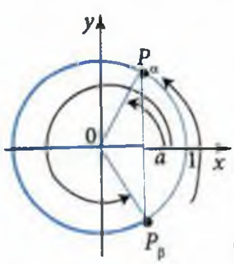
Ответ: $x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$

$\cos x \leq a$

Если $a < -1$, то $x \in \varnothing$.

Если $a > 1$, то $x \in R$.

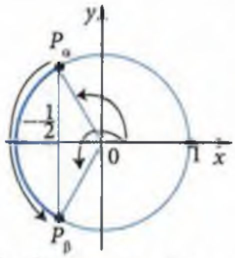
Рассмотрим случай, когда $-1 \leq a \leq 1$.



$\alpha = \arccos a$; $\beta = 2\pi - \arccos a$.

Следовательно, $\arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos + 2\pi n,\ n \in Z$.

$\cos x \le -\dfrac{1}{2}$

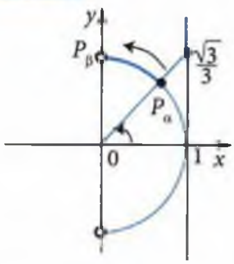


$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};\quad \beta = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Следовательно, $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

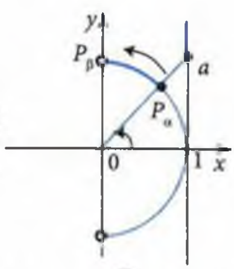
Ответ: $x \in \left[\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$

tg *x* ≤ *a*



$\alpha = -\dfrac{\pi}{2};$ $\beta = \operatorname{arctg} a$. Следовательно, $-\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x \le \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z.$

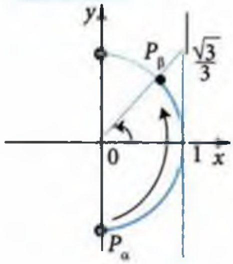
$\operatorname{tg} x \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$\alpha = -\dfrac{\pi}{2};$ $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}.$ Следовательно, $-\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x \le \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

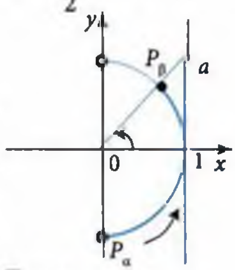
Ответ: $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right], n \in Z.$

tg $x \geq a$



$\alpha = \operatorname{arctg} a$; $\beta = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\operatorname{arctg} a + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

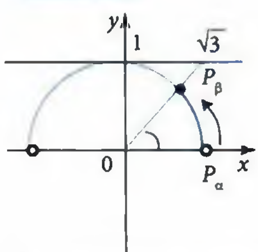
$\operatorname{tg} x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$



$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$; $\beta = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

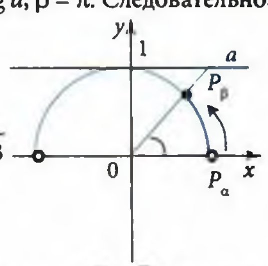
Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.

ctg $x \leq a$



$\alpha = \operatorname{arcctg} a$; $\beta = \pi$. Следовательно, $\operatorname{arcctg} a + \pi n \leq x < \pi + \pi n$, $n \in Z$..

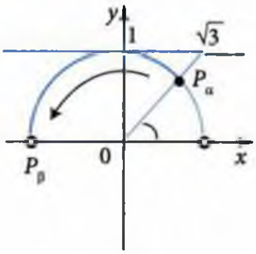
$\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$



$\alpha = 0$; $\beta = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, $\pi n < x \leq \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

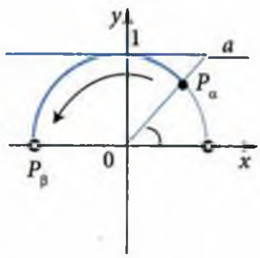
Ответ: $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right], n \in Z$.

ctg *x* ≤ *a*



$\alpha = \operatorname{arcctg} a$; $\beta = \pi$. Следовательно, $\operatorname{arcctg} a + \pi n \le x < \pi + \pi n,\ n \in Z$.

$\operatorname{ctg} x \le \sqrt{3}$



$\alpha = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$; $\beta = \pi$. Следовательно, $\dfrac{\pi}{6} + \pi n \le x < \pi + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{\pi}{6} + \pi n; \pi + \pi n\right),\ n \in Z$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вычислите tg 2α, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ и $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Решение

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{4}\cos\alpha}{1-2\cdot\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}\cos\alpha}{1-\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{2}\cos\alpha}{\frac{7}{8}} = \frac{4\cos\alpha}{7}.$$

Вычислим $\cos\alpha$: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$; $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{16}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Поскольку α — угол, лежащий в I координатной четверти, то $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Следовательно, $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{4\cos\alpha}{7} = \frac{4\cdot\sqrt{15}}{4\cdot 7} = \frac{\sqrt{15}}{7}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{7}$.

Пример 2. Упростите выражение $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}} - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$, где $0° < \alpha < 90°$.

Решение

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}} - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2\sin^2\alpha}} - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2\cos^2\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\cdot|\sin\alpha|} - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot|\cos\alpha|}.$$

Поскольку α — угол, лежащий в I координатной четверти, то $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; $|\cos\alpha| = \cos\alpha$.

Следовательно,

$$\frac{{}^{\cos\alpha/}\cos\alpha}{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha} - \frac{{}^{\sin\alpha/}\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{2}\sin 2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha} = \sqrt{2}\operatorname{ctg}2\alpha.$$

Ответ: $\sqrt{2}\operatorname{ctg}2\alpha$.

Пример 3. Докажите тождественность

$$\left(\frac{1}{\cos 3\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin 3\alpha}\right) = \frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$$

Решение

$$\left(\frac{{}^{\cos\alpha/}1}{\cos 3\alpha} + \frac{{}^{\cos 3\alpha/}1}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\frac{{}^{\sin 3\alpha/}1}{\sin\alpha} - \frac{{}^{\sin\alpha/}1}{\sin 3\alpha}\right) = \frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\cos 3\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos 2\alpha\cancel{\cos\alpha}\cdot 2\cancel{\sin\alpha}\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha\cdot\sin 3\alpha\cdot\cancel{\cos\alpha}\cdot\cancel{\sin\alpha}} = \frac{2\cdot 4\cos^2 2\alpha}{2\cos 3\alpha\cdot\sin 3\alpha} = \frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha};$$

$\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha} = \frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$, что и следовало доказать.

Пример 4. Решите уравнение $6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2$.

Решение

$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)$;

$6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$;

$4\sin^2 x - 3\sin\cos x - 7\cos^2 x = 0 \mid : \cos^2 x \neq 0$; $4\,\mathrm{tg}^2\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x - 7 = 0$.

Замена: $\mathrm{tg}\, x = t$; $4t^2 - 3t - 7 = 0$; $D = 9 + 112 = 121$; $t_1 = \frac{3+11}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$;

$t_2 = \frac{3-11}{8} = -\frac{8}{8} = -1$; $\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = \frac{7}{4},\\ \mathrm{tg}\, x = -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \mathrm{arctg}\frac{7}{4} + \pi n, n \in Z,\\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.\end{array}\right.$

Если $\cos^2 x = 0$, то $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$, что одновременно невозможно.

Ответ: $\mathrm{arctg}\frac{7}{4} + \pi n, n \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Пример 5. Решите уравнение $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0$.

Решение

$\cos^2 x - \sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$; $1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$;

$-2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$; $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$.

Замена: $\sin x = t$; $2t^2 - 5t - 3 = 0$; $D = 25 + 24 = 49$; $t_1 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$;

$t_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$; $\left[\begin{array}{l}\sin x = 3 \text{ (решений не имеет)},\\ \sin x = -\frac{1}{2};\end{array}\right.$

$x = (-1)^{n+1}\cdot \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$;

$x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Пример 6. Решите уравнение $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$.

Решение

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x = 1$; $\cos\frac{\pi}{4}\sin 3x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 3x = 1$; $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $3x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$;

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, n \in Z$.

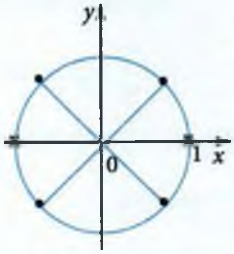
Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, n \in Z$.

Пример 7. Решите уравнение $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{1+\cos x} = 0.$

Решение

$\begin{cases}\sin 3x - \sin x = 0,\\ 1+\cos x \neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2\sin x\cos 2x = 0,\\ \cos x \neq -1;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos 2x = 0,\end{array}\right.\\ x \neq \pi + 2\pi n, n\in Z;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \pi m, m\in Z,\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k\in Z,\end{array}\right.\\ x \neq \pi + 2\pi n, n\in Z;\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \pi m, m\in Z,\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k, k\in Z,\end{array}\right.\\ x \neq \pi + 2\pi n, n\in Z.\end{cases}$



Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k, k\in Z;\ 2\pi l, l \in Z.$

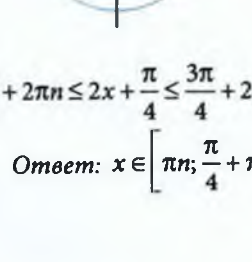
Пример 8. Решите неравенство $\cos^2 x + \sin x\cos x \geq 1.$

Решение

$\sin x\cos x \geq 1 - \cos^2 x;$ $\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x \geq \sin^2 x;$ $\dfrac{1}{2}\sin 2x \geq \dfrac{1-\cos 2x}{2};$

$\dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x \geq \dfrac{1}{2};$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

$\sin 2x\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos 2x\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2};$ $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2};$



$\alpha = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4};$ $\beta = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}.$

$\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \leq 2x + \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, n\in Z;$ $2\pi n \leq 2x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in Z;$ $\pi n \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n\in Z.$

Ответ: $x \in \left[\pi n; \dfrac{\pi}{4} + \pi n\right], n\in Z.$

Пример 9. Найдите наименьший корень уравнения $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$ на промежутке $60° \le x \le 180°$. Ответ запишите в градусах.

Решение

$\cos 6x - \cos 8x = 1 - \cos 2x$; $2\sin x \sin 7x = 2\sin^2 x$; $\sin^2 x - \sin x \sin 7x = 0$;

$\sin x(\sin x - \sin 7x) = 0; -2\sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x = 0; \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin 3x = 0,\\ \cos 4x = 0;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = \pi n, n \in Z,\\ 3x = \pi k, k \in Z,\\ 4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x = \pi n, n \in Z,\\ x = \dfrac{\pi}{3}k, k \in Z,\\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}m, m \in Z.\end{array}\right.$ Если $k = 1$, то $x = 60°$.

Ответ: 60°.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решите уравнение $\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}$.
2. Решите уравнение $\dfrac{1 - \cos x}{\sin \dfrac{x}{2}} = 2$.
3. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 + 2)\sin^2 x + 4a\sin x \sin x = a^2 + 3$ имеет решения? Найдите эти решения.

Тестовые задания

1. Найдите значение выражения $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	25

2. Вычислите cos 2α, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{25}$	$-\frac{17}{25}$	$-\frac{7}{25}$	$\frac{17}{25}$	$\frac{8}{25}$

3. Если упростить выражение $\frac{\sin\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha}$, то получим

А	Б	В	Г	Д
$-\operatorname{tg} 4\alpha$	$\operatorname{tg} 2\alpha$	$-\operatorname{tg} 2\alpha$	$\operatorname{ctg} 2\alpha$	$-\operatorname{ctg} 2\alpha$

4. Решите уравнение $\cos(-2x) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{8}$	$-2\pi n,\ n \in Z$	$2\pi n,\ n \in Z$	$\pi n,\ n \in Z$	$-\pi + 2\pi n,$ $n \in Z$

5. Решите уравнение $\sin^2 x + \cos x = 2{,}75$.

А	Б	В	Г	Д
$\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$	$\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$	$\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$	Уравнение решений не имеет

6. Найдите все корни уравнения $\operatorname{tg} 60° + x = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi n,\ n \in Z$	$180° \cdot n,$ $n \in Z$	$60° \cdot n,\ n \in Z$	$120° \cdot n,$ $n \in Z$	$\frac{\pi n}{2}, n \in Z$

7. Установите соответствие между выражениями (1–4) и числовыми значениями (А–Д).

1 $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$

2 $\arcsin\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3 $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$

4 $\operatorname{arcctg}(\cos\pi)$

А $-\frac{\pi}{2}$

Б $-\frac{\pi}{4}$

В 0

Г $\frac{\pi}{4}$

Д $\frac{3\pi}{4}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установите соответствие между выражениями (1–4) и числовыми значениями (А–Д).

1 $\cos 105° + \cos 45°$

2 $\sin 270° + \sin 150°$

3 $2\sin 15° \cdot \sin 75°$

4 $\frac{2\sin 40° \cdot \sin 50°}{\cos 10°}$

А -1

Б 0

В 1

Г $\frac{1}{2}$

Д $-\frac{1}{2}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Установите соответствие между тригонометрическими уравнениями (1–4) и выражениями, которые являются их решениями (А–Д).

1 $\sin 3x = 1$

2 $\sin\frac{x}{3} = 0$

3 $\cos 3x = 0$

4 $\cos\frac{x}{3} = 1$

А $3\pi n,\ n \in Z$

Б $6\pi n,\ n \in Z$

В $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n,\ n \in Z$

Г $3\pi + 6\pi n,\ n \in Z$

Д $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n,\ n \in Z$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha = 15°$.

11. Решите уравнение при дополнительном условии: $2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\sin 3x = 1$, $-30° < x < 45°$. Если уравнение на заданном интервале имеет несколько корней, то найдите их сумму. Ответ запишите в градусах.

12. Найдите самый большой отрицательный корень уравнения $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$. Ответ запишите в градусах.

7. Прогрессии

7.1. Арифметическая прогрессия

Числовая последовательность a_1; a_2; a_3; …; a_n; … называется **арифметической прогрессией**, если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему члену, к которому прибавляется одно и то же число d, где d — разность арифметической прогрессии, a_1 — первый член, n — число членов, a_n — n-й член.

$d = a_{k+1} - a_k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots, n = 1$

$a_{k+1} = a_k + d$

$a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$ — формула n-го члена арифметической прогрессии.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$ — формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.

$a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$ — свойство членов арифметической прогрессии.

Например: 1) Пусть последовательность чисел 2; 7; … — арифметическая прогрессия, тогда $d = 7 - 2 = 5$; $a_{20} = a_1 + d\cdot(20-1) = 2 + 5\cdot 19 = 97$;

$$S_{11} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{11} = \frac{2\cdot 2 + 5(11-1)}{2}\cdot 11 = \frac{4+50}{2}\cdot 11 = 297.$$

2) Между числами 4 и 20 разместить три числа, которые с данными числами образовали бы арифметическую прогрессию.

Решение

$a_1 = 4$; $a_n = 20$; $n = 5$. Ведь $4 + d\cdot(5-1) = 20$; $4d = 20 - 4$; $4d = 16$; $d = 4$;
$a_2 = 4 + 4 = 8$; $a_3 = 8 + 4 = 12$; $a_4 = 12 + 4 = 16$.

Ответ: 4; 8; 12; 16; 20.

7.2. Геометрическая прогрессия

Числовая последовательность b_1; b_2; b_3; …; b_n; …, в которой первый член $b_1 \neq 0$, называется **геометрической прогрессией**, если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, отличное от нуля, где q — знаменатель геометрической прогрессии, n — число членов, b_n — n-й член.

$q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $\qquad b_{n+1} = b_n\cdot q$

$b_n = b_1\cdot q^{n-1}$ — формула n-го члена геометрической прогрессии.

$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ — формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии.

$S = b_1 + b_2 + b_3 + ... = \frac{b_1}{1 - q}$ — формула суммы бесконечной геометрической прогрессии, в которой $|q| < 1$.

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ — свойство членов геометрической прогрессии.

Например: 1) Пусть последовательность чисел 3; 9; ... — геометрическая прогрессия, тогда

$q = \frac{9}{3} = 3.$

$b_6 = b_1 \cdot q^{6-1} = 3 \cdot 3^5 = 3 \cdot 243 = 729;$

$$S_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = \frac{3 \cdot (1 - 3^5)}{1 - 3} = \frac{3 \cdot (1 - 243)}{-2} = 363.$$

2) Между числами 3 и 48 разместить три числа, которые с данными числами образовали бы геометрическую прогрессию.

Решение

$b_1 = 3$; $b_n = 48$; $n = 5$. Следовательно, $3 \cdot q^{5-1} = 48$; $q^4 = 16$; $\left[\begin{array}{l} q = 2, \\ q = -2. \end{array}\right.$

$b_2 = 3 \cdot 2 = 6$; $b_3 = 6 \cdot 2 = 12$; $b_4 = 12 \cdot 2 = 24$, или

$b_2 = 3 \cdot (-2) = -6$; $b_3 = -6 \cdot (-2) = 12$; $b_4 = 12 \cdot (-2) = -24$.

Ответ: 3; 6; 12; 24; 48 или 3;–6; 12; –24; 48.

3) Найдите сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$

Решение

$$q = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Ответ: 1.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 4, а сумма второго и четырнадцатого равна –8. Найдите прогрессию.

Решение

$$\begin{cases} a_3 + a_7 = 4, \\ a_2 + a_{14} = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 6d = 4, \\ a_1 + d + a_1 + 13d = -8; \end{cases} \quad - \begin{cases} 2a_1 + 8d = 4, \\ 2a_1 + 14d = -8; \end{cases} \quad -6d = 12;\ d = -2;$$

$2a_1 + 8 \cdot (-2) = 4$; $2a_1 = 4 + 16$; $2a_1 = 20$; $a_1 = 10$; $a_2 = 10 + (-2) = 8$; $a_3 = 8 + (-2) = 6$; $a_4 = 6 + (-2) = 4$.

Ответ: 10; 8; 6; 4; …

Пример 2. Найдите сумму нечетных натуральных чисел, не превышающих 71.

Решение

Нечетные натуральные числа можно задать общей формулой: $a_n = 2n - 1$, $n \in N$.

$2n - 1 \le 71$; $2n \le 72$; $n \le 36$.

Следовательно, нечетных натуральных чисел, которые не превышают 71, ровно 36.

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$; $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; $d = 3 - 1 = 2$.

$$S_{36} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot (36 - 1)}{2} \cdot 36 = (2 + 70) \cdot 18 = 72 \cdot 18 = 1296.$$

Ответ: 1296.

Пример 3. Докажите, что если a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

Решение

Поскольку по условию задачи a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию, то $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$. Отсюда $2b^2 = a^2 + c^2$.

Докажем, что $\frac{1}{c+a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}\right)$;

$\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}$; $\frac{2}{c+a} = \frac{a+b+b+c}{(b+c)(a+b)}$; $2(a + b)(b + c) = (c + a)(c + a + 2b)$;

$2(ab+ac+b^2+bc) = (c+a)^2 + 2b(c+a)$; $2\cancel{ab} + 2\cancel{ac} + 2b^2 + 2\cancel{bc} = c^2 + 2\cancel{ac} + a^2 + 2\cancel{bc} + 2\cancel{ab}$;

$2b^2 = a^2 + c^2$.

Поскольку равенство $2b^2 = a^2 + c^2$ верно, то верно и равенство $\frac{1}{c+a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}\right)$. А это значит, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию, что и требовалось доказать.

Пример 4. Найдите геометрическую прогрессию, в которой сумма первых трех членов равна 26, а сумма их квадратов равна 364.

Решение

$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=26, \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=364; \end{cases}$ $(b_1+b_2+b_3)^2=676;$ $b_1^2+b_2^2+b_3^2+2(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)=676;$

$364+2(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)=676;$ $b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3=156;$ $b_1^2q+b_1^2q^2+b_1^2q^3=156;$

$b_1^2q(1+q+q^2)=156;$

$$b_1+b_2+b_3=\frac{b_1\cdot(1-q^3)}{1-q}=\frac{b_1\cdot(1-q)(1+q+q^2)}{1-q}=b_1\cdot(1+q+q^2)=26;$$

$\begin{cases} b_1^2(1+q+q^2)^2=676, \\ b_1^2q(1+q+q^2)=156; \end{cases}\Bigg|:$ $\dfrac{b_1^2(1+q+q^2)^2}{b_1^2q(1+q+q^2)}=\dfrac{169}{39};$ $\dfrac{1+q+q^2}{q}=\dfrac{169}{39};$ $39(1+q+q^2)=$

$=169q;$ $39q^2+39q-169q+39=0;$ $39q^2-130q+39=0;$ $D=16\,900-6084=10\,916;$

$q_1=\dfrac{130+104}{78}=3;$ $q_2=\dfrac{130-104}{78}=\dfrac{26}{78}=\dfrac{1}{3};$ $b_1=\dfrac{26}{1+q+q^2}=\dfrac{26}{1+3+9}=\dfrac{26}{13}=2,$ или

$b_1=\dfrac{26}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}=\dfrac{26}{\frac{13}{9}}=\dfrac{26\cdot 9}{13}=2\cdot 9=18.$

Следовательно, $b_2=2\cdot 3=6$, $b_3=6\cdot 3=18$, или $b_2=18\cdot\dfrac{1}{3}=6,$ $b_3=6\cdot\dfrac{1}{3}=2.$

Ответ: 2; 6; 18; … или 18; 6; 2; …

Пример 5. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если затем последнее число увеличить на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найдите эти три числа.

Решение

Пусть b_1; $b_1\cdot q$, $b_1\cdot q^2$ — три числа, которые образуют геометрическую прогрессию, тогда

b_1; b_1q+2; b_1q^2 — арифметическая прогрессия;

b_1; b_1q+2; b_1q^2+9 — геометрическая прогрессия.

Используя свойство членов арифметической и геометрической прогрессий,

получаем: $\begin{cases} \dfrac{b_1+b_1q^2}{2}=b_1q+2, \\ (b_1q+2)^2=b_1\cdot(b_1q^2+9); \end{cases}$ $\begin{cases} b_1+b_1q^2=2b_1q+4, \\ \cancel{b_1^2q^2}+4+4b_1q=\cancel{b_1^2q^2}+9b_1; \end{cases}$

$\begin{cases} b_1(1+q^2-2q)=4, \\ b_1(9-4q)=4; \end{cases}\Bigg|:$ $\dfrac{1+q^2-2q}{9-4q}=1;$ $\begin{cases} 1+q^2-2q=9-4q, \\ q\neq\dfrac{9}{4}; \end{cases}$ $q^2+2q-8=0;$ $\left[\begin{aligned} q&=-4, \\ q&=2; \end{aligned}\right.$

$b_1=\dfrac{4}{9-4q}=\dfrac{4}{9-4(-4)}=\dfrac{4}{25},$ или $b_1=\dfrac{4}{9-4\cdot 2}=4.$

Следовательно, $b_1 \cdot q = \frac{4}{25} \cdot (-4) = -\frac{16}{25}$, $b_1q^2 = \frac{4}{25} \cdot 16 = \frac{64}{25}$ или $b_1q = 4 \cdot 2 = 8$, $b_1q^2 = 4 \cdot 4 = 16$.

Ответ: $\frac{4}{25}$; $-\frac{16}{25}$; $\frac{64}{25}$ или 4; 8; 16.

Пример 6. Решите уравнение $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{2}$, где $|x| < 1$.

Решение

$q = \frac{x^3}{x^2} = x$; $\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{2}$; $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $2x^2 + x - 1 = 0$; $x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$;

$x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$ (не удовлетворяет условиям уравнения).

Ответ: 0,5.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каком значении x числа $\ln 2$, $\ln(2x - 1)$ и $\ln(2x + 1)$ образуют арифметическую прогрессию?

2. Сумма первых шести членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма следующих шести ее членов равна 20. Найдите сумму первых восемнадцати членов этой прогрессии.

3. Первый, двадцатый и пятьдесят восьмой члены арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой геометрической прогрессии.

Тестовые задания

1. Какая из представленных ниже последовательностей является арифметической прогрессией?

А	Б	В	Г	Д
9; 7; 4; 1	–4; –2; 0; 1	3; 6; 12; 24	1; 3; 6; 10	3; 7; 11; 15

2. Найдите сотый член арифметической прогрессии, если $a_1 = 1$, $d = 4$.

А	Б	В	Г	Д
385	389	393	397	401

3. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии –23; –20; … .

А	Б	В	Г	Д
603	606	609	612	615

4. Найдите четвертый член геометрической прогрессии, если $b_1 = 32$, $q = -\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
–4	4	–2	2	–1

5. Сколько положительных членов имеет арифметическая прогрессия 30; 26; 22; …?

А	Б	В	Г	Д
5	6	7	8	9

6. Найдите сумму бесконечной нисходящей геометрической прогрессии 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; … .

А	Б	В	Г	Д
1	1,5	2	2,5	3

7. Установите соответствие между арифметической прогрессией (1–4) и номером ее последнего члена (А–Д).

1 4; 12; 20; …; 100
2 –2; –4; –6; …; –42
3 –6; –2; 2; …; 70
4 5; 7; 9; …; 55

А 20
Б 15
В 13
Г 26
Д 21

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установите соответствие между геометрической прогрессией (1–4) и значением x (А–Д).

1 $2\sqrt{3};\ 2;\ x;\ \ldots$

2 $2;\ x;\ 9;\ \ldots$

3 $x;\ 2;\ \sqrt{3};\ \ldots$

4 $3;\ x;\ 9;\ \ldots$

А $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Б $2\sqrt{3}$

В $-3\sqrt{2}$

Г $3\sqrt{3}$

Д $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Установите соответствие между бесконечными нисходящими геометрическими прогрессиями (1–4) и значениями их сумм (А–Д).

1 $\frac{1}{3};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{12};\ \ldots$

2 $-\frac{1}{4};\ \frac{1}{12};\ -\frac{1}{36};\ \ldots$

3 $2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \ldots$

4 $-1;\ \frac{1}{5};\ -\frac{1}{25};\ \ldots$

А $\frac{6}{5}$

Б $2\frac{2}{3}$

В $-\frac{3}{16}$

Г $\frac{2}{3}$

Д $-\frac{5}{6}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Найдите сумму первых 11 членов арифметической прогрессии, зная, что ее шестой член равен 4.

11. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), для которой $b_2 + b_4 = 300$ и $b_1 + b_3 = 100$.

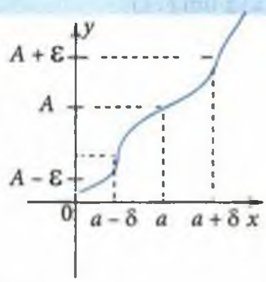
12. Сумма бесконечной нисходящей геометрической прогрессии (b_n) равна 16, а сумма квадратов всех ее членов равна 153,6. Найдите четвертый член прогрессии.

8. Элементы математического анализа

8.1. Предел функции при $x \to a$

Запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ число, к которому стремится значение функции $f(x)$, когда x стремится к a.

Число B называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a (когда x стремится к a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, чтобы для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$.



Например: Докажите, что $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 1) = 2$.

Доказательство

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство $|(f)x) - 2| < \varepsilon$ и найдем такое число $\delta > 0$, чтобы при $|x - 1| < \delta$ это неравенство выполнялось.

$$|3x - 1 - 2| = |3x - 3| = |3(x - 1)| = 3|x - 1| < \varepsilon;\ |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому если выбрать $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, то при $|x - 1| < \delta$ будет выполняться неравенство $= |(3x - 1) - 2| < \varepsilon$, а это и значит, что $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 1) = 2$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ при котором для всех $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Например: Докажите, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = 2$.

Доказательство

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство $\left|\frac{2x - 1}{x + 2} - 2\right| < \varepsilon$; $\left|\frac{2x - 1 - 2x - 4}{x + 2}\right| < \varepsilon$; $\frac{5}{|x + 2|} < \varepsilon$. Поскольку $x \to \infty$, то достаточно рассмотреть те значения x, при которых $x + 2 > 0$: $\frac{5}{x + 2} < \varepsilon$; $x + 2 > \frac{5}{\varepsilon}$; $x > \frac{5}{\varepsilon} - 2$. Следовательно, $M = \frac{5}{\varepsilon} - 2$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывная в точке $x = a$,

то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$; $\lim\limits_{x\to 4}(2x-5) = 2\cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$.

Предел постоянной функции равен самой постоянной величине:

$\lim\limits_{x\to a} C = C$ $\qquad \lim\limits_{x\to \infty} C = C$

$\lim\limits_{x\to 2} 10 = 10$; $\lim\limits_{x\to\infty} 25 = 25$.

Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов, если пределы слагаемых существуют:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to 2}(x + x^2) = \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$;

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 - \lim\limits_{x\to 2} 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x)) = C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 2} 3x^3 = 3\cdot\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 3\cdot 2^3 = 3\cdot 8 = 24$.

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, если пределы множителей существуют:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to 2}(x\cdot(x^2-1)) = \lim\limits_{x\to 2} x\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1) = 2\cdot(2^2-1) = 2\cdot 3 = 6$.

Предел части двух функций равен части их пределов, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}(f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \text{где } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+2}{4x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(4x-1)} = \frac{3\cdot 2+2}{4\cdot 2-1} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}.$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{C}{x} = 0$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{C}{x} = \infty$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Например: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x} = 0$; $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{13}{x} = \infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cdot\sin 5x}{5x} = 5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x} = 5\cdot 1 = 5$.

При вычислении пределов неопределенностями являются: $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$.

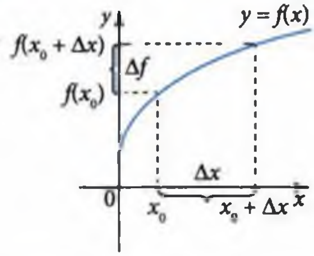
При наличии неопределенности надо выполнить преобразование выражения, которое стоит под знаком предела.

Например: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{2-x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(2-x)}(2+x)}{\cancel{2-x}}=\lim\limits_{x\to 2}(2+x)=2+2=4;$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2-3x+4}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}}=$

$=\dfrac{3-0+0}{1-0+0}=3.$

8.2. Производная



Зафиксируем точку x_0 в области определения функции $y=f(x)$. Пусть x — произвольная точка в некотором окружении точки x_0. Тогда

$\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента.

Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ — приращение функции в точке x_0.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Например: Вычислите производную функции $y=3x^2-2$, используя определение производной.

Решение

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)^2-2-(3x^2-2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)-2-3x^2+2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2+6x\cdot\Delta x+3\cdot(\Delta x)^2-3x^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6x\cdot\Delta x+3\cdot(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(6x+3\cdot\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\cdot\Delta x)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}6x+3\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=6x+3\cdot 0=6x+0=6x.$$

Ответ: $y'=6x$.

8.3. Таблица производных

$f(x)$	C, C — постоянная величина	x	x^r	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	1	$r \cdot x^{r-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$

$f(x)$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	e^x	a^x	$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$f'(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$a^x \cdot \ln a$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$\log_a x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$f'(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

8.4. Правила вычисления производных

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцированы в точке x, то:

$(u+v)' = u' + v'$ $\quad (Cu)' = C \cdot u'$ $\quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \ v(x) \neq 0$$

Например:

1) $\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)' = (3x^2)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 3 \cdot (x^2)' - \frac{1}{x^2} = 3 \cdot 2x - \frac{1}{x^2} = 6x - \frac{1}{x^2} = \frac{6x^3 - 1}{x^2}$;

2) $(x \cdot \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot \sin' x = \sin x + x \cdot \cos x$;

3) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)' \cdot (x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} =$

$= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$.

8.5. Производная сложной функции

Пусть $y = f(g(x))$ — сложная функция: $u = g(x)$ — внутренняя функция, $f(u)$ — внешняя функция. Тогда

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Например: 1) $((2x^2 - 3x)^4)' = 4 \cdot (2x^2 - 3x)^3 \cdot (2x^2 - 3x)' = 4 \cdot (4x - 3)(2x^2 - 3x)^3 = (16x - 12)(2x^2 - 3x)^3$;

2) $\left(\sqrt{\sin 2x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin 2x}} \cdot (\sin 2x)' = \dfrac{(2x)' \cdot \cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} = \dfrac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$;

3) $(\lg(\cos^3(3x-1)))' = \dfrac{1}{\cos^3(3x-1)\cdot \ln 10} \cdot (\cos^3(3x-1))' =$

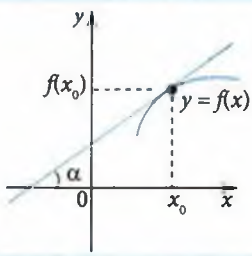
$= \dfrac{3\cdot\cos^2(3x-1)\cdot\cos'(3x-1)}{\cos^3(3x-1)\cdot\ln 10} = \dfrac{-3\cdot\sin(3x-1)\cdot(3x-1)'}{\cos(3x-1)\cdot\ln 10} =$

$= \dfrac{-9\cdot \mathrm{tg}(3x-1)}{\ln 10}$.

8.6. Физический и геометрический смысл производной

Физический смысл производной: если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения, то $s'(t)$ мгновенная скорость движения в момент времени t, то есть

$v(t) = s'(t)$, $a(t) = v'(t)$, где $a(t)$ — ускорение.



Геометрический смысл производной: значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$k = f'(x_0) = tg\,\alpha$, где α — угол, образуемый касательной с положительным направлением оси абсцисс;

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Например: 1) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 3x^3 - 2x$ в точке $x_0 = -1$.

Решение

$f'(x) = 9x^2 - 2$; $f'(-1) = 9 \cdot (-1)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$; $f(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = -3 + 2 = -1$.

Следовательно, $y = 7(x + 1) - 1 = 7x + 7 - 1 = 7x + 6$.

Ответ: $y = 7x + 6$.

2) Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$?

Решение

$\operatorname{tg}\alpha = y'(1)$; $y'(x) = 1 - 2x$; $y'(1) = 1 - 2 \cdot 1 = -1$; $\operatorname{tg}\alpha = -1$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$;

$\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ: 135°.

8.7. Исследование функции на монотонность

Критическими точками функции называются внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или не существует.

Если в каждой точке интервала $(a; b)$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Если в каждой точке интервала $(a; b)$ $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

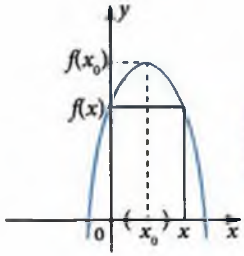
$f(x) = 2x^3 - 3x^2$; $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$; $6x(x-1) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x - 1 = 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1 \end{array}\right.$ — критические точки.

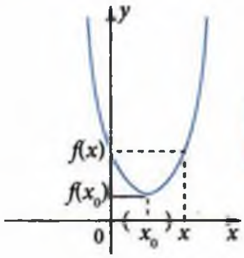
$f'(-1) = 6 \cdot (-1) \cdot (-1 - 1) > 0$; $f'(0{,}5) = 6 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5 - 1) < 0$; $f'(2) = 6 \cdot 2 \cdot (2 - 1) > 0$.

Функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ возрастает на интервалах $(-\infty; 0)$; $(1; +\infty)$ и убывает на интервале $[0; 1]$.

8.8. Исследование функции на экстремумы



Функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если в этой точке существует окрестность, в которой $f(x) < f(x_0)$.



Функция $y = f(x)$ имеет **минимум** в точке x_0, если в этой точке существует окрестность, в которой $f(x) > f(x_0)$.

! Точки максимума и минимума называются точками **экстремума**.

Необходимое условие экстремума: если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

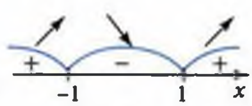
Достаточное условие экстремума: если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка максимума; если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка минимума.

Схема исследования функции $y = f(x)$ на экстремумы

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную $f'(x)$.
3. Найти критические точки.
4. Отметить критические точки, определить знак производной и исследовать характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбита область определения.
5. Определить относительно каждой критической точки, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума вообще.

Например: 1) $f(x) = x^3 - 3x$.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.
3. $f'(x) = 0;\ x^2 - 1 = 0;\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$



$f'(-2) = 3 \cdot ((-2)^2 - 1) > 0; f'(0) = 3 \cdot (0^2 - 1) < 0; f'(2) = 3 \cdot (2^2 - 1) > 0.$

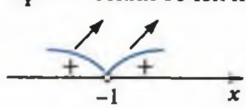
$x_{max} = -1;\ y_{max} = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2;\ x_{min} = 1;$

$y_{min} = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2.$

2) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

$$y' = \frac{(x-1)' \cdot (x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0.$$

Критических точек нет. Точек экстремума нет.



Функция возрастает на $(-\infty; -1)$; $(-1; +\infty)$.

8.9. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке и имеет на нем конечное число критических точек, то она приобретает наибольшее и наименьшее значения на этом промежутке либо в критических точках, лежащих внутри этого промежутка, либо на концах промежутка.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$ на промежутке $[1; 6]$.

Например: 1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $f'(x)=\frac{1}{8}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-16}{8x^2}$.

3. $\frac{x^2-16}{8x^2}=0;\ \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-4 \end{array}\right.$ — критические точки.

4. $f(4)=\frac{4}{8}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1;\ f(1)=\frac{1}{8}+\frac{2}{1}=2\frac{1}{8};$

$$f(6)=\frac{6}{8}+\frac{2}{6}=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{9+4}{12}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}.$$

Ответ: $\max\limits_{x\in[1;6]} f(x)=f(1)=2\frac{1}{8};\ \min\limits_{x\in[1;6]} f(x)=f(4)=1.$

8.10. Первообразная. Таблица первообразных

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

$f(x)$	k, k — постоянная	$x^r\ (r \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^x	a^x
$F(x)$	$kx + C$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$e^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$

$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x)$	$2\sqrt{x}+C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$

$f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$F(x)$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$\arcsin x + C$	$\mathrm{arctg}\, x + C$

8.11. Правила вычисления первообразных

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, $G(x)$ — первообразная функции $g(x)$, тогда $F(x) \pm G(x)$ — первообразная $f(x) \pm g(x)$, то есть первообразная суммы равна сумме первообразных.

Например: $f(x)=\frac{1}{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+5;\ f(x)=x^{-5}+x^{\frac{3}{5}}+5;$

$$F(x)=\frac{x^{-4}}{-4}+\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}+5x+C=-\frac{1}{4x^4}+\frac{5\sqrt[5]{x^8}}{8}+5x+C.$$

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для функции $kf(x)$, то есть постоянный множитель можно выносить за знак первообразной.

Например: $f(x)=3x^2-\frac{5}{\sqrt{x}};\ F(x)=\frac{3x^3}{3}-5\cdot 2\sqrt{x}+C=x^3-10\sqrt{x}+C.$

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ и k, b — постоянные, причем $k \neq 0$, тогда $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная функции $f(kx+b)$.

$f(x) = (2x - 3)^5 + \cos(4x - 1);$

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^6}{6}+\frac{1}{4}\sin(4x-1)+C=\frac{(2x-3)^6}{12}+\frac{1}{4}\sin(4x-1)+C.$$

8.12. Неопределенные и определенные интегралы

Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, тогда:

$\int f(x)dx=F(x)+C$ — неопределенный интеграл.

Пусть $f(x)$ — непрерывная на промежутке $[a; b]$ функция. $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, тогда:

$\int_a^b f(x)dx$ — определенный интеграл.

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ — формула Ньютона–Лейбница.

Например: 1) $\int\left(2+\sin\frac{x}{4}\right)dx=2x-4\cos\frac{x}{4}+C;$

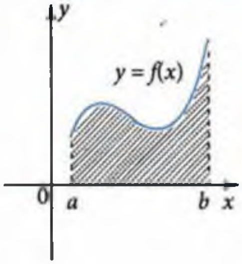
2) $\int(3x-1)^4dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^5}{5}+C=\frac{(3x-1)^5}{15}+C;$

3) $\int_1^2(x^2-1)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\left(\frac{2^3}{3}-2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=$

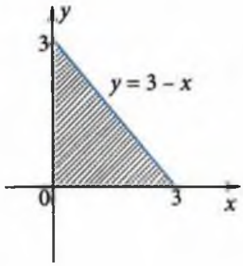
$$=\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

8.13. Площадь криволинейной трапеции

! Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $f(x) > 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс, называется **криволинейной трапецией**.

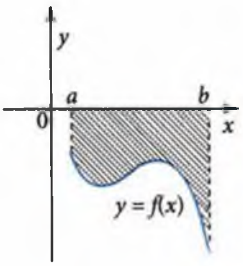


$$S = \int_a^b f(x)dx$$

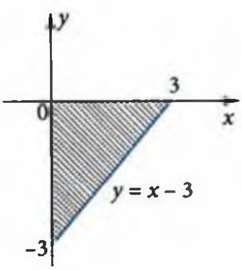


$$S = \int_0^3 (3 - x)dx = \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \left(3\cdot 3 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(3\cdot 0 - \frac{0^2}{2}\right) =$$

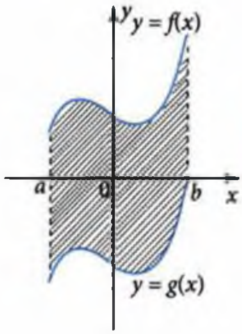
$$= 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$



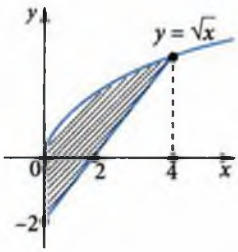
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$



$$S = -\int_0^3 (x - 3)dx = \int_0^3 (3 - x)dx = 4{,}5$$



$$S=\int_a^b f(x)-g(x)dx$$



Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x-2$:

$$\sqrt{x}=x-2;\quad \begin{cases} x=(x-2)^2, \\ x-2\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+4-x=0, \\ x\ge 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x\ge 2; \end{cases}$$

$x_1=1$ (не является корнем уравнения); $x_2=4$.

$$S=\int_0^4\left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Bigg|_0^4=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot 4^2+2\cdot 4=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 8-8+8=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найдите точки экстремума функции $f(x)=\sqrt{2x^3+9x^2}$.

Решение

1) Найдем область определения функции $f(x)$: $2x^3+9x^2\ge 0$; $x^2(2x+9)\ge 0$;

$2x^2(x+4{,}5)\ge 0$; $\begin{cases} x+4{,}5\ge 0, \\ x=0 \text{ – решение неравенства.}\end{cases}$

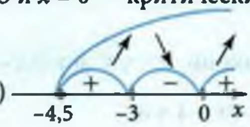
Следовательно, $D(f)=[-4{,}5;+\infty)$.

2) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x^3+9x^2}}\cdot(2x^3+9x^2)'=\dfrac{6x^2+18x}{2\sqrt{2x^3+9x^2}}=\dfrac{6x(x+3)}{2\sqrt{2x^2(2x+9)}}=$

$=\dfrac{3x(x+3)}{|x|\sqrt{2x+9}}$.

3) $f'(x)=0$; $\dfrac{3x(x+3)}{|x|\sqrt{2x+9}}=0$; $\begin{cases} x=-3, \\ x\ne 0, \\ x\ne -4{,}5.\end{cases}$ Поскольку $-4{,}5$ не является внутренней точкой области определения $f(x)$, то $x=-4{,}5$ не является критической точкой; $x=-3$ и $x=0$ — критические точки.

4)



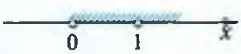
$f'(-4)=\dfrac{3\cdot(-4)\cdot(-4+3)}{|-4|\sqrt{2\cdot(-4)+9}}>0$; $f'(-2)=\dfrac{3\cdot(-2)\cdot(-2+3)}{|-2|\sqrt{2\cdot(-2)+9}}<0$;

Ответ: $f'(3)=\dfrac{3\cdot3\cdot(3+3)}{|3|\sqrt{2\cdot3+9}}>0$. $x_{max}=-3$; $x_{min}=0$.

Пример 2. Найдите экстремумы функции $f(x)=\dfrac{x}{\ln^2 x}$.

Решение

1) Найдем область определения функции $f(x)$: $\begin{cases}\ln x\ne 0, \\ x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ne 1, \\ x>0.\end{cases}$

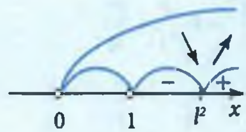


Следовательно, $D(f)=(0;1)\cup(1;+\infty)$.

2) $f'(x)=\dfrac{x'\cdot\ln^2 x-x\cdot(\ln^2 x)'}{\ln^4 x}=\dfrac{\ln^2 x-2x\cdot\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^4 x}=\dfrac{\ln^2 x-2\ln x}{\ln^4 x}=$

$=\dfrac{\ln x(\ln x-2)}{\ln^4 x}=\dfrac{\ln x-2}{\ln^3 x}$.

3) $f'(x)=0$; $\dfrac{\ln x-2}{\ln^3 x}=0$; $\begin{cases}\ln x-2=0,\\ \ln x\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\ln x=2,\\ x\neq 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=e^2,\\ x\neq 1;\end{cases}$ $x=e^2$ — критическая точка.

4) 

Точка $x=1$ не может быть точкой экстремума, потому что она не является критической. $f'(e)=\dfrac{\ln e-2}{\ln^3 e}=\dfrac{1-2}{1}<0$; $f'(e^3)=\dfrac{\ln e^3-2}{\ln^3 e^3}=\dfrac{3\ln e-2}{(3\ln e)^3}=\dfrac{3-2}{27}>0$;

Ответ: $x_{\min}=e^2$; $y_{\min}=y(e^2)=\dfrac{e^2}{\ln^2 e^2}=\dfrac{e^2}{(2\ln e)^2}=\dfrac{e^2}{4}$.

Пример 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3^{x^2+2x-1}$ на промежутке $[-2;0]$.

Решение

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$;

2) $f'(x)=3^{x^2+2x-1}\cdot\ln 3(x^2+2x-1)'=(2x+2)\cdot\ln 3\cdot 3^{x^2+2x-1}=$
$=2\ln 3\cdot(x+1)\cdot 3^{x^2+2x-1}$;

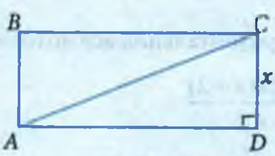
3) $f'(x)=0$; $x+1=0$; $x=-1$ — критическая точка;

4) $f(-1)=3^{(-1)^2+2\cdot(-1)-1}=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$; $f(-2)=3^{(-2)^2+2\cdot(-2)-1}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$;
$f(0)=3^{0^2+2\cdot 0-1}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\max\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=f(-2)=f(0)=\dfrac{1}{3}$; $\min\limits_{x\in[-2;0]} f(x)=f(-1)=\dfrac{1}{9}$.

Пример 4. Из всех прямоугольников данного периметра найдите тот, у которого диагональ наименьшая.

Решение



Пусть $ABCD$ — прямоугольник, периметр которого равен P и $CD=x$, тогда $AD=\dfrac{P}{2}-x$, $x\in\left(0;\dfrac{P}{2}\right)$.

По теореме Пифагора $AC^2=CD^2+AD^2$;

$AC=\sqrt{x^2+\left(\dfrac{P}{2}-x\right)^2}=\sqrt{2x^2-Px+\dfrac{P^2}{4}}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{2x^2-Px+\dfrac{P^2}{4}}$ на промежутке $\left(0;\dfrac{P}{2}\right)$.

$f'(x)=\dfrac{4x-P}{2\sqrt{2x^2-Px+\dfrac{P^2}{4}}}$; $f'(x)=0$; $x=\dfrac{P}{4}$; 

$$f'\left(\frac{P}{5}\right)=\frac{4\cdot\frac{P}{5}-P}{2\sqrt{2\cdot\left(\frac{P}{5}\right)^2-P\cdot\frac{P}{5}+\frac{P^2}{4}}}<0;\quad f'\left(\frac{P}{3}\right)=\frac{4\cdot\frac{P}{3}-P}{2\sqrt{2\cdot\left(\frac{P}{3}\right)^2-P\cdot\frac{P}{3}+\frac{P^2}{4}}}>0.$$

Следовательно, $x_{\min}=\frac{P}{4}$; $AD=\frac{P}{2}-\frac{P}{4}=\frac{P}{4}$.

Ответ: квадрат.

Пример 5. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{x+2}{x^2-9}$ и постройте ее график.

Решение

1) $D(f)=(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty)$;

2) $f(0)=\frac{0+2}{0^2-9}=-\frac{2}{9}$. Следовательно, $\left(0;-\frac{2}{9}\right)$ — точка пересечения графика функции с осью ординат.

3) $x=-2$ — нуль функции;

4) $x=-3$; $x=3$ — вертикальные асимптоты;

5) $y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{x\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=0$;

$y=0$ — горизонтальная асимптота;

6) Пусть $y=kx+b$ — наклонная асимптота, тогда $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x(x^2-9)}=$

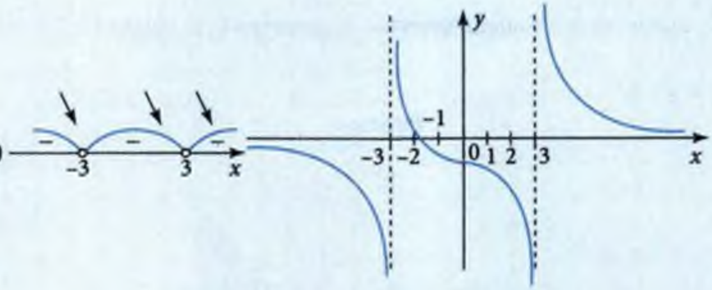
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^3-9x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2-9}=0.$$

Следовательно, наклонная асимптота совпадает с горизонтальной асимптотой.

7) $f'(x)=\frac{(x+2)'(x^2-9)-(x+2)(x^2-9)'}{(x^2-9)^2}=\frac{x^2-9-2x(x+2)}{(x^2-9)^2}=$

$=\frac{x^2-9-2x^2-4x}{(x^2-9)^2}=\frac{-x^2-4x-9}{(x^2-9)^2}=\frac{-(x^2+4x+9)}{(x^2-9)^2}=\frac{-((x-2)^2+5)}{(x^2-9)^2}<0$ при любом x из области определения функции.

8) 

Пример 6. Вычислите интегралы: 1) $\int\limits_0^{7,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} |2x+1|dx.$

Решение

1) $\int\limits_0^{7,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}} = \int\limits_0^{7,5} (2x+1)^{-\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} \Bigg|_0^{7,5} = 2\sqrt[4]{2x+1}\Bigg|_0^{7,5} =$

$= 2\sqrt[4]{2 \cdot 7,5+1} - 2\sqrt[4]{2 \cdot 0+1} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2.$

2) $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, \text{ если } \ x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1), \text{ если } \ x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$

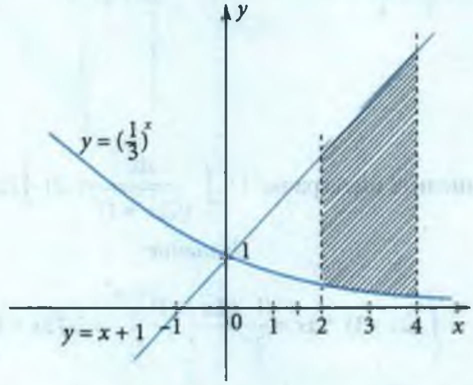
$\int\limits_{-1}^{1} |2x+1|dx = -\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x+1)dx + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} (2x+1)dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^2}{2}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1} =$

$= -\frac{1}{4}\left(\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2 - (2 \cdot (-1)+1)^2\right) + \frac{1}{4}\left((2 \cdot 1+1)^2 - \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)^2\right) =$

$= -\frac{1}{4}(0^2 - (-1)^2 + \frac{1}{4}(3^2 - 0^2) = -\frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5.$

Пример 7. Вычислите площадь фигуры, ограниченную линиями $y = x + 1$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x = 2, x = 4$.

Решение



$$S=\int_2^4\left(x+1-\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_2^4=\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln 3}\right)\Bigg|_2^4=$$

$$=\left(\frac{4^2}{2}+4+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{\ln 3}\right)-\left(\frac{2^2}{2}+2+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\ln 3}\right)=12+\frac{1}{81\ln 3}-4-\frac{1}{9\ln 3}=8-\frac{8}{81\ln 3}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Дана функция $y = x^4 - 6x^2 + 1$. Найдите наибольшее и наименьшее значения ее производной на промежутке $[-1; 3]$.

2. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $s_1 = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, $s_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (s_1, s_2 — в метрах, t — в секундах). Найдите ускорение точек в тот момент, когда их скорости равны между собой.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2^x$ и $y = 9 - 2^{3-x}$.

Тестовые задания

1. Найдите значение производной функции $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
3	−2	2	−1	1

2. Найдите длину промежутка, на котором функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$ убывает.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

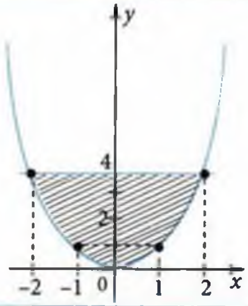
3. Найдите угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x = 2{,}5$.

А	Б	В	Г	Д
−1	0	1	2	−2

4. Точка движется по закону $s(t) = t^2 - 4t + 6$ (м). В какой момент скорость движения равна 10 м/с?

А	Б	В	Г	Д
2 с	4 с	3 с	5 с	7 с

5. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, равна



А	Б	В	Г	Д
$10\frac{2}{3}$	16	$21\frac{1}{3}$	$15\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$

6. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx$.

А	Б	В	Г	Д
0,75	−1	0,5	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

7. Установите соответствие между функциями (1–4) и их производными (А–Д).

1 $f(x) = x\ln x$

2 $f(x) = x + \ln x$

3 $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

4 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

А $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

Б $f'(x) = x + \ln x$

В $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

Г $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

Д $f'(x) = \ln x + 1$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установите соответствие между функциями (1–4) и их первообразными (А–Д).

1 $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + 2$

2 $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + 2x$

3 $f(x) = 3\sqrt{x} + 2x^3$

4 $f(x) = 3\sqrt{x^3} + \dfrac{2}{x}$

А $F(x) = 9\sqrt[3]{x} + x^2 + C$

Б $F(x) = -\dfrac{3}{x} + 2x + C$

В $F(x) = 3\sqrt{x^5} + 2\ln|x| + C$

Г $F(x) = -\dfrac{3}{x} + C$

Д $F(x) = 2\sqrt{x^3} + \dfrac{1}{2}x^4 + C$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Установите соответствие между определенными интегралами (1–4) и их значениями (А–Д).

1 $\int\limits_{-1}^{2} dx$

2 $\int\limits_{0}^{2} xdx$

3 $\int\limits_{1}^{2} x^3dx$

4 $\int\limits_{0}^{1} (2x-1)^2 dx$

А $\dfrac{1}{3}$

Б $\dfrac{15}{4}$

В $\dfrac{17}{4}$

Г 3

Д 2

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 12x$ на промежутке $[0; 3]$.

11. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс.

12. Вычислите $\int\limits_{-1}^{2} (3x-1)dx$.

9. Комбинаторика. Элементы теории вероятностей и статистики

9.1. Правило суммы, правило произведения. Перестановки. Размещение. Комбинации

Правило суммы

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b — n способами, то выбор «a или b» можно осуществить $m + n$ способами.

Например: На столе лежат 10 яблок и 5 груш. Выбрать один из фруктов можно $10 + 5 = 15$ способами.

Правило произведения

Если элемент a можно выбрать m способами, а после этого элемент b можно выбрать n способами, то выбор «a и b» можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Например: Если на столе лежат 10 яблок и 5 груш, то выбрать пару фруктов — яблоко и грушу — можно $10 \cdot 5 = 50$ способами.

Любое упорядоченное множество (порядок элементов важен), состоящее из n элементов, называется **перестановкой** из n элементов.

P_n — число перестановок из n элементов (без повторения);

$P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$;

$(0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 1 \cdot 2 = 2)$

Например: Сколькими способами можно переставить 6 книг на полке, чтобы три из них стояли рядом?

Решение

Примем три данные книги за одну, тогда будем переставлять 4 книги:

$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Три книги также можно между собой переставить $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ способами.

Используя правило произведения, находим искомое количество способов:

$n = P_4 \cdot P_3 = 24 \cdot 6 = 144$.

Ответ: 144.

Любое упорядоченное подмножество из n элементов данного множества, содержащего m элементов ($n \leq m$), называется **размещением** с m элементов по n.

A_m^n — число размещений с m элементов по n (без повторений)

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Например: 1) Сколько трехцифровых чисел можно образовать из цифр 0; 2; 4; 5, если цифры в числе не повторяются?

Решение

Порядок размещения цифр в числе важен, к тому же число не может начинаться цифрой 0.

Поэтому $n = A_4^3 - A_3^2 = \frac{4!}{(4-3)!} - \frac{3!}{(3-2)!} = 4! - 3! = 3! \cdot 4 - 3! = 3! \cdot (4-1) = 3 \cdot 6 = 18.$

Ответ: 18.

Любое подмножество из n элементов (порядок элементов неважен) данного множества, содержащего m элементов, называется **комбинацией** с m элементов по n.

C_m^n — число комбинаций с m элементов по n (без повторений)

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Например: Сколькими способами можно выбрать 4 яблока из 9?

Решение

Поскольку порядок размещения элементов неважен, то

$$n = C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

Ответ: 126.

9.2. Бином Ньютона

Треугольник Паскаля

$n = 0$						1					
$n = 1$					1		1				
$n = 2$				1		2		1			
$n = 3$			1		3		3		1		
$n = 4$		1		4		6		4		1	
$n = 5$	1		5		10		10		5		1
...	...										

$(x+a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^m x^{n-m} a^m + \ldots + C_n^n x^0 a^n$ — формула бинома Ньютона

Пусть T_k — k-й член расклада, тогда $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k$.

1) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$;

2) $(a - b)^5 = (a + (-b))^5 = a^5 + 5a^4 \cdot (-b) + 10a^3 \cdot (-b)^2 + 10a^2 \cdot (-b)^3 + 5a \cdot (-b)^4 + (-b)^5 =$
$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

9.3. Элементы теории вероятностей

Событие — первоначальное понятие теории вероятностей. Под событием понимают любое явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит. Любое событие происходит в результате испытания или эксперимента.

События обозначают прописными буквами латинского алфавита A, B, C, …

Случайное событие — это событие, которое может произойти или не произойти в результате определенного эксперимента.	Выпадание трех очков при подбрасывании игрального кубика.
Достоверное событие — это событие, которое обязательно произойдет в результате определенного эксперимента.	Выпадание не больше шести очков при подбрасывании игрального кубика.
Невозможное событие — это событие, которое не может состояться в результате какого-либо эксперимента.	Выпадание десяти очков при подбрасывании игрального кубика.
Вероятность события A равна отношению числа случаев, которые содействуют событию A, к числу всех возможных случаев. $P(A) = \frac{m}{n}$, где n — число всех возможных случаев, m — число случаев, которые содействуют событию A	1) Вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика выпадет два очка, равна $P(A) = \frac{1}{6}$. 2) Вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика выпадет четное количество очков, равна $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	A — «попадание в цель во время выстрела», $\overline{A}$ — «промах во время выстрела», B — «выпало два герба при подбрасывании двух монет», $\overline{B}$ — «выпала хотя бы одна цифра»

Несовместимые события — это такие события A и B, которые в этом эксперименте не могут произойти вместе. Если события A и B несовместимы, то $P(A, \text{ или } B) = P(A) + P(B)$	Ученик написал контрольную работу. Возможны такие события и их вероятности: A — «ученик получит 9 баллов», $P(A) = 0{,}2$; B — «ученик получит 8 баллов», $P(B) = 0{,}3$; C — «ученик получит 7 баллов», $P(C) = 0{,}4$. События A, B, C — несовместимы, потому что за одну контрольную работу нельзя получить больше одной оценки. Тогда вероятность события A, или B, или C — «ученик написал контрольную работу на достаточном уровне» представляет: $P(A, \text{ или } B, \text{ или } C) = P(A) + P(B) + P(C) =$ $= 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}9$.
Событие A называется **независимым** от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло ли событие B. Если события A и B независимые, то $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$. Если события A и B независимые, то вероятность осуществления хотя бы одного из них равна $P(C) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B))$.	Два стрелка стреляют по мишеням одновременно и независимо друг от друга. Событие A — «первый стрелок попал в мишень», $P(A) = 0{,}4$. Событие B — «второй стрелок попал в мишень», $P(B) = 0{,}8$. Событие C — «хотя бы один из стрелков попал в мишень» $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$; $P(C) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - (1 - 0{,}4)$ $(1 - 0{,}8) = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

9.4. Элементы статистики

Статистическое наблюдение — спланированный, научно организованный сбор массовой информации о социально-экономических явлениях и процессах.

Генеральная совокупность — это вся совокупность, из которой выбирают единицы наблюдения.

Выборочная совокупность (выборка) — это совокупность единиц, отобранных для выборочного наблюдения.

Вариационный ряд — это ряд чисел, которые характеризуют распределение единиц исследуемой совокупности в зависимости от величины признака.

Размах выборки — это различие между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины в выборке.

Мода выборки — это значение случайной величины, которое случается чаще всего.

Медиана — это средняя величина изменяемого признака, содержащаяся в середине ряда, размещенного в порядке возрастания значений признака:

— если количество чисел ряда нечетное, то медиана — это число, размещенное посредине;

— если количество чисел ряда четное, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, которые стоят посредине.

Средним значением случайной величины x называют среднее арифметическое всех ее значений:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Если случайная величина x приобретает значение $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в соответствии с частотами $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то

$$\overline{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n},$$

где $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Например: 1) Магазин за день продал 19 пар мужской обуви, распределенной по размерам: 38; 37; 40; 40; 41; 44; 43; 42; 42; 37; 39; 39; 40; 40; 41; 40; 39; 43; 42.

Постройте вариационный ряд, найдите размах, моду, медиану и среднее значение совокупности значений случайной величины x — размера обуви.

Решение

Разместим значение случайной величины x (значение признака) в возрастающем порядке и под каждым значением подпишем его частоту:

Размер, x	37	38	39	40	41	42	43	44	Всего
Количество пар, y	2	1	3	5	2	3	2	1	19

Найдем размах выборки: $R = 44 - 37 = 7$.

Найдем моду: $Mo = 40$.

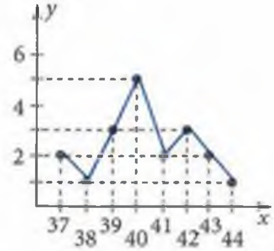
Найдем медиану: 37; 37; 38; 39; 39; 39; 40; 40; 40; 40; 40; 41; 41; 42; 42; 42; 43; 43; 44.

$Me = 40$.

Найдем среднее значение:

$$\overline{x} = \frac{37 \cdot 2 + 38 \cdot 1 + 39 \cdot 3 + 40 \cdot 5 + 41 \cdot 2 + 42 \cdot 3 + 43 \cdot 2 + 44 \cdot 1}{19} = \frac{767}{19} \approx 49{,}37.$$

Полигон частот для данного распределения:



2) Найдите моду и медиану выборки: 2; 4; 6; 5; 6; 6; 3; 7; 3; 3.

Решение

2; 3; 3; 3; 4; 5; 6; 6; 6; 7.

$Mo_1 = 3$; $Mo_2 = 6$; $Me = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

Председателя и секретаря собрания можно избрать A_{80}^2 способами. Трех членов ревизионной комиссии можно избрать C_{78}^3 способами. Используя правило произведения, находим количество способов избрания председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии:

$$n = A_{80}^2 \cdot C_{78}^3 = \frac{80! \cdot 78!}{(80-2)! \cdot 3! \cdot (78-3)!} = \frac{80! \cdot 78!}{78! \cdot 3! \cdot 75!} = \frac{75! \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 \cdot 80}{75! \cdot 6} = 480\,800\,320.$$

Ответ: 480 800 320 способами.

Пример 2. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров: 12 белых и 8 черных. Из ящика наугад вынимают 8 шаров. Определите вероятность того, что: 1) ровно три из них — черные; 2) черных шаров не больше трех.

Решение

1) Три шара из 8 можно выбрать C_8^3 способами. Остальные 5 белых шаров из 12 можно выбрать C_{12}^5 способами. Тогда $m = C_8^3 \cdot C_{12}^5$ — это количество событий, которые содействуют появлению события A_3 — «из 8 выбранных шаров ровно 3 черные».

$P(A_3) = \dfrac{C_8^3 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^8}$, где C_{20}^8 — общее количество выемок 8 шаров из 20.

2) Пусть A_1 — «из 8 выбранных шаров 1 черный», A_2 — «из 8 выбранных шаров 2 черных», A_3 — «из 8 выбранных шаров 3 черных», А — «из 8 выбранных шаров черных шаров не больше трех», тогда

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{C_8^1 \cdot C_{12}^7}{C_{20}^8} + \frac{C_8^2 \cdot C_{12}^6}{C_{20}^8} + \frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^8} =$$

$$= \frac{C_8^1 \cdot C_{12}^7 + C_8^2 \cdot C_{12}^6 + C_8^3 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^8}.$$

Пример 3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,75, для третьего — 0,7. Какова вероятность: 1) по крайней мере одного попадания; 2) ровно одного попадания; 3) ровно двух попаданий; 4) трех попаданий,— если каждый сделал по одному выстрелу? Какова вероятность того, что все промахнулись?

Решение

Пусть A_1 — событие «первый стрелок попал в цель», A_2 — событие «второй стрелок попал в цель», A_3 — событие «третий стрелок попал в цель», тогда $\overline{A}$ — событие «никто из стрелков не попал в цель».

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot (P\overline{A_3}) = (1-0{,}8) \cdot (1-0{,}75) \cdot (1-0{,}7) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}015.$$

Пусть B — событие «хотя бы один стрелок попал в цель», тогда $P(B)=1-P(\overline{A})=1-0{,}015=0{,}985$.

Пусть B_1 — событие «одно попадание в цель», тогда

$P(B_1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(A_2\overline{A_1}\,\overline{A_3})+P(A_3\overline{A_1}\,\overline{A_2})$, де

$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ — «первый стрелок попал в цель, остальные промахнулись»;

$A_2\overline{A_1}\,\overline{A_3}$ — «второй стрелок попал в цель, остальные промахнулись»;

$A_3\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ — «третий стрелок попал в цель, остальные промахнулись».

$P(B_1) = 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}14$.

Пусть B_2 — событие «два попадания в цель», тогда

$P(B_2)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_2A_3\overline{A_1})+P(A_1A_3\overline{A_2})=$ $0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 +$ $+ 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}25 = 0{,}425$.

Пусть B_3 — событие «три попадания в цель», тогда

$P(B_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$.

Пример 6. Найдите член расклада $\left(x+\dfrac{1}{x^4}\right)^{10}$, который не содержит x.

Решение

$$T_{k+1}=C_{10}^k\cdot x^{10-k}\cdot\left(\frac{1}{x^4}\right)^k=C_{10}^k\cdot x^{10-k}\cdot x^{-4k}=C_{10}^k\cdot x^{10-k-4k};$$

$10 - k - 4k = 0$; $-5k = -10$; $k = 2$.

Следовательно, $T_{2+1}=T_3=C_{10}^2=\dfrac{10!}{2!\cdot(10-2)!}=\dfrac{10!}{2!\cdot 8!}=\dfrac{8!\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 8!}=9\cdot 5=45.$

Ответ: 45.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Есть 6 билетов в театр, 4 из них — на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных билетов 2 окажутся на места первого ряда?

2. Из колоды в 52 карты вынимают 4 карты. Какова вероятность того, что все они разных мастей?

3. В коробке 8 шариков, 3 из них белые. Наугад берут подряд два шарика, причем взятый шарик в коробку не возвращают. Какова вероятность того, что оба шарика будут белыми?

Тестовые задания

1. Сколькими способами из 25 учеников можно выбрать 3 дежурных?

А	Б	В	Г	Д
900	1000	1150	1200	2300

2. Сколько всего разных пятицифровых чисел можно образовать из цифр 0, 1, 4, 7, 8, чтобы цифры в числах не повторялись?

А	Б	В	Г	Д
5	24	25	96	120

3. Лучник произвел 11 выстрелов по мишени и набрал соответственно 6, 5, 7, 9, 6, 9, 10, 8, 7, 9, 10 очков. Найдите моду этого ряда данных.

А	Б	В	Г	Д
5	7	8	9	10

4. Разложите выражение $\left(1+\sqrt{3}\right)^4$ по формуле бинома Ньютона и упростите.

А	Б	В	Г	Д
$24+12\sqrt{3}$	$24+16\sqrt{3}$	$28+12\sqrt{3}$	$28+16\sqrt{3}$	$32+16\sqrt{3}$

5. В лотерее есть 10 выигрышных билетов и 290 билетов без выигрыша. Какова вероятность того, что первый приобретенный билет будет выигрышным?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{29}$	$\frac{29}{30}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$

6. Двое охотников стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания в мишень равна 0,7 для первого охотника и 0,8 для второго охотника. Какова вероятность того, что оба охотника попадут в мишень?

А	Б	В	Г	Д
0,56	0,3	0,2	0,15	0,38

7. В результате подбрасывания игрального кубика состоялись события (1–4). Установите соответствие между событиями и вероятностями (А–Д).

1 выпало нечетное число очков
2 выпало 10 очков
3 выпало число очков, кратное 3
4 выпало 5 очков

А $\frac{1}{3}$

Б $\frac{2}{3}$

В $\frac{1}{6}$

Г 0

Д $\frac{1}{2}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установите соответствие между рядами данных (1–4) и медианами (А–Д).

1 2; 3; 4; 2; 8; 5; 1
2 2; 1; 2; 3; 2; 1; 4; 5
3 2; 1; 4; 4; 1; 5; 1; 4; 4
4 5; 3; 9; 8; 4; 7

А 2
Б 3
В 4
Г 5
Д 6

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Из цифр 1, 2, 5, 7, 8, 9 образуют числа, в которых цифры не повторяются. Установите соответствие между числами (1–4) и их количеством (А–Д).

1 четырехцифровые
2 трехцифровые
3 двухцифровые
4 шестицифровые

А 15
Б 720
В 120
Г 360
Д 30

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. В корзину собрали 8 разных яблок и 4 разные груши. Надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами это можно сделать?

11. В коробке лежат 5 синих, 4 зеленых, 2 желтых и 3 красных шарика. Какова вероятность того, что вынутый наугад шарик будет синего или желтого цвета?

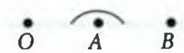
12. Два ученика решают задачу. Вероятность того, что первый ученик решит задачу, равна 0,8, а вероятность того, что задачу решит второй ученик, равна 0,4. Какова вероятность того, что задача будет решена хотя бы одним из этих учеников?

10. Углы. Окружность

10.1. Смежные и вертикальные углы

Углом называется геометрическая фигура, состоящая из двух лучей, которые выходят из одной точки. Лучи называются **сторонами** угла, а их общее начало — его **вершиной.**

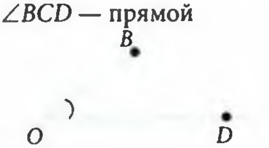
Угол называется **развернутым**, если обе его стороны лежат на одной прямой.
Единицей измерения углов является **градус** — угол, который составляет $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла.



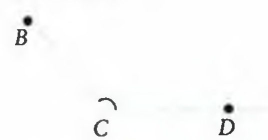
$\angle AOB$ — развернутый

Угол называется **прямым**, если он равен 90°, **острым** — если он меньше 90°, **тупым** — если он меньше 180° и больше 90°.

$\angle BCD$ — прямой

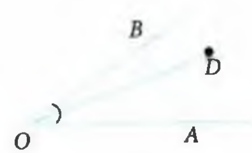


$\angle BOD$ — острый:
$\angle BOD < 90°$

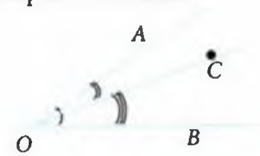


$\angle BCD$ — тупой:
$90° < \angle BCD < 180°$

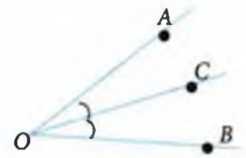
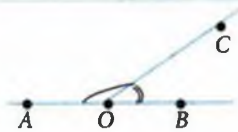
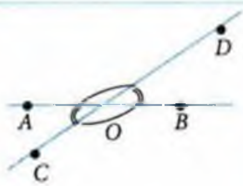
Говорят, что луч проходит между сторонами угла, если он выходит из его вершины и пересекает некоторый отрезок с концами на сторонах угла.
1) Каждый угол имеет определенную градусную меру больше 0.
2) Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.



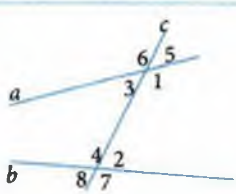
Луч OD проходит между сторонами $\angle AOB$.

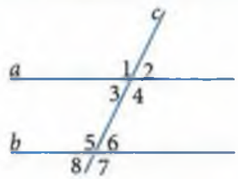
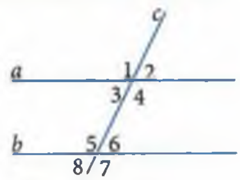


$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

Биссектрисой угла называется луч, который выходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам.	 OC — биссектриса $\angle AOB$; $\angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2}\angle AOB.$
Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие стороны являются продолжением одна другой, называются **смежными**. 1) Сумма смежных углов равна 180°. 2) Если два угла равны, то смежные с ними углы также равны. 3) Угол, смежный с прямым углом, — прямой угол; угол, смежный с острым углом, — тупой угол; угол, смежный с тупым углом, — острый угол.	 $\angle AOC$ и $\angle COB$ — смежные; $\angle AOC + \angle COB = 180°$.
Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжением сторон другого. Вертикальные углы равны	 $\angle AOD$ и $\angle COB$ — вертикальные; $\angle AOC$ и $\angle DOB$ — вертикальные; $\angle AOD = \angle COB$; $\angle AOC = \angle DOB$

10.2. Свойства параллельных прямых и признаки параллельности

	$\angle 2$ и $\angle 3$; $\angle 1$ и $\angle 4$ — внутренние накрест лежащие углы при пересечении прямых a и b секущей c
	$\angle 1$ и $\angle 2$; $\angle 3$ и $\angle 4$ — внутренние односторонние углы при пересечении прямых a и b секущей c
	$\angle 2$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 8$; $\angle 1$ и $\angle 7$ — соответственные углы при пересечении прямых a и b секущей c

Две прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, называются **параллельными**.	 $a \parallel b$
Свойства параллельных прямых Если две параллельные прямые пересечены секущей, то: 1) сумма внутренних односторонних углов равна 180°; 2) внутренние накрест лежащие углы равны; 3) соответственные углы равны.	 Если $a \parallel b$, то: 1) $\angle 4 + \angle 6 = 180°$; $\angle 3 + \angle 5 = 180°$; 2) $\angle 3 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 5$; 3) $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 7$; $\angle 5 = \angle 1$; $\angle 3 = \angle 8$.
Признаки параллельности Если при пересечении двух прямых третьей → сумма внутренних односторонних углов равна 180°, → то прямые параллельны Если при пересечении двух прямых третьей → соответственные углы равны, → то прямые параллельны Если при пересечении двух прямых третьей → внутренние накрест лежащие углы равны → то прямые параллельны	 1) Если $\angle 4 + \angle 6 = 180°$ ($\angle 3 + \angle 5 = 180°$), то $a \parallel b$. 2) Если $\angle 3 = \angle 6$ ($\angle 4 = \angle 5$), то $a \parallel b$. 3) Если $\angle 2 = \angle 6$ (или $\angle 4 = \angle 7$, или $\angle 5 = \angle 1$, или $\angle 3 = \angle 8$), то $a \parallel b$.

10.3. Окружность и круг

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек, размещенных на данном расстоянии от данной точки. Данная точка называется **центром** окружности, а отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности, называется **радиусом** окружности.

Хорда — отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметр — хорда, проходящая через центр окружности.

Длина окружности вычисляется по формуле

$$C = 2\pi R,$$

где R — радиус окружности; $\pi \approx 3{,}14$.

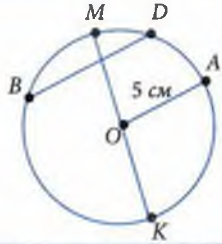
Крутом называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Площадь круга вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2,$$

где R — радиус окружности.

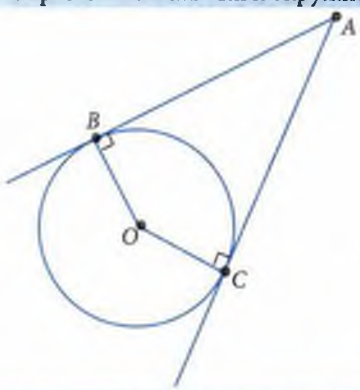
Например: $OA = R = 5$ см;
MK — диаметр;
$MK = 2R = 2 \cdot 5 = 10$ (см);
BD — хорда;
$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ (см);
$S_{круга} = \pi R^2 = 5^2 \cdot \pi = 25\pi$ (см²).



Прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точу, называется **касательной к окружности**.

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

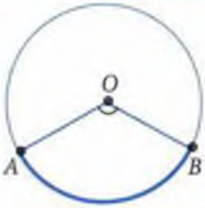


AB и AC — касательные; $OB \perp AB$, $OC \perp AC$

$AB = AC$ (как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки).

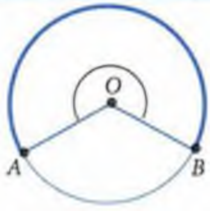
Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре.

Часть окружности, размещенная в середине плоского угла, называется **дугой** окружности, соответственной этому центральному углу.



$\angle AOB$ — центральный;
$\cup AB$ — дуга, соответственная $\angle AOB$;
$\cup AB = \angle AOB$

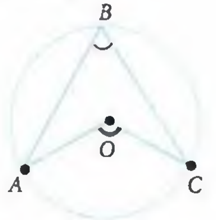
Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответственного центрального угла.



$\cup AB$ — дуга, соответственная центральному $\angle AOB$;
$\cup AB = \angle AOB$

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным** в окружность.

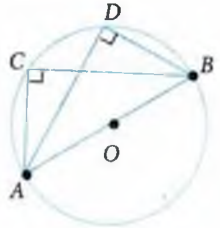
Угол, вписанный в окружность, равен половине соответственного ему центрального угла.



$\angle AOC$ — центральный угол, соответственный вписанному углу ABC;

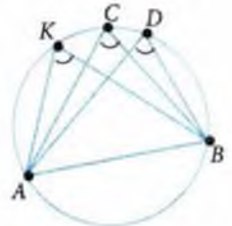
$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$

1) Вписанные углы, опирающиеся на диаметр окружности, — прямые.



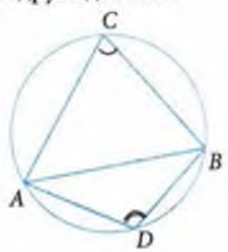
$\angle ACB = \angle ADB = 90°$

2) Вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат по одну сторону прямой AB, равны.

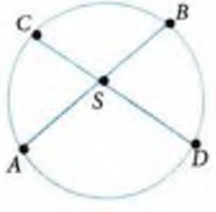


$\angle AKB = \angle ACB = \angle ADB$

3) Два угла, вписанные в окружность, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат по разные стороны прямой AB, дополняют друг друга до 180°.



$\angle ACB + \angle ADB = 180°$

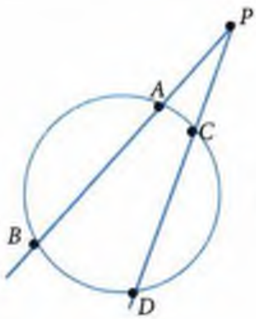


Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке S, то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$

Например: Пусть $AS = 1$ см, $BS = 9$ см, $CD = 10$ см.
Найдите CS и DS.

Решение

Пусть $CS = x$, тогда $DS = 10 - x$.
$x \cdot (10 - x) = 1 \cdot 9$; $x^2 - 10x + 9 = 0$; $x_1 = 9$; $x_2 = 1$.
Если $CS = 9$, тогда $DS = 10 - 9 = 1$ (см).
Если $CS = 1$, тогда $DS = 10 - 1 = 9$ (см).



Если из точки P к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность соответственно в точках A, B, C, D, то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

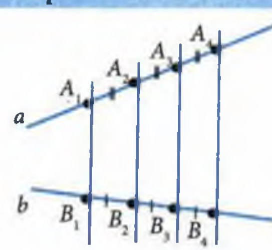
Например: Пусть $PC = 2$ см, $CD = 4$ см, $AB = 4$ см.
Найдите AO.

Решение

Пусть $AP = x$, тогда $BP = x + 4$. $x(x + 4) = 2 \cdot 6$; $x^2 + 4x - 12 = 0$; $x_1 = -6$ (условию задачи не удовлетворяет); $x_2 = 2$. Следовательно, $AO = 2$ см.

Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложены несколько равных отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие другую прямую, то и на ней отложатся равные отрезки.

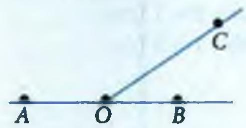


Если $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, то $B_1B_1 = B_2B_3 = B_3B_4$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Один из смежных углов втрое больше разности между ними. Найдите эти углы.

Решение



Пусть $\angle BOC = x$, тогда $\angle AOC = 180° - x$; $\angle AOC - \angle BOC = 180° - x - x = 180° - 2x$.

1) $x > 180° - 2x$ (в 3 раза); $x = 3(180 - 2x)$; $x = 540 - 6x$; $7x = 540$; $x = \frac{540}{7} = 77\frac{1}{7}$.

Следовательно, $\angle BOC = 77\frac{1}{7}^\circ$, $\angle AOC = 180° - 77\frac{1}{7}^\circ = 179\frac{7}{7}^\circ - 77\frac{1}{7}^\circ = 102\frac{6}{7}^\circ$.

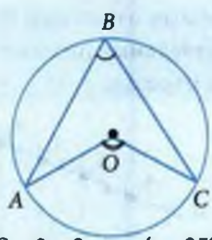
2) $180 - x > 180 - 2x$ (в 3 раза); $180 - x = 3(180 - 2x)$; $180 - x = 540 - 6x$; $5x = 360$; $x = \frac{360}{5} = 72$.

Следовательно, $\angle BOC = 72°$, $\angle AOC = 180° - 72° = 108°$.

Ответ: $77\frac{1}{7}^\circ$, $102\frac{6}{7}^\circ$ или 72°, 108°.

Пример 2. Центральный угол на 35° больше вписанного угла, который опирается на ту же дугу, что и центральный угол. Вычислите величину каждого из этих углов.

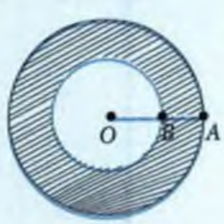
Решение



Пусть $\angle ABC = x$, тогда $\angle AOC = 2x$; $2x > x$ (на 35°); $2x - x = 35$; $x = 35$.
Следовательно, $\angle ABC = 35°$; $\angle AOC = 2 \cdot 35° = 70°$.
Ответ: 35°; 70°.

Пример 3. Пусть O — центр двух концентрических кругов, причем радиус меньшего круга равен $\frac{1}{3}$ радиуса большего круга. Найдите отношение площади образованного кольца к площади круга большего радиуса.

Решение



Пусть $OA = R$ — радиус большего круга, тогда $OB = \frac{1}{3}R$ — радиус меньшего круга.

Найдем площадь S_1 большего круга: $S_1 = \pi R^2$.

Найдем площадь S_2 меньшего круга: $S_2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{3}R\right)^2 = \frac{1}{9}\pi R^2$.

Найдем площадь S заштрихованного кольца:

$$S = S_1 - S_2 = \pi R^2 - \frac{1}{9}\pi R^2 = \pi R^2\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}\pi R^2; \quad \frac{S}{S_1} = \frac{\frac{8}{9}\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{8}{9}.$$

Ответ: $\frac{8}{9}$.

Пример 4. Найдите площадь круга, если длина его окружности равна C.

Решение

$$C = 2\pi R; \quad R = \frac{C}{2\pi}; \quad S = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi C^2}{4\pi^2} = \frac{C^2}{4\pi}.$$

Ответ: $\frac{C^2}{4\pi}$.

Пример 5. Во сколько раз увеличится площадь круга, если радиус круга увеличить в 7 раз?

Решение

Пусть R — радиус круга, тогда $S = \pi R^2$. Если радиус круга увеличить в 7 раз, то радиус образованного круга $R_1 = 7R$. Найдем его площадь S_1:

$$S_1 = \pi R_1^2 = \pi \cdot (7R)^2 = 49\pi R^2. \quad \frac{S_1}{S} = \frac{49\pi R^2}{\pi R^2} = 49.$$

Ответ: в 49 раз.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как 2 : 7.

2. Найдите величину каждого из углов, образующихся при пересечении двух прямых, если сумма трех из них равна 232°.

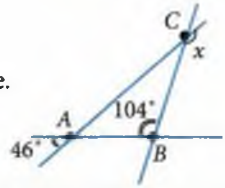
3. Найдите углы между биссектрисами смежных углов.

Тестовые задания

1. Градусная мера внешнего угла A равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) составляет 125°. Найдите градусную меру внутреннего угла B.

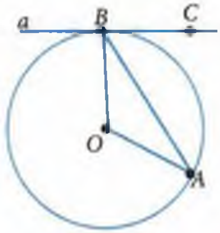
А	Б	В	Г	Д
30°	40°	50°	60°	70°

2. Найдите градусную меру угла x, изображенного на рисунке.



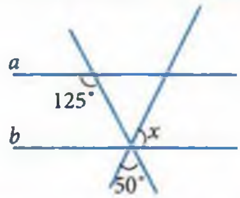
А	Б	В	Г	Д
95°	120°	140°	150°	160°

3. Прямая a касается окружности в точке B. Найдите $\angle AOB$, если $\angle ABC = 50°$.



А	Б	В	Г	Д
90°	100°	110°	120°	130°

4. Прямые a и b параллельны. Найдите градусную меру угла x, изображенного на рисунке.



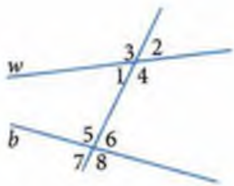
А	Б	В	Г	Д
50°	60°	65°	75°	85°

5. Один из смежных углов в 8 раз больше другого. Найдите разность этих углов.

А	Б	В	Г	Д
30°	60°	90°	110°	140°

6. Длина окружности равна 16π см. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

А	Б	В	Г	Д
128π см^2	64π см^2	32π см^2	16π см^2	8π см^2

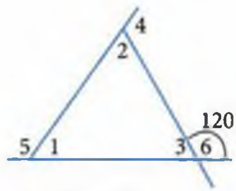


7. Установите соответствие между углами (1–4) и их названиями (А–Д).

1 ∠1 и ∠2
2 ∠7 и ∠8
3 ∠5 и ∠4
4 ∠5 и ∠1

А соответственные
Б смежные
В внутренние односторонние
Г внутренние накрест лежащие
Д вертикальные

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

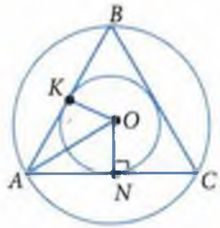


8. Установите соответствие между суммой углов (1–4), изображенных на рисунке, и ее градусной мерой (А–Д).

1 ∠1 и ∠2
2 ∠5 и ∠4 + ∠6
3 ∠1 и ∠2 + ∠3
4 ∠5 и ∠4

А 180°
Б 160°
В 120°
Г 240°
Д 360°

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					



9. $OA = R$ — радиус описанной окружности; $ON = r$ — радиус вписанной окружности. Установите соответствие между углами (1–4) и их градусными мерами (А–Д).

1 $\angle ABC$
2 $\angle OAN$
3 $\angle AOB$
4 $\angle BKO$

А 45°
Б 120°
В 30°
Г 60°
Д 90°

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Один из углов при пересечении двух прямых вдвое меньше суммы последних. Найдите наименьший из этих углов.

11. Один из смежных углов вдвое больше разности между ними. Найдите наименьший из этих углов. Если задача имеет несколько решений, то в ответ запишите их сумму.

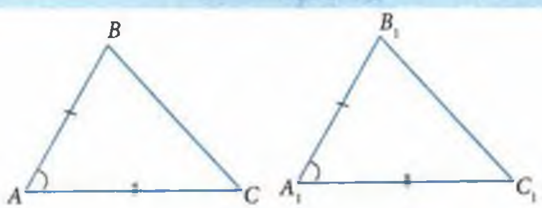
12. Один из двух внутренних односторонних углов при пересечении параллельных прямых секущей в 8 раз меньше второго. Найдите меньший из этих углов.

11. Треугольники

11.1. Признаки равенства треугольников

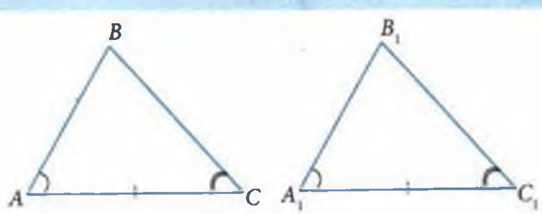
Треугольники называются **равными**, если в них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники **равны**.



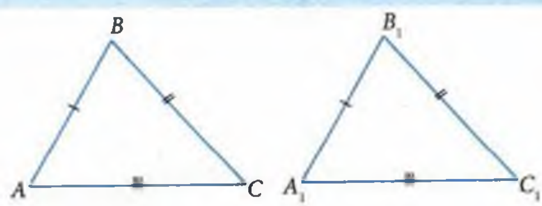
$$\left.\begin{array}{l} AB = A_1B_1 \\ AC = A_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$ (по двум сторонам и углу между ними).

Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники **равны**.



$$\left.\begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \\ \angle C = \angle C_1 \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$ (по стороне и прилежащим к ней углам).

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники **равны**.

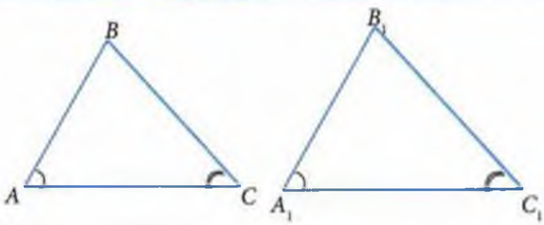


$$\left.\begin{array}{l} AB = A_1B_1 \\ BC = B_1C_1 \\ AC = A_1C_1 \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$ (по трем сторонам).

11.2. Признаки подобия треугольников

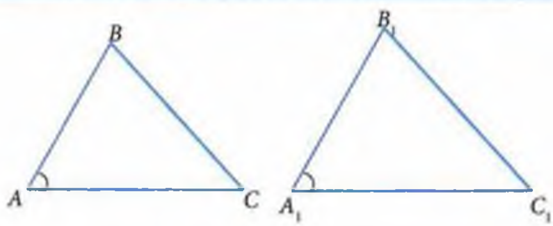
Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны, а стороны одного треугольника пропорциональны соответствующим сторонам другого треугольника.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольником **подобны**.



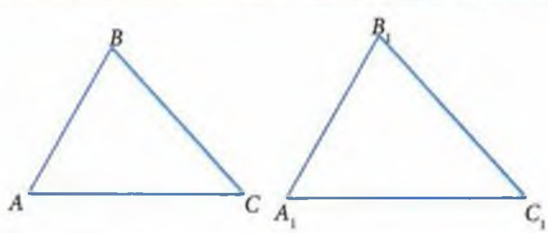
$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle A_1 \\ \angle C = \angle C_1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \text{ (по двум углам).}$$

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники **подобны**.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \\ \angle A = \angle A_1\end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \text{ (по двум сторонам и углу между ними).}$$

Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники **подобны**.



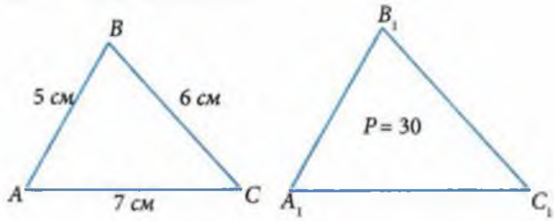
Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам).

k — коэффициент подобия.

Если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то: $\dfrac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$,

$\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$, где k — коэффициент подобия.

Например: Найдите: A_1B_1; B_1C_1; A_1C_1.



Решение

$P_{\Delta ABC} = 5 + 6 + 7 = 18$ (см);

$$\frac{5}{A_1B_1} = \frac{6}{B_1C_1} = \frac{7}{A_1C_1} = \frac{18}{30};$$

$$A_1B_1 = \frac{5 \cdot 30}{18} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}\,(\text{см});$$

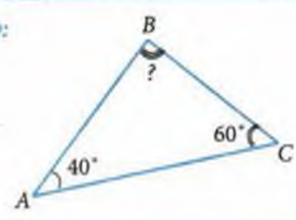
$$B_1C_1 = \frac{6 \cdot 30}{18} = 10\,(\text{см});$$

$$A_1C_1 = \frac{7 \cdot 30}{18} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}\,(\text{см}).$$

11.3. Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника. Определяющие линии треугольника

! **Сумма внутренних углов** любого треугольника равна **180°**.

Например:



$\angle B = 180° - (40° + 60°) = 180° - 100° = 80°.$

! **Внешним углом** треугольника при данной вершине называется угол, сопредельный с внутренним углом треугольника при этой вершине.

Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна **360°**.

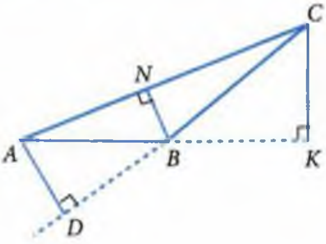
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не сопредельных с ним.

Например:

$\angle BCD$ — внешний угол ΔABC при вершине C;

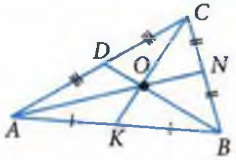
$\angle BCD = \angle A + \angle B$; $\angle BCD = 45° + 65° = 110°$; $\angle BCD + \angle NAB + \angle ABK = 360°$ (как сумма внешних углов любого треугольника).

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.



BN, CK, AD — высоты ΔABC.

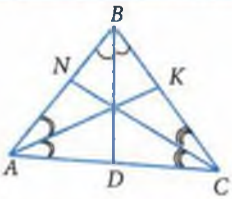
Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, который соединяет вершину с серединой противолежащей стороны треугольника.



CK, BD, AN — медианы ΔABC; $\dfrac{AO}{ON} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{CO}{OK} = \dfrac{2}{1}$.

Биссектрисой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, который соединяет эту вершину с точкой на противолежащей стороне.

Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

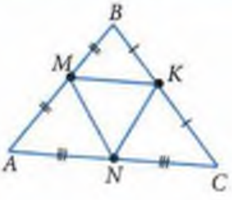


AK, CN, BD — биссектрисы ΔABC;

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$; $\dfrac{BC}{CA} = \dfrac{BN}{AN}$; $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BK}{KC}$.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.



MK — средняя линия ΔABC; $MK \parallel AC$; $AC = 2MK$.
NK — средняя линия ΔABC; $NK \parallel AB$; $2NK = AB$.
MN — средняя линия ΔABC; $MN \parallel BC$; $BC = 2MN$.

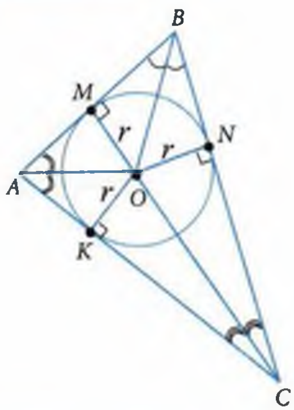
11.4. Вписанные и описанные треугольники

Окружность называется **вписанной** в треугольник, если она касается всех его сторон.

Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Радиус окружности, вписанной в треугольник, вычисляется по формуле

$r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — площадь треугольника.



$ON = OK = OM = r$ — радиус вписанной окружности;

$ON \perp BC$; $OM \perp AB$; $OK \perp AC$;

$\angle BAO = \angle CAO$; $\angle ABO = \angle CBO$; $\angle ACO = \angle BCO$.

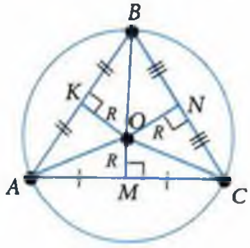
Окружность называется **описанной** вокруг треугольника, если она проходит через все его вершины.

Центр окружности, описанной вокруг треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к его сторонам, проведенных через середины этих сторон.

Радиус окружности, описанной вокруг треугольника, вычисляется по формуле

$R = \dfrac{abc}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — площадь треугольника.

Вокруг любого треугольника можно описать окружность, причем только одну.



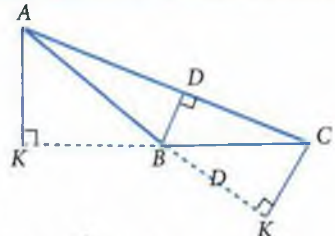
$OA = OB = OC = R$ — радиус описанной окружности;

$OK \perp AB$; $AK = BK$; $ON \perp BC$; $BN = NC$; $OM \perp AC$;

$AM = MC$.

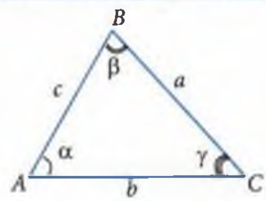
11.5. Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AK = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}AB \cdot CK.$$

Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$

Формула Герона: $S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$,

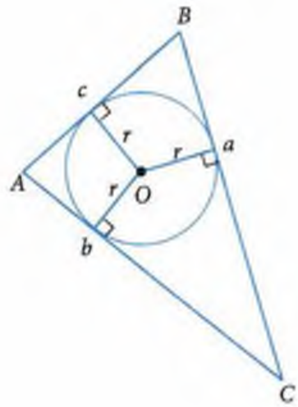
где a, b, c — стороны треугольника, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$$p = \frac{19+23+22}{2} = 32 \text{ (см)}.$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{32 \cdot (32-19)(32-23)(32-22)} = \sqrt{32 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 10} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5} =$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{65} = 24\sqrt{65} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности.



$S_{\Delta ABC} = p \cdot r$, де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S_{\Delta} = \dfrac{abc}{4S}$,

где a, b, c — стороны треугольника, R — радиус описанной вокруг треугольника окружности.

Например: Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами 5 см, 5 см, 6 см.

Решение

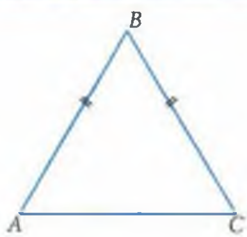
$$p = \frac{5+5+6}{2} = 8 \text{ (см)};$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{8\cdot(8-5)(8-5)(8-6)} = \sqrt{8\cdot3\cdot3\cdot2} = 4\cdot3 = 12 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{5\cdot5\cdot6}{4\cdot12} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8} \text{ (см)}.$$

11.6. Равнобедренный треугольник. Равносторонний треугольник

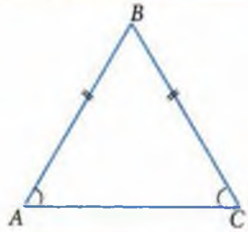
Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны.



AB, BC — боковые стороны; AC — основание.

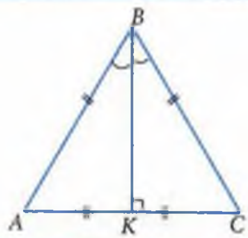
Свойства равнобедренного треугольника

1. У равнобедренного треугольника углы при основании равны.



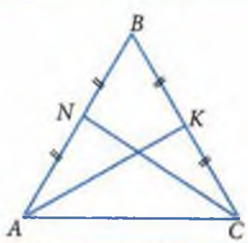
$$\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - \angle B}{2}.$$

2. Медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.



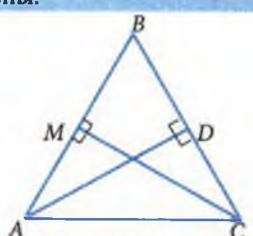
BK — высота, биссектриса и медиана.

3. Медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.



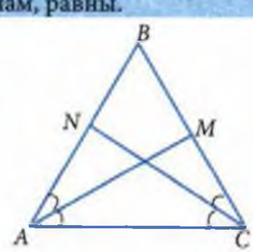
$AK = CN.$

4. Высоты равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



$$\left.\begin{array}{l} AB = BC \\ AD \perp BC \\ CM \perp AB \end{array}\right| \Rightarrow AD = CM.$$

5. Биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



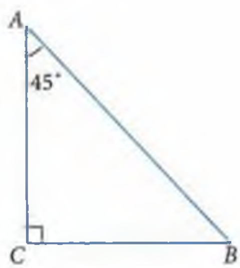
$$\left.\begin{array}{l} AB = BC \\ \angle BAM = \angle CAM \\ \angle BCN = \angle ACN \end{array}\right| \Rightarrow CN = AM.$$

Признаки равнобедренного треугольника

Если в треугольнике	**два угла равны,**	то он равнобедренный
	высота и медиана совпадают,	
	высота и биссектриса совпадают,	
	медиана и высота совпадают,	
	две медианы равны,	
	две высоты равны,	
	две биссектрисы равны,	

Например: Докажите, что прямоугольный треугольник с острым углом 45° — равнобедренный.

Доказательство



$\angle B = 180° - 90° - 45° = 45°.$

Поскольку в треугольнике $\angle A = \angle B = 45°$, то по признаку равнобедренного треугольника ΔACB — равнобедренный.

Равносторонний (правильный) треугольник — это треугольник, все стороны которого равны.

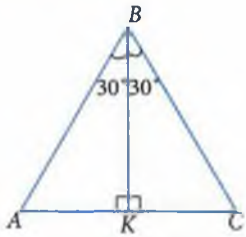
1. Все углы равностороннего треугольника равны по 60°.
2. Центр равностороннего треугольника является центром окружности, вписанной в треугольник, и центром окружности, описанной вокруг треугольника.
3. Медиана, высота и биссектриса правильного треугольника, проведенные из одной вершины, совпадают.

Например:

$AB = BC = AC$; $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$;
$OA = OB = OC = R$; $ON = OK = OM = r$;
$\angle OAN = \angle MAO = \angle MBO = \angle KBO = \angle KCO = \angle OCN = 30°$;
$BN \perp AC$; $CM \perp AB$; $AK \perp BC$;
$AM = MB = BK = KC = NC = AN$.

Признаки равностороннего треугольника

Если в треугольнике	**два угла равны по 60°,**	то он равносторонний
	медианы равны,	
	биссектрисы равны,	
	высоты равны,	



Например: $\angle ABK = \angle KBC = 30°$; $BK \perp AC$.
Докажите, что ΔABC — равносторонний.

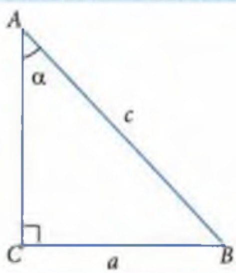
Доказательство

Поскольку BK — биссектриса и высота ΔABC, то ΔABC — равнобедренный ($AB = BC$). $\angle A = \angle C = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$.

Поскольку в ΔABC все углы по 60°, то ΔABC — равносторонний.

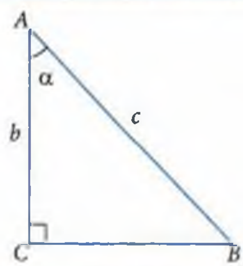
11.7. Прямоугольный треугольник

Катет, прилежащий к острому углу прямоугольного треугольника, равен произведению гипотенузы на косинус этого угла или произведению противолежащего катета на котангенс этого угла.



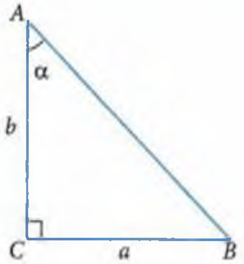
$AC = c \cdot \cos\alpha$; $AC = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

Катет, противолежащий острому углу прямоугольного треугольника, равен произведению гипотенузы на синус этого угла или произведению прилежащего катета на тангенс этого угла.



$BC = c \cdot \sin\alpha$; $BC = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

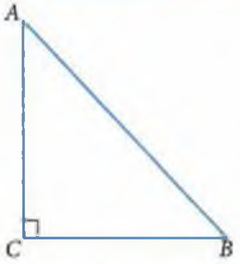
Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному катета, прилежащего к острому углу, на косинус этого угла или частному катета, противолежащего острому углу, на синус этого угла.



$$AB = \frac{b}{\cos\alpha};\quad AB = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

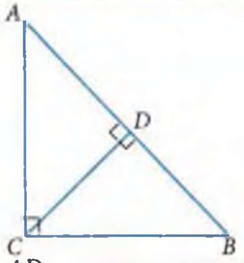
Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



$$AB^2 = AC^2 + BC^2;\ AC^2 = AB^2 - BC^2;\ BC^2 = AB^2 - AC^2.$$

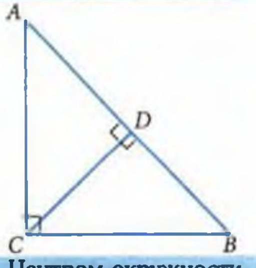
Катет прямоугольного треугольника является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.



AD — проекция катета AC на гипотенузу AB; BD — проекция катета BC на гипотенузу AB.

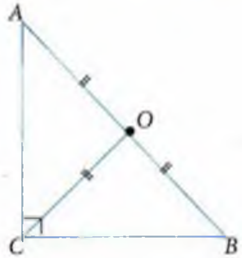
$$AC = \sqrt{AD \cdot AB};\quad BC = \sqrt{BD \cdot AB}.$$

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу.



$$CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

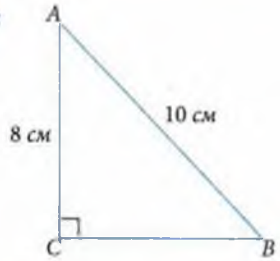
Центром окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.



$$AO = BO = CO = R = \frac{AB}{2}.$$

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где r — радиус вписанной окружности; a, b — катеты; c — гипотенуза.

Например:



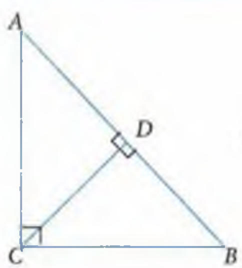
r — ?

$$BC^2 = AB^2 - AC^2;$$

$$BC = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6\ (\text{см});$$

$$r = \frac{8+6-10}{2} = \frac{4}{2} = 2\ (\text{см}).$$

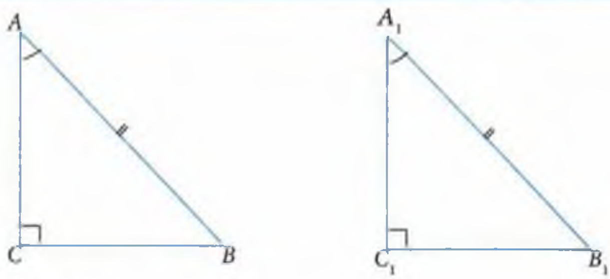
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов или половине произведения гипотенузы на высоту, проведенную к ней.



$$S = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot CD}{2}.$$

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1) по гипотенузе и катету,
2) по гипотенузе и острому углу,
3) по катету и прилежащему острому углу,
4) по катету и противолежащему острому углу.

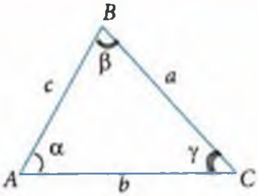


$$\left.\begin{array}{l} AB = A_1B_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACB = \Delta A_1C_1B_1$$ (по гипотенузе и острому углу).

11.8. Теорема косинусов и теорема синусов

Теорема косинусов

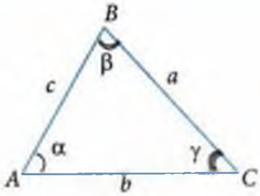
Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

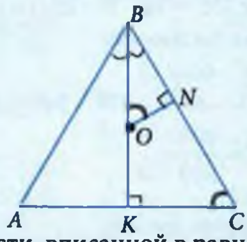
Следствие из теоремы синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$

где R — радиус описанной вокруг ΔABC окружности.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), равен 12 см, а расстояние от центра этой окружности до вершины B составляет 20 см. Найдите периметр и площадь данного треугольника.

Решение



Пусть O — центр окружности, вписанной в равнобедренный ΔABC ($AB = BC$); $BK \perp AC$. По свойству равнобедренного треугольника BK — медиана и биссектриса, поэтому $O \in BK$. Построим $ON \perp BC$, тогда $OK = ON = 12$ см (как радиусы вписанной окружности).

Рассмотрим ΔBKC и ΔBNO. В них: $\left.\begin{matrix}\angle BNO = \angle BKC = 90^\circ \\ \angle B \text{ общий}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta BKC \sim \Delta BNO$

(по двум углам). $\dfrac{BO}{BC} = \dfrac{BN}{BK}$.

В прямоугольном ΔBNO по следствию из теоремы Пифагора имеем: $BN^2 =$

$= BO^2 - ON^2$; $BN = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{(20-12)(20+12)} = \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 8} = 8 \cdot 2 = 16$ (см).

Следовательно, $\dfrac{20}{BC} = \dfrac{16}{20+12}$; $BC = \dfrac{20 \cdot 32}{16} = 40$ (см).

В прямоугольном ΔBKC по следствию из теоремы Пифагора имеем: $KC^2 = BC^2 - BK^2$;

$KC = \sqrt{40^2 - 32^2} = \sqrt{(40-32) \cdot (40+32)} = \sqrt{8 \cdot 72} = \sqrt{8 \cdot 8 \cdot 9} = 3 \cdot 8 = 24$ (см);

$AC = 2KC = 2 \cdot 24 = 48$ (см).

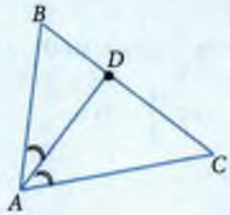
$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 40 + 40 + 48 = 128$ (см);

$S_{\Delta ABC} = p \cdot r = \dfrac{128}{2} \cdot 12 = 768\ (\text{см}^2)$.

Ответ: 128 см; 768 см^2.

Пример 2. В треугольнике ABC $BC = 18$ см, $AC = 15$ см, $AB = 12$ см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную к стороне BC.

Решение



Пусть AD — биссектриса ΔABC, проведенная к стороне BC; $BD = x$; $CD = 18 - x$.
По свойству биссектрисы треугольника имеем:

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$; $\frac{12}{15} = \frac{x}{18-x}$; $12(18 - x) = 15x$; $216 - 12x = 15x$; $15x + 12x = 216$; $27x = 216$; $x = 8$.

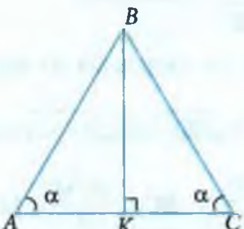
Следовательно, $BD = 8$ см; $DC = 18 - 8 = 10$ (см).
В ΔABC по теореме косинусов имеем:
$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle C$;
$144 = 324 + 225 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cdot \cos\angle C$; $549 - 540 \cdot \cos\angle C = 144$;

$540 \cdot \cos\angle C = 405$; $\cos\angle C = \frac{405}{540} = \frac{3}{4}$.

В ΔADC по теореме косинусов имеем:
$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos\angle C$; $AD^2 = 225 + 100 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \frac{3}{4}$;
$AD^2 = 325 - 225$; $AD^2 = 100$; $AD = 10$.
Ответ: 10 см.

Пример 3. Найдите все стороны и площадь равнобедренного треугольника, периметр которого равен $2p$, а углы при основании равны α.

Решение



Пусть $AB = BC = x$, тогда $AK = x \cdot \cos\alpha$; $AC = 2x \cdot \cos\alpha$.
Составляем уравнение: $x + x + 2x\cos\alpha = 2p$; $2x + 2x\cos\alpha = 2p$; $2x \cdot (1 + \cos\alpha) = 2p$;

$x \cdot (1 + \cos\alpha) = p$; $x = \frac{p}{1+\cos\alpha}$.

Следовательно, $AB = BC = \frac{p}{1+\cos\alpha}$; $AC = \frac{2p}{1+\cos\alpha}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{(1+\cos\alpha)^2} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{p^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{2p^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

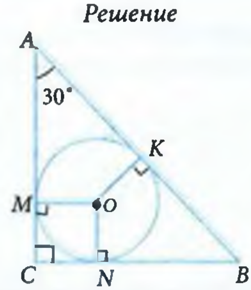
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha} =$$

$$= \frac{p^2 \cdot \text{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg}\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = p^2 \cdot \text{tg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\frac{p}{1+\cos\alpha}$; $\frac{p}{1+\cos\alpha}$; $\frac{2p\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; $p^2 \cdot \text{tg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg}\alpha$.

Пример 4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в него, равен 1 см, а один из острых углов — 30°.

Решение



Пусть OK, ON, OM — радиусы вписанной окружности, проведенные в точки касания. По условию задачи $OK = ON = OM = 1$ см. $CMON$ — квадрат со стороной 1 см.

Пусть $AB = 2x$, тогда $BC = x$ (как катет, лежащий напротив угла 30°).

Используя свойство отрезков касательных, проведеных к окружности из одной точки, имеем: $BN = BK = x - 1$; $AK = AM = 2x - (x - 1) = x + 1$.

В прямоугольном ΔACB по теореме Пифагора имеем:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$; $x^2 + (x + 2)^2 = 4x^2$; $x^2 + x^2 + 4x + 4 - 4x^2 = 0$; $2x^2 - 4x - 4 = 0$;

$x^2 - 2x - 2 = 0$; $D = 4 + 8 = 12$; $x_1 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{2} = 1+\sqrt{3}$;

$x_2 = 1 - \sqrt{3}$ (условию задачи не удовлетворяет).

$AC = x + 2 = \sqrt{3} + 3$; $BC = 1 + \sqrt{3}$.

$$S_{\Delta ACB} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+3)}{2} = \frac{\sqrt{3}+3+3+3\sqrt{3}}{2} = \frac{6+4\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{2(3+2\sqrt{3})}{2} = 3+2\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Ответ: $3+2\sqrt{3}$ см^2.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как 2 : 7.
2. Найдите величину каждого из углов, которые образуются при пересечении двух прямых, если сумма трех из них равна 232°.
3. Найдите углы между биссектрисами смежных углов.

Тестовые задания

1. Основание равнобедренного треугольника равно 70 см, а проведенная к нему высота — 12 см. Найдите периметр треугольника.

А	Б	В	Г	Д
96 см	100 см	121 см	144 см	169 см

2. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, равна 12 см, а один из катетов равен 24 см. Найдите длину гипотенузы треугольника.

А	Б	В	Г	Д
12 см	24 см	$4\sqrt{3}$ см	$8\sqrt{3}$ см	$16\sqrt{3}$ см

3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A = 90°$) $BC = 4$ см, $\angle B = \beta$. Найдите AC.

А	Б	В	Г	Д
$4 \sin \beta$	$4 \cos \beta$	$4 \operatorname{tg} \beta$	$\dfrac{4}{\operatorname{tg}\beta}$	$\dfrac{4}{\sin\beta}$

4. Стороны треугольника, одна из которых на 8 см больше другой, образуют угол 120°, а длина третьей стороны равна 28 см. Найдите периметр треугольника.

А	Б	В	Г	Д
84 см	72 см	64 см	60 см	56 см

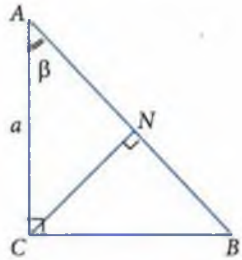
5. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус окружности, описанной вокруг него, равен 5 см, а один из катетов — 6 см.

А	Б	В	Г	Д
15 см^2	24 см^2	30 см^2	48 см^2	60 см^2

6. В треугольнике ABC известно: $BC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 120°$, $\angle C = 30°$. Найдите AC.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$ см	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ см	$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ см	$4\sqrt{2}$ см	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ см

7. Установите соответствие между элементами (1–4) прямоугольного треугольника ACB и тригонометрическими выражениями для их вычисления (А–Д).

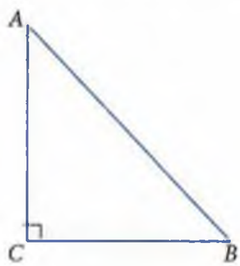


1 BC
2 AB
3 CN
4 BN

А $\dfrac{a}{\cos\beta}$
Б $a\cdot\sin\beta$
В $a\cdot\cos\beta$
Г $a\cdot\sin\beta\cdot\operatorname{tg}\beta$
Д $a\cdot\operatorname{tg}\beta$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. R — радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника ABC, r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC. Установите соответствие между выражениями (1–4) и их значением (А–Д).



1 $AC + BC - AB$
2 $2AB$
3 $\dfrac{2AB - AC - BC}{2}$
4 $\dfrac{AC\cdot BC}{AC + BC + AB}$

А $4R$
Б $R - r$
В R
Г r
Д $2r$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 9–11. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

9. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, его площадь — 24 см^2. Найдите радиус описанной вокруг данного треугольника окружности.

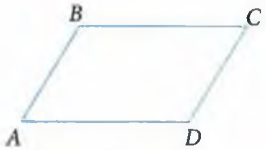
10. В треугольник вписана окружность радиусом 3 см. Вычислите периметр треугольника, если одна из его сторон точкой касания делится на отрезки длиной 4 см и 3 см.

11. В равнобедренном треугольнике основание равно 48 см, а боковая сторона — 30 см. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей. В ответ запишите их сумму.

12. Четырехугольники и многоугольники

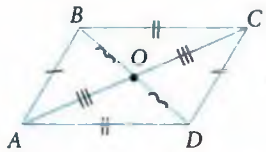
12.1. Параллелограмм

Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.



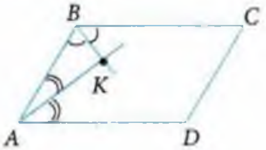
$AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$.

Если четырехугольник — параллелограмм, то в нем:
1) противолежащие стороны равны и противолежащие углы равны;
2) диагонали в точке пересечения делятся пополам;
3) сумма соседних углов равна 180°;
4) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов четырех сторон;
5) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.



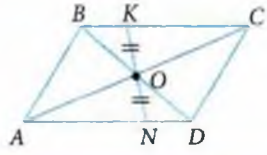
1) $AB = CD$; $BC = AD$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$;
2) $BO = OD$; $AO = OC$;
3) $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$;
4) $BD^2 + AC^2 = 2 \cdot (AB^2 + BC^2)$;
5) $\Delta ABD = \Delta CBD$; $\Delta ABC = \Delta CDA$.

Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны.



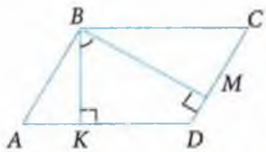
$AK \perp BK$.

Отрезок, соединяющий противолежащие стороны параллелограмма и проходящий через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой пополам.



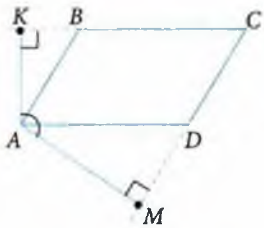
$OK = ON$.

Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины тупого угла, равен его острому углу.



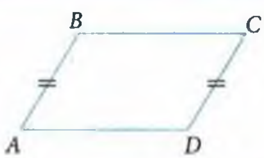
$\angle MBK = \angle A = \angle C.$

Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины острого угла, равен его тупому углу.



$\angle KAM = \angle B = \angle D.$

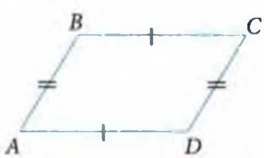
Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.



$\left.\begin{matrix} AB = CD \\ AB \parallel CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм

(по признаку параллелограмма).

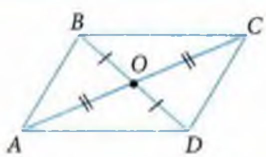
Если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.



$\left.\begin{matrix} AB = CD \\ BC = AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм

(по признаку параллелограмма).

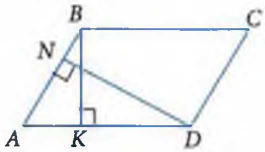
Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.



$\left.\begin{matrix} BO = OD \\ AO = OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм

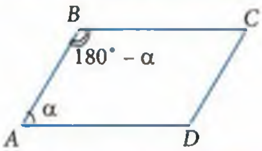
(по признаку параллелограмма).

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



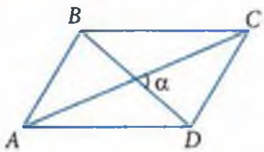
$S = AD \cdot BK = AB \cdot DN.$

Площадь параллелограмма равна произведению двух его соседних сторон на синус угла между ними.



$S = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha$
или $S = AB \cdot BC \cdot \sin(180° - \alpha) = AB \cdot BC \sin\alpha.$

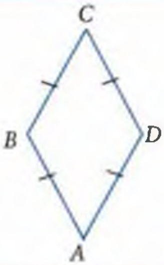
Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.



$S = \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin\alpha.$

12.2. Ромб

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

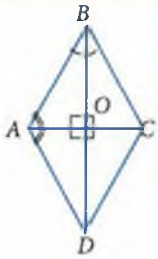


$BC \parallel AD$, $CD \parallel AB$, $AB = BC = CD = AD.$

Если четырехугольник — ромб, то:

1) он имеет все свойства параллелограмма;

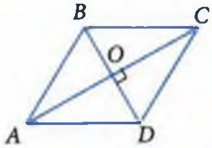
2) диагонали ромба пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.



1) $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle C$; $AO = OC$; $BO = OD$;

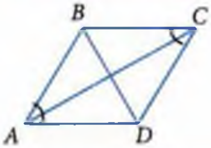
2) $AC \perp BD$; $\angle ABO = \angle CBO$; $\angle BAO = \angle DAO$; $\angle BCO = \angle DCO$; $\angle ADO = \angle CDO$.

Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.



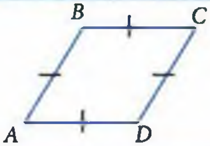
$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — параллелограмм} \\ AC \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD$ —
ромб (по признаку ромба).

Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.



$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — параллелограмм} \\ AC \text{ — биссектриса } \angle BAD \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD$ —
ромб (по признаку ромба).

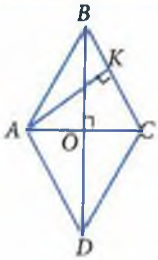
Если в четырехугольнике все стороны равны, то он является ромбом.



Если $AB = BC = CD = DA$, то $ABCD$ — ромб (по признаку ромба).

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Поскольку ромб — это параллелограмм, то формулы для вычисления площади параллелограмма справедливы и для ромба.

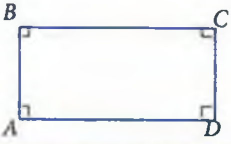


$$S = BC \cdot AK = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Пусть $AB = BC = CD = AD = a$, тогда $S = a^2 \cdot \sin\angle B$.

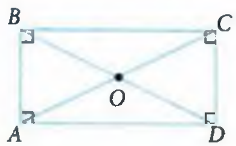
12.3. Прямоугольник. Квадрат

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые.



$AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$; $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.

Если четырехугольник — прямоугольник, то:
1) он имеет все свойства параллелограмма;
2) диагонали прямоугольника равны.

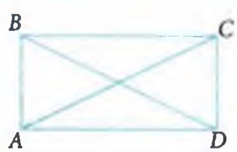


1) $AB = CD$; $BC = AD$; $AO = OC = BO = OD$;
2) $AC = BD$.

Если у параллелограмма хотя бы один угол прямой, то он — прямоугольник.

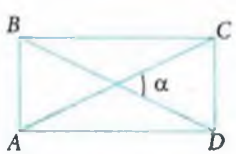
$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — параллелограмм} \\ \angle A = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$ $ABCD$ — прямоугольник (по признаку прямоугольника).

Если у параллелограмма диагонали равны, то он — прямоугольник.



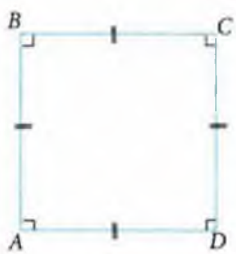
$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — параллелограмм} \\ AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow$ $ABCD$ — прямоугольник (по признаку прямоугольника).

Площадь прямоугольника равна произведению ширины и длины или половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.



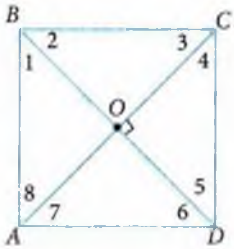
$$S = AB \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha.$$

Квадрат — это прямоугольник у которого все стороны равны.



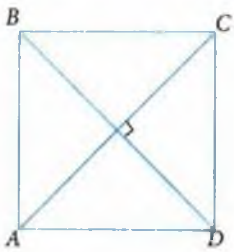
$AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$; $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$;
$AB = BC = CD = AD$.

Если четырехугольник — квадрат, то в нем:
1) диагонали равны;
2) диагонали пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.



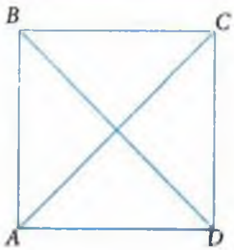
$ABCD$ — квадрат
1) $AC = BD$;
2) $AC \perp BD$; $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6 = \angle 7 = \angle 8 = 45°$.

Если диагонали прямоугольника пересекаются под прямым углом, то он является квадратом.



$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — прямоугольник} \\ AC \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \text{ —}$$
квадрат (по признаку квадрата).

Площадь квадрата равна квадрату его стороны или половине квадрата его диагонали.



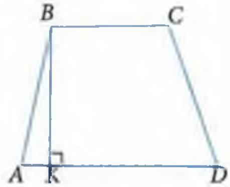
Пусть $AB = BC = CD = AD = a$; $AC = BD = d$, тогда $S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$.

12.4. Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.

Параллельные стороны называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются **боковыми** сторонами.

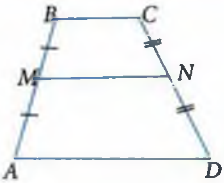
Высота трапеции — перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания на другое или его продолжение.



$BC \parallel AD$; BC и AD — основания трапеции; AB и CD — боковые стороны; BK — высота трапеции.

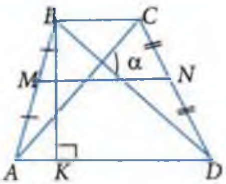
Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией** трапеции.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



MN средняя линия; $MN \parallel BC \parallel AD$; $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту трапеции или половине произведения ее диагоналей на синус угла между ними.



$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK = MN \cdot BK = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha.$$

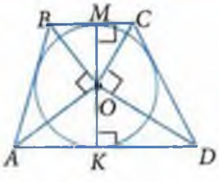
Если трапеция описана вокруг окружности, то:

1) суммы ее противолежащих сторон равны;

2) боковые стороны трапеции видны из центра вписанной окружности под углом 90°;

3) площадь описанной вокруг окружности трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на диаметр вписанной окружности или произведению полусуммы ее боковых сторон на диаметр вписанной окружности.

Например:



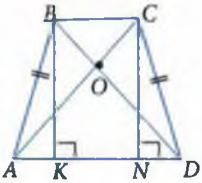
1) $AB + CD = BC + AD$;

2) $\angle COD = \angle BOA = 90°$;

3) $S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot MK = \dfrac{AB + CD}{2} \cdot MK$.

! Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется **равнобокой**, или **равнобедренной**.

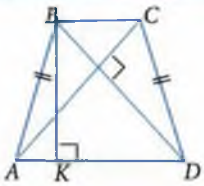
В равнобокой трапеции углы при основании и диагонали равны.



Если $AB = CD$, то:

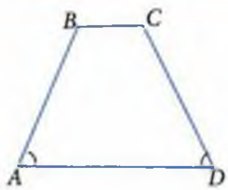
1) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$; 2) $AC = BD$; 3) $AO = OD$, $BO = OC$; 4) $AK = ND = \dfrac{AD - BC}{2}$.

Если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то ее площадь равна квадрату высоты трапеции.



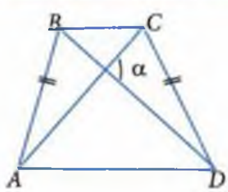
$BK = \dfrac{AD + BC}{2}$; $\quad S = BK^2$.

Если в трапеции углы при основании равны, то она равнобокая.



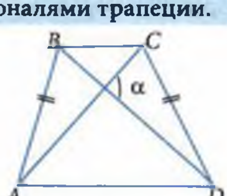
$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — трапеция} \\ \angle A = \angle D \end{array}\right\} \Rightarrow AB = CD.$$

Если в трапеции диагонали равны, то она равнобокая.



$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — трапеция} \\ AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow AB = CD.$$

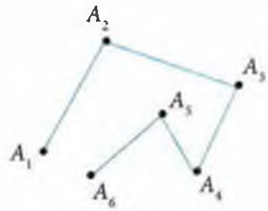
Площадь равнобокой трапеции равна половине произведения квадрата диагонали на синус угла между диагоналями трапеции.



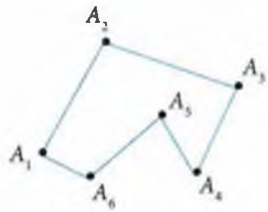
Пусть $AC = BD = d$, тогда $S = \dfrac{1}{2} d^2 \cdot \sin\alpha$.

12.5. Многоугольники

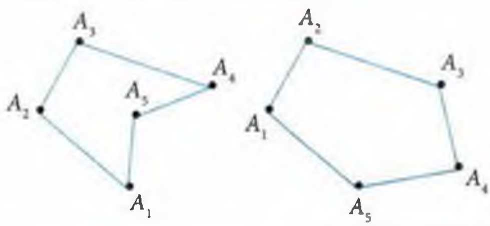
Простая ломаная — это такая ломаная, которая не имеет точек самопересечения.



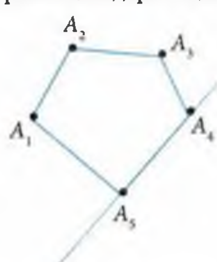
Замкнутая ломаная — это такая ломаная, концы которой соединяются.



Многоугольник — простая замкнутая ломаная, соседние звенья которой не лежат на одной прямой. Звенья ломаной называют **сторонами** многоугольника; вершины ломаной называют **вершинами** многоугольника.



Выпуклый многоугольник — многоугольник, который лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.



Внешний угол выпуклого многоугольника при данной вершине — угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине.

α — внешний угол пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ при вершине A_5.

Правильный многоугольник — выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

Центр правильного многоугольника — центр вписанной окружности и центр описанной окружности.

Любой правильный многоугольник можно вписать в окружность и описать вокруг нее, причем центры этих окружностей совпадают.

$r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$ — радиус окружности, вписанной в правильный n-угольник со стороной a.

$R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ — радиус окружности, описанной вокруг правильного n-угольника со стороной a.

Если $n = 2$, то $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}60^\circ} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \dfrac{a}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Если $n = 4$, то $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}45^\circ} = \dfrac{a}{2}$; $R = \dfrac{a}{2\sin 45^\circ} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Соотношение между сторонами правильного многоугольника и радиусами вписанной и описанной окружностей

	r и a	R и a	a и r	a и R
Треугольник	$r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$	$R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$	$a = 2\sqrt{3}r$	$a = \sqrt{3}R$
Квадрат	$r = \dfrac{a}{2}$	$R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$	$a = 2r$	$a = \sqrt{2}R$
Шестиугольник	$r = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$	$R = a$	$a = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$	$a = R$

Площади правильных многоугольников

	по a	по r	по R
Треугольник	$S = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$S = 3\sqrt{3}r^2$	$S = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$
Четырехугольник	$S = a^2$	$S = 4r^2$	$S = 2R^2$
Шестиугольник	$S = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$	$S = 2\sqrt{3}r^2$	$S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2$

12 5123

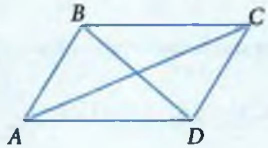
Свойства выпуклых многоугольников

Количество диагоналей выпуклого n-угольника, которые можно провести из его вершины	$n - 3$
Количество всех диагоналей выпуклого n-угольника	$\frac{n(n-3)}{2}$
Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника	$180° \cdot (n - 2)$
Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине	$360°$
Периметр правильного n-угольника со стороной a	$P = a \cdot n$
Величина внутреннего угла правильного n-угольника	$\frac{180° \cdot (n-2)}{n}$
Величина внешнего угла правильного n-угольника	$\frac{360°}{n}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см, а стороны относятся как 2 : 3. Найдите стороны параллелограмма.

Решение



$AB : BC = 2 : 3$. Пусть x см в одной части, тогда $AB = 2x$, $BC = 3x$.

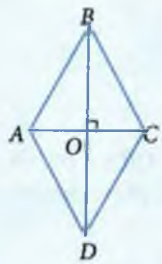
$BD^2 + AC^2 = 2 \cdot (AB^2 + BC)^2$; $17^2 + 19^2 = 2 \cdot (4x^2 + 9x^2)$; $26x^2 = 650$; $x^2 = \frac{650}{26} = 25$; $x_1 = 5$; $x_2 = -5$ (условию задачи не удовлетворяет).

$AB = 2 \cdot 5 = 10$ (см); $BC = 3 \cdot 5 = 15$ (см).

Ответ: 10 см; 15 см.

Пример 2. Диагонали ромба равны 14 см и 48 см. Найдите его высоту.

Решение



Пусть $AC = 14$ см, $BD = 18$ см, тогда $AO = 7$ см, $BO = 24$ см.

В прямоугольном ΔAOB по теореме Пифагора имеем: $AB^2 = AO^2 + BO^2$; $AB^2 = 49 + 576$; $AB^2 = 625$; $AB = 25$.

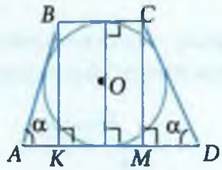
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AB \cdot h$, где h — высота ромба.

$25 \cdot h = \frac{14 \cdot 48}{2}$; $25 \cdot h = 336$; $h = \frac{336}{25} = 13{,}44$.

Ответ: 13,44 см.

Пример 3. Вокруг круга с радиусом R описана равнобокая трапеция с острым углом α при основании. Найдите периметр трапеции.

Решение



Пусть $ABCD$ — данная равнобокая трапеция ($AB = CD$), описанная вокруг круга с радиусом R, тогда $BK = CM = 2R$; $AB = CD = \dfrac{BK}{\sin\alpha} = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$.

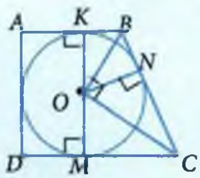
Поскольку в трапецию вписан круг, то $AB + CD = BC + AD$;

$$P = (AB + CD) + (BC + AD) = 2(AB + CD) = 2 \cdot 2AB = 4AB = 4 \cdot \frac{2R}{\sin\alpha} = \frac{8R}{\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{8R}{\sin\alpha}$.

Пример 4. Найдите стороны и площадь прямоугольной трапеции, если центр вписанной окружности отдален от концов ее большей боковой стороны на 3 и 9 см.

Решение



Пусть $OB = 3$ см, $OC = 9$ см.

Поскольку центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис BO и CO, то

$$\angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC; \quad \angle OCB = \frac{1}{2}\angle BCD;$$

$\angle OBC + \angle OCB = \dfrac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCD) = \dfrac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Отсюда $\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB) = 180° - 90° = 90°$, то есть ΔBOC — прямоугольный.

$OK = OM = ON = r$ (как радиусы вписанной окружности).

В прямоугольном ΔBOC по теореме Пифагора имеем:

$BC^2 = BO^2 + CO^2$; $BC^2 = 3^2 + 9^2$; $BC^2 = 9 + 81$; $BC^2 = 90$; $BC = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$;

$\dfrac{BC \cdot ON}{2} = \dfrac{BO \cdot OC}{2}$; $BC \cdot ON = BO \cdot OC$; $3\sqrt{10} \cdot ON = 3 \cdot 9$; $ON = \dfrac{3 \cdot 9}{\sqrt{10}} = \dfrac{9}{3\sqrt{10}}$ (см);

$AD = 2 \cdot ON = \dfrac{18}{\sqrt{10}}$ (см); $AB = AK + BK = r + BK$; $DC = DM + MC = r + MC$.

В прямоугольном ΔOKB по следствию из теоремы Пифагора имеем:

$BK^2 = OB^2 - r^2$; $BK = \sqrt{3^2 - \left(\dfrac{9}{\sqrt{10}}\right)^2} = \sqrt{9 - \dfrac{81}{10}} = \sqrt{\dfrac{9}{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ (см).

В прямоугольном ΔOMC по следствию из теоремы Пифагора имеем:

$$MC^2 = OC^2 - r^2;\ MC = \sqrt{9^2 - \left(\frac{9}{\sqrt{10}}\right)^2} = \sqrt{81 - \frac{81}{10}} = \sqrt{\frac{729}{10}} = \frac{27}{\sqrt{10}}.$$

Следовательно, $AB = \frac{9}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$ (см); $DC = \frac{9}{\sqrt{10}} + \frac{27}{\sqrt{10}} = \frac{36}{\sqrt{10}}$ (см).

$$S = \frac{AB + DC}{2} \cdot 2r = (AB + DC) \cdot r = \frac{9}{\sqrt{10}} \cdot \left(\frac{12}{\sqrt{10}} + \frac{36}{\sqrt{10}}\right) = \frac{9}{\sqrt{10}} \cdot \frac{48}{\sqrt{10}} =$$

$$= \frac{432}{\sqrt{10}} = 43{,}2\ (\text{см}^2);$$

Ответ: $\frac{12}{\sqrt{10}}$ см; $\frac{36}{\sqrt{10}}$ см; $3\sqrt{10}$ см; $\frac{18}{\sqrt{10}}$ см; 43,2 см^2.

Пример 5. Сумма внешних углов правильного многоугольника с одним из внутренних углов составляет 532°. Найдите количество сторон многоугольника.

Решение

Пусть n — количество сторон данного правильного многоугольника, α — величина его внутреннего угла, тогда $360° + \alpha = 532°$; $\alpha = 532° - 360°$; $\alpha = 172°$; $172° \cdot n =$

$= 180° \cdot (n - 2)$; $180n - 360 = 172n$; $180n - 172n = 360$; $8n = 360$; $n = \frac{360}{8} = 45$.

Ответ: 45.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиусом r. Меньшее из оснований трапеции равно $\frac{3}{2}r$. Найдите площадь трапеции.

2. Острый угол параллелограмма равен a, а его диагонали равны c и d ($c > d$). Найдите площадь параллелограмма.

3. Периметр ромба равен 2 м, длины его диагоналей относятся как 3 : 4. Найдите площадь ромба.

Тестовые задания

1. Найдите больший угол параллелограмма, если его диагональ перпендикулярна одной из его сторон, равной половине другой стороны.

А	Б	В	Г	Д
90°	100°	110°	120°	145°

2. Из вершины угла ромба, который равен 120°, проведена диагональ длиной 10 см. Найдите периметр ромба.

А	Б	В	Г	Д
20 см	30 см	40 см	50 см	60 см

3. Найдите меньшее основание равнобокой трапеции, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 24 см и 6 см.

А	Б	В	Г	Д
8 см	9 см	10 см	16 см	18 см

4. В равнобокую трапецию вписана окружность. Точка касания окружности делит боковую сторону трапеции на отрезки длиной 8 см в 18 см. Найдите периметр трапеции.

А	Б	В	Г	Д
72 см	96 см	100 см	104 см	108 см

5. Найдите площадь ромба, если его высота и меньшая диагональ равны соответственно 12 см и 13 см.

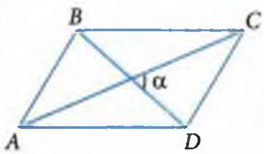
А	Б	В	Г	Д
100 см^2	120 см^2	180 см^2	200,5 см^2	202,8 см^2

6. Три угла выпуклого многоугольника равны 80° каждый, все остальные — по 150°. Сколько вершин у этого многоугольника?

А	Б	В	Г	Д
4	5	6	7	8

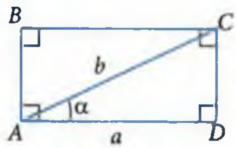
7. Установите соответствие между четырехугольниками (1–4) и формулами для вычисления их площади (А–Д).

1



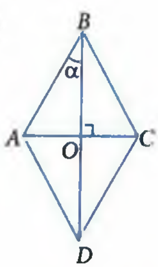
$BD = a, AC = b$

2



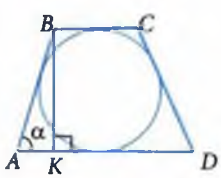
$AC = b, AD = a$

3



$AB = a, BO = b$

4



$AB = CD = a,$
$AK = b$

А $ab \sin \alpha$

Б $\frac{1}{2} ab \sin \alpha$

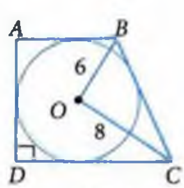
В $2ab \sin \alpha$

Г $ab \cos \alpha$

Д $ab \operatorname{tg} \alpha$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установите соответствие между элементами (1–4) и числовыми значениями (А–Д) трапеции $ABCD$ (А–Д).

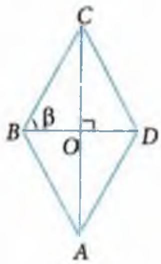


1 DC
2 AB
3 r — радиус вписанной окружности
4 P — периметр

А 9,6 см
Б 14 см
В 10 см
Г 39,2 см
Д 4,8 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. На рисунке изображен ромб $ABCD$, $CO = a$. Установите соответствие между заданными величинами (1–4) и тригонометрическими выражениями для их вычисления (А–Д).



1 BO
2 S_{ABCD}
3 P_{ABCD}
4 r (радиус окружности, вписанной в ромб)

А $\dfrac{4a}{\cos\beta}$

Б $\dfrac{4a}{\sin\beta}$

В $a \cdot \operatorname{ctg}\beta$

Г $a \cdot \cos\beta$

Д $2a^2 \operatorname{ctg}\beta$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Диагонали параллелограмма равны 7 см и 11 см, а стороны относятся как 6 : 7. Вычислите периметр параллелограмма.

11. Сторона ромба равна 4 см, а площадь вписанного в него круга — π см^2. Найдите острый угол ромба.

12. В равнобокой трапеции основания равны 14 см и 50 см, а боковая сторона — 30 см. Найдите радиус окружности, описанной вокруг трапеции.

13. Взаимное размещение прямых и плоскостей в пространстве

13.1. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются **скрещивающимися**.

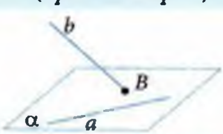
Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой (*признак параллельности прямых*).

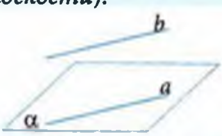
$\left.\begin{array}{l} b \parallel a \\ c \parallel a \end{array}\right\} \Rightarrow b \parallel c$ (по признаку параллельности прямых).

Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещивающиеся (*признак скрещиваемости прямых*).



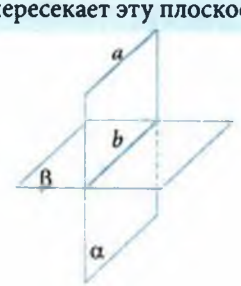
$a \subset \alpha$, $b \not\subset \alpha$, B — точка пересечения b и α, $B \notin a \Rightarrow a$ и b скрещивающиеся (по признаку скрещиваемости прямых).

Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости (*признак параллельности прямой и плоскости*).



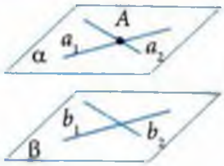
$a \subset \alpha$, $b \not\subset \alpha$, $b \parallel a \Rightarrow b \parallel \alpha$ (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения параллельна данной прямой.



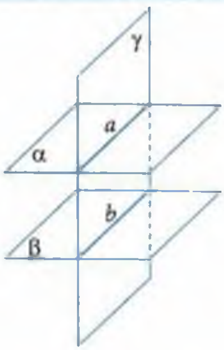
$a \subset \alpha$, $a \parallel \beta$, b — прямая пересечения α и $\beta \Rightarrow b \parallel a$.

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (*признак параллельности плоскостей*).



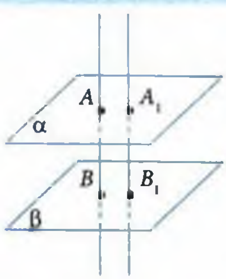
$a_1 \subset \alpha$, $a_2 \subset \alpha$, A — точка пересечения a_1 и a_2, $b_1 \subset \beta$, $b_2 \subset \beta$, $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2 \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ (по признаку параллельности плоскостей).

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.



$\alpha \parallel \beta$, a — прямая пересечения α и γ, b — прямая пересечения β и $\gamma \Rightarrow a \parallel b$.

Отрезки параллельных прямых, находящиеся между двумя параллельными плоскостями, равны.

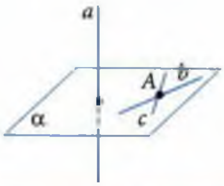


$\alpha \parallel \beta$, $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow AB = A_1B_1$.

13.2. Перпендикулярность прямых и плоскостей

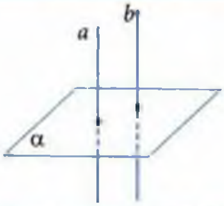
Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной этой плоскости**, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*).



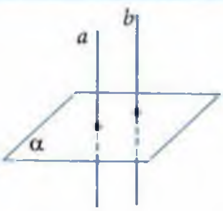
$b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, A — точка пересечения b и c, $a \perp b$, $a \perp c \Rightarrow a \perp \alpha$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.



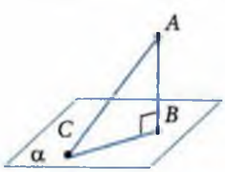
$a \perp \alpha$, $b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$.

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй прямой.



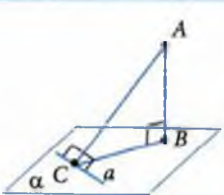
$a \parallel b$, $\alpha \perp a \Rightarrow \alpha \perp b$.

Теорема о трех перпендикулярах



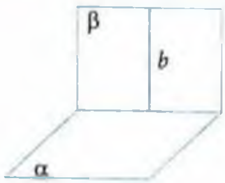
$AB \perp \alpha$; AC — наклонная; B — основание перпендикуляра;
C — основание наклонной;
BC — проекция наклонной AC на плоскость α.

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной. И наоборот: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.



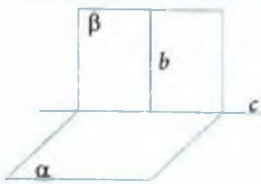
$AB \perp \alpha$, AC — наклонная, BC — проекция наклонной AC на плоскость α, $a \subset \alpha$, $C \in a$, $a \perp BC \Rightarrow a \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).
$a \subset \alpha$, $a \perp AC \Rightarrow a \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (*признак перпендикулярности плоскостей*).



$b \perp \alpha$, $b \subset \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$ (по признаку перпендикулярности плоскостей).

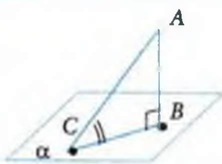
Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.



$\alpha \perp \beta$, c — линия пересечения α и β, $b \subset \beta$, $b \perp c \Rightarrow b \perp \alpha$.

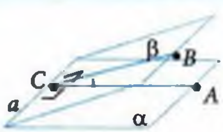
13.3. Углы в пространстве

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.



Поскольку BC — проекция наклонной AC на плоскость α, то $\angle ACB$ — угол между прямой AC и плоскостью α.

Пусть две плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется **углом между данными плоскостя.**



a — линия пересечения α и β, $AC \subset \alpha$, $AC \perp a$, $BC \subset \beta$, $BC \perp a \Rightarrow \angle ACB$ — угол между плоскостями α и β.

Ортогональной проекцией точки называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость.

Ортогональной проекцией фигуры на плоскость называется множество проекций всех точек данной фигуры на данную плоскость.

Площадь ортогональной проекции многоугольника равна площади проецируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между их плоскостями.

ΔABD – ортогональная проекция ΔABC на плоскость α.
$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\angle CKD$.

13.4. Расстояния в пространстве

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

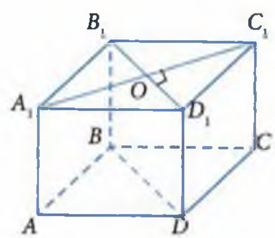
Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки одной плоскости до другой.

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называется расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Она равна расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые, или расстоянию от любой прямой до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой.

Например:



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром, длина которого равна a, тогда:

1) расстояние от прямой CC_1 до плоскости (AA_1D_1) равно a;

2) $A_1C_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$; $C_1O = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

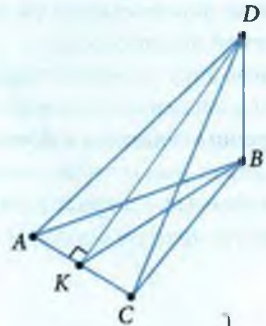
$\left.\begin{matrix} CC_1 \parallel DD_1 \\ DD_1 \subset (BB_1D_1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow CC_1 \parallel (BB_1D_1)$. Поскольку $B_1D_1 \subset (BB_1D_1)$ и $C_1O \perp (BB_1D_1)$, то

$C_1O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — расстояние между скрещивающимися прямыми CC_1 и B_1D_1.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника ABC, $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA = 13$ см. Найдите расстояние от точки D до прямой AC и площадь треугольника ACD.

Решение



Построим $DK \perp AC$,
BK — проекция наклонной DK на плоскость (ACB),
$AC \perp DK$ (по строению), $AC \subset (ACB)$
$\Rightarrow$ $AC \perp BK$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Поскольку ΔACB — равнобедренный, то BK — высота и медиана ΔACB. Следовательно, $AK = KC = 5$ см.

В прямоугольном ΔAKB ($\angle K = 90°$) по следствию из теоремы Пифагора:

$BK^2 = AB^2 - AK^2$; $BK = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{(13-5)(13+5)} = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 9} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ (см).

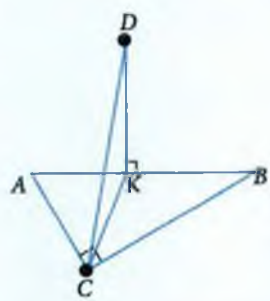
В прямоугольном ΔBDK ($\angle B = 90°$) по теореме Пифагора: $DK^2 = BD^2 + BK^2$;

$DK^2 = 9^2 + 12^2$; $DK = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$ (см). $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75$ (см^2).

Ответ: 15 см; 75 см^2.

Пример 2. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 20 см. Из вершины C прямого угла треугольника проведен отрезок CD, перпендикулярный плоскости этого треугольника, $CD = 35$ см. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AB.

Решение



Построим $DK \perp AB$, CK — проекция наклонной DK на плоскость (ACB), $AB \subset (ACB)$, $AB \perp DK \Rightarrow AB \perp CK$ (по теореме о трех перпендикулярах).

В прямоугольном ΔACB ($\angle C = 90°$) по теореме Пифагора:
$AB^2 = AC^2 + BC^2$; $AB^2 = 15^2 + 20^2$; $AB^2 = 225 + 400$; $AB^2 = 625$; $AB = 25$.

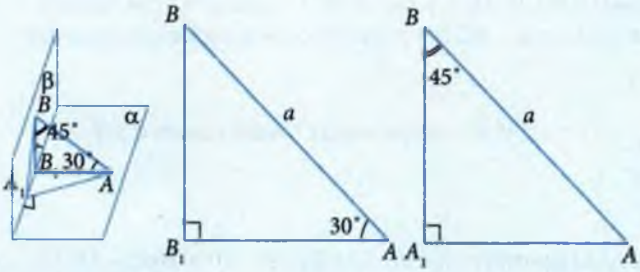
$$S_{\Delta ACB} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{CK \cdot AB}{2};\ AC \cdot BC = CK \cdot AB;\ 25 \cdot CK = 15 \cdot 20;\ CK = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ (см)}.$$

В прямоугольном ΔDCK ($\angle C = 90°$) по теореме Пифагора:

$DK^2 = DC^2 + CK^2$; $DK = \sqrt{35^2 + 12^2} = \sqrt{1225 + 144} = \sqrt{1369} = 37$ (см).
Ответ: 37 см.

Пример 3. Концы отрезка AB длиной a лежат в перпендикулярных плоскостях α и β. Углы наклона этого отрезка соответственно плоскостям α и β равны 30° и 45°. Найдите расстояние от концов данного отрезка до прямой пересечения данных плоскостей.

Решение



Пусть $\alpha \perp \beta$, c — линия пересечения α и β Построим $BB_1 \perp c$, c — линия пересечения α и β	$\Rightarrow$	$BB_1 \perp \alpha$. Следовательно, ΔBB_1A — прямоугольный ($\angle B_1 = 90°$).

Поскольку B_1A — проекция наклонной AB на плоскость α, то $\angle BAB_1$ — угол между AB и плоскостью α. По условию задачи $\angle BAB_1 = 30°$.

Построим $AA_1 \perp c$, c — линия пересечения α и β, $AA_1 \perp c$ $\alpha \perp \beta$	$\Rightarrow$	$AA_1 \perp \beta$. Следовательно, ΔAA_1B — прямоугольный ($\angle A_1 = 90°$).

Поскольку BA_1 — проекция наклонной AB на плоскость β, то $\angle ABA_1$ — угол между AB и плоскостью β. По условию задачи $\angle ABA_1 = 45°$.

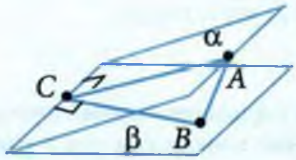
В прямоугольном ΔBB_1A: $BB_1 = AB \cdot \sin 30° = \dfrac{a}{2}$.

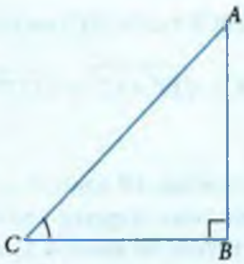
В прямоугольном ΔAA_1B: $AA_1 = AB \cdot \sin 45° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{a}{2}$; $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Пример 4. Найдите угол между плоскостями, если расстояние от точки, лежащей в одной из плоскостей, до прямой их пересечения вдвое больше, чем расстояние от данной точки до другой плоскости.

Решение





Пусть c — линия пересечения плоскостей α и β; $A \in \alpha$.
Построим $AB \perp \beta$, $AC \perp c$, тогда BC — проекция наклонной AC на плоскость β.
$c \subset \beta$; $c \perp AC \Rightarrow c \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

$$\left.\begin{array}{l} AC \subset \alpha \\ AC \perp c \\ BC \subset \beta \\ BC \perp c \end{array}\right| \Rightarrow \angle ACB \text{ — угол между плоскостями } \alpha \text{ и } \beta.$$

Рассмотрим прямоугольный ΔACB ($\angle B = 90°$). Пусть $AB = x$, тогда $AC = 2x$.

$\sin\angle ACB = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Отсюда $\angle ACB = 30°$.

Ответ: 30°.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если наклонные относятся как 1 : 2, а проекции наклонных равны 2 см и 14 см.

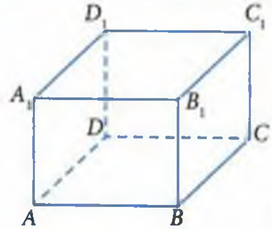
2. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая AM, перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояния MB и MC, если $MA = AB = a$ и $\angle ABC = 120°$.

3. Стороны треугольника равны 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла треугольника проведен отрезок, который равен 15 см и перпендикулярен плоскости треугольника. Найдите расстояние от его концов до большей стороны.

Тестовые задания

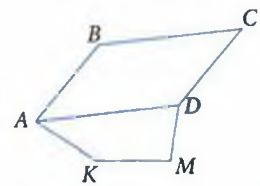
1. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Сколько существует разных плоскостей, которые проходят через прямую a и параллельны прямой b?

А	Б	В	Г	Д
ни одной	одна	две	три	множество



2. Дано изображение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите прямую, по которой пересекаются плоскости (ADC) и (DD_1C_1).

А	Б	В	Г	Д
DC	DD_1	CC_1	AB	D_1C_1



3. Параллелограмм $ABCD$ и трапеция $ADMK$ ($AD \parallel MK$) не лежат в одной плоскости. Как расположены прямая MK и плоскость (ABC)?

А	Б	В	Г	Д
прямая лежит в плоскости	прямая и плоскость пересекаются	прямая и плоскость параллельны	прямая и плоскость имеют общую точку	определить невозможно

4. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. Через вершину C проведена прямая CK, перпендикулярная плоскости треугольника ABC, $CK = 12$ см. Найдите KM.

А	Б	В	Г	Д
10 см	12 см	13 см	14 см	15 см

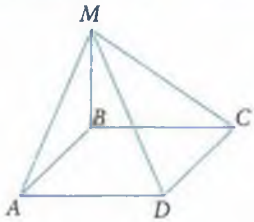
5. В равнобедренном треугольнике угол при вершине 120°, а боковые стороны — по 10 см. Вне плоскости треугольника дана точка, отдаленная от каждой из вершин на 26 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

А	Б	В	Г	Д
23 см	24 см	25 см	26 см	27 см

13 5123

6. Найдите угол, под которым диагональ куба наклонена к его боковой грани.

А	Б	В	Г	Д
$\arcsin\frac{1}{4}$	30°	60°	45°	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$

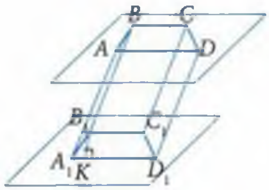


7. Из вершины B прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр $BM = 5$ см к плоскости данного прямоугольника. $MD = 8$ см, $MC = 6$ см. Установите соответствие между данными отрезками (1–4) и их длиной (А–Д).

1 DC
2 MA
3 BC
4 BD

А 10 см
Б $\sqrt{11}$ см
В $\sqrt{39}$ см
Г $2\sqrt{7}$ см
Д $\sqrt{53}$ см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					



8. Через вершины A, B, C, D трапеции $ABCD$, лежащие в одной из параллельных плоскостей α, проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость β в точках A_1, B_1, C_1, D_1. $AB = 48$ см, $BC = 3$ см, $AD = 12$ см, $\angle BAD = 60°$. Установите соответствие между отрезками (1–4) и их длиной (А–Д).

1 A_1B_1
2 C_1D_1
3 A_1K
4 B_1K

А 8
Б $4\sqrt{3}$
В 4
Г 9
Д $\sqrt{73}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 9–11. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

9. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см. Вне плоскости треугольника дана точка, которая находится на расстоянии 10 см от каждой его вершины. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

10. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CD, равный 1 см. Найдите площадь треугольника ADB, если $AC = 3$ см, $BC = 2$ см.

11. В равнобедренном треугольнике ABC основание BC равно 12 см, боковая сторона — 10 см. Из вершины A проведен отрезок $AD = 6$ см, перпендикулярный плоскости треугольника ABC. Найдите расстояние от точки D до стороны BC.

14. Многогранники

14.1. Двугранный угол

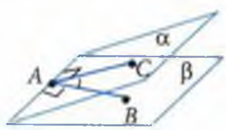
Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей прямой, которая их ограничивает.

Полуплоскости называются **гранями**, а прямая, которая их ограничивает,— **ребром** двугранного угла.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым.

Угол, образованный этими полупрямыми, называется **линейным углом** двугранного угла. За меру двугранного угла принимается мера соответствующего ему линейного угла. Все линейные углы двугранного угла равны.

Если из точки ребра двугранного угла в каждой его грани провести полупрямые, перпендикулярные ребру двугранного угла, то угол между этими полупрямыми будет линейным углом данного двугранного угла.



a — линия пересечения плоскостей α и β, $A \in a$, $AB \subset \alpha$, $AC \subset \beta$, $AB \perp a$, $AC \perp a \Rightarrow \angle BAC$ — линейный угол двугранного угла.

14.2. Призмы

Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного количества многоугольников.

Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются **гранями**, а их стороны — **ребрами**, концы ребер — **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.

Призмой называется многогранник, который состоит из двух равных многоугольников (**основания** призмы), лежащих в разных плоскостях и совмещающихся параллельным перенесением, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований призмы, называются **боковыми ребрами** призмы.

Основания призмы равны и лежат в параллельных плоскостях.

Боковые ребра призмы параллельны и равны.

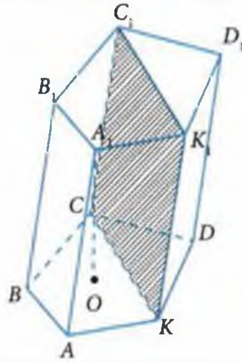
Поверхность призмы состоит из оснований и **боковой поверхности**. Боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований.

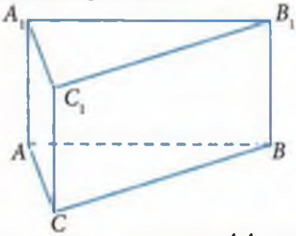
Призма называется **прямой**, если ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Каждая боковая грань прямой призмы — прямоугольник. **Высота прямой призмы равна длине ее бокового ребра.**

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания — правильные многоугольники.

Плоскость, проходящая через два боковых ребра призмы, не лежащие в одной грани, называется **диагональной плоскостью**, а сечение призмы этой плоскостью — **диагональным сечением**. Диагональным сечением призмы является параллелограмм.



$ABCDKA_1B_1C_1D_1K_1$ — наклонная пятиугольная призма; $ABCDK = A_1B_1C_1D_1K_1$ — основания призмы; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = KK_1$ — боковые ребра призмы; ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, KDD_1K_1, AKK_1A_1 — боковые грани призмы. $A_1O \perp (ABC)$; A_1O — высота призмы; CKK_1C_1 — параллелограмм (диагональное сечение).



$ABCDA_1K_1C_1$ — прямая треугольная призма; $AA_1 = BB_1 = DD_1 = H$ — высота прямой призмы.

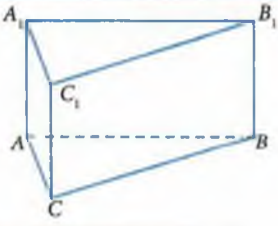
Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней.

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту призмы.

Площадь полной поверхности призмы равна сумме площадей ее боковой поверхности и двух оснований.

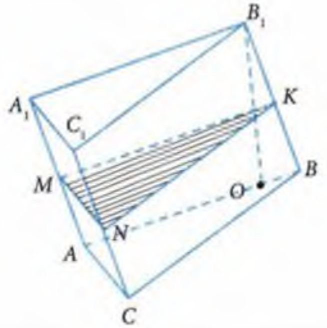
Объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту призмы.

Объем наклонной призмы равен произведению площади сечения, перпендикулярного боковым ребрам призмы, на длину бокового ребра.



Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, тогда

$S_б = P_{осн} \cdot AA_1$ $S_п = S_б + 2S_{осн}$ $V = S_{осн} \cdot AA_1$, где $S_б$ — площадь боковой поверхности; $S_п$ — площадь полной поверхности; V — объем.



Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная треугольная призма; $B_1O \perp (ACB)$; $BB_1 \perp (MNK)$, тогда $S_б = S_{CC_1B_1B} + S_{ABB_1A_1} + S_{ACC_1A_1}$; $S_п = S_б + 2S_{осн}$; $V = S_{осн} \cdot B_1O = S_{\Delta MNK} \cdot BB_1$.

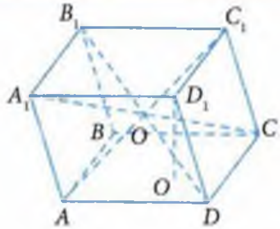
Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм. Все грани параллелепипеда — параллелограммы.

У параллелепипеда:

1) противолежащие грани параллельны и равны;

2) диагонали пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам;

3) точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелепипеда.



$BO = OD_1$; $B_1O = OD$; $AO = OC_1$; $A_1O = OC$.

$S_б = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{DD_1C_1C})$ $S_п = S_б + 2S_{ABCD}$ $V = S_{ABCD} \cdot D_1O$, где $D_1O \perp (ABC)$.

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания, называется **прямым**. Боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется **прямоугольным.**

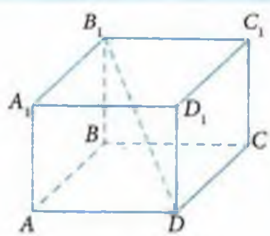
Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется **кубом**.

В прямоугольном параллелепипеде:

1) диагонали равны между собой;

2) квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его линейных измерений (ширины, длины и высоты);

3) объем равен произведению трех его линейных измерений.



$B_1D^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
$V = abc$.

14.3. Пирамиды

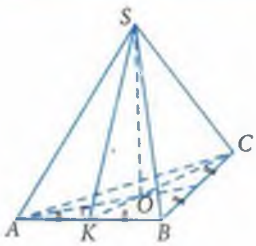
Пирамидой называется многогранник, одна грань которого — произвольный многоугольник (основание), а другие грани — треугольники (боковые грани), имеющие общую вершину (вершина пирамиды).

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания.

Пирамида называется **правильной**, если ее основание — правильный многоугольник, а его центр совпадает с основанием высоты пирамиды.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, все боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

Высоту грани правильной пирамиды, проведенную из ее вершины, называют **апофемой** пирамиды.



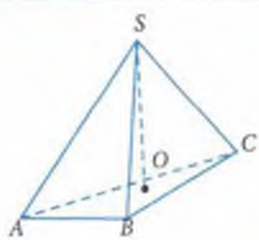
Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $SO \perp (ABC)$, тогда: O — центр окружности, вписанной в ΔABC и центр окружности, описанной вокруг ΔABC; SK — апофема пирамиды.

Боковая поверхность пирамиды равна сумме площадей всех ее боковых граней.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания на апофему пирамиды.

Полная поверхность пирамиды равна сумме площади боковой поверхности пирамиды и площади основания.

Объем любой пирамиды равен трети произведения площади ее основания на высоту.

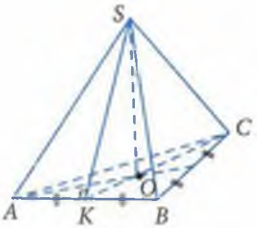


$SO \perp (ACB)$;

$S_б = S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SCB}$.

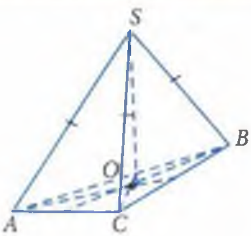
$S_п = S_б + S_{\Delta ABC}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ACB} \cdot SO$$

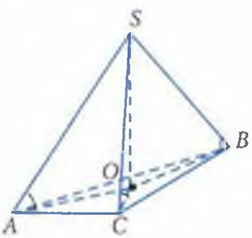


Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида, тогда: $S_б = p \cdot SK$; где p — полупериметр основания, SK — апофема; $S_п = S_б + S_{\Delta ABC}$; $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SO$.

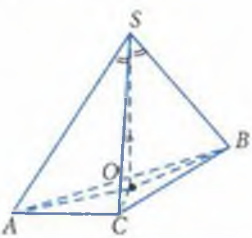
Если в пирамиде все боковые ребра равны или наклонены к плоскости основания под одним углом, или образуют равные углы с высотой пирамиды, то основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной вокруг основания пирамиды.



Если $SA = SB = SC$,
то $OA = OB = OC = R$,
где R — радиус окружности, описанной вокруг ΔACB.

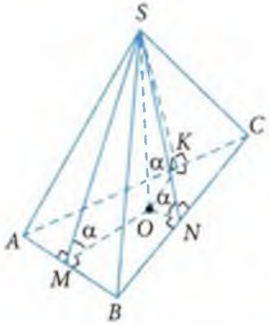


Если $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$,
то $OA = OB = OC = R$,
где R — радиус окружности, описанной вокруг ΔACB.



Если $\angle BSO = \angle CSO = \angle ASO$,
то $OA = OB = OC = R$,
где R — радиус окружности, описанной вокруг ΔACB.

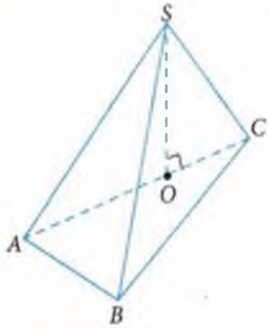
Если в пирамиде все боковые грани образуют с плоскостью основания одинаковый угол или если высоты всех боковых граней равны между собой, то основанием высоты такой пирамиды является центр окружности, вписанной в ее основание, а площадь боковой поверхности равна частному площади основания пирамиды на косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания.



Если $\angle SMO = \angle SNO = \angle SKO = \alpha$,
то $OK = ON = OM = r$,
где r — радиус окружности, вписанной в ΔABC.

$$S_{б} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha} \qquad S_{п} = S_{б} + S_{осн} = S_{осн} \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right)$$

Если в пирамиде одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, то высота этой грани, проведенная из вершины пирамиды, является высотой данной пирамиды.

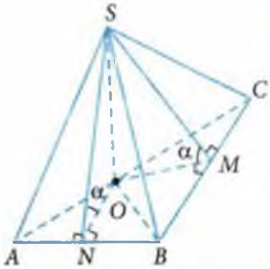


Если $(SAC) \perp (ABC)$ и $SO \perp AC$, то $SO \perp (ABC)$.

$$S_{б} = S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SO.$$

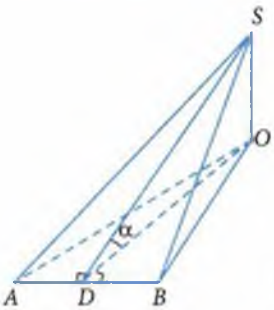
Если в треугольной пирамиде одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, а две другие наклонены к основанию пирамиды под одинаковыми углами, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе треугольника, являющегося основанием данной пирамиды.



$(SAC) \perp (ABC)$; $SO \perp AC$; $\angle SKO = \angle SMO = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ 1) $SO \perp (ABC)$; 2) BO — биссектриса ΔABC.

$$S_{б} = S_{\Delta SAC} + \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}.$$

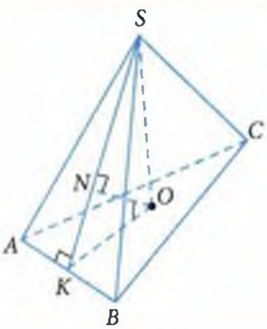
Если в треугольной пирамиде две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья наклонена к плоскости основания под углом α, то высота такой пирамиды — линия пересечения боковых граней, перпендикулярных плоскости основания пирамиды.



$(SAO) \perp (ABO), (SBO) \perp (ABO) \Rightarrow SO \perp (ABO).$

Если $\angle SDO = \alpha$, то $S_б = S_{\Delta ASO} + S_{\Delta BSO} + \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$ $V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot SO.$

Если из основания высоты пирамиды опустить перпендикуляр к боковой грани, то основание этого перпендикуляра лежит на высоте данной грани, проведенной из вершины пирамиды. Угол между этим перпендикуляром и плоскостью основания равен углу между перпендикуляром и проекцией указанной высоты на плоскость основания.



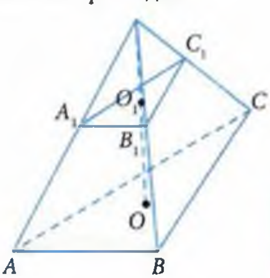
$SO \perp (ABC); SK \perp AB; ON \perp (SAB) \Rightarrow$ 1) $N \in SK$;
2) $\angle NOK$ — угол между ON и (ABC).

Часть пирамиды, расположенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется усеченной пирамидой.

Высота усеченной пирамиды — расстояние между плоскостями ее оснований.

Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники, а боковые грани — трапеции.

Усеченную пирамиду называют **правильной**, если она является частью правильной пирамиды.



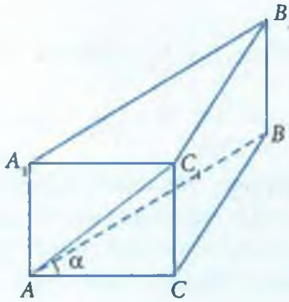
$$V = \frac{1}{3}\left(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta A_1B_1C_1}}\right) \cdot OO_1$$

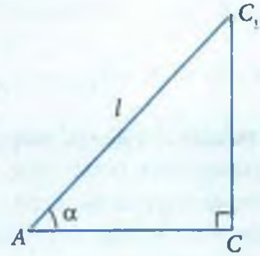
Если усеченная пирамида правильная, то $S_б = \dfrac{1}{2}(P_1 + P_2)l,$ где P_1 и P_2 — периметры оснований, l — апофема.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна l и наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем и площадь боковой поверхности призмы.

Решение





Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — изображение данной правильной треугольной призмы, в которой $AC_1 = l$. Поскольку AC — проекция наклонной AC_1 на плоскость основания, то $\angle C_1AC$ — угол между AC_1 и плоскостью основания. По условию задачи $\angle C_1AC = \alpha$. В прямоугольном ΔACC_1 ($\angle C = 90°$): $AC = l\ \cos\alpha$; $CC_1 = l \cdot \sin\alpha$. Поскольку $P_{осн} = 3 \cdot AC = 3l\cos\alpha$, то

$$S_б = P_{осн} \cdot CC_1 = 3l\cos\alpha \cdot l\sin\alpha = 3l^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{2}l^2\sin 2\alpha;$$

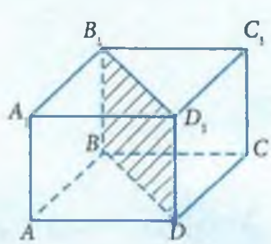
$$S_{осн} = \frac{1}{2}AC^2 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2\cos^2\alpha;$$

$$V = S_{осн} \cdot CC_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2\cos^2\alpha \cdot l \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}l^3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}l^3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha$; $\frac{3}{2}l^2\sin 2\alpha$.

Пример 2. В правильной четырехугольной призме площадь диагонального сечения равна S. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — изображение данной правильной четырехугольной призмы, в которой $S_{BB_1D_1D} = S$, где BB_1D_1D — прямоугольник. $BD \cdot BB_1 = S$; $BB_1 = \frac{S}{BD}$.

В прямоугольном ΔABD ($\angle A = 90°$) по теореме Пифагора: $BD^2 = AB^2 + AD^2$.

Поскольку $ABCD$ — квадрат, то $AB = AD$. Следовательно, $BD^2 = 2AB^2$; $AB^2 = \frac{BD^2}{2}$;

$AB = \frac{BD}{\sqrt{2}}$;

$$P_{осн} = 4 \cdot AB = 4 \cdot \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}BD}{2} = 2\sqrt{2}BD;$$

$$S_б = P_{осн} \cdot BB_1 = 2\sqrt{2}BD \cdot \frac{S}{BD} = 2\sqrt{2}S.$$

Ответ: $2\sqrt{2}S$.

Пример 3. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Плоскость, проведенная через катет a и противолежащую вершину другого основания, образует с основанием угол β. Найдите объем призмы.

Решение

Пусть $ACBA_1C_1B_1$ — изображение данной прямой призмы, основание которой — прямоугольный ΔACB ($\angle C = 90°$), $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$.

BC — линия пересечения (ACB) и (A_1CB); $AC \perp BC$ (по условию); $A_1C \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах); $AC \subset (ACB)$; $A_1C \subset (A_1CB)$	$\Rightarrow$ $\angle ACA_1$ — угол между (ACB) и (A_1CB). По условию задачи $\angle ACA_1 = \beta$.

В прямоугольном ΔACB ($\angle C = 90°$): $AC = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;

$$S_{\Delta ACB} = \frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{a \cdot a \operatorname{ctg}\alpha}{2} = \frac{a^2 \operatorname{ctg}\alpha}{2}.$$

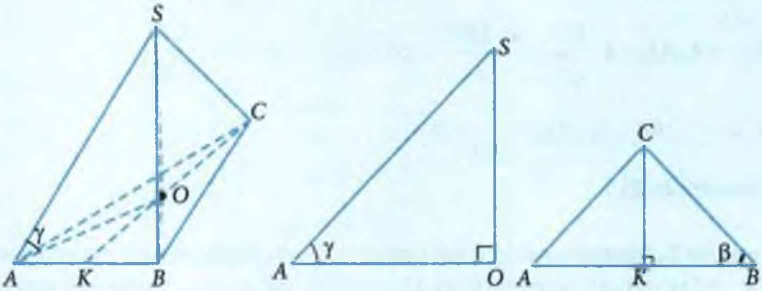
В прямоугольном ΔA_1AC ($\angle A = 90°$): $A_1A = AC \cdot \operatorname{tg} \beta = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$.

$$V = S_{\Delta ACB} \cdot AA_1 = \frac{a^2 \operatorname{ctg}\alpha}{2} \cdot a \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}a^3 \operatorname{ctg}^2\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

Ответ: $\frac{1}{2}a^3 \operatorname{ctg}^2\alpha \operatorname{tg}\beta$.

Пример 4. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом β при основании. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом γ. Найдите объем пирамиды.

Решение



Пусть $SABC$ — изображение данной пирамиды, в основании которой лежит равнобедренный ΔABC ($AC = BC = b$), $\angle A = \angle B = \beta$, $SO \perp (ABC)$.

Поскольку все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами, то O — центр окружности, описанной вокруг ΔABC: $AO = OC = OB = R$. В ΔABC по следствию из теоремы синусов: $\dfrac{b}{\sin\beta} = 2R$; $R = \dfrac{b}{2\sin\beta}$.

В прямоугольном ΔAOS ($\angle O = 90°$): $SO = AO \cdot \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{b\operatorname{tg}\gamma}{2\sin\beta}$.

$$S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C = \frac{1}{2}b^2\sin(180° - 2\beta) = \frac{1}{2}b^2\sin 2\beta;$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ACB} \cdot SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}b^2\sin 2\beta \cdot \frac{b\operatorname{tg}\gamma}{2\sin\beta} = \frac{b^3\sin 2\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{12\sin\beta} = \frac{1}{6}b^3\cos\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Ответ: $\frac{1}{6}b^3\cos\beta\operatorname{tg}\gamma$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, если диагональ призмы равна 2 см, а диагональ ее боковой грани равна $\sqrt{3}$ см.
2. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 10 см. Боковые грани образуют с основанием двугранные углы по 45°. Найдите объем пирамиды.
3. Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 6 см. Боковая грань с одним из катетов перпендикулярна площади основания и является правильным треугольником. Найдите объем пирамиды.

Тестовые задания

1. В правильной четырехугольной призме площадь боковой грани равна S. Найдите площадь диагонального сечения.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{S}{2}$	S	$\frac{S}{\sqrt{2}}$	$\frac{S}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}S$

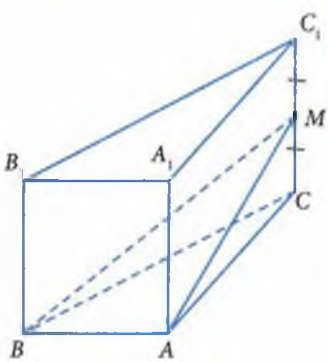
2. Найдите длину ребра куба, площадь поверхности которого равна 96 см^2.

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	6 см	8 см

3. Основание призмы $ABCA_1B_1C_1$ — правильный треугольник со стороной a. Вершина A_1 проецируется в центр этого основания, а ребро AA_1 образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем призмы.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2a^3\operatorname{tg}\alpha}{3}$	$\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{2}$	$\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{3}$	$\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{4}$	$\frac{3a^3\operatorname{tg}\alpha}{4}$

4. Объем прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 48 см^3. Точка M — середина ребра CC_1. Найдите объем пирамиды $MABC$.



А	Б	В	Г	Д
6 см^3	8 см^3	12 см^3	16 см^3	24 см^3

5. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковая поверхность вдвое больше площади основания.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2a}{3}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$	a

6. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см, а стороны основания — 8 см и 2 см. Найдите полную поверхность пирамиды.

А	Б	В	Г	Д
121 см^2	144 см^2	150 см^2	152 см^2	168 см^2

7. Установите соответствие между геометрическими величинами (1–4) куба с ребром a и их числовыми значениями (А–Д).

1 площадь диагонального сечения
2 площадь боковой грани
3 площадь боковой поверхности
4 площадь поверхности куба

А a^2
Б $\sqrt{2}a^2$
В $2a^2$
Г $4a^2$
Д $6a^2$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно l и образует угол α с плоскостью основания. Установите соответствие между геометрическими величинами (1–4) и их буквенным выражением (А–Д).

1 высота пирамиды
2 диагональ основания пирамиды
3 расстояние от центра основания до бокового ребра
4 расстояние от центра основания до середины бокового ребра

А $l\cos\alpha$
Б $l\sin\alpha$
В $\frac{l}{2}$
Г $2l\cos\alpha$
Д $l\cos\alpha\sin\alpha$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 9–11. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

9. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 2 м^2, 4 м^2, 8 м^2. Найдите объем параллелепипеда.

10. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 3 см. Апофема образует с плоскостью основания угол 60°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.

11. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Площадь боковой поверхности этой пирамиды равна 3 см^2. Найдите радиус окружности, описанной вокруг боковой грани этой пирамиды.

15. Тела вращения

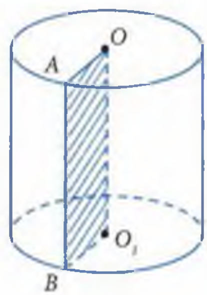
15.1. Цилиндр

Цилиндром называется тело, образованное вращением прямоугольника вокруг его стороны.

Сечением цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси, является круг, равный основаниям, а сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси, является прямоугольник.

Осевое сечение цилиндра — прямоугольник со сторонами, равными высоте цилиндра и диаметру его основания.

Пусть прямоугольник $OABO_1$ вращается вокруг стороны OO_1.



OO_1 — ось цилиндра. Стороны AO и BO_1 описывают равные круги, лежащие в параллельных плоскостях, их называют **основаниями** цилиндра.

$AO = BO_1 = R$ — радиус цилиндра, AB — образующая цилиндра, $AB = OO_1 = H$ — высота цилиндра. Сторона AB описывает поверхность, которую называют **боковой поверхностью** цилиндра.

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности, ограничивающей основание цилиндра, на его высоту.

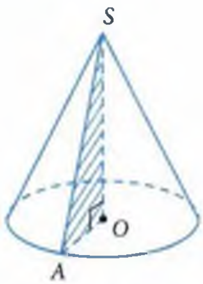
$V = S_{осн} \cdot H = \pi R^2 \cdot OO_1$; $S_б = 2\pi R \cdot H = 2\pi R \cdot O\ O_1$; $S_п = S_б + 2S_{осн} = 2\pi R \cdot OO_1 + 2\pi R^2$

15.2. Конус

Конусом называется тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Осевые сечения конуса — равнобедренные треугольники, равные между собой.

Сечением конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, является круг.



Пусть прямоугольный треугольник SOA ($\angle O = 90°$) вращается вокруг катета SO. При этом гипотенуза SA описывает боковую поверхность конуса, катет AO описывает круг — основание конуса. $AO = R$ — радиус конуса, точка S — вершина конуса, SA — образующая конуса, SO — высота и ось конуса.

Объем конуса равен трети произведения площади основания на высоту.

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению числа π на радиус и на образующую конуса.

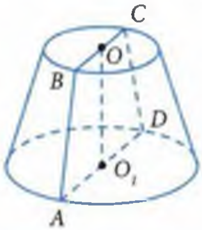
$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO.$$

$S_б = \pi R \cdot l = \pi R \cdot SA$, $SA = l$ — образующая.

$S_п = S_б + S_{\text{осн}} = \pi R \cdot SA + \pi R^2$.

Усеченным конусом называется часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания.

Осевое сечение усеченного конуса — равнобокая трапеция.



$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot OO_1\left(BO^2 + BO \cdot AO_1 + AO_1^2\right)$$

$S_б = \pi \cdot (R_1 + R_2) \cdot l = \pi \cdot (BO + AO_1) \cdot AB$

$AB = l$ — образующая усеченного конуса.

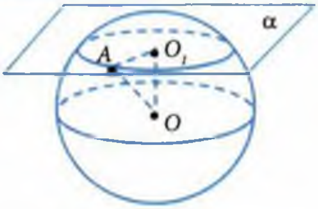
15.3. Сфера и шар

! **Сферой** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, размещенных на данном расстоянии (**радиус**) от данной точки (**центр**).

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется **диаметром** сферы. Сферу можно получить в результате вращения полуокружности вокруг ее диаметра.

Шар — это тело, содержащее все точки пространства, размещенные на расстоянии, не больше данного (**радиус**), от данной точки (**центр шара**). Шар можно получить в результате вращения полукруга вокруг его диаметра.

Любое сечение шара плоскостью — круг, центром которого является основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.



α — секущая плоскость, $OO_1 \perp \alpha \Rightarrow O_1$ — центр круга, являющегося сечением данного шара плоскостью α; $OA = R$ — радиус шара.

Площадь сферы и объем шара:

$S = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

15.4. Комбинации многогранников и тел вращения

Призма называется **вписанной в шар**, если все ее вершины лежат на поверхности шара.

Если призма вписана в шар, то:

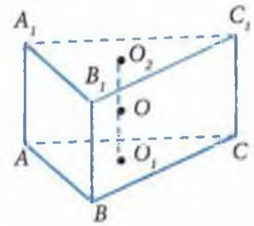
1) все ее вершины — равноотстоящие от центра шара;

2) призма — прямая;

3) каждая грань вписанной призмы является прямоугольником, вписанным в окружность, образовавшуюся в результате пересечения сферы плоскостью данной грани; при этом основания перпендикуляров, опущенных из центра описанной сферы на плоскости граней, являются центрами описанных вокруг граней окружностей;

4) центр шара, описанного вокруг призмы, является серединой высоты призмы, которая проходит через центры окружностей, описанных вокруг ее оснований;

5) центр шара, описанного вокруг прямоугольного параллелепипеда, лежит в точке пересечения диагоналей параллелепипеда, то есть на середине любой его диагонали, а каждая диагональ является диаметром описанного шара.



O_1 — центр окружности, описанной вокруг ΔABC; O_2 — центр окружности, описанной вокруг $\Delta A_1B_1C_1$; $O_2O = O_1O \Rightarrow O$ — центр шара, описанного вокруг призмы $ABCA_1B_1C_1$.

$OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R$, где R — радиус описанного шара.

! **Пирамида** называется **вписанной в шар**, если все ее вершины лежат на поверхности шара.

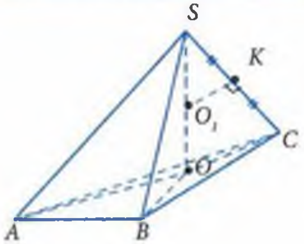
Если пирамида вписана в шар, то:

1) все вершины пирамиды — равноотстоящие от центра шара;

2) каждая грань вписанной пирамиды является треугольником, вписанным в окружность, образующуюся в результате пересечения сферы плоскостью данной грани; при этом основания перпендикуляров, опущенных из центра описанной сферы на плоскости граней, являются центрами описанных вокруг граней окружностей;

3) если боковое ребро пирамиды и перпендикуляр, проведенный к ее основанию через центр описанной окружности, — не скрещивающиеся прямые, то центр описанного шара является точкой пересечения данного перпендикуляра со срединным перпендикуляром к боковому ребру пирамиды, проведенным в плоскости, проходящей через боковое ребро и указанный перпендикуляр к основанию пирамиды;

4) как правило, центр описанного шара лежит на прямой, перпендикулярной плоскости основания пирамиды, проходящей через центр описанной окружности, в точке пересечения этой прямой с плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, проходящей через середину этого ребра.



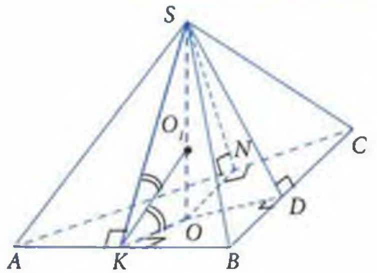
$OA = OC = OB$; $SO \perp (ABC)$; AC SO и SC — не скрещивающиеся; $SK = CK$; $O_1K \perp SC$; $O_1K \subset (SOC) \Rightarrow O_1$ — центр шара, описанного вокруг пирамиды $SABC$.

$SO_1 = AO_1 = BO_1 = CO_1 = R$, где R — радиус описанного шара.

Пирамида называется **описанной вокруг шара**, если ее грани касаются поверхности шара.

1. Если вершина описанной пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание, то центр вписанного шара размещен в точке пересечения высоты пирамиды и биссектрисы линейного угла двугранного угла при ее основании; при этом линейный угол должен быть построен в одной плоскости с высотой пирамиды.

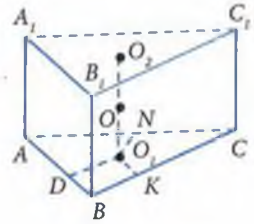
2. Как правило, центр шара, вписанного в пирамиду, является точкой пересечения биссектрис полуплоскостей двугранных углов при ребрах пирамиды.



$ON = OK = OD$; $ON \perp AC$, $OD \perp BC$, $OK \perp AB$, O_1K — биссектриса $\angle SKO$;
$O_1K \subset (SOK) \Rightarrow O_1$ — центр шара, вписанного в пирамиду $SABC$.

Призма называется **описанной вокруг шара**, если все ее грани касаются поверхности шара.

Центр шара, вписанного в прямую призму, является серединой высоты призмы, проходящей через центр окружности, вписанной в основание призмы.

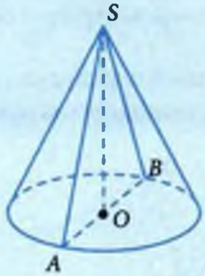


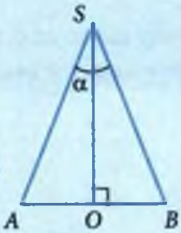
$O_1N = O_1K = O_1D$; AB, $O_1N \perp AC$, $O_1K \perp BC$, $O_2O_1 \perp (ABC)$;
$O_2O = O_1O \Rightarrow O$ — центр шара, вписанного в прямую призму $ABCA_1B_1C_1$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В конусе площадь осевого сечения равна S, а угол при его вершине равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Решение





Пусть $AS = BS = x$, тогда $\frac{1}{2}x^2\sin\alpha = S$; $x^2\sin\alpha = 2S$; $x^2 = \frac{2S}{\sin\alpha}$; $x = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$.

В прямоугольном ΔSOB ($\angle O = 90°$): $OB = BS\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

$$S_{осн} = \pi\cdot OB^2 = \pi\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2S}{\sin\alpha};$$

$$S_б = \pi\cdot OB\cdot AS = \pi\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}} = \pi\cdot\frac{2S}{\sin\alpha}\cdot\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$S_п = S_б + S_{осн} = \pi\cdot\frac{2S}{\sin\alpha}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \pi\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2S}{\sin\alpha} = \frac{2\pi S\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+\frac{2\pi S\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi S}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \pi S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pi S\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

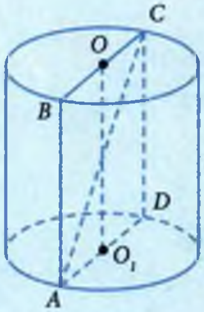
$$= \pi S\cdot\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pi S\cdot\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \pi S\cdot\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)} =$$

$$= \pi S\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)} = \pi S\cdot\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right).$$

Ответ: $\pi S\cdot\mathrm{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)$.

Пример 2. Объем цилиндра равен V, а высота — H. Найдите диагональ осевого сечения.

Решение



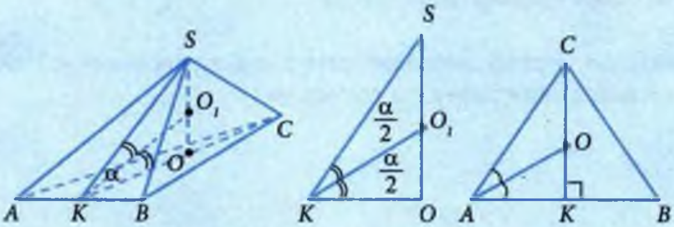
$\pi R^2 \cdot H = V;\ R^2 = \dfrac{V}{\pi H}.$

В прямоугольном ΔACD ($\angle D = 90°$) по теореме Пифагора: $AC^2 = CD^2 + AD^2$; $AC^2 = H^2 + (2R)^2$; $AC^2 = H^2 + 4R^2$; $AC^2 = H^2 + \dfrac{4V}{\pi H}$; $AC = \sqrt{H^2 + \dfrac{4V}{\pi H}}$.

Ответ: $\sqrt{H^2 + \dfrac{4V}{\pi H}}$.

Пример 3. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара равен r, двугранный угол при основании — α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение



Поскольку вершина правильной пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание, то центр O_1 вписанного шара находится в точке пересечения высоты пирамиды и биссектрисы KO_1 линейного угла двугранного угла при основании. По условию задачи $O_1O = r$.

В прямоугольном ΔKOO_1 ($\angle O = 90°$): $KO = OO_1 \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = r \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

В прямоугольном ΔAKO ($\angle K = 90°$):

$AK = KO \cdot \operatorname{ctg} 30° = r \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} r \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. $AB = 2AK = 2\sqrt{3} r \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

$S_{осн} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3} r \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 12 r^2 \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} = 3\sqrt{3} r^2 \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Поскольку все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами, то: $S_б = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha} = \dfrac{3\sqrt{3}r^2 \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

$$S_п = S_б + S_{осн} = 3\sqrt{3}r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 3\sqrt{3}r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= 3\sqrt{3}r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2\cos^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{6\sqrt{3}r^2 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{6\sqrt{3}r^2 \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна S, а длина окружности его основания — l. Найдите объем цилиндра.
2. Объем конуса равен V. Высота конуса разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные плоскости основания. Вычислите объем средней части конуса.
3. В правильный тетраэдр, ребро которого равно a, вписан конус. Найдите площадь боковой поверхности конуса и его объем.

Тестовые задания

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если диаметр основания равен 4 см.

А	Б	В	Г	Д
4π см^2	6π см^2	8π см^2	16π см^2	32π см^2

2. Радиусы оснований цилиндра и конуса равны, высота цилиндра равна 8 см, а конуса — 6 см. Найдите отношение объема цилиндра к объему конуса.

А	Б	В	Г	Д
1 : 1	4 : 1	3 : 1	4 : 3	3 : 2

3. Найдите объем конуса, если его радиус равен 6 см, образующая — 10 см.

А	Б	В	Г	Д
48π см^2	60π см^2	96π см^2	120π см^2	288π см^2

4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 11 см, а образующая — 10 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса (в см^2).

А	Б	В	Г	Д
100π	120π	135π	150π	160π

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, высота пирамиды тоже равна 4 см. Найдите радиус описанного шара.

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	3 см	4 см	5 см

6. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4 см, 6 см, 12 см. Найдите радиус описанной сферы.

А	Б	В	Г	Д
6 см	7 см	8 см	9 см	10 см

7. Образующая конуса равна l и образует с плоскостью основания угол α. Установите соответствие между геометрическими величинами (1–4) и буквенными выражениями (А–Д).

1 площадь осевого сечения конуса
2 площадь основания конуса
3 площадь боковой поверхности конуса
4 квадрат радиуса основания конуса

А $l^2 \sin\alpha \cos\alpha$
Б $l^2 \cos^2\alpha$
В $\pi l^2 \cos\alpha$
Г $l^2 \cos\alpha$
Д $\pi l^2 \cos^2\alpha$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Образующая и диаметр цилиндра равны соответственно 8 см и 6 см. Установите соответствие между геометрическими величинами (1–4) и числовыми значениями (А–Д).

1 площадь осевого сечения
2 диагональ осевого сечения
3 площадь поверхности цилиндра
4 объем цилиндра

А 10
Б 24
В 48
Г 66π
Д 72π

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Шар радиусом 13 см пересекли секущей плоскостью, находящейся на расстоянии 12 см от центра шара. Установите соответствие между геометрическими величинами (1–4) и числовыми значениями (А–Д).

1 радиус сечения
2 площадь сечения
3 площадь поверхности шара
4 объем шара

А 5
Б 10
В $\frac{8788\pi}{3}$
Г 676π
Д 25π

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Высота конуса равна 4 см, радиус основания — 3 см. Найдите отношение площади основания конуса к площади его боковой поверхности.

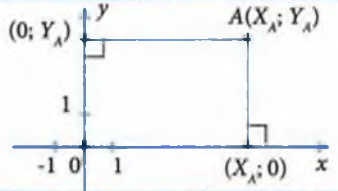
11. В цилиндр вписан шар. Найдите объем шара, если объем цилиндра равен 60 см^3.

12. Найдите объем тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ см вокруг одного из катетов. В ответ запишите значение выражения $\frac{V}{\pi}$.

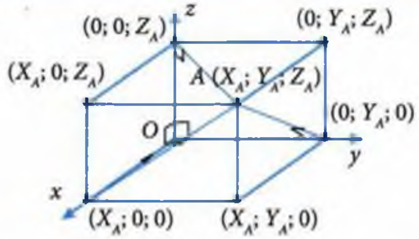
16. Декартовы координаты и векторы

16.1. Декартовы координаты

Проведем на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярные прямые x и y, на которых выберем направление и единичный отрезок. Ось Ox называют **осью абсцисс**, ось Oy — **осью ординат**, точку O — **началом координат**. Каждой точке А плоскости соответствуют два числа: абсцисса x_A и ордината y_A: $A(x_A; y_A)$. Эти числа называют декартовыми координатами данной точки.



Проведем в пространстве через точку O три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, на которых выберем направление и единичный отрезок. Ось Ox называют осью абсцисс, ось Oy — осью ординат, ось Oz — **осью аппликат**, точку O — началом координат. Каждой точке A пространства соответствуют три числа: абсцисса x_A, ордината y_A, аппликата z_A: $A(x_A; y_A; z_A)$. Эти числа называют декартовыми координатами данной точки. Плоскости xOy, yOz, xOz называют **координатными плоскостями**.



Расстояние между точками

Если $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, то $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Если $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, то $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

1) $A(4; -2)$, $B(-3; 1)$; $AB = \sqrt{(-3-4)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$;

2) $A(2; 1; 5)$, $B(3; 2; -1)$; $AB = \sqrt{(3-2)^2 + (2-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{1+1+36} = \sqrt{38}$.

Координаты середины отрезка

Если $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$; $AC = BC$, то $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Если $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$; $AC = BC$, то

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Например: 1) $A(-3; 4)$, $B(3; 6)$, $C(x_C; y_C)$, $AC = BC$. $x_C = \frac{-3+3}{2} = 0$; $y_C = \frac{4+6}{2} = 5$.
Ответ: $C(0; 5)$.

2) $AC = BC$, $A(2; 4)$, $C(3; 8)$, $B(x_B; y_B)$. $\frac{x_B + 2}{2} = 3$; $x_B + 2 = 6$; $x_B = 4$; $\frac{y_B + 4}{2} = 8$;
$y_B + 4 = 16$; $y_B = 12$.
Ответ: $B(4; 12)$.

Уравнения окружности и сферы

Если $O(a; b)$ — центр окружности радиуса R, то: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ — уравнение окружности.

Если $O(a; b; c)$ — центр сферы радиуса R, то: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ — уравнение сферы.

Например: 1) $x^2 + (y - 4)^2 = 36$; $O(0; 4)$ — центр окружности; $R = 6$.

2) $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 7$; $O(-1; -5)$ — центр окружности; $R = \sqrt{7}$.

3) $x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 3$; $O(0; 0; -2)$ — центр сферы; $R = \sqrt{3}$.

16.2. Векторы

!

Вектор — направленный отрезок.

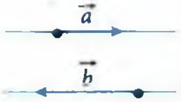
Модуль вектора — длина отрезка, который изображает вектор.

Точка — **нулевой вектор**.

Ненулевые векторы называются **коллинеарными,** если они лежат или на одной прямой, или на параллельных прямых; нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Два ненулевых вектора называются сонаправленными, если они **коллинеарны** и лежат в одной полуплоскости относительно прямой, соединяющей их начала.

$\overrightarrow{AB}$ — обозначение вектора: A — начало, B — конец вектора.



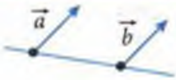
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные.

$\vec{a}$ и $\vec{c}$ — коллинеарные.

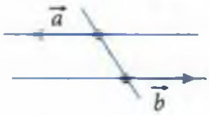
Два вектора называются **противоположно направленными,** если они коллинеарны и лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, соединяющей их начала.

Два ненулевых вектора называются **равными,** если они сонаправленные и их модули равны.

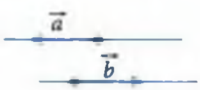
Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если они противоположно направлены и их модули равны.



$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — сонаправленные.



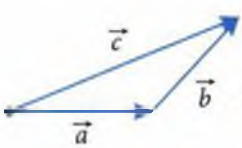
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — противоположно направленные.



$\vec{a}$ и $\vec{b}$ — противоположные.

Сложение и вычитание векторов

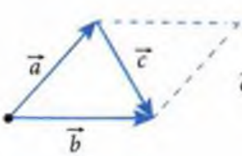
Правило треугольника



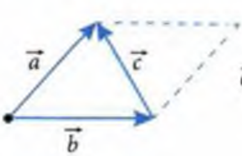
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$

Правило параллелограмма

$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b};$



$\vec{c}=\vec{b}-\vec{a};$



$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}.$

16.3. Координаты вектора

На плоскости	В пространстве
Координаты вектора	
Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(x_A; y_A)$ и концом в точке $B(x_B; y_B)$ называют числа: $x_B - x_A$; $y_B - y_A$. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.	Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(x_A; y_A; z_A)$ и концом в точке $B(x_B; y_B; z_B)$ называют числа: $x_B - x_A$; $y_B - y_A$; $z_B - z_A$. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
Длина вектора	
Если $\vec{a}(a_1; a_2)$, то $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.	Если $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, то $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
Сумма и разность векторов	
Если $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.	Если $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.
Умножение вектора на число	
Если $\vec{a}(a_1; a_2)$, то $\lambda\vec{a} = \vec{c}(\lambda a_1; \lambda a_2)$.	Если $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, то $\lambda\vec{a} = \vec{c}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$.
Условие коллинеарности векторов	
$\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$
Скалярное произведение двух векторов	
Если $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$, или $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$	Если $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$, или $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найдите на оси Oy точку, равноотстоящую от точек $A(-2; 3; 5)$ и $B(3; 2; -3)$.

Решение

Пусть точка M лежит на оси Oy, тогда M имеет координаты $(0; y; 0)$. Найдем расстояния AM и BM:

$$AM = \sqrt{(-2-0)^2+(3-y)^2+(5-0)^2} = \sqrt{4+(3-y)^2+25} = \sqrt{29+(3-y)^2};$$

$$BM = \sqrt{(3-0)^2+(2-y)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{9+(2-y)^2+9} = \sqrt{18+(2-y)^2}.$$

По условию $AM = BM$: $\sqrt{29+(3-y)^2} = \sqrt{18+(2-y)^2}$; $29 + (3 - y)^2 = 18 + (2 - y)^2$; $29 + 9 - 6y + y^2 = 18 + 4 - 4y + y^2$; $-6y + 4y = 18 + 4 - 29 - 9$; $-2y = -16$; $y = 8$.

Ответ: $M(0; 8; 0)$.

Пример 2. Найдите центр и радиус сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 6 = 0$.

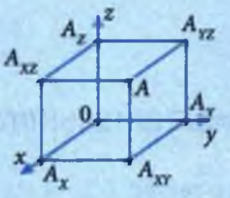
Решение

$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 6 = x^2 + (y^2 + 2y) + (z^2 - 6z) - 6 = x^2 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + (z^2 - 2 \cdot 3z + 9) - 9 - 6 = x^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 - 16 = 0$; $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 16$.

Ответ: $O(0; -1; 3)$ — центр сферы; $R = 4$.

Пример 3. Найдите расстояние от точки $A(1; 2; 3)$ до: 1) координатных плоскостей; 2) осей координат; 3) начала координат.

Решение



Основаниями перпендикуляров, опущенных из точки A на координатные плоскости, будут точки A_{xy}, A_{xz}, A_{yz} с координатами: $A_{xy}(1; 2; 0)$, $A_{xz}(1; 0; 3)$, $A_{yz}(0; 2; 3)$. Тогда:

$$AA_{xy} = \sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(3-0)^2} = 3, \qquad AA_{xz} = \sqrt{(1-1)^2+(2-0)^2+(3-3)^2} = 2,$$

$$AA_{yz} = \sqrt{(1-0)^2+(2-2)^2+(3-3)^2} = 1.$$

Основаниями перпендикуляров, опущенных из точки A на координатные оси, будут точки с координатами: $A_x(1; 0; 0)$, $A_y(0; 2; 0)$, $A_z(0; 0; 3)$. Тогда:

$$AA_x = \sqrt{(1-1)^2+(2-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{13},$$

$$AA_y = \sqrt{(1-0)^2+(2-2)^2+(3-0)^2} = \sqrt{10},$$

$$AA_z = \sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(3-3)^2} = \sqrt{5}.$$

Поскольку $O(0; 0; 0)$, то $AO = \sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{14}$.

Ответ: 1) 3; 2; 1; 2) $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{14}$.

Пример 4. Даны векторы $\vec{a}(2;-3;1)$ и $\vec{b}(-3;4;-2)$. Найдите $|2\vec{a}-3\vec{b}|$.

Решение

$2\vec{a}(2;-3;1)-3\vec{b}(-3;4;-2)=\overline{(4;-6;2)}+\overline{(9;-12;6)}=\overline{(13;-18;8)}$;

$\left|\overline{(13;-18;8)}\right|=\sqrt{13^2+(-18)^2+8^2}=\sqrt{169+324+64}=\sqrt{557}$.

Ответ: $\sqrt{557}$.

Пример 5. Найдите длину вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}=2\vec{m}-3\vec{n}$, $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 60°.

Решение

$|\vec{a}|^2=\vec{a}^2=(2\vec{m}-3\vec{n})^2=4|\vec{m}|^2-12\vec{m}\cdot\vec{n}+9|\vec{n}|^2=4\cdot1-12|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos60°+$

$+9\cdot4=4-12\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}+36=40-12=28;\ |\vec{a}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.

Ответ: $|\vec{a}|=2\sqrt{7}$.

Пример 6. При каком значении n векторы $\vec{a}(3;n;-1)$ и $\vec{b}(n;-2;5)$ взаимно перпендикулярны?

Решение

Два ненулевых вектора взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3n+(-2n)+5\cdot(-1)=3n-2n-5=0;\ n=5$.

Ответ: $n=5$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каких значениях a и b вектор $\vec{a}(3;-1;\alpha)$ будет перпендикулярнен вектору $\vec{b}(2;\beta;1)$, если $|\vec{b}|=3$?
2. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ 1)$; $B(-5;\ 4)$ и $C(7;\ 2)$. Найдите скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ и площадь треугольника.
3. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найдите AD, если $AK = 6$ см, $AM = 3$ см и $\angle KAM = 60°$.

Тестовые задания

1. Найдите расстояние от точки $A(2; 3; 6)$ до оси Oz.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{13}$	7	6	5	$3\sqrt{5}$

2. В пространстве заданы точки $A(4; 6; -10)$ и $M(2; -2; 4)$. Найдите координаты точки C, которая симметрична точке A относительно точки M.

А	Б	В	Г	Д
(3; 2; –3)	(0; 2; –6)	(8; 2; –2)	(8; –10; 18)	(0; –10; 18)

3. Найдите расстояние от точки $A(2; 3; -6)$ до координатной плоскости xOy.

А	Б	В	Г	Д
–6	2	3	6	7

4. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-2; 3)$, $B(-8; -5)$.

А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{AB}(6; 8)$	$\overrightarrow{AB}(-10; -8)$	$\overrightarrow{AB}(-10; -2)$	$\overrightarrow{AB}(-6; -2)$	$\overrightarrow{AB}(-6; -8)$

5. Если векторы $\vec{a}(2; m; 1)$ и $\vec{b}(m; 4; 2)$ взаимно перпендикулярны, то m равно

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

6. Найдите значения m и n, при которых векторы $\vec{a}(3; m; 5)$ и $\vec{b}(-6; -2; n)$ коллинеарны.

А	Б	В	Г	Д
$m = -1, n = 10$	$m = -1,$ $n = -10$	$m = 1, m = 10$	$m = 1, n = -10$	$m = 0, n = 0$

7. Пусть $\vec{a}(1; 2; 3)$ и $\vec{b}(-3; -2; -1)$. Установите соответствие между векторами (1–4) и координатами (А–Д).

1 $\vec{a} + \vec{b}$
2 $\vec{a} - \vec{b}$
3 $\vec{b} - \vec{a}$
4 $-\vec{a} - \vec{b}$

А (4; 4; 4)
Б (2; 0; –2)
В (–4; –4; –4)
Г (–2; 0; –2)
Д (–2; 0; 2)

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Дана точка $A(1;\ 2;\ 3)$. Установите соответствие между геометрическими преобразованиями точки A (1–4) и координатами ее образа при этих преобразованиях (А–Д).

1 симметрия относительно плоскости xOy
2 симметрия относительно начала координат
3 симметрия относительно оси Oz
4 симметрия относительно плоскости xOz

А $A_1(1;\ -2;\ 3)$
Б $A_2(1;\ 2;\ -3)$
В $A_3(-1;\ -2;\ 3)$
Г $A_4(-1;\ 2;\ 3)$
Д $A_5(-1;\ -2;\ -3)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Пусть $\vec{a}(4;2;-1)$ и $\vec{b}(1;2;-1)$. Установите соответствие между модулями (1–4) и числовыми значениями (А–Д).

1 $|\vec{a}+\vec{b}|$
2 $|\vec{a}-\vec{b}|$
3 $|3\vec{b}-\vec{a}|$
4 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$

А 9
Б $\sqrt{33}$
В $3\sqrt{5}$
Г $\sqrt{21}$
Д 3

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Решите задачи 10–12. Ответы запишите в виде десятичной дроби.

10. Найдите величину угла между векторами $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$ (в градусах), если $\vec{a}(3;5;-4)$, $\vec{b}(-2;5;-4)$ и $\vec{c}(0;0;2)$.

11. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(3;0;-4)$ и $\overrightarrow{AD}(0;5;0)$.

12. Найдите периметр треугольника ABC, если известны координаты его вершин: $A(5;\ -4)$, $B(-1;\ 4)$ и $C(5;\ 4)$.

Тренировочная экзаменационная работа в формате ЕГЭ-2013

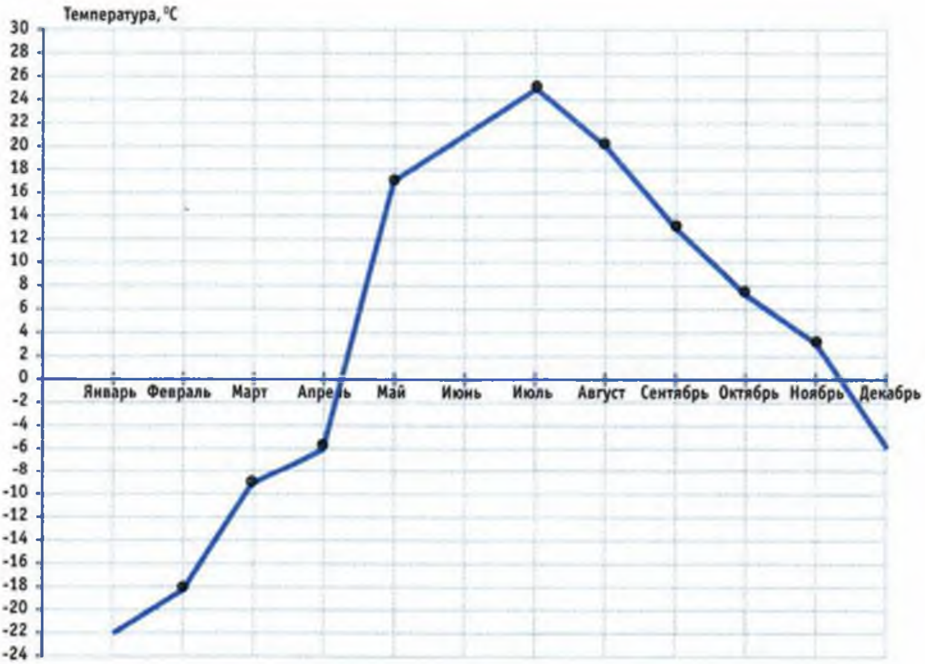
Часть 1

Ответом к заданиям этой части (B1–B14) является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без пробелов. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения писать не нужно.

B1 По расчетам предпринимателя, предприятие принесет 15% прибыли. Какую прибыль можно получить, затратив 400 000 рублей?

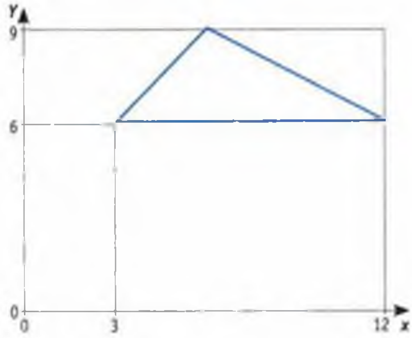
B1 | | | | | | |

B2 На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура в одном из городов России за каждый месяц 2012 года. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по сентябрь 2012 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



B2 | | | | | | |

B3 Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



B3

B4 Друзья Вадим, Игорь и Роман посетили пиццерию и каждый из них заказал себе пиццу и горячий напиток. Известно, что Вадим не пьет черный чай, а Игорь заказал себе пиццу с ветчиной. Используя таблицу, определите, сколько будет стоить (в рублях) Вадиму, Игорю и Роману самый дешевый заказ в этой пиццерии.

Меню	Цена (в рублях)
Пицца с курицей	75,00
Пицца с ветчиной	110,00
Пицца с грибами	125,00
Кофе	60,00
Кофе с молоком	65,00
Чай черный	40,00
Чай зеленый	45,00
Горячий шоколад	70,00

B4

B5 Решите уравнение $\log_2(-x) = -3$.

B5

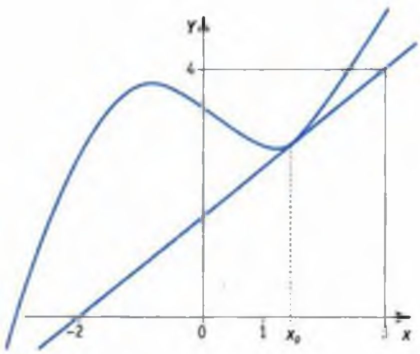
B6 Диагональ равнобедренной трапеции делит ее острый угол пополам. Вычислите среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 132 см, а основания относятся как 8 : 9.

B6

B7 Найдите значение выражения $\sqrt[14]{64} \cdot \sqrt[7]{-16}$.

B7

B8 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной этой функции в точке x_0.



B8 | | | | | |

B9 Найдите объем прямой треугольной призмы, все ребра которой имеют длину $2\sqrt{3}$ см.

B9 | | | | | |

B10 Во время проверки готовой продукции попадается брак по форме и размерам. Вероятность брака по форме равна 0,07, по размерам — 0,01. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь будет бракованной и по форме, и по размерам?

B10 | | | | | |

B11 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24 π см^2, а его объем — 48 π см^3. Найдите высоту цилиндра.

B11 | | | | | |

B12 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2 - \frac{t}{T}$, где m_0(мг) —начальная масса изотопа, $t_{(мин)}$ — время, прошедшее от начального момента, $T_{(мин)}$ — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа m_0 = 60 мг. Период его полураспада T = 5 мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 15 мг?

B12 | | | | | |

B13 Катер прошел 18 км по течению реки, а затем 20 км — против течения, затратив на весь путь 2 часа. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера 20 км/ч.

B13 | | | | | |

B14 Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{x^2+8}{x+1}$ на промежутке [0; 3].

B14

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т.д.), а затем — полное обоснованное решение и ответ.

C1 Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi(2x+5)}{2}=1+(y-1)^6, \\ 4\sin\dfrac{\pi y}{2}=4x^2+4x+5. \end{cases}$

C1

C2 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует угол 60° с плоскостью основания. Найдите радиус шара, описанного вокруг данной пирамиды, если сторона ее основания равна a.

C2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{x+2}{3x-6}}\left(\dfrac{x+7}{6}\right)\le 1.$

C3

C4 Основания равнобедренной трапеции равны 21 см и 9 см, а высота — 8 см. Вычислите радиус окружности, описанной вокруг данной трапеции.

C4

C5 Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{3-2x}\cdot(\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=a\cdot\sqrt{3-2x}$ имеет только два разных корня.

C5

C6 Найдите натуральные числа m и n, имеющие максимальную сумму, если $23(m+n)=mn$.

C6

Ответы

1.Числа и операции с ними

Практика 1. 0,6 2. 0,1 3. 3

Тест

1. Д. 2. Г. 3. А. 4. В. 5. Б 6. Б.
7. 1 — А; 2 —Г; 3 — Д; 4 — Б. 8. 1 — В; 2 — А; 3 — Б; 4 — Д.
9. 1 — А; 2 — Б; 3 — Д; 4 — Б. 10. 0. 11. 0,25. 12. 20.

2. Алгебраические уравнения и системы алгебраических уравнений

Практика

1. $2;\ \frac{1}{2};\ \frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$. 2. 0. 3. (4; 1); (1; 4);
$\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2};\frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right);\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2};\frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$.

Тест

1. В. 2. Д. 3. Д. 4. Б. 5. Г. 6. А.
7. 1 — В; 2 — Б; 3 — Г; 4 — А. 8. 1 — Б; 2 — А; 3 — В; 4 — Д.
9. 1 — В; 2 — Д; 3 — А; 4 — Г. 10. 20. 11. –8. 12. 10.

3. Функции и их графики

Практика 1. график. 2. график.

3. Если $a = 0$, то 2 корня; если $a \in (0; 2)$, то 4 корня; если $a = 2$, то 3 корня; если $a > 2$, то 2 корня; если $a < 2$, то корней нет.

Тест

1. Г. 2. Д. 3. А. 4. В. 5. Д. 6. Б.
7. 1 — В; 2 — Г; 3 — Д; 4 — А. 8. 1 — Г; 2 — А; 3 — Д; 4 — В.
9. 1 — А; 2 — Г; 3 — Б; 4 — В. 10. 0,5. 11. 3. 12. –5.

4. Алгебраические неравенства и системы алгебраических неравенств

Практика

1. (1; 6); 2. [–1; 3]; 3. (–2; 0)

Тест

1. В. 2. Б. 3. В. 4. Д. 5. Г. 6. Г.
7. 1 — Г; 2 — А; 3 — В; 4 — Б. 8. 1 — А; 2 — Д; 3 — Б; 4 — Г.
9. 1 — В; 2 — А; 3 — Г; 4 — Д. 10. 3,5. 11. –10. 12. 1.

5. Иррациональные, показательные, логарифмические уравнения и неравенства

Практика

1. $3;\ 3\log_6 2$; 2. $10;\ 10^{-\frac{9}{2}}$; 3. $(2; +\infty)$

Тест

1. В. 2. А. 3. А. 4. А. 5. Д. 6. В.
7. 1 — Г; 2 — А; 3 — В; 4 — Д. 8. 1 — В; 2 — Д; 3 — А; 4 — Г.
9. 1 — Г; 2 — А; 3 — В; 4 — Д. 10. 0. 11. 12. 12. –3.

6. Тригонометрические функции

Практика

1. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ x_2 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

2. $x = \pi(4k+1), k \in Z$

3. $\operatorname{arctg}\left(2a \pm \sqrt{3(a^2-1)}\right) + xk, k \in Z$, если $|a| > 1$; при других значениях a решений нет.

Тест

1. Г. **2.** В. **3.** В. **4.** Г. **5.** Д. **6.** Б.
7. 1 — В; 2 — А; 3 — Г; 4 — Д. **8.** 1 — Б; 2 — Д; 3 — Г; 4 — В.
9. 1 — Д; 2 — А; 3 — В; 4 — Б. **10.** 4. **11.** 30. **12.** –45.

7. Прогрессии

Практика

1. $\log_2\left(2+\sqrt{5}\right)$
2. 70
3. 2

Тест

1. Д. **2.** Г. **3.** Д. **4.** А. **5.** Г. **6.** В.
7. 1 — В; 2 — Д; 3 — А; 4 — Г. **8.** 1 — А; 2 — В; 3 — Д; 4 — Г.
9. 1 — Г; 2 — В; 3 — Б; 4 — Д. **10.** 44. **11.** 10. **12.** 0,1875.

8. Элементы математического анализа

Практика

1. –8; 72
2. $a_1 = 14$ м/с^2; $a_2 = 18$ м/с^2
3. $27 - \frac{14}{\ln 2}$

Тест

1. В. **2.** Г. **3.** В. **4.** Д. **5.** А. **6.** Г.
7. 1 — Д; 2 — Г; 3 — А; 4 — В. **8.** 1 — Б; 2 — А; 3 — Д; 4 — В.
9. 1 — Г; 2 — Д; 3 — Б; 4 — А. **10.** –16. **11.** 1. **12.** 1,5.

9. Комбинаторика. Элементы теории вероятностей и статистики

Практика

1. 0,6
2. 0,1055
3. $\frac{3}{28}$

Тест

1. Д. **2.** Г. **3.** Г. **4.** Г. **5.** Г. **6.** А.
7. 1 — Д; 2 — Г; 3 — А; 4 — В. **8.** 1 — Б; 2 — А; 3 — В; 4 — Д.
9. 1 — Г; 2 — В; 3 — Д; 4 — Б. **10.** 336. **11.** 0,5. **12.** 0,88.

10. Углы. Круг

Практика

1. 40°; 140°
2. 52°; 52°; 128°; 128°
3. 90°

Тест

1. Д. 2. Г. 3. Б. 4. Г. 5. Д. 6. Б.
7. 1 — Д; 2 — Б; 3 — А; 4 — В. 8. 1 — В; 2 — Д; 3 — А; 4 — Г.
9. 1 — Г; 2 — В; 3 — Б; 4 — Д. 10. 60. 11. 132. 12. 20.

11. Треугольники

Практика

1. 240 см^2
2. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$
3. $\sqrt{10}$ см

Тест

1. Г. 2. В. 3. А. 4. Г. 5. Б. 6. В.
7. 1 — Д; 2 — А; 3 — Б; 4 — Г.
8. 1 — Д; 2 — А; 3 — Б; 4 — Г. 9. 5. 10. 56. 11. 33.

12. Четырехугольники и многоугольники

Практика

1. $\frac{9}{2}r^2$
2. $\frac{c^2-d^2}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha$
3. 0,24 м^2

Тест

1. Г. 2. В. 3. А. 4. Г. 5. Д. 6. Б.
7. 1 — Б; 2 — А; 3 — В; 4 — Д. 8. 1 — В; 2 — А; 3 — Д; 4 — Г.
9. 1 — В; 2 — Д; 3 — Б; 4 — Г. 10. 26. 11. 30. 12. 25.

13. Взаимное размещение прямых и плоскостей в пространстве

Практика

1. 8 см; 16 см
2. $a\sqrt{2}$; $2a$
3. 8 см; 17 см

Тест

1. Б. 2. А. 3. В. 4. В. 5. Б. 6. Д.
7. 1 — Г; 2 — Д; 3 — Б; 4 — В. 8. 1 — А; 2 — Д; 3 — В; 4 — Б.
9. 8. 10. 3,5. 11. 10.

14. Многогранники

Практика

1. $4\sqrt{2}$ см^2.
2. 48 см^3.
3. $18\sqrt{3}$ см^3.

Тест

1. Д. **2.** В. **3.** Г. **4.** Б. **5.** Г. **6.** Д.
7. 1 — Б; 2 — А; 3 — Г; 4 — Д. **8.** 1 — Б; 2 — Г; 3 — Д; 4 — В.
9. 8. **10.** 24. **11.** 1.

15. Тела вращения

Практика

1. $\dfrac{Sl}{4\pi}$
2. $\dfrac{7}{27}$
3. $\dfrac{\pi\sqrt{6}a^2}{108}$; $\dfrac{\pi a^2}{4}$

Тест

1. Г. **2.** Б. **3.** В. **4.** Д. **5.** В. **6.** Б.
7. 1 — А; 2 — Д; 3 — В; 4 — Б. **8.** 1 — В; 2 — А; 3 — Г; 4 — Д.
9. 1 — А; 2 — Д; 3 — Г; 4 — В. **10.** 0,6. **11.** 40. **12.** 72.

16. Декартовы координаты и векторы

Практика

1. $\alpha = -4$, $\beta = 2$ або $\alpha = -8$, $\beta = -2$
2. –29; 14
3. 4

Тест

1. А. **2.** Д. **3.** Г. **4.** Д. **5.** А. **6.** Г.
7. 1 — Д; 2 — А; 3 — В; 4 — Б. **8.** 1 — Б; 2 — Д; 3 — В; 4 — А.
9. 1 — В; 2 — Д; 3 — Г; 4 — А. **10.** 90. **11.** 25. **12.** 24.

Тренировочная экзаменационная работа в формате ЕГЭ-2013

B1 60 000; **B2** 13; **B3** 13,5; **B4** 385; **B5** –0,125; **B6** 34; **B7** –2;**B8** 0,8; **B9** 18; **B10** 0,0007; **B11** 3; **B12** 10; **B13** 4; **B14** 8; **C1** (–0,5;1); **C2** $\dfrac{2a}{3}$; **C3** $[-6; -2) \cup (2; 3] \cup (4; +\infty)$; **C4** $10\dfrac{5}{8}$; **C5** –3; **C6** 552 и 24.

Алфавитный указатель

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Ч

Ш

Э

Содержание

Учебное издание

КАПЛУН Александр Иванович

МАТЕМАТИКА
УЧЕБНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

Ответственные редакторы
Оксана Морозова, Наталья Калиничева

Технический редактор
Галина Логвинова

Сдано в набор 15.02.13. Подписано в печать 20.06.13.
Формат 70×100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Тираж 4000 экз. Заказ

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80. Тел.: (863) 261-89-76, тел./факс: (863) 261-89-50.
Сайт издательства: phoenixrostov.ru. Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru.
E-mail: morozovatext@aaanet.ru