

К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ
ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

50

ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

2017

**ТИПОВЫЕ
ТЕСТОВЫЕ
ЗАДАНИЯ**

50 вариантов заданий

- Ответы и решения
- Критерии оценок
- Бланки ответов



ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

50 вариантов заданий

Ответы и решения

Критерии оценок

Бланки ответов

*Издательство
«ЭКЗАМЕН»*

МОСКВА
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ	9
Инструкция по выполнению работы	9
Тренировочная работа 1.....	10
Часть 1	10
Часть 2	12
Тренировочная работа 2.....	14
Часть 1	14
Часть 2	16
Тренировочная работа 3.....	18
Часть 1	18
Часть 2	20
Тренировочная работа 4.....	22
Часть 1	22
Часть 2	24
Тренировочная работа 5.....	26
Часть 1	26
Часть 2	28
Тренировочная работа 6.....	30
Часть 1	30
Часть 2	32
Тренировочная работа 7.....	34
Часть 1	34
Часть 2	36
Тренировочная работа 8.....	38
Часть 1	38
Часть 2	40
Тренировочная работа 9.....	42
Часть 1	42
Часть 2	44
Тренировочная работа 10.....	46
Часть 1	46
Часть 2	48
Тренировочная работа 11.....	50
Часть 1	50
Часть 2	52

Тренировочная работа 12	54
Часть 1	54
Часть 2	56
Тренировочная работа 13	58
Часть 1	58
Часть 2	60
Тренировочная работа 14	62
Часть 1	62
Часть 2	64
Тренировочная работа 15	66
Часть 1	66
Часть 2	68
Тренировочная работа 16	70
Часть 1	70
Часть 2	72
Тренировочная работа 17	74
Часть 1	74
Часть 2	76
Тренировочная работа 18	78
Часть 1	78
Часть 2	80
Тренировочная работа 19	82
Часть 1	82
Часть 2	84
Тренировочная работа 20	86
Часть 1	86
Часть 2	88
Тренировочная работа 21	90
Часть 1	90
Часть 2	91
Тренировочная работа 22	93
Часть 1	93
Часть 2	95
Тренировочная работа 23	97
Часть 1	97
Часть 2	99
Тренировочная работа 24	101
Часть 1	101
Часть 2	103

Тренировочная работа 25	105
Часть 1	105
Часть 2	107
Тренировочная работа 26	109
Часть 1	109
Часть 2	111
Тренировочная работа 27	113
Часть 1	113
Часть 2	115
Тренировочная работа 28	117
Часть 1	117
Часть 2	119
Тренировочная работа 29	121
Часть 1	121
Часть 2	123
Тренировочная работа 30	125
Часть 1	125
Часть 2	127
Тренировочная работа 31	125
Часть 1	129
Часть 2	131
Тренировочная работа 32	133
Часть 1	133
Часть 2	135
Тренировочная работа 33	138
Часть 1	138
Часть 2	140
Тренировочная работа 34	142
Часть 1	142
Часть 2	144
Тренировочная работа 35	145
Часть 1	146
Часть 2	148
Тренировочная работа 36	150
Часть 1	150
Часть 2	152
Тренировочная работа 37	154
Часть 1	154
Часть 2	156

Тренировочная работа 38	159
Часть 1	159
Часть 2	161
Тренировочная работа 39	163
Часть 1	163
Часть 2	165
Тренировочная работа 40	167
Часть 1	167
Часть 2	169
Тренировочная работа 41	171
Часть 1	171
Часть 2	173
Тренировочная работа 42	175
Часть 1	175
Часть 2	177
Тренировочная работа 43	179
Часть 1	179
Часть 2	180
Тренировочная работа 44	183
Часть 1	183
Часть 2	185
Тренировочная работа 45	187
Часть 1	187
Часть 2	189
Тренировочная работа 46	191
Часть 1	191
Часть 2	193
Тренировочная работа 47	195
Часть 1	195
Часть 2	197
Тренировочная работа 48	199
Часть 1	199
Часть 2	201
Тренировочная работа 49	203
Часть 1	203
Часть 2	205
Тренировочная работа 50	207
Часть 1	207
Часть 2	209

Решение заданий. Глава I. Часть 2	212
Тренировочная работа 2. Часть 2	212
Тренировочная работа 6. Часть 2	217
Тренировочная работа 9. Часть 2	222
веты. Глава I	230
Тренировочная работа 1	230
Тренировочная работа 2	230
Тренировочная работа 3	230
Тренировочная работа 4	231
Тренировочная работа 5	231
Тренировочная работа 6	231
Тренировочная работа 7	232
Тренировочная работа 8	232
Тренировочная работа 9	232
Тренировочная работа 10	233
Тренировочная работа 11	233
Тренировочная работа 12	233
Тренировочная работа 13	234
Тренировочная работа 14	234
Тренировочная работа 15	234
Тренировочная работа 16	235
Тренировочная работа 17	235
Тренировочная работа 18	235
Тренировочная работа 19	236
Тренировочная работа 20	236
Тренировочная работа 21	236
Тренировочная работа 22	237
Тренировочная работа 23	237
Тренировочная работа 24	237
Тренировочная работа 25	238
Тренировочная работа 26	238
Тренировочная работа 27	238
Тренировочная работа 28	239
Тренировочная работа 29	239
Тренировочная работа 30	239
Тренировочная работа 31	240
Тренировочная работа 32	240
Тренировочная работа 33	240
Тренировочная работа 34	241
Тренировочная работа 35	241
Тренировочная работа 36	241
Тренировочная работа 37	242
Тренировочная работа 38	242
Тренировочная работа 39	242
Тренировочная работа 40	243
Тренировочная работа 41	243
Тренировочная работа 42	243
Тренировочная работа 43	244

Тренировочная работа 44	244
Тренировочная работа 45	244
Тренировочная работа 46	245
Тренировочная работа 47	245
Тренировочная работа 48	245
Тренировочная работа 49	246
Тренировочная работа 50	246

ГЛАВА I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 9 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 5 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–14 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 15–21 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 1

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

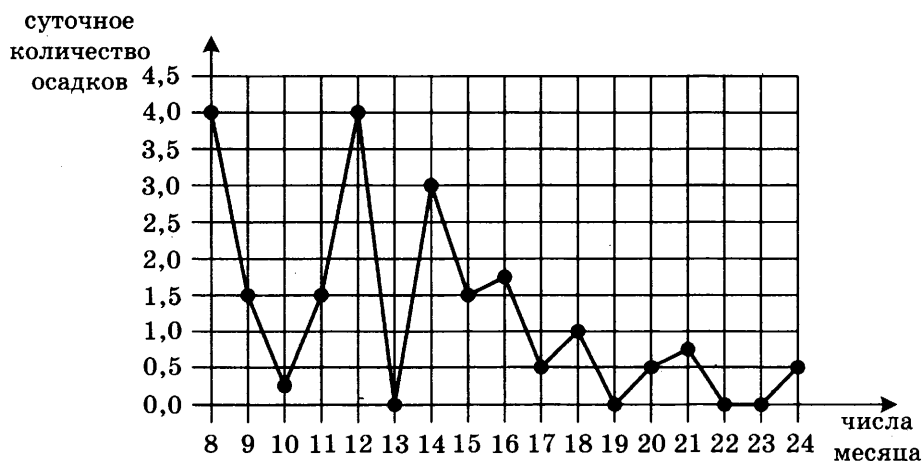
Часть 1

1

1. Поезд Екатеринбург—Москва отправляется в 7:23, а прибывает в 9:23 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода осадков не было.



3

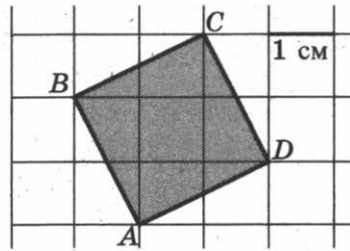
3. Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	5	4	3	5	3
Б	4	2	2	1	5
В	5	4	2	4	2

4. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

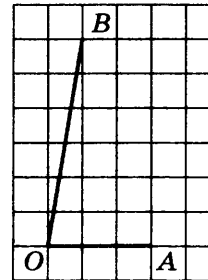
5. В среднем из каждых 50 поступивших в продажу аккумуляторов 48 аккумуляторов заряжены. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор не заряжен.

 5

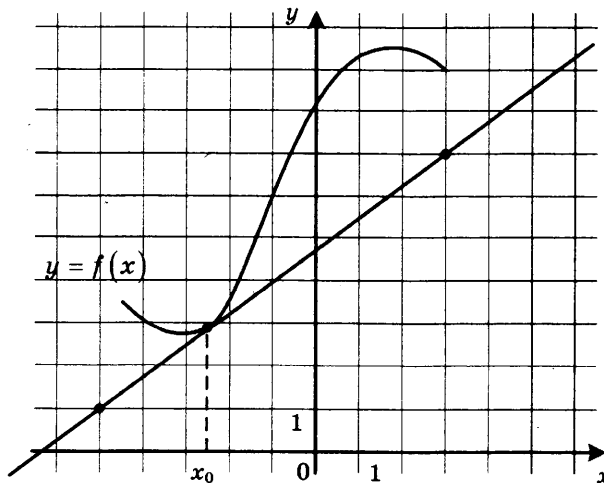
6. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{7x-8} = 2$.

 6

7. Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.

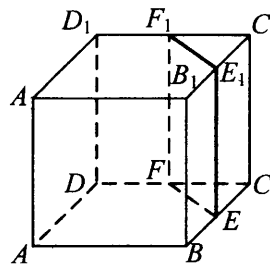

 7

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

 8


9

9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер $BC, DC, B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 1. Найдите объём куба.



Часть 2

10

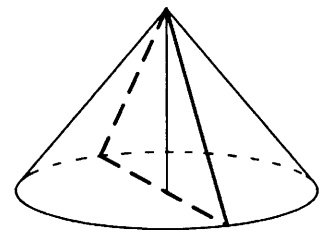
10. Найдите $16 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,5$.

11

11. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 25$ метров, а зазор между соседними рельсами равен 12 мм. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре зазор между рельсами исчезнет? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

12

12. Диаметр основания конуса равен 14, а длина образующей — 25. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



13

13. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,3 км от места отправления. Один идёт со скоростью 4 км/ч, а другой — со скоростью 4,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x - 4 \operatorname{tg} x + \pi - 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot (0,2)^{-\sin x}$.

 15

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right].$$

16. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 5.

 16

а) Постройте прямую пересечения плоскости $BB_1 D_1 D$ с плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 .

б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 , и плоскостью основания призмы.

17. Решите неравенство $\frac{2}{x^2 - 12x + 35} + \frac{3}{x^2 - 17x + 70} \leq 0$.

 17

18. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Из вершины A опущены перпендикуляры AF , AH , AP и AQ на прямые DE , BE , CD и BC соответственно.

 18

а) Докажите, что $\angle FAH = \angle PAQ$.

б) Найдите AH , если $AF = a$, $AP = b$ и $AQ = c$.

19. 31 декабря 2014 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Родион переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Родион взял деньги в банке?

 19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

 20

$$\frac{a - (a^2 - 2a - 3)\cos x + 4}{\sin^2 x + a^2 + 1} < 1$$

содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 312 и

 21

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 2

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

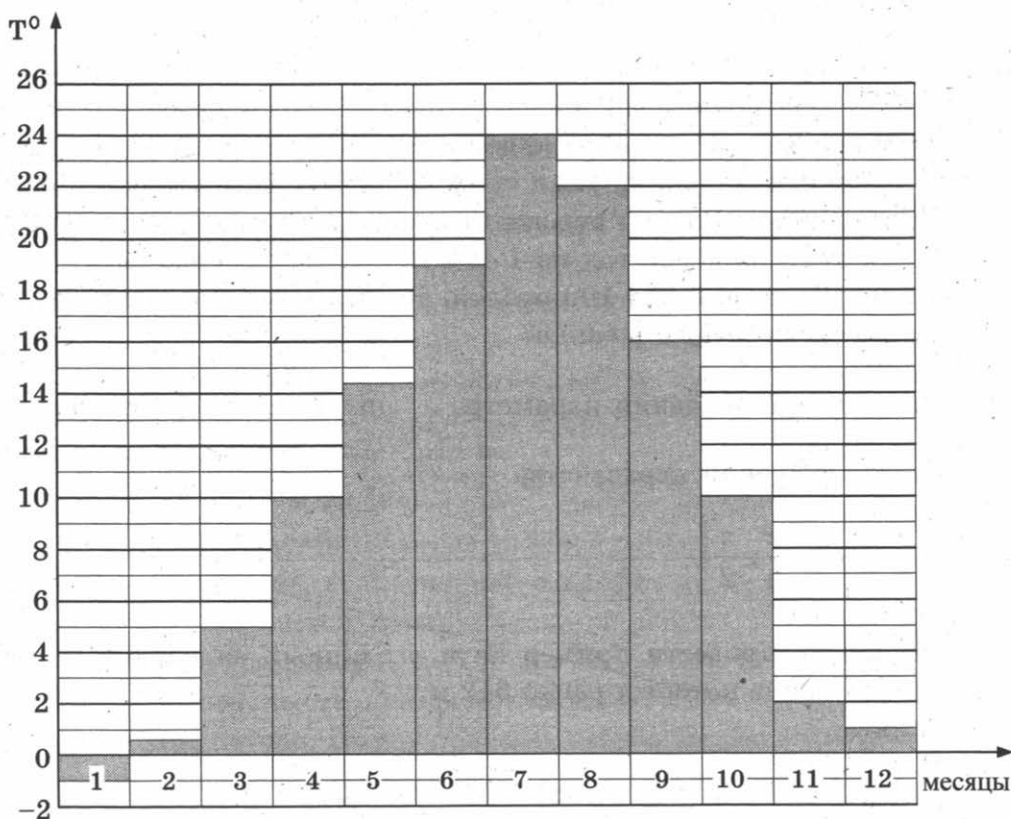
Часть 1

1

1. Флакон шампуня стоит 190 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

2

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Симферополе в 1988 году.

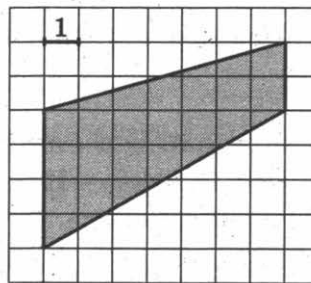


3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	10 500	10	6	1960
Дельта	11 600	5	6	2040
Омикрон	12 700	20	12	860

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

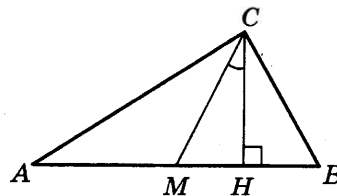
4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



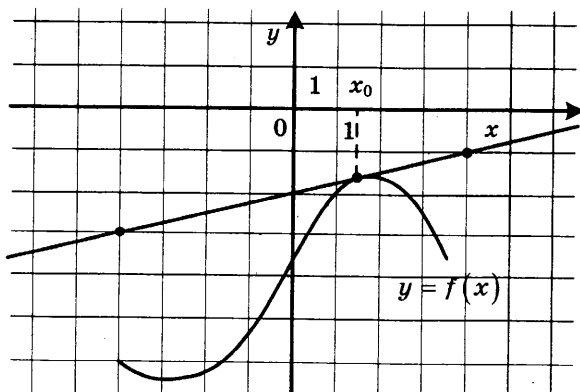
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{1-6x} = 7$.

7. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 26° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .


 3

 4

 5

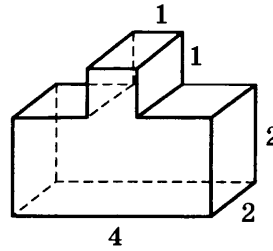
 6

 7

 8

9

9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10

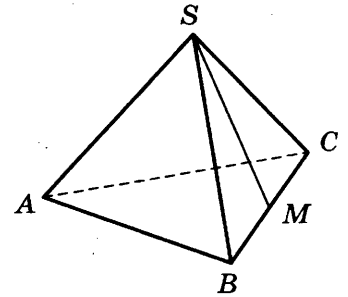
10. Найдите значение выражения $\frac{6 \cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

11

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $AB = 6$, а площадь боковой поверхности равна 45. Найдите длину отрезка SM .



13

13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 21 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 19$ на отрезке $[-6; -2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $4 \sin^4 2x + 3 \cos 4x - 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.
16. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64.
а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.
б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна 64.
17. Решите неравенство $\frac{2 - (x - 6)^{-1}}{5(x - 6)^{-1} - 1} \leq -0,2$.
18. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.
19. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?
20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.
21. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

15

16

17

18

19

20

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 3

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

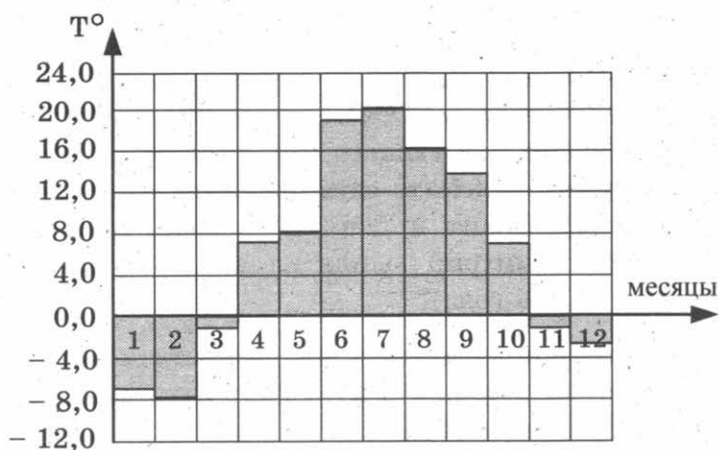
Часть 1

1

1. Для ремонта квартиры купили 42 рулона обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

2

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев второго полугодия 1999 года средняя температура была ниже 14°C .

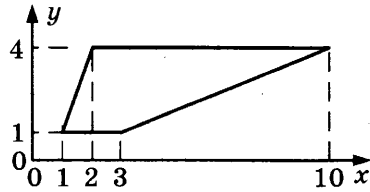


3

3. Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трёх разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Пользуясь данными таблицы, определите, в каком случае цена одного квадратного метра плитки будет наименьшей. В ответ запишите найденную наименьшую цену квадратного метра в рублях.

Размер плитки (см)	Количество плиток в пачке	Цена пачки
20×30	20	612 р.
30×40	11	679 р. 80 к.
20×20	29	585 р. 80 к.

4. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.


 4

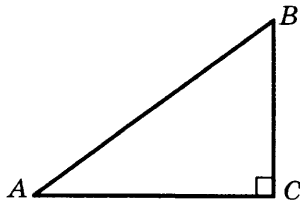
5. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

 5

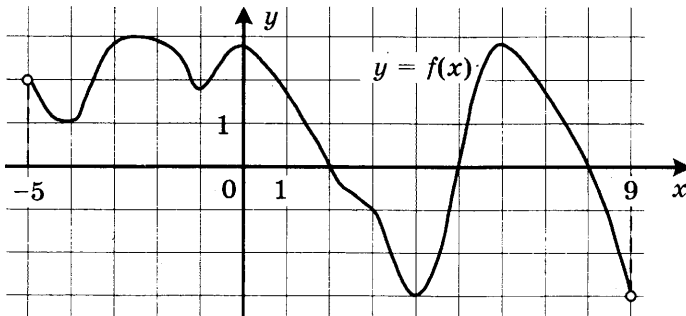
6. Решите уравнение $\sqrt{7-x} = 4$.

 6

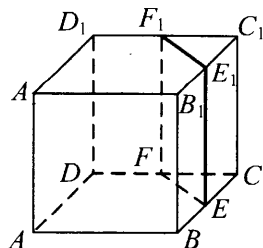
7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите $\sin B$.

 7


8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

 8


9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер $BC, DC, B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 21. Найдите объём куба.

 9


Часть 2

10

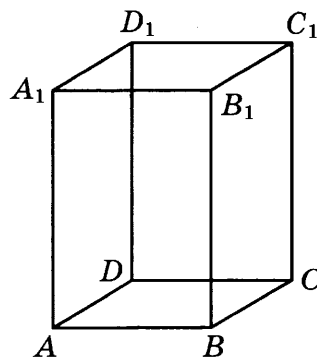
10. Найдите значение выражения $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.

11

11. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,1$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 33 секунд. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

12

12. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.



13

13. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4, 5; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

 15

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

 16

а) Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью, проходящей через диаметры оснований, перпендикулярные этим хордам.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

17. Решите неравенство $2^x + 3 \cdot 2^{-x} \leq 4$.

 17

18. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .

 18

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

19. Степан хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Степан взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 290 тысяч рублей?

 19

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

 20

$$a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

21. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

 21

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 4

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

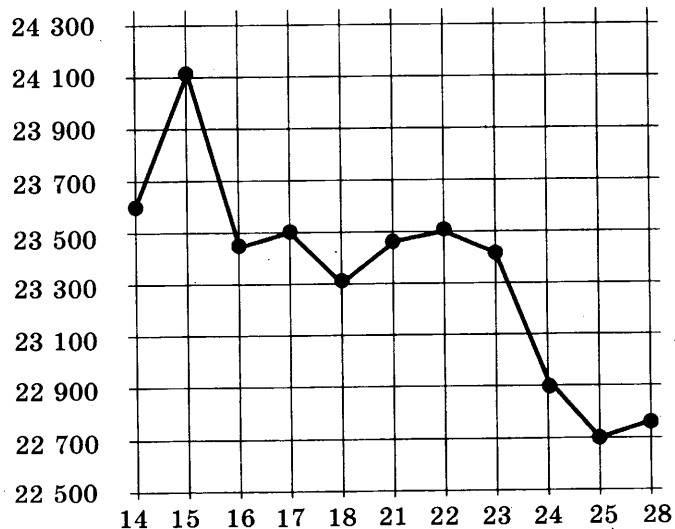
1

1. Каждый день во время конференции расходуется 120 пакетиков чая. Конференция длится 3 дня. Чай продаётся в пачках по 50 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

2

2. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года.

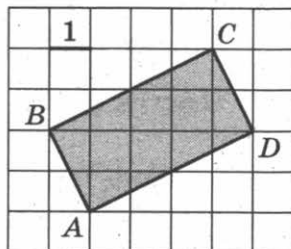
По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



3. Чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 70 рублей за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 100 г и окрасить её. Один пакетик краски стоит 40 рублей и рассчитан на окраску 300 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

 3

4. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.


 4

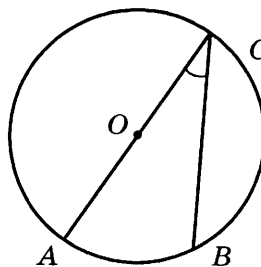
5. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выигрывает.

 5

6. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

 6

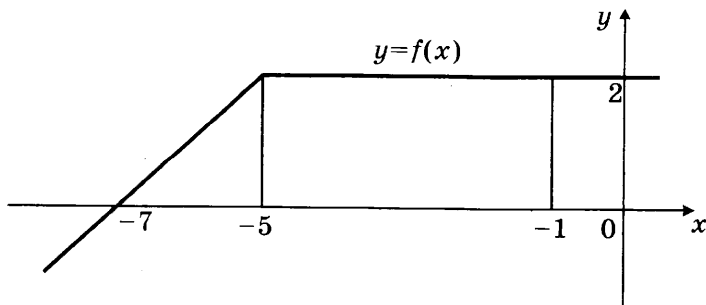
7. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $1/5$ окружности. Ответ дайте в градусах.


 7

8. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

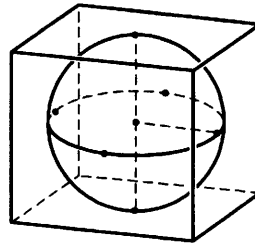
 8

$$\int_{-7}^{-1} f(x) dx.$$



9

9. Шар, объём которого равен 21π , вписан в куб. Найдите объём куба.



Часть 2

10

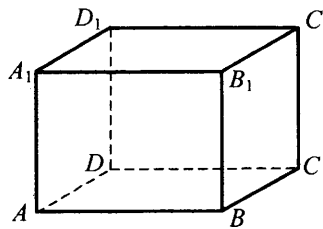
10. Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3,5$.

11

11. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин, $b = -0,2$ К/мин². Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

12

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 32$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C , C_1 и A .



13

13. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

13

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 11 \operatorname{tg} x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$.

 15

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

16. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

 16

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

17. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$.

 17

18. На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

 18

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

19. 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Пётр переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

 19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

 20

21. Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a - K^3$ делится без остатка на $27 - K$. Найдите a .

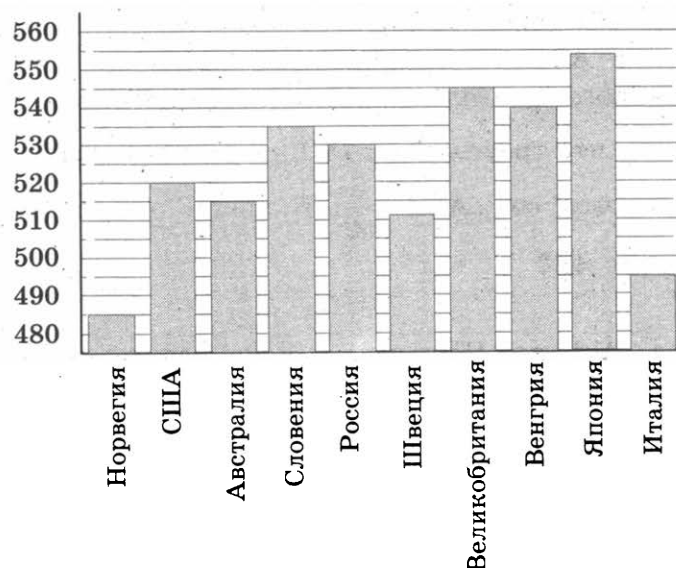
 21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 5

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

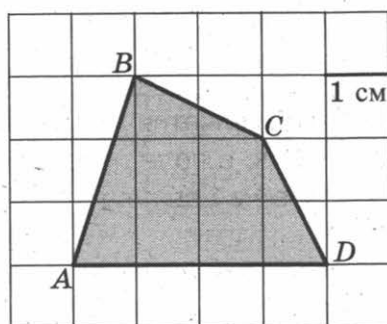
1. Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 26 кг яблок?
2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран второе место принадлежит Великобритании. Определите, какое место занимает Россия.



3. Для изготовления книжных полок требуется заказать 60 одинаковых стекол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла равна $0,15 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)
А	90	15
Б	80	20
В	140	Бесплатно

4. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

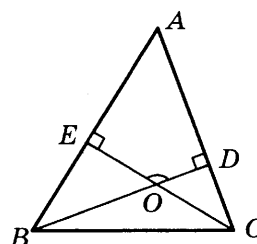
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

 5

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x + 31} = 9$.

 6

7. В треугольнике ABC угол A равен 56° , углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.

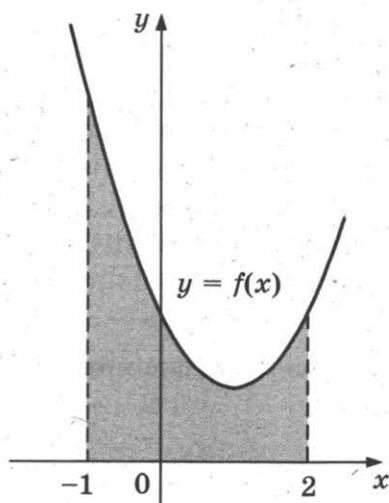

 7

8. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 5.$$

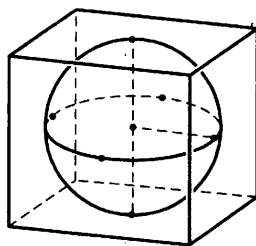
 8

Найдите площадь заштрихованной фигуры.



9

9. Шар, объём которого равен π , вписан в куб. Найдите объём куба.



Часть 2

10

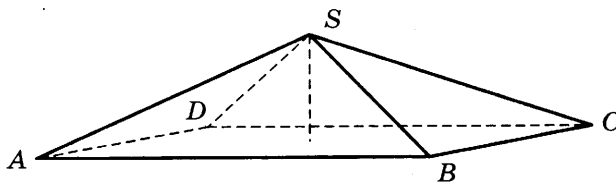
10. Найдите значение выражения $\frac{9 \sin 132^\circ}{\sin 228^\circ}$.

11

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{11} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $46,17 \cdot 10^{12}$. Определите температуру этой звезды.

12

12. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 8. Найдите её объём.



13

13. Первая труба наполняет бак объёмом 570 литров, а вторая труба — бак объёмом 530 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 4 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 5e^x - 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$.

 15

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5; -4]$.

16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра равны 1.

 16

а) Постройте прямую пересечения плоскости ABB_1 и плоскости, проходящей через точки C, C_1 перпендикулярно плоскости ACC_1 .

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

17. Решите неравенство $1 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2)$.

 17

18. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB .

 18

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

19. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 6 944 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

 19

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x + 2| + 3\sqrt{x^2 + 4x + 13} = 5a + 2|x - 2a + 2|$$

 20

имеет хотя бы один корень.

21. Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

 21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 6

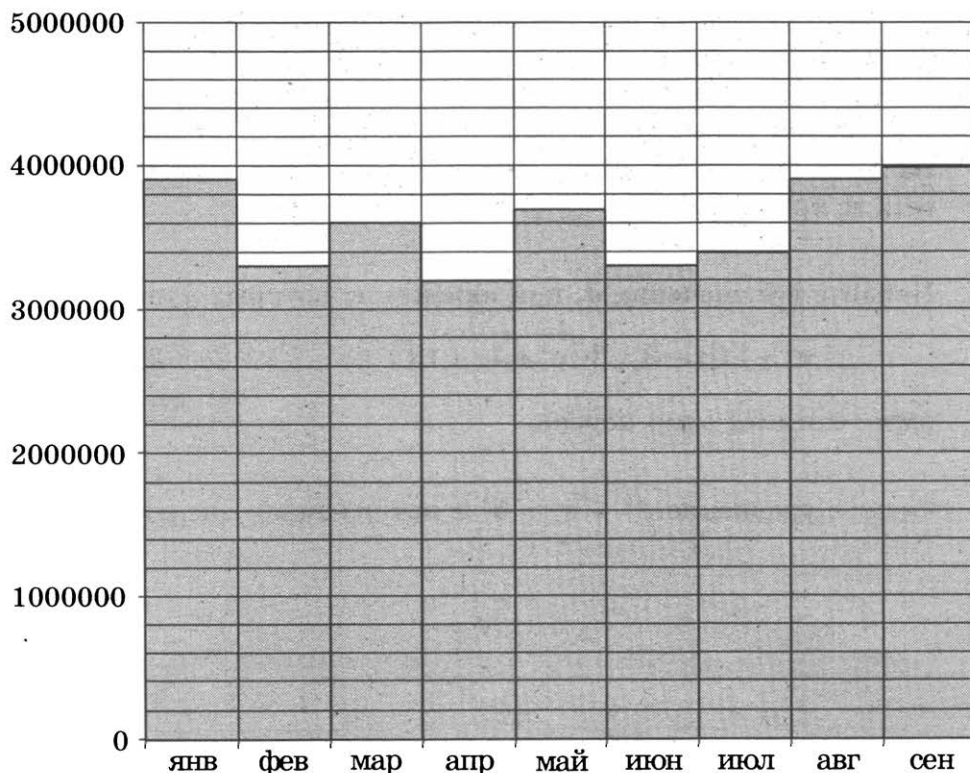
Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1	<input type="text"/>
---	----------------------

2	<input type="text"/>
---	----------------------

1. Система навигации, встроенная в спинку самолётного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 36 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.
2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

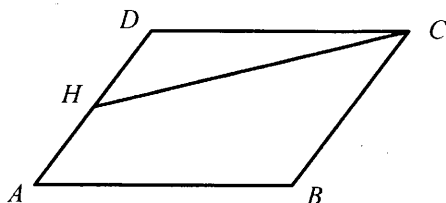
3

Наименование продукта	Архангельск	Ростов-на-Дону	Пенза
Говядина (1 кг)	282	237	247
Подсолнечное масло (1 л)	75	66	56
Молоко (1 л)	76	58	54
Сыр (1 кг)	276	317	284
Рис (1 кг)	52	42	40
Картофель (1 кг)	36	39	24

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 кг говядины, 1 л подсолнечного масла, 3 кг картофеля. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3. Точка H — середина стороны AD . Найдите площадь трапеции $AHCB$.

4



5. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 2 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

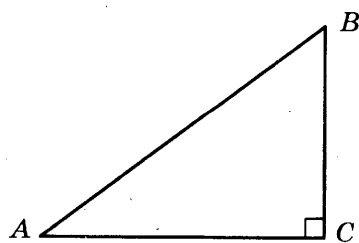
5

6. Найдите корень уравнения $\log_6(8-x) = \log_{36} 9$.

6

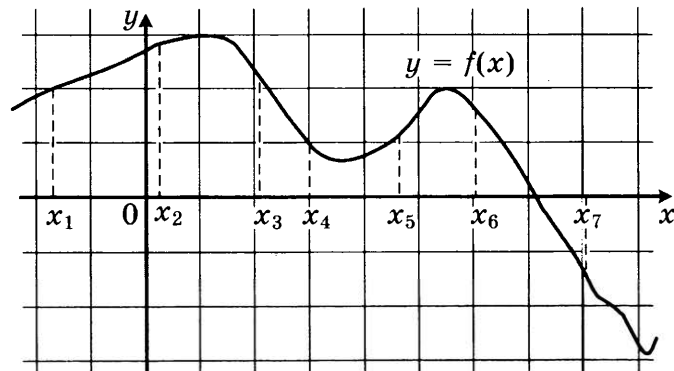
7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{3}{5}$. Найдите $\cos B$.

7

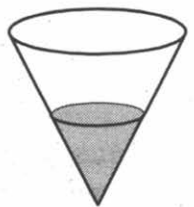


8.

8. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

9.

9. В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.). Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?



Часть 2

10.

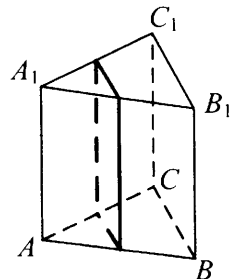
10. Найдите $4 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,5$.

11.

11. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.

12.

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 1, боковые рёбра равны 11. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1 .

13.

13. Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси?

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 11\lg x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2}\cos x}$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.
16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.
а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .
б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

15

16

17. Решите неравенство $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right)$
18. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.
а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

17

18

19. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых любое число из отрезка $2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

20

21. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящихся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 7

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

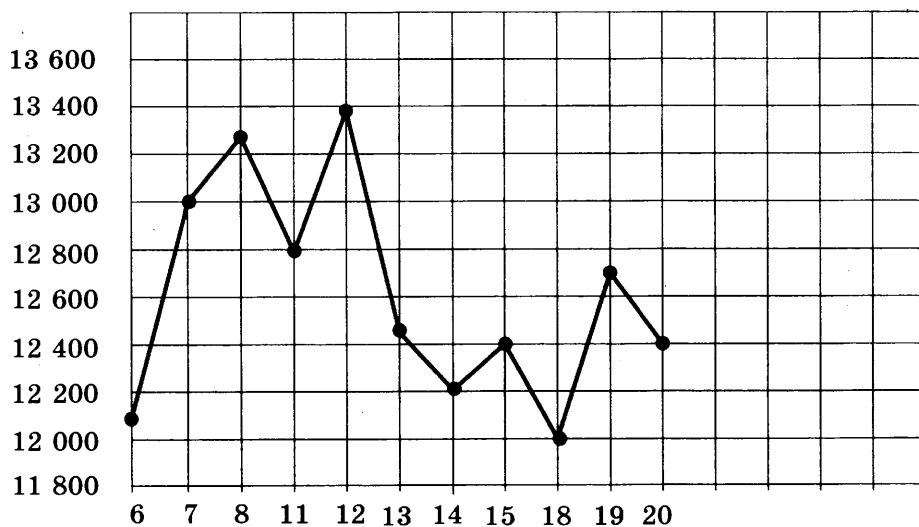
Часть 1

1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3500 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1700 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1100 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

2

2. На рисунке жирными точками показана цена тонны никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

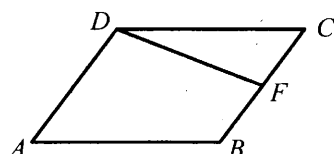
3

Салон	Цена телефона	Первоначальный взнос (в процентах от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа
Эпсилон	22 000	25	6	3760
Дельта	24 900	30	6	3520
Омикрон	26 900	20	12	1900

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты) и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 92. Точка F — середина стороны BC . Найдите площадь трапеции $ADFB$.

4



5. Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что первые два броска закончатся одинаково.

5

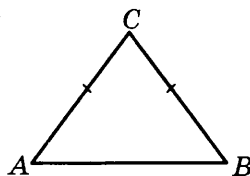
6. Найдите корень уравнения $\sqrt{4x+5} = 5$.

6

7. В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\sin A = \frac{4}{5}$.

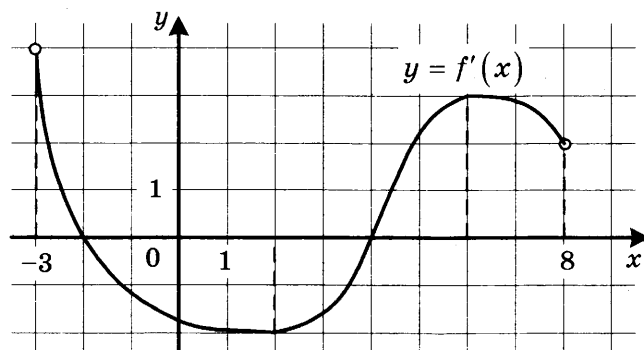
7

Найдите AB .



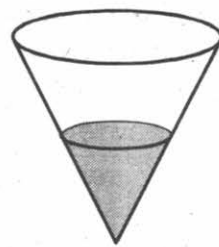
8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

8



9

9. В сосуд, имеющий форму конуса, налили 50 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.) Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?



Часть 2

10

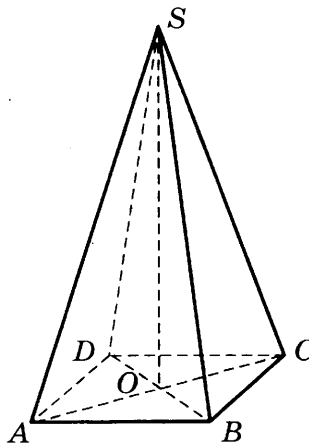
10. Вычислите $\log_5 135 - \log_5 5,4$.

11

11. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора получена экспериментально: $T = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -30$ К/мин², $b = 180$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Через сколько минут после начала работы нужно отключить прибор?

12

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 13$, $BD = 10$. Найдите длину отрезка SO .



13

13. В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 80}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $(16^{\sin x})^{\cos x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3} \sin x}$.

 15

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 2, точка M — середина ребра AB , точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

 16

а) Докажите, что прямая MF перпендикулярна прямой SC .

б) Найдите угол между плоскостью MBF и плоскостью ABC .

17. Решите неравенство $9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511$.

 17

18. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60° . Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O .

 18

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

19. 1 января 2015 года Тарас Павлович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Тарас Павлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Тарас Павлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

 19

20. При каких a уравнение $|x^2 - 4x - 5| - 3a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

 20

21. При каком наибольшем n найдётся n семизначных чисел, являющихся последовательными членами одной геометрической прогрессии?

 21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 8

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

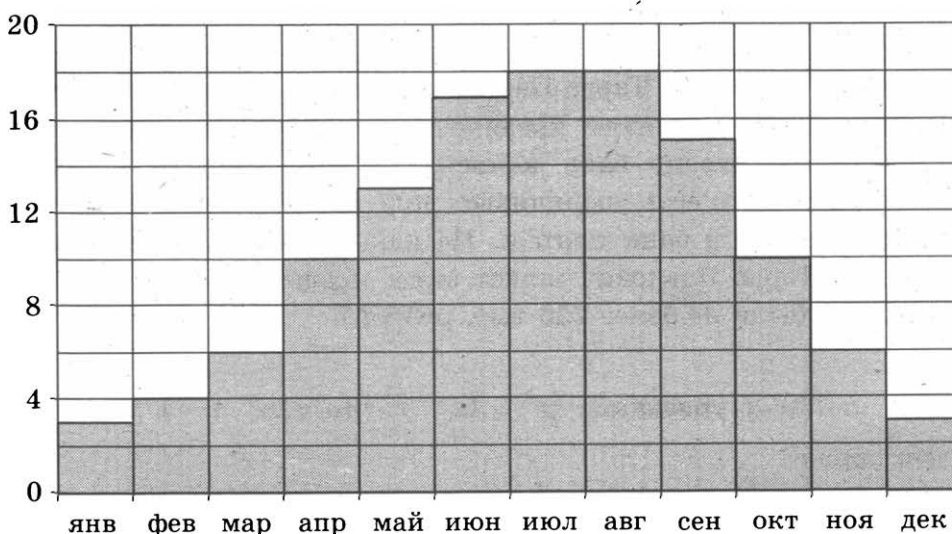
Часть 1

1

1. В спортивном лагере по настольному теннису каждый день ломается или теряется 8 теннисных шариков. Лагерная смена длится 18 дней. Шарик продают упаковками по 10 штук. Какое наименьшее количество упаковок шариков нужно купить на одну лагерную смену?

2

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была равна 10 градусам Цельсия.



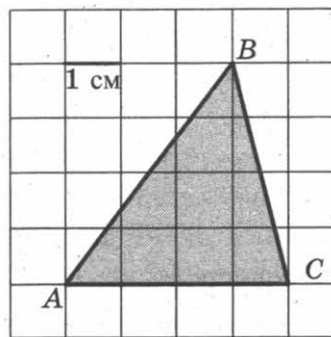
3

3. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки
А	300 руб.	Нет	14 руб.
Б	Бесплатно	15 мин. — 225 руб.	17 руб.
В	120 руб.	20 мин. — 350 руб.	16 руб.

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

4. Найдите площадь треугольника ABC . Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

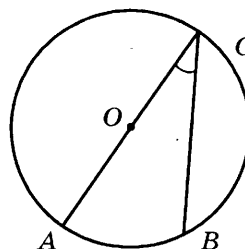
5. Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна $0,98$. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна $0,84$. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

 5

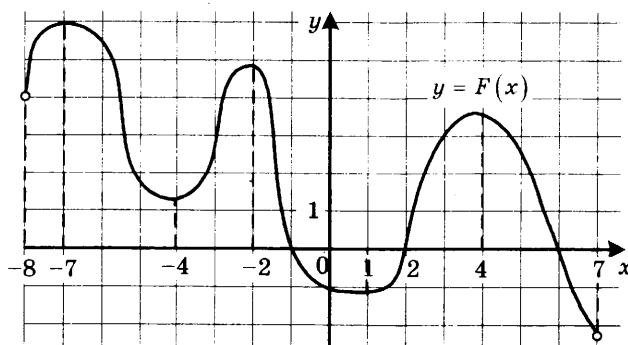
6. Найдите корень уравнения $\log_4(x + 7) = 2$.

 6

7. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{2}{9}$ окружности. Ответ дайте в градусах.


 7

8. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 5]$.

 8


9

9. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 98 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 7 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Часть 2

10

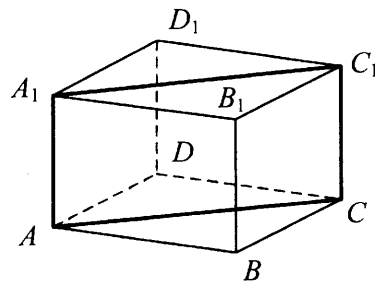
10. Найдите значение выражения $7 \cdot 5^{\log_5 2}$.

11

11. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 22$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,7$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 27,2 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

12

12. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 8, а диагональ BD_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .

13

13. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{27 + 6x - x^2}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $7^{x^2-2x} + 7^{x^2-2x-1} = 56$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.
16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковые рёбра равны 2, а стороны основания — 1,
 а) Докажите, что плоскость, проходящая через вершину S и середины рёбер AF и CD перпендикулярна плоскости основания.
 б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF .
17. Решите неравенство $\log_{x^3-9x^2+27x-27}(9-x) \geq 0$.
18. Противоположные стороны AD и BC четырёхугольника $ABCD$ параллельны. Через вершины B и D проведены параллельные прямые, пересекающие диагональ AC в точках M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MN = NC$.
 а) Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.
 б) Найдите отношение площади четырёхугольника $BMDN$ к площади параллелограмма $ABCD$.
19. 1 января 2015 года Василий Михайлович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Василий Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Василий Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 137,5 тыс. рублей?
20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2(k+1)\cos t - k}{\sin t + \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
21. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3825.
 а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
 б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

15

16

17

18

19

20

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 9

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

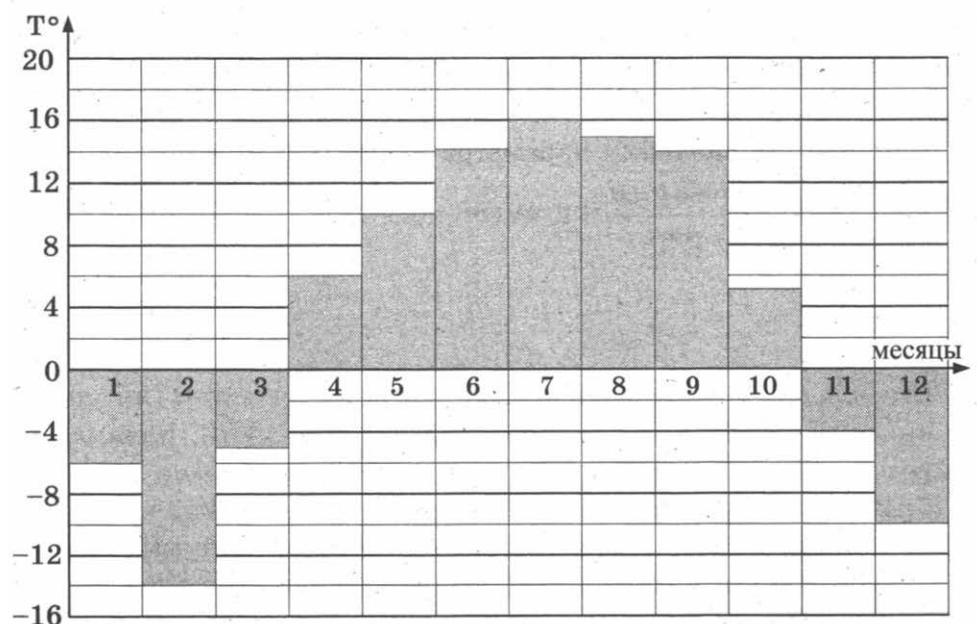
Часть 1

1

1. В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 26 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

2

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.

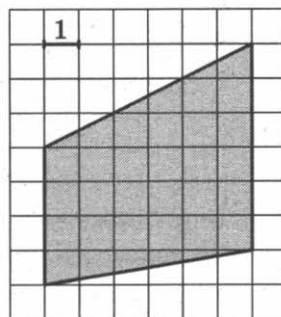


3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	11 900	15	12	910
Дельта	12 000	30	12	770
Омикрон	12 200	20	6	1700

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

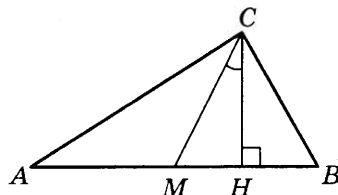
4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



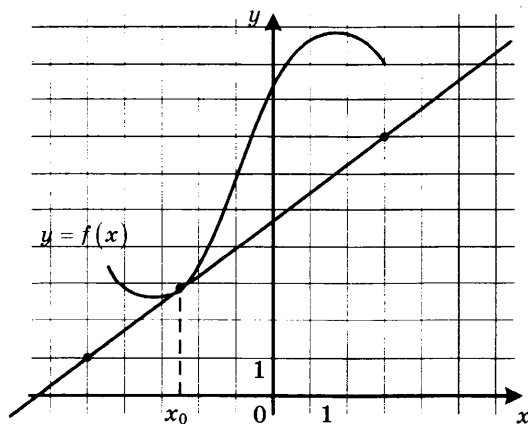
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырёхжды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{15 - 7x} = 8$.

7. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



3

4

5

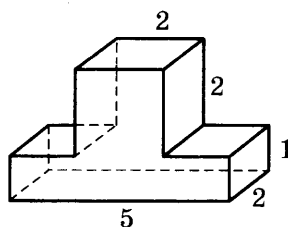
6

7

8

9

9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10

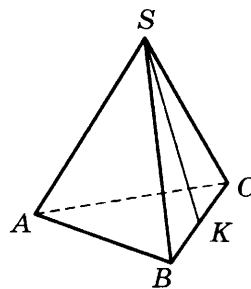
10. Найдите значение выражения $\frac{4 \cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

11

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $5,7 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $AB = 6$, а длина отрезка $SK = 7$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



13

13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 18x^2 + 17$ на отрезке $[-3; 3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.
16. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.
а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC .
17. а) Решите неравенство $1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}$.
18. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.
19. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?
20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.
21. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

15

16

17

18

19

20

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 10

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

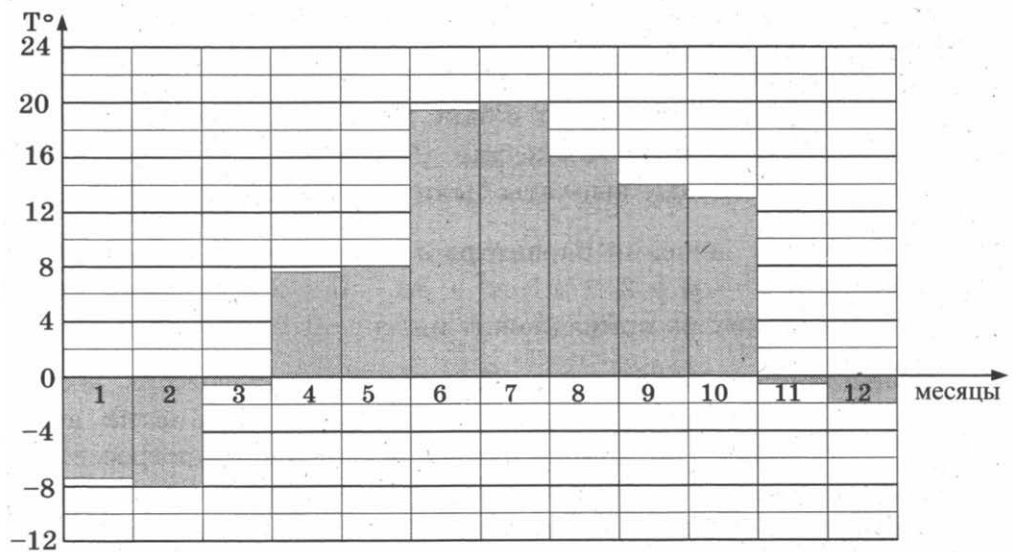
Часть 1

1

1. Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 950 рублей после понижения цены на 25%?

2

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разницу средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1999 году в Санкт-Петербурге. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

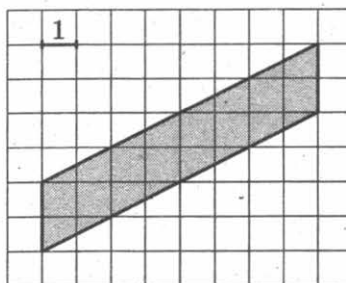
3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести пиджак ценой 9450 руб., футболку ценой

800 руб. и галстук ценой 900 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
2. Б. купит сначала пиджак и футболку, а потом галстук со скидкой.
3. Б. купит сначала пиджак и галстук, а потом футболку со скидкой.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

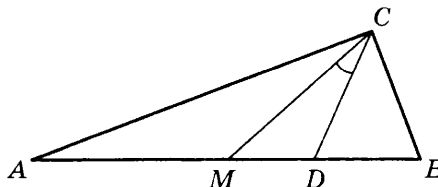
4. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



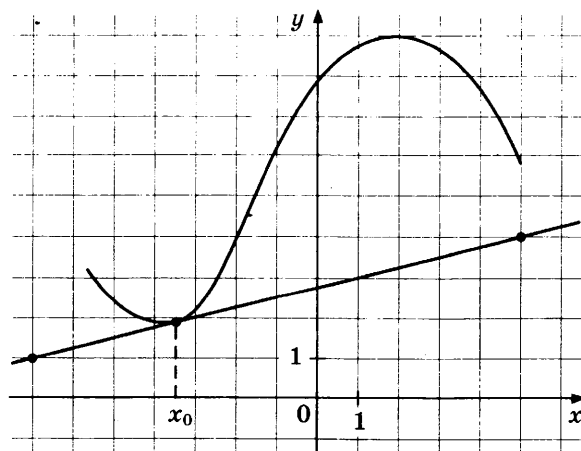
5. В группе туристов 5 человек, в том числе турист Д. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу Д. выпадет по жребию идти в село?

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{25 + 3x} = 4$.

7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 69° и 21° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

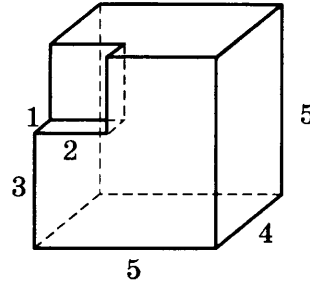


8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



9

9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10

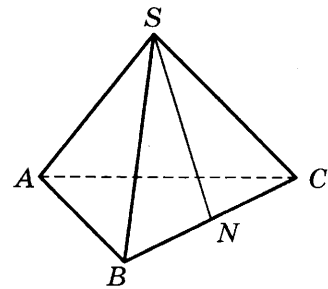
10. Найдите значение выражения $-20 \operatorname{tg} 52^\circ \cdot \operatorname{tg} 142^\circ$.

11

11. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 50 В? Ответ выразите в омах.

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $SN = 6$, а площадь боковой поверхности равна 72. Найдите длину отрезка AB .



13

13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 16 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она меньше 60 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 17$ на отрезке $[-1; 1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 \cos^2 x - \sin 2x = 0$.

 15

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

 16

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 .

17. Решите неравенство $2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \leq 0$.

 17

18. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

 18

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.

19. 31 декабря 2014 года Никита взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Никита переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 2 073 600 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 3 513 600 рублей, то за 2 года. Под какой процент Никита взял деньги в банке?

 19

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$ имеет два корня.

 20

21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 672 и

 21

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 11

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

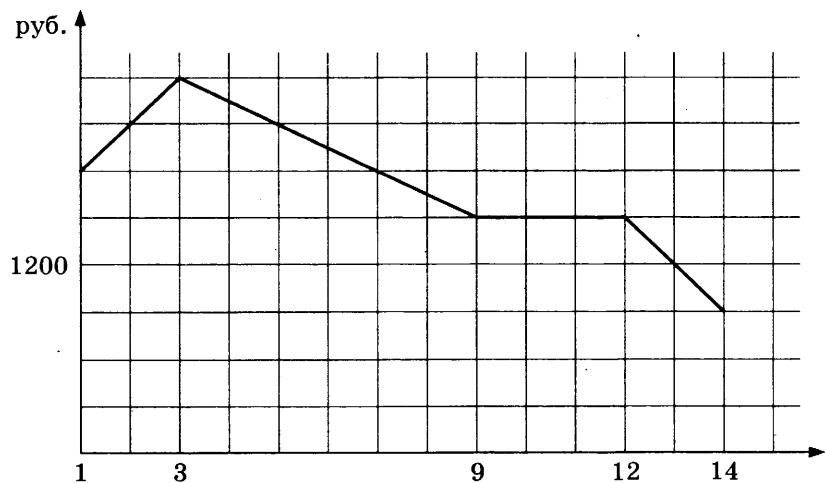
Часть 1

1

1. Футболка стоит 160 рублей. Какое наибольшее число футболок можно купить на 600 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 20%?

2

2. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



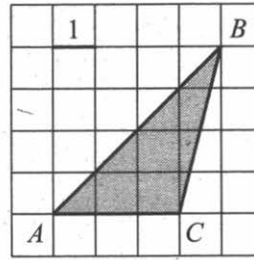
3

3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продается в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона	Первоначальный взнос (в процентах от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа
Эпсилон	23 400	10	12	2160
Дельта	25 300	5	6	4520
Омикрон	27 800	25	6	3600

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты) и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

4. Найдите площадь треугольника ABC .


 4

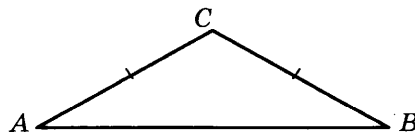
5. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

 5

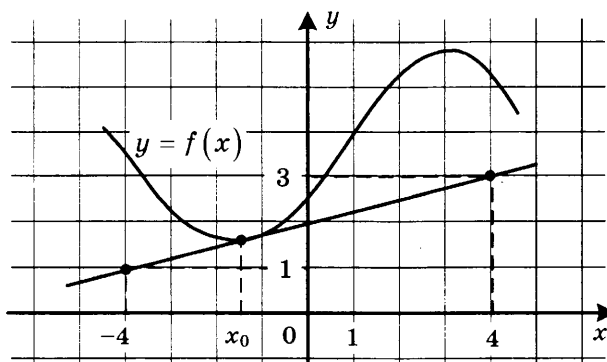
6. Решите уравнение $\sqrt{x+9} = 5$.

 6

7. В треугольнике ABC угол A равен 29° , $AC = BC$. Найдите угол C .


 7

8. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

 8


9. Объём цилиндра равен 12. Чему равен объём конуса, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный цилиндр?

 9

Часть 2

10

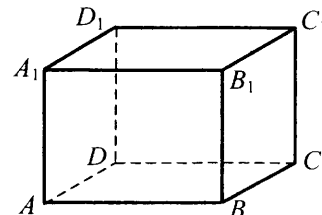
10. Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.

11

11. Зависимость объёма спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 160 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 280 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

12

12. В прямоугольном параллелепипеде $AB-CDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 27$, $AD = 36$, $AA_1 = 10$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D , D_1 и B .



13

13. Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 8e^x + 9$ на отрезке $[0; 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $3 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

16

16. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1 , причём $BP : PB_1 = 1 : 3$.
 а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно AC .
 б) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP .

17. Решите неравенство $\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} + \frac{2}{x - 3} \leq x$.

17

18. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .

18

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 60 и 80.

19. 31 декабря 2014 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Андрей переводит в банк 2 733 750 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

19

20. Найдите все неотрицательные значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

20

$$1 \leq \frac{2a + x^2 - 4 \log_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2 + 2a + 4} + \log_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

21. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

21

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи чисел получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 чисел получившейся последовательности, идущих подряд?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 12

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

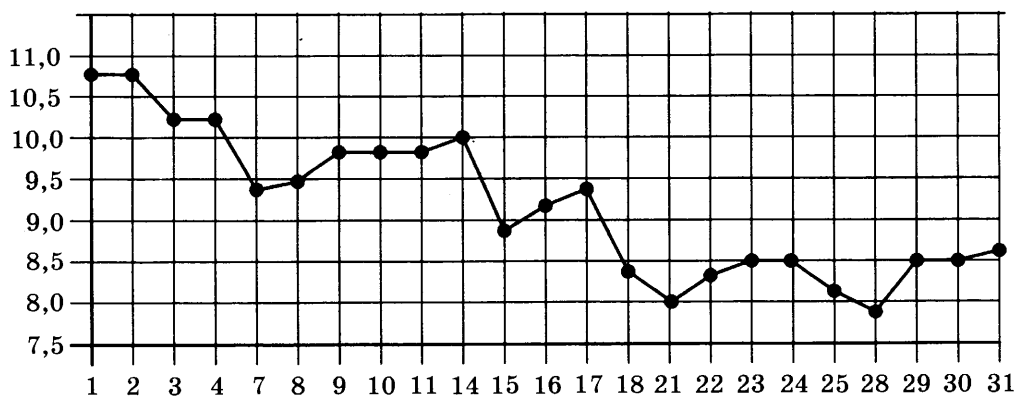
Часть 1

1

1. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

2

2. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра была наименьшей за указанный период.

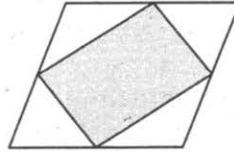


3

3. Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 шт. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответе напишите наименьшую сумму в рублях.

Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Доп. условия
А	394	300	Нет
Б	396	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3500 р.
В	398	200	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 р.

4. Площадь параллелограмма равна 14. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.


 4

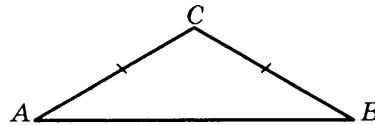
5. В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 990 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе. Результат округлите до тысячных.

 5

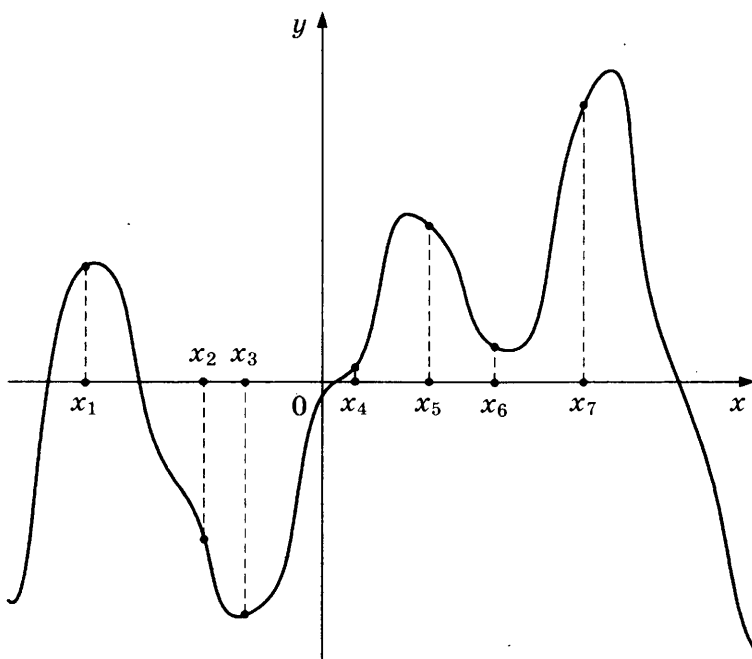
6. Найдите корень уравнения $\sqrt{14 + 5x} = 7$.

 6

7. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AB = \sqrt{3}$. Найдите AC .

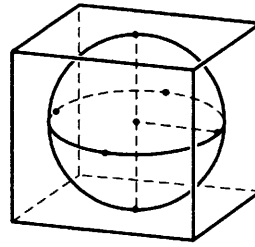

 7

8. На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?

 8


9

9. Шар, объём которого равен 42π , вписан в куб. Найдите объём куба.



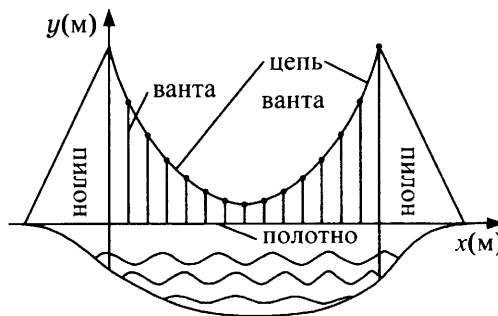
Часть 2

10

10. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$.

11

11. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,0013x^2 - 0,35x + 27$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



12

12. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 6, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

13

13. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1; 4]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $5^{x^2-4x+1} + 5^{x^2-4x} = 30$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 3]$.

 15

16. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{11}$. Расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 12.

а) Постройте прямую пересечения плоскости $BB_1 DD_1$ с плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 , и плоскостью основания призмы.

 16

17. Решите неравенство $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0$.

 17

18. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB .

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2} DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

 18

19. 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Михаил переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

 19

20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 + (2 - 2k) \sin t}{\cos t - \sin t} = 2k$$

имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

 20

21. Десятичная запись натурального числа n должна состоять из различных (не менее двух) цифр одной чётности, а само оно должно быть квадратом целого числа. Найдите все такие n .

 21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 13

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

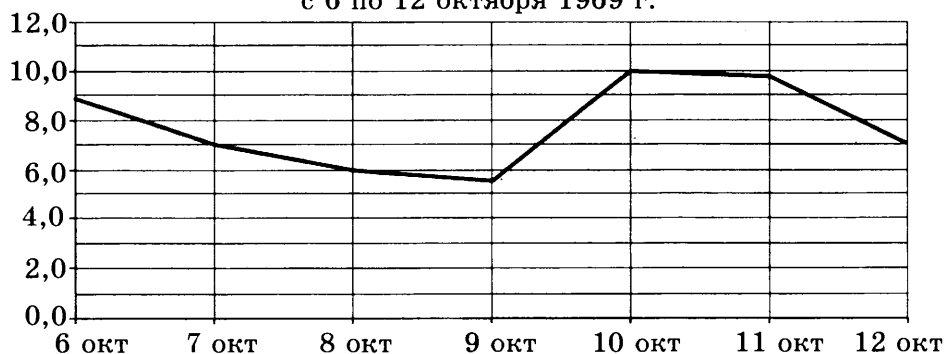
1

1. Сырок стоит 5 руб. 40 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 40 рублей?

2

2. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия.

Среднесуточная температура в Саратове
с 6 по 12 октября 1969 г.



Определите по графику, сколько дней из указанного периода средняя температура была в пределах от 6,5 °C до 9 °C.

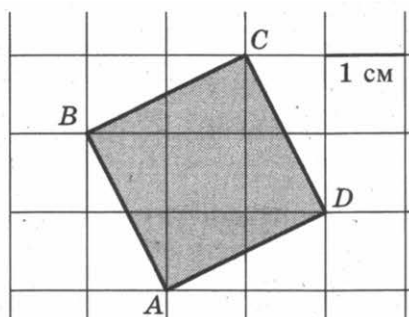
3

3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

Наименование продукта	Мурманск	Рязань	Тамбов
Говядина (1 кг)	288	260	202
Подсолнечное масло (1 л)	76	62	54
Молоко (1 л)	63	55	53
Сыр (1 кг)	284	257	245
Рис (1 кг)	56	37	40
Картофель (1 кг)	40	34	28

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 л молока, 1 кг сыра, 3 кг картофеля. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

4. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

5. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

 5

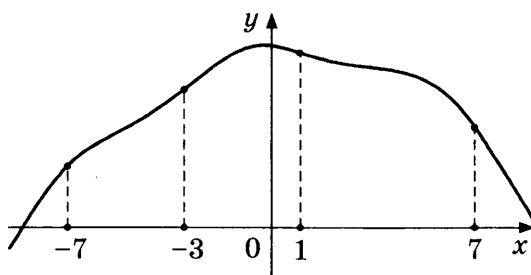
6. Решите уравнение $\sqrt{x+4} = 7$.

 6

7. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 11$, $DC = 33$, $AC = 28$.

 7

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7 , -3 , 1 , 7 . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

 8


9. Объём данного правильного тетраэдра равен 64 см^3 . Найдите объём правильного тетраэдра, ребро которого в 2 раза меньше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^3 .

 9

Часть 2

10

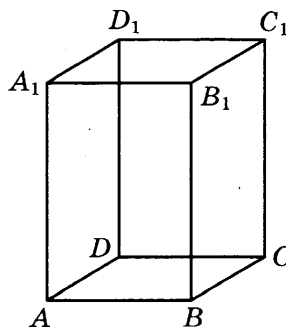
11

12

10. Найдите значение выражения $\log_3 13 - \log_3 117$.

11. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 200$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг?

12. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.



13

13. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 + 20x^3 - 65x$ на отрезке $[-4; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $6^{x^2-4x} + 6^{x^2-4x-1} = 42$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2; 4]$.

16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 6, точка M — середина ребра BC , точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды.

а) Постройте прямую пересечения плоскости MCF с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно прямой BC .

б) Найдите угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC .

16

17. Решите неравенство $\log_x(x-2) \cdot \log_x(x+2) \leq 0$.

17

18. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M , причём $AM:MB = 1:2$. Найдите диагональ AC , если известно, что $AD = 2\sqrt{3}$.

18

19. 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму в кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11%), затем Василий переводит в банк 3 696 300 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

19

20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2 + (4 - 4k) \cos t}{4 \cos t - \sin t} = 1$ не имеет решений на интервале $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

20

21. Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n , при которых уравнение $(x^2 + y^2)^{2010} = x^n \cdot y^n$ имеет натуральные решения.

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 14

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

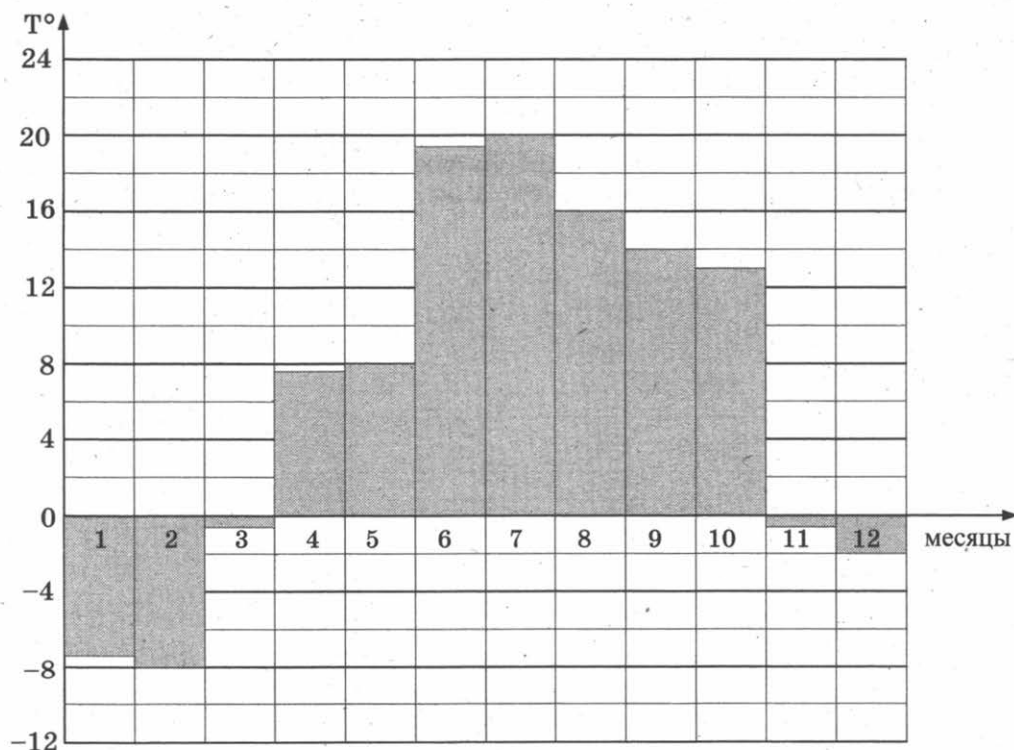
Часть 1

1

1. Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

2

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Санкт-Петербурге в 1999 году.



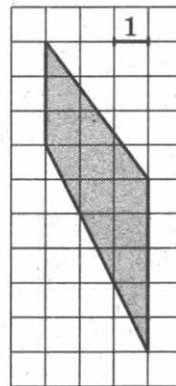
3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	9 400	10	6	1580
Дельта	9 500	20	12	720
Омикрон	9 900	20	6	1400

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

 3

4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

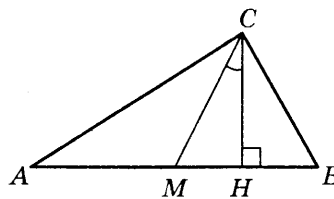
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

 5

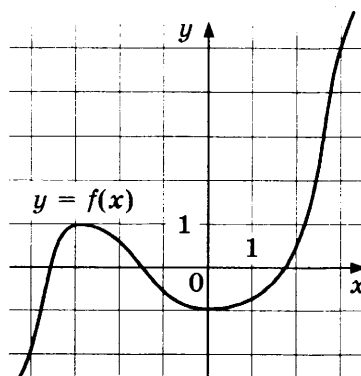
6. Найдите корень уравнения $\log_5(-2 - x) = 1$.

 6

7. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 32° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

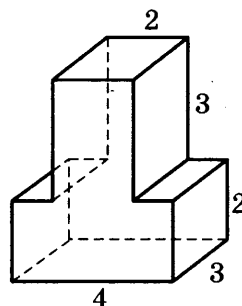

 7

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите точку, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 3]$.

 8


9

9. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10

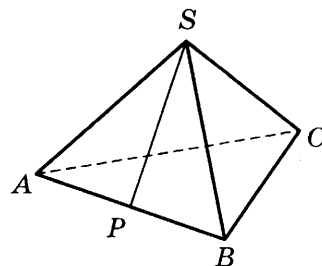
10. Найдите значение выражения $\frac{2 \cos 28^\circ}{\cos 152^\circ}$.

11

11. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{72} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $1,026 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $BC = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка SP .



13

13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 39 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 26 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

14

14. В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

15

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

16. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Точка L — середина ребра MB . Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$.

16

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые AO и LO перпендикулярны.

б) Найдите высоту данной пирамиды.

17. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 8x}{x - 7} \leq x$.

17

18. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую — в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

18

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

19. 31 декабря 2014 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Владимир переводит в банк 4 548 600 рублей. Какую сумму взял Владимир в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

20

21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

21

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 15

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

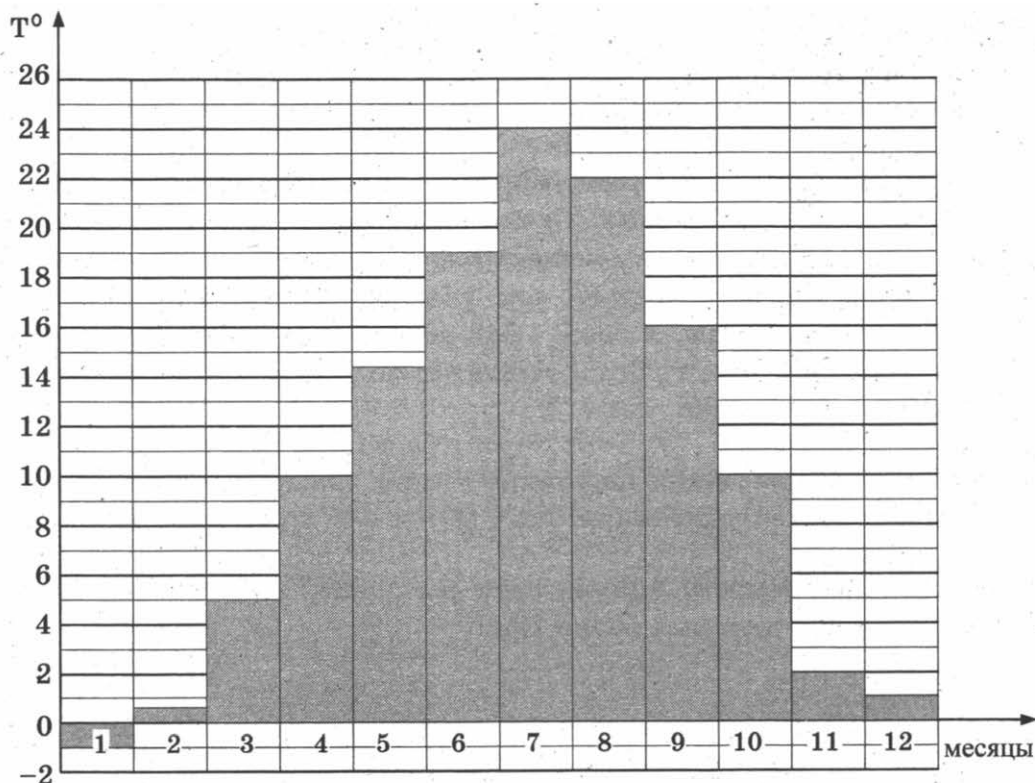
Часть 1

1

1. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 470 рублей после понижения цены на 25%?

2

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1988 году в Симферополе. Ответ дайте в градусах Цельсия.



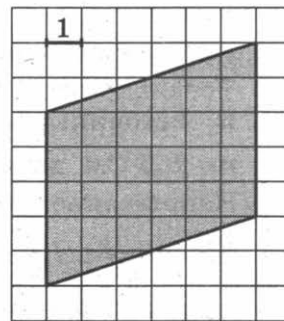
3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право вернуть товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести дублёнку ценой 9400 руб., футболку ценой 850 руб. и перчатки ценой 950 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
2. Б. купит сначала дублёнку и футболку, а потом перчатки со скидкой.
3. Б. купит сначала дублёнку и перчатки, а потом футболку со скидкой.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

 3

4. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

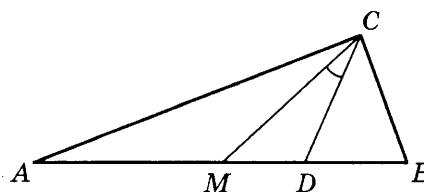
5. В группе туристов 8 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

 5

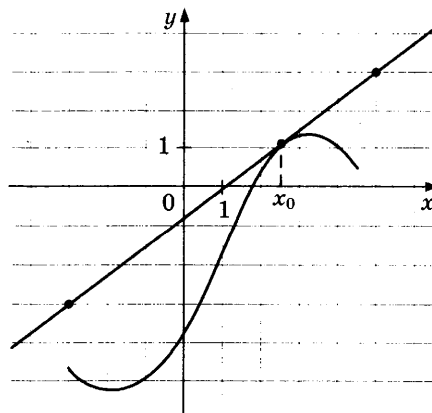
6. Найдите корень уравнения: $\sqrt{5 + 2x} = 3$.

 6

7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 87° и 3° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

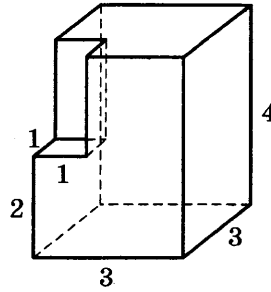

 7

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .


 8

9

9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10

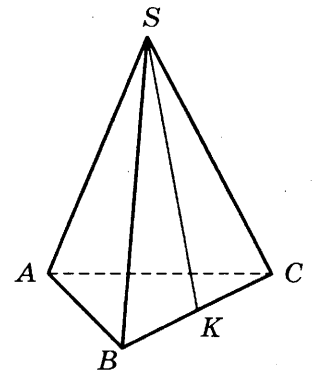
10. Найдите значение выражения $2 \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 105^\circ$.

11

11. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 65$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 60 В? Ответ выразите в омах.

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $SK = 10$, а площадь боковой поверхности равна 60. Найдите длину отрезка AB .



13

13. Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 105 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 50 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 19$ на отрезке $[1; 3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $2 \cdot 9^{x^2-4x+1} + 42 \cdot 6^{x^2-4x} - 15 \cdot 4^{x^2-4x+1} = 0$.

 15

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 3]$.

16. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC .

 16

а) Постройте прямую пересечения плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC и SA , и плоскости, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

17. Решите неравенство $4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0$.

 17

18. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

 18

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 3$.

19. Савелий хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Савелий взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?

 19

20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2 - (4 - 4k) \sin t}{\cos t - 4 \sin t} = 1$ имеет хотя бы одно решение на отрезке

 20

$$\left[-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$$

21. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение в точке $x = 11$ являются простыми числами. Найдите корни трёхчлена.

 21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 16

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

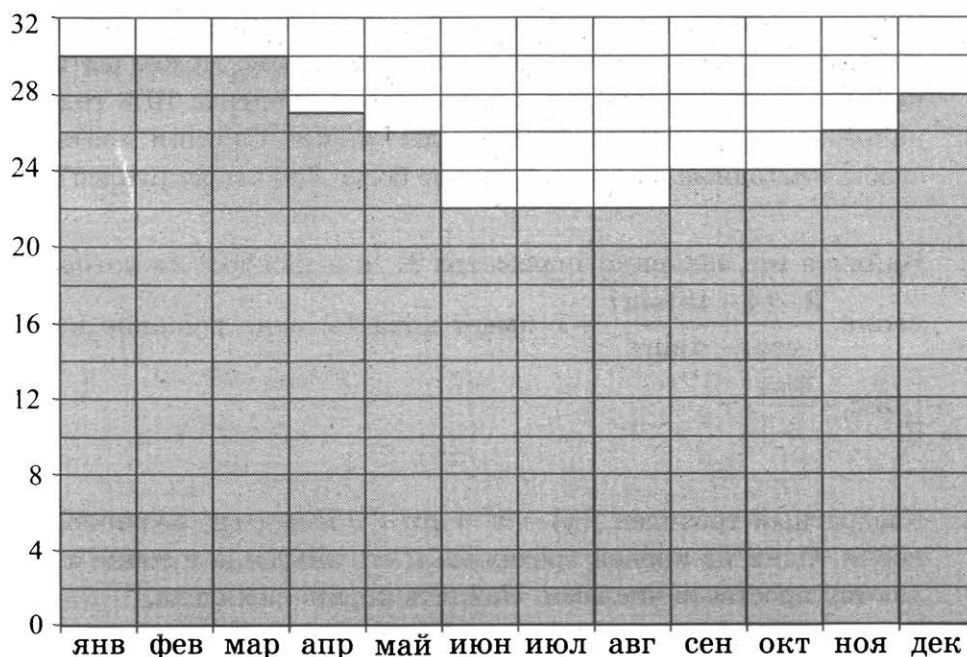
Часть 1

1

1. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 11% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,32 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 5 кг в течение суток?

2

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячной температурой в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



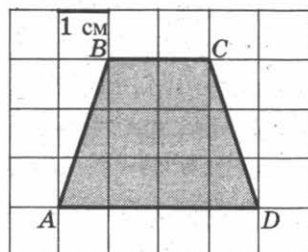
3. Рейтинговое агентство определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый показатель оценивается читателями журнала по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле:

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	3	5	5	3
Б	4	5	3	4	3
В	4	4	3	3	4

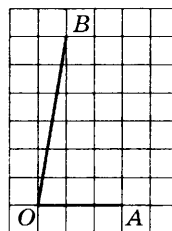
4. Найдите площадь трапеции $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



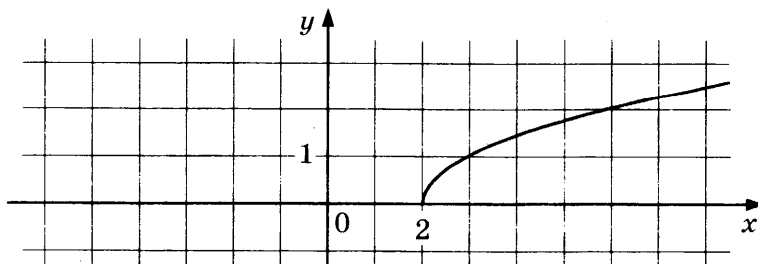
5. В среднем из 1800 садовых насосов, поступивших в продажу, 18 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

6. Найдите корень уравнения $2^{\log_{10}(9x+4)} = 5$.

7. Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.



8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.


 3

 4

 5

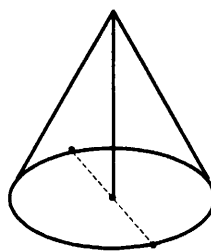
 6

 7

 8

9

9. Высота конуса равна 30, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.



Часть 2

10

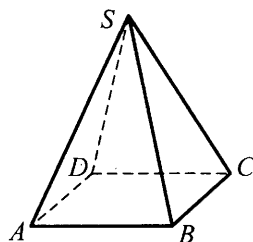
10. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.

11

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

12

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 17, сторона основания равна $15\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.



13

13. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

15

16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 7$.
а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.
б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1 .

16

17. Решите неравенство $9^{x-2} - 37 \cdot 3^{x-3} + 30 \leq 0$.

17

18. В параллелограмм вписана окружность.
а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.
б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

18

19. 31 декабря 2014 года Геннадий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Геннадий переводит очередной транш. Геннадий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 600 тыс. рублей, во второй 55 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Геннадию?

19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\log_{0,5}(x^2) - a| - |\log_{0,5} x + 2a| = (\log_{0,5} x)^2$ имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

20

21. Друг за другом подряд выписали десятичную запись чисел 2^{50} и 5^{50} . Сколько всего цифр выписали?

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 17

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

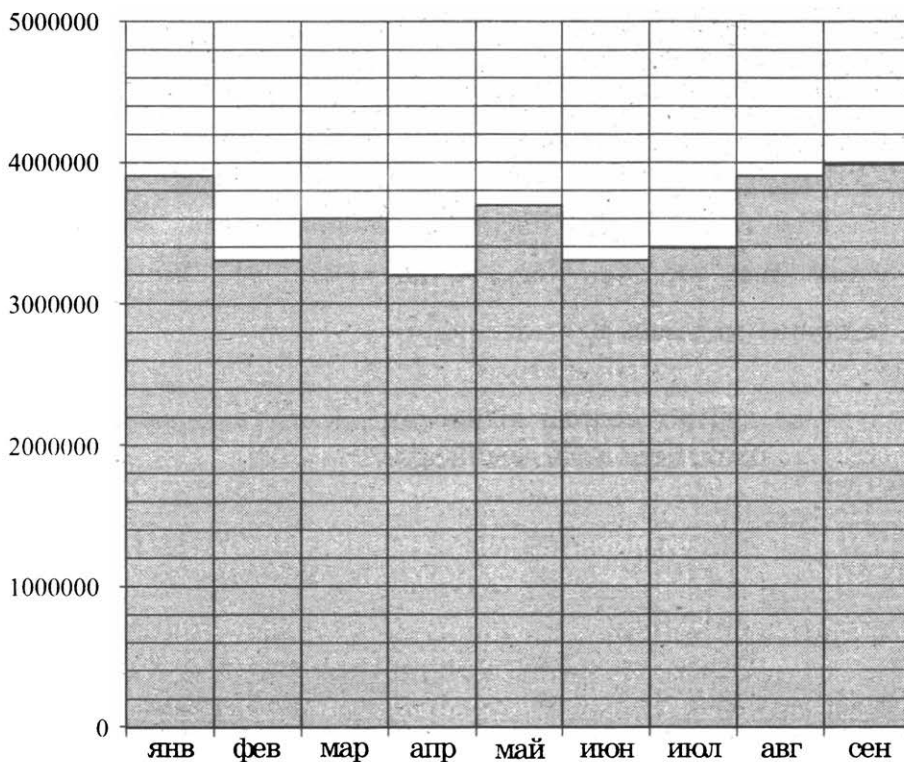
Часть 1

1

1. В туристический поход отправляется группа из 18 человек. В походе на одного человека приходится 60 грамм гречки на прием пищи. Планируется 7 раз готовить гречку. Сколько килограммовых пачек необходимо купить, чтобы гречки хватило?

2

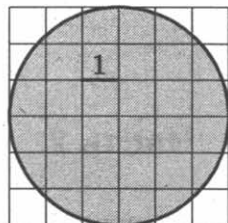
2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3. Семья из трёх человек планирует поехать из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 940 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 29 рублям за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

 3

4. Найдите площадь S круга. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.


 4

5. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зелёные». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах из трёх право первой владеть мячом получит команда «Белые».

 5

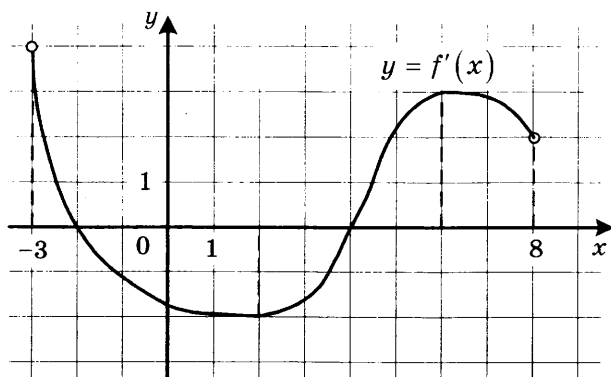
6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{4x+9} = \frac{1}{6x+12}$.

 6

7. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21° , угол CAD равен 30° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

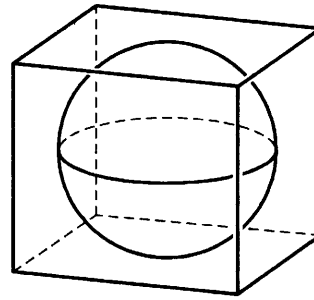
 7

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.

 8


9

9. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите его объём.



Часть 2

10

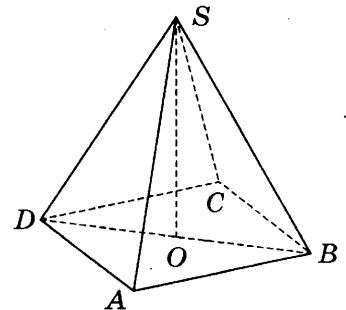
10. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

11

11. В электросеть включён предохранитель, рассчитанный на силу тока 20 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление электроприбора. (Ответ выразите в омах.)

12

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $CS = 17$, $BD = 16$. Найдите длину отрезка SO .



13

13. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 8x^2 + 16x + 23$ на отрезке $[-13; -3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $7 \sin^2 x + 8 \cos x - 8 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
16. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P — середина ребра BB_1 .
 а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно AC .
 б) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP .
17. Решите неравенство:

$$\log_7 \frac{3}{x} + \log_7 (x^2 - 7x + 11) \leq \log_7 \left(x^2 - 7x + \frac{3}{x} + 10\right).$$
18. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .
 а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.
 б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD .
19. 31 декабря 2014 года Иван взял в банке 8 540 000 рублей в кредит под 13,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 13,5%), затем Иван переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Иван выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?
20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_5 (x^2) - a - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2$ имеет ровно четыре решения.
21. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.
 а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчика и две девочки?
 б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять?
 в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки?

15

16

17

18

19

20

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 18

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

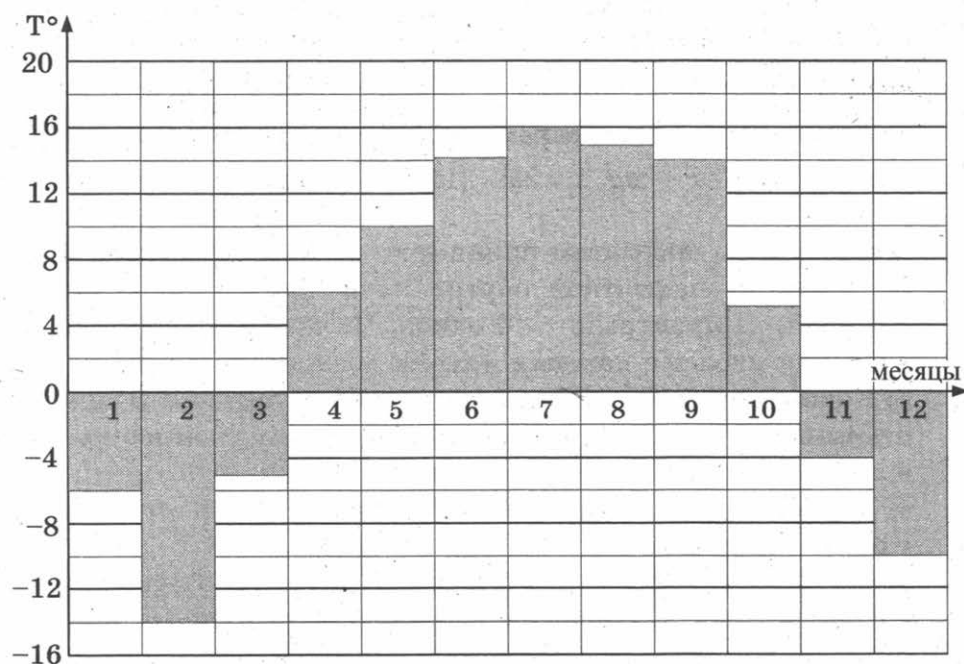
Часть 1

1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 900 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 400 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

2

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1994 году в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.

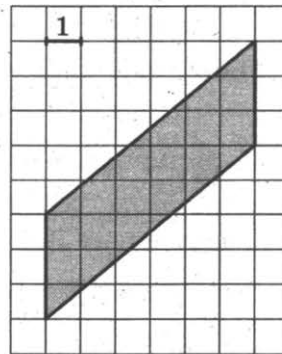


3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести куртку ценой 9600 руб., жилет ценой 720 руб. и перчатки ценой 820 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала куртку и жилет, а потом перчатки со скидкой.
 3. Б. купит сначала куртку и перчатки, а потом жилет со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

 3

4. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

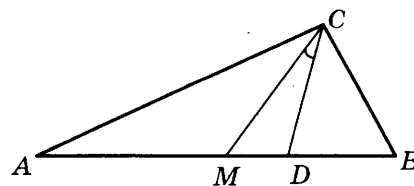
5. В группе туристов 10 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

 5

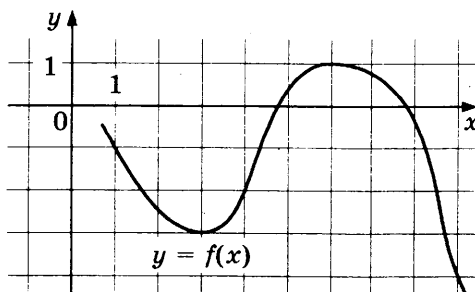
6. Найдите корень уравнения $\log_3(-5 - x) = 1$.

 6

7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 63° и 27° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

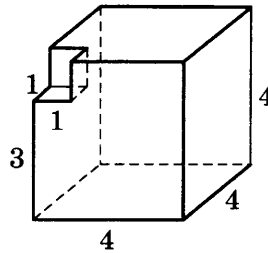

 7

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[1; 9]$.



9

9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10

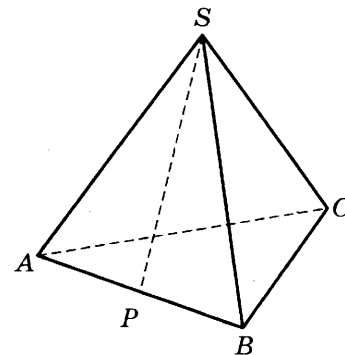
10. Найдите значение выражения $-50 \operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 117^\circ$.

11

11. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 155$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В? Ответ выразите в омах.

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $SP = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка BC .



13

13. Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 7 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

14

14. В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{3 - 3x - 2x^2}$ принимает наибольшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)} = 1$.

15

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

16. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

16

а) Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна, плоскости $A_1 B C_1$.

б) Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.

17. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

17

18. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

18

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

19. 1 января 2015 года Олег Владимирович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 3 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 3%), затем Олег Владимирович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Олег Владимирович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

20

$$\frac{a - (a^2 - 2a - 3) \sin x + 4}{1,5 + 0,5 \cos 2x + a^2} < 1$$

содержит отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$.

21. Найдите все такие целые a и b , что корни уравнения

21

$$x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$$

являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ — простыми числами.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 19

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

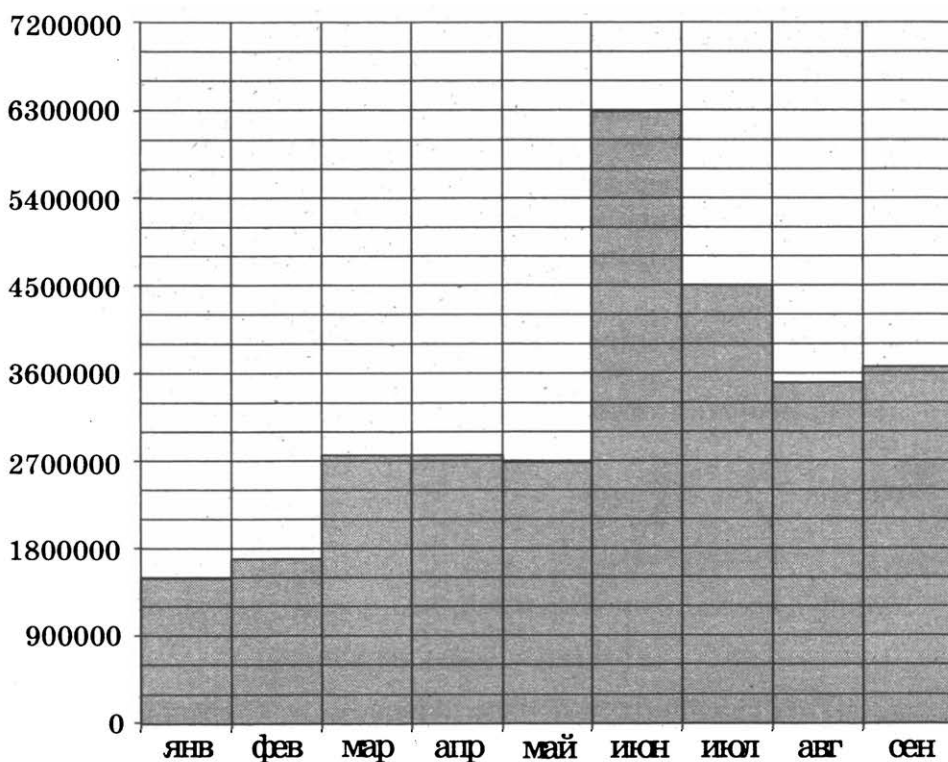
Часть 1

1

1. Летом килограмм черешни стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 800 г черешни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

2

2. На диаграмме показано число запросов со словом ФУТБОЛ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда число запросов со словом ФУТБОЛ было меньше 3 600 000.



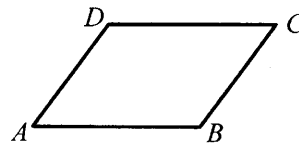
3. Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2	5	5	3	2
Б	4	1	1	5	2
В	2	1	3	1	2

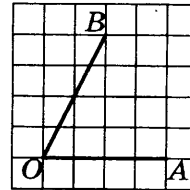
4. Периметр параллелограмма равен 30. Большая сторона равна 10. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



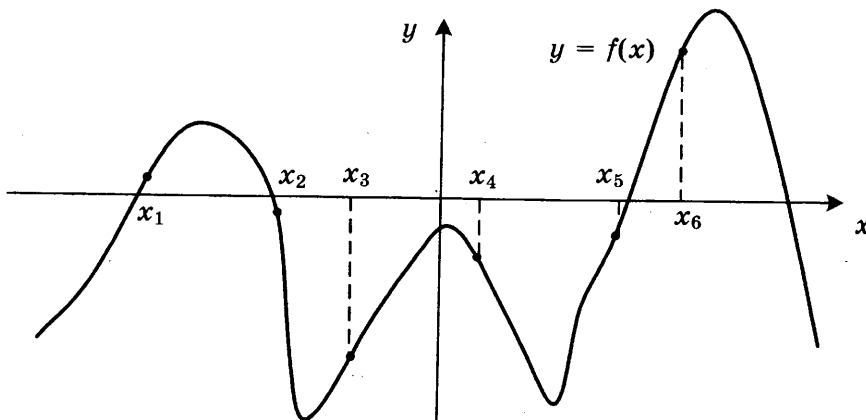
5. Двое играют в кости — они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадает поровну, то наступает ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выиграет.

6. Найдите корень уравнения $\log_4(5 - x) = 2$.

7. Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.



8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.


 3

 4

 5

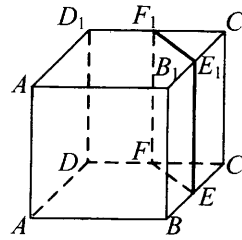
 6

 7

 8

9

9. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер BC, DC, B_1C_1 и D_1C_1 соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 42. Найдите объём куба.



Часть 2

10

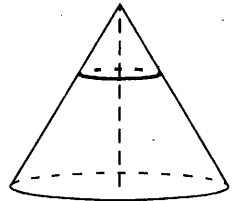
10. Найдите значение выражения $\frac{5 \sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.

11

11. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3,2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

12

12. Площадь основания конуса равна 63. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 1 и 2, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



13

13. Города A, B и C соединены прямолинейным шоссе, причём город B расположен между городами A и C . Из города A в сторону города C выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города B в сторону города C выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 28 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами A и B равно 112 км?

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{20-x}$ на отрезке $[19; 21]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $5 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

15

16. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $AD = 8$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$.

а) Постройте прямую пересечения плоскости $AA_1 K$ с плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK .

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC .

16

17. Решите неравенство $\sqrt{x+4,2} + \frac{1}{\sqrt{x+4,2}} \geq \frac{5}{2}$.

17

18. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

18

19. 31 декабря 2014 года Евгений взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Евгений переводит очередной транш. Евгений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 540 тыс. рублей, во второй 649,6 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Евгению?

19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\left|2^{1-x} - a\right| - \left|\frac{1}{2^x} + 2a\right| = 4^{-x}$ имеет единственное решение.

20

21. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 20

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

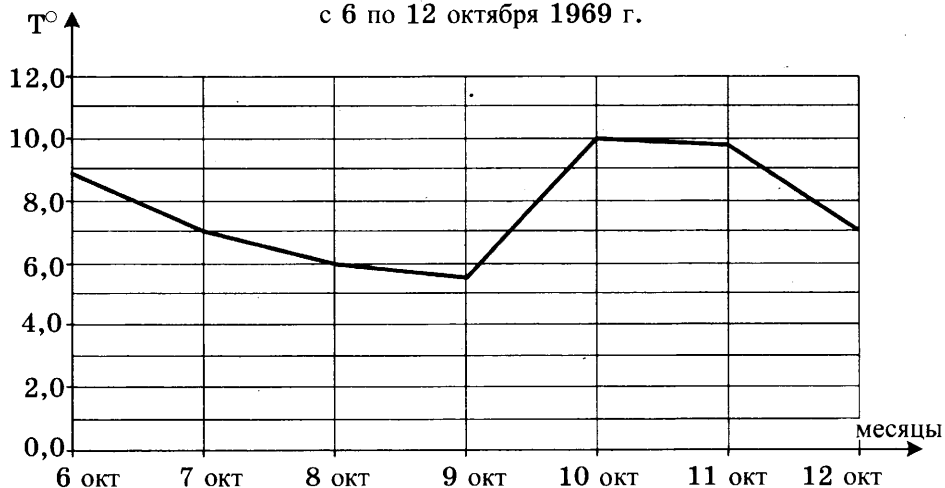
1

1. Поезд Москва–Ижевск отправляется в 17:41, а прибывает в 10:41 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2

2. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Среднесуточная температура в Саратове
с 6 по 12 октября 1969 г.



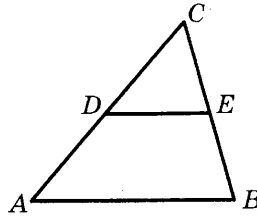
3

3. В магазине одежды объявлена акция — если покупатель приобретает товар на сумму свыше 5000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин.

Покупатель В. хочет приобрести куртку ценой 4500 руб., рубашку ценой 800 руб. и кеды ценой 1600 руб. В каком случае В. заплатит за покупку меньше всего?

1. В. купит все три товара сразу.
 2. В. купит сначала куртку и рубашку, а потом кеды со скидкой.
 3. В. купит сначала куртку и кеды, а потом рубашку со скидкой.
- В ответ запишите сумму (в рублях), которую заплатит В. за покупку в этом случае.

4. В треугольнике ABC DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 24. Найдите площадь треугольника ABC .


 4

5. В каждой пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Галя покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Галя не найдёт приз в своей банке.

 5

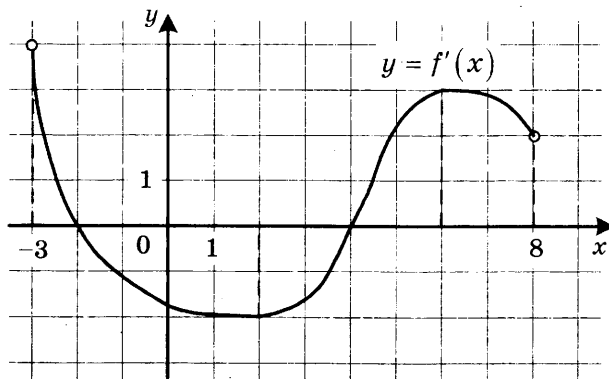
6. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{7x-49}} = \frac{1}{7}$.

 6

7. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56° . Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

 7

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

 8


9. В цилиндрический сосуд, в котором находится 4 литра воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объём детали? Ответ выразите в литрах.

 9

Часть 2

10

10. Найдите значение выражения $\frac{4 \sin 17^\circ \cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$.

11

11. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.

12

12. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 9, а высота боковой грани пирамиды, проведенная к ребру основания, равна $\sqrt{73}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

13

13. Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 7$ на отрезке $[0; 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. Решите уравнение $\frac{3 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \operatorname{ctg} x}{5 \cos^2 x - 4 \cos x} = 0$.

16

16. В пирамиде $SABC$ известны длины ребер: $AB = AC = SB = SC = 10$, $BC = SA = 12$.
- а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.
- б) Найдите расстояние между прямыми SA и BC .

17

17. Решите неравенство $\log_{|x|}^2(x^2) + \log_2(x^2) \leq 8$.

18. На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

18

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{6}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

19. Семён хочет взять в кредит 1,3 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Семён взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тысяч рублей?

19

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (a - 2x)^3 + 9x^2 + 3a = 6x$$

не имеет корней.

20

21. Найдите все такие натуральные n , что при вычеркивании первой цифры у числа 4^n снова получается число, являющееся натуральной степенью числа 4.

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 21

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

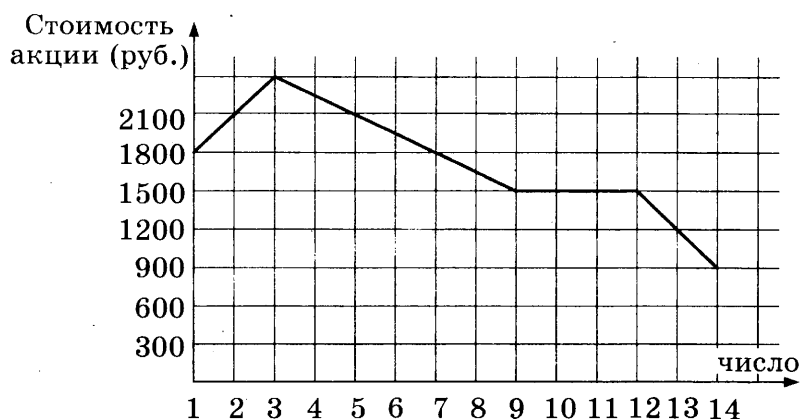
Часть 1

1

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 220 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

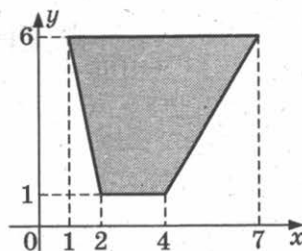


3

3. Для транспортировки 50 тонн груза на 900 км можно использовать одного из трёх перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого из них указаны в таблице. Сколько будет стоить самый дешёвый вариант перевозки (в рублях)?

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
А	3700	3,5
Б	4300	5
В	9800	12

4. Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 6), (7; 6), (4; 1), (2; 1).


 4

5. В среднем на 150 карманных фонариков приходится три неисправных. Найдите вероятность купить работающий фонарик.

 5

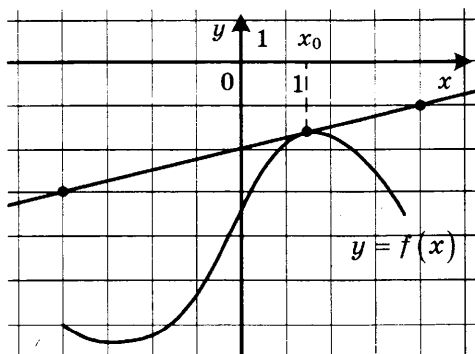
6. Найдите корень уравнения $x^2 - 15 = (x - 15)^2$.

 6

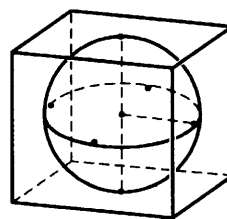
7. Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 7, а расстояние от точки B до прямой l равно 13. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .

 7

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

 8


9. Шар, объем которого равен 14π , вписан в куб. Найдите объем куба.


 9

Часть 2

10. Найдите значение выражения $(558^2 - 23^2) : 581$.

 10

11. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой температуре нагревателя T_1 КПД двигателя будет 15%, если температура холодильника $T_2 = 340^\circ \text{K}$? Ответ выразите в градусах Кельвина.

 11

12. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 6, боковые ребра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

 12

13

13. Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 2 \cos x - 11x + 7$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

16

16. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$.
а) Постройте прямую пересечения плоскости $AA_1 K$ с плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK .
б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC .

17

17. Решите неравенство $x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x - 5} \leq 2$.

18

18. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .
а) Докажите, что $CM \perp DK$.
б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.

19

19. 31 декабря 2014 года Игорь взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 580 тыс. рублей, во второй 621,5 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|10 \cdot 0,2^{1-x} - a| - |5^x + 2a| = 0,04^{-x}$ имеет ровно два неотрицательных решения.

21

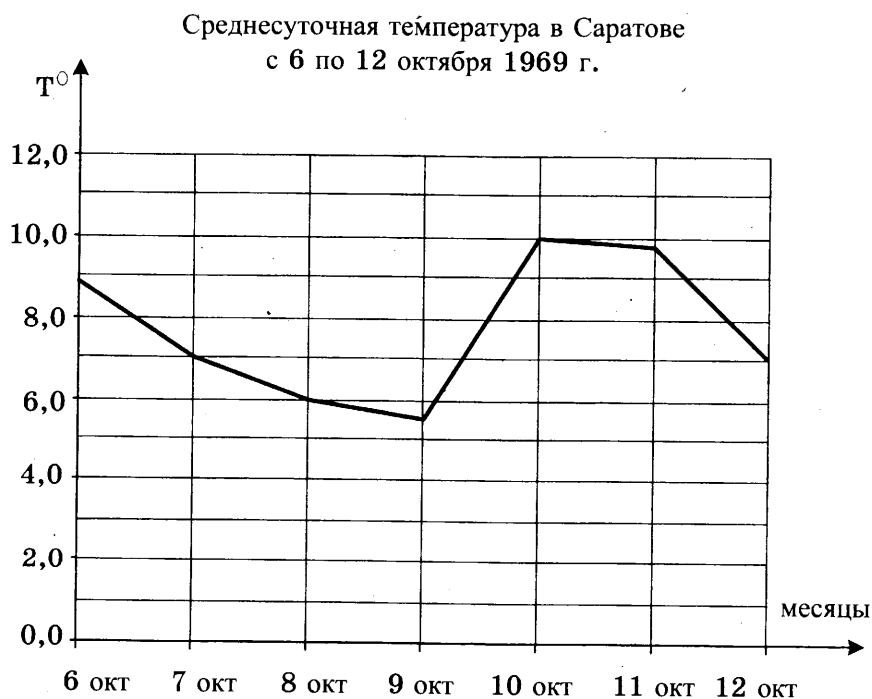
21. Найдите все такие целые a и b , что корни уравнения $x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ — простыми числами.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 22

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 руб. 80 коп. 1 ноября счётчик электроэнергии показывал: 12 625 киловатт-часов, а 1 декабря — 12 802 киловатт-часа. Сколько рублей нужно заплатить хозяину квартиры за электроэнергию за ноябрь?
2. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

 1 2

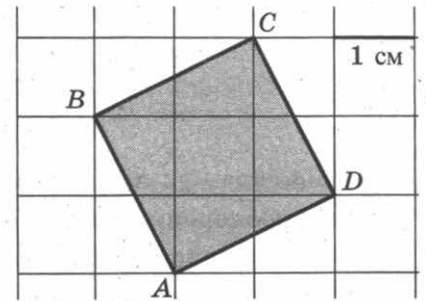
3

3. Строительной фирме нужно приобрести 60 кубометров пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость (в рублях) покупки с доставкой, если цены на пеноблоки и условия доставки приведены в таблице?

Поставщик	Цена пеноблоков (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные предложения и скидки
А	2700	7000	При заказе на сумму больше 200 000 руб. доставка бесплатно
Б	2800	5700	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2750	3000	

4

4. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

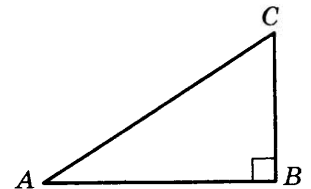
5. В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,4. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

6

6. Решите уравнение $3^{x-3} = 27$.

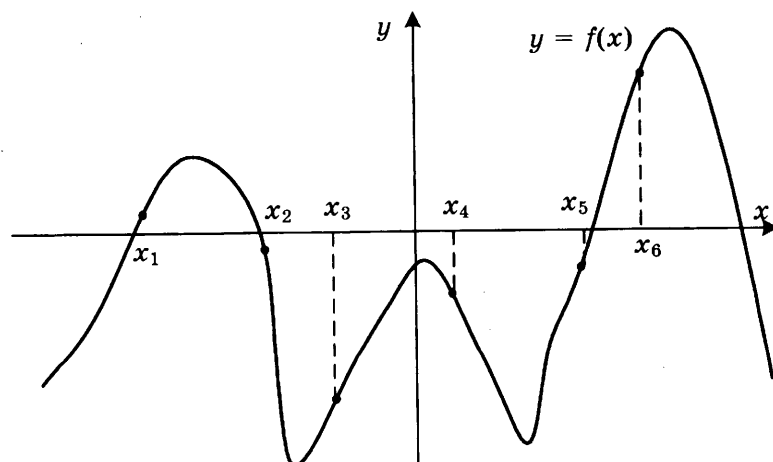
7

7. Один острый угол прямоугольного треугольника на 30° больше другого. Найдите больший острый угол.

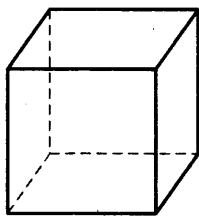


8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.



9. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в семь раз?



9

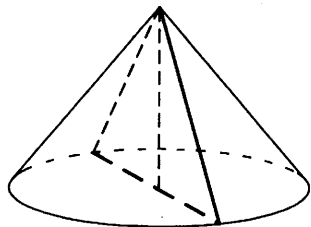
Часть 2

10. Найдите значение выражения $\log_2 7 \cdot \log_7 4$.
11. В электросеть включён предохранитель, рассчитанный на силу тока 16 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление электроприбора. (Ответ выразите в омах.)
12. Высота конуса равна 21, а длина образующей — 29. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

10

11

12



13. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?
14. Найдите наибольшее значение функции
- $$y = x^3 - 18x^2 + 81x + 73$$
- на отрезке $[0; 7]$.

13

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $5 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

16

16. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно $\sqrt{3}$.
 а) Постройте прямую пересечения плоскости $BB_1 DD_1$ с плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 .
 б) Найдите тангенс угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 , и плоскостью основания призмы.

17

17. Решите неравенство $\log_{x-3}(x^2 - 12x + 36) \leq 0$.

18

18. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.
 а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
 б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

19

19. 31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Максим переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 1 640 250 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 936 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Максим взял деньги в банке?

20

20. Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a + x^2 + 2 \log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2 + a + 1} + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

21

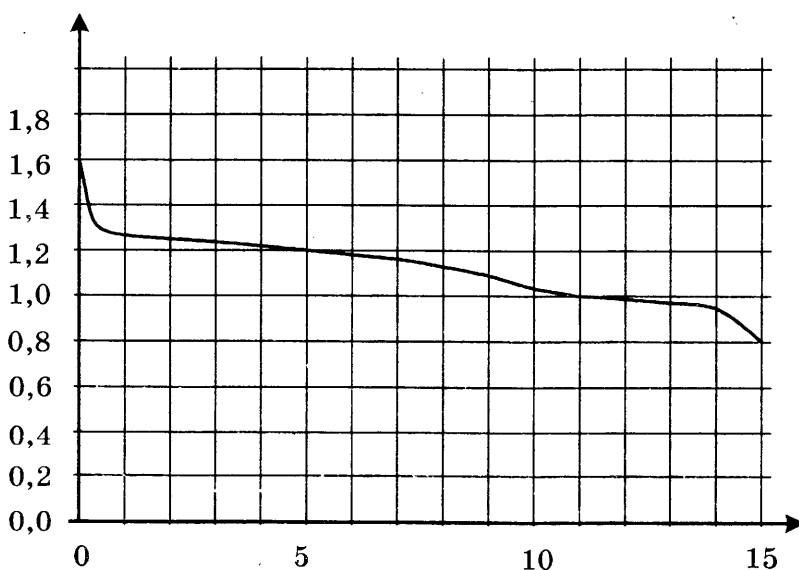
21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и
 а) пять; б) четыре; в) три
 из них образуют геометрическую прогрессию?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 23

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 18 рублей. Если на счёту осталось меньше 18 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёту было 500 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?
2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 15 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.

 1 2

3

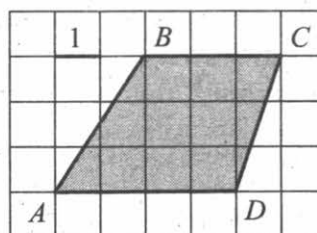
3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

Наименование продукта	Хабаровск	Белгород	Сыктывкар
Говядина (1 кг)	339	235	293
Подсолнечное масло (1 л)	77	58	69
Молоко (1 л)	83	47	71
Сыр (1 кг)	486	301	344
Рис (1 кг)	59	41	56
Картофель (1 кг)	51	31	40

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 1 кг сыра, 2 кг риса, 4 кг картофеля. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

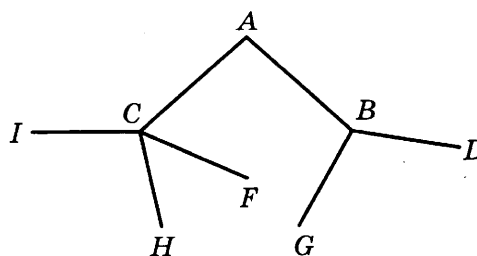
4

4. Найдите площадь трапеции $ABCD$.



5

5. Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G .

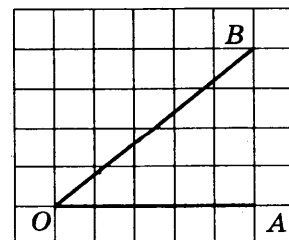


6

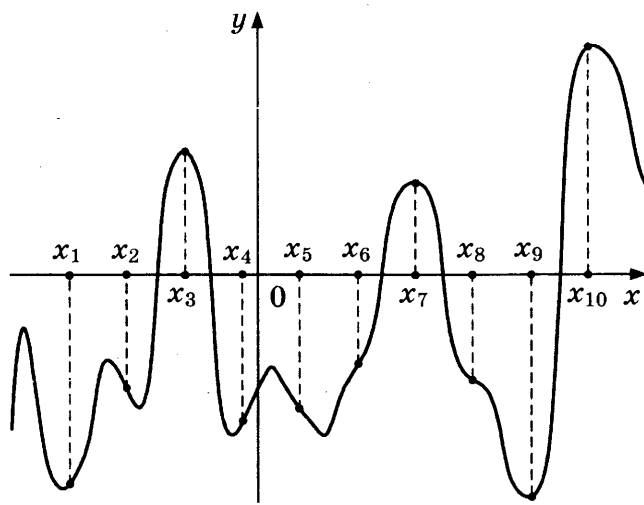
6. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}(5-x) = -2$.

7

7. Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.



8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна?


 8

9. Бетонный шар весит 0,5 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

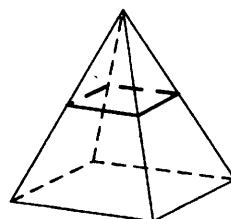
 9

Часть 2

10. Найдите значение выражения $\frac{60}{6^{\log_6 5}}$.
11. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет 80%, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?
12. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.
13. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?
14. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 13x - 13 \operatorname{tg} x - 18$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.


 10

 11

 12

 13

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $5 \cdot 4^{x^2+4x} + 20 \cdot 10^{x^2+4x-1} - 7 \cdot 25^{x^2+4x} = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.

16

16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.
 а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.
 б) Найдите тангенс угла между плоскостями B_1CA_1 и BB_1C_1 .

17

17. Решите неравенство $x + \frac{20}{x+6} \geq 6$.

18

18. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BKFC$. Точка M — середина стороны AB .
 а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.
 б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 14$, $BC = 16$ и $\angle ACB = 150^\circ$.

19

19. Фёдор хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Фёдор взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?

20

20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{6k - (2 - 3k)\cos t}{\sin t - \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

21

21. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $p^2 - 1$, где p — простое число, большее 3, но меньше 2010.

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

50 вариантов заданий

Ответы и решения

Критерии оценок

Бланки ответов

*Издательство
«ЭКЗАМЕН»*

МОСКВА
2015

3

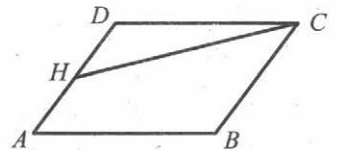
3. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за 1 минуту разговора
«Повременный»	Нет	0,35 руб.
«Комбинированный»	140 руб. за 350 мин.	0,3 руб. (сверх 350 мин. в месяц)
«Безлимитный»	200 руб.	—

Абонент выбрал самый дешёвый тарифный план исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 700 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 700 минутам? Ответ дайте в рублях.

4

4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3. Точка H — середина стороны AD . Найдите площадь трапеции $AHCB$.



5

5. По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,94. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

6

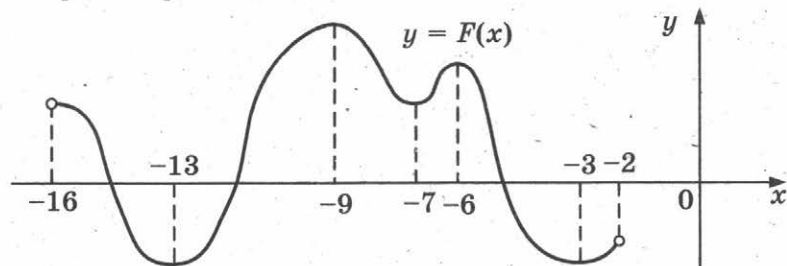
6. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{36}\right)^{x-2} = 6$.

7

7. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21° , угол CAD равен 30° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

8

8. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ некоторой функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-16; -2)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-15; -8]$.



9

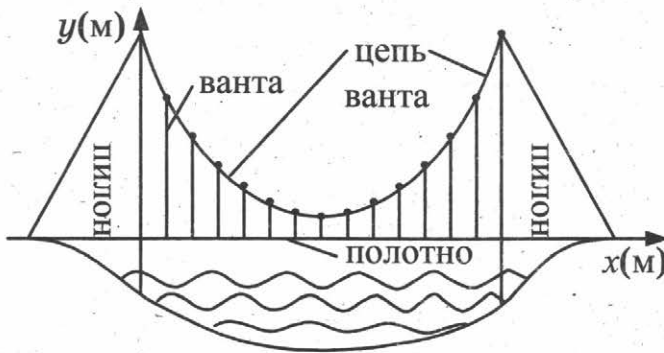
9. Объём данной правильной треугольной призмы равен 80. Найдите объём правильной треугольной призмы, ребро основания которой в 4 раза меньше ребра основания данной призмы, а высота в 4 раза больше высоты данной призмы.

Часть 2

10. Найдите значение выражения $\frac{18}{3^{\log_3 2}}$.

 10

11. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,0021x^2 - 0,47x + 31$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

 11


12. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше её высоты. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

 12

13. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

 13

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $\cos 4x - \cos 2x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

16

16. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости $AD_1 C_1$.

б) Найдите угол между плоскостями $AD_1 C_1$ и $A_1 D_1 C$.

17

17. Решите неравенство $x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x - 6} \leq 5$.

18

18. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M , причём $AM : MB = 3 : 1$. Найдите диагональ AC , если известно, что $AD = 2\sqrt{2}$.

19

19. 31 декабря 2014 года Павел взял в банке 8 599 000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Павел переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Павел выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$$

не имеет корней.

21

21. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

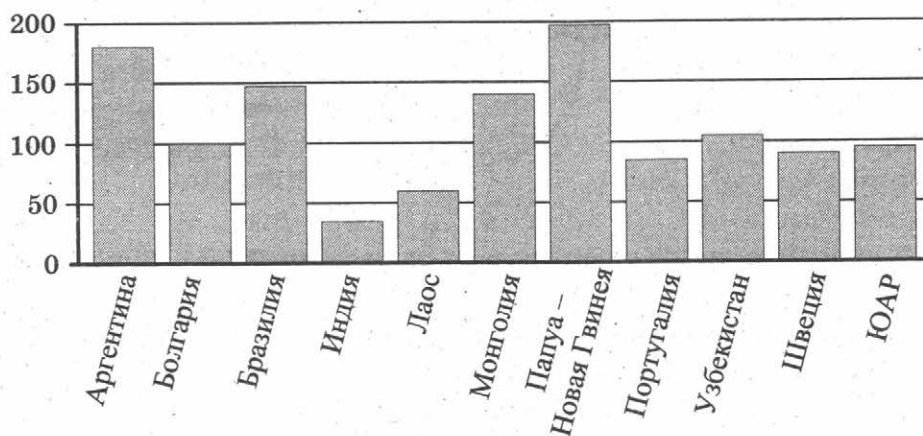
в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 25

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- В доме, в котором живёт Женя, один подъезд. На каждом этаже по восемь квартир. Женя живёт в квартире 87. На каком этаже живёт Женя?
- На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Узбекистан?



- В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	19 400	5	6	3740
Дельта	19 900	5	12	1860
Омикрон	22 700	30	6	2800

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

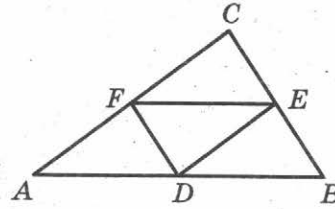
 1

 2

 3

4

4. Точки D, E, F — середины сторон треугольника ABC . Периметр треугольника DEF равен 5. Найдите периметр треугольника ABC .



5

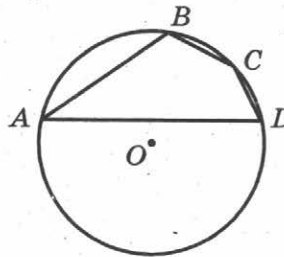
5. В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

6

6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{9x+2} = \frac{1}{8x-4}$.

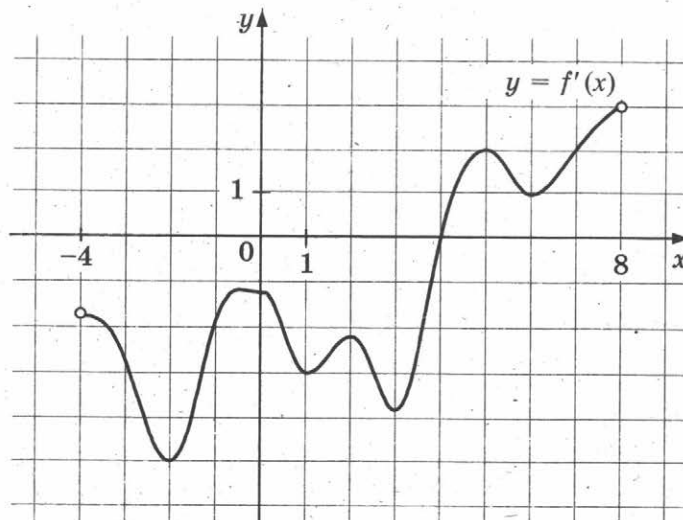
7

7. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 25° . Найдите угол C четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

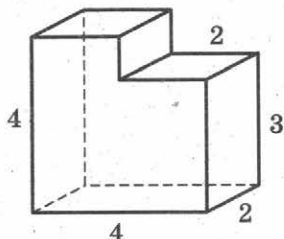


8

8. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).


 9

Часть 2

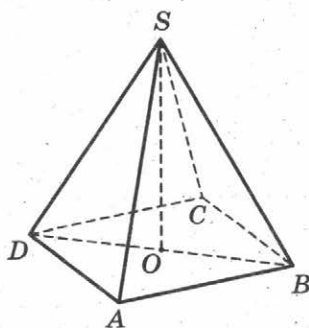
10. Найдите значение выражения $\frac{22}{\cos^2 34^\circ + \cos^2 124^\circ}$.

 10

11. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,4} = \text{const}$, где p (атм) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 256 л, а его давление равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде поднялось до 128 атмосфер? Ответ выразите в литрах.

 11

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 10$, $BD = 16$. Найдите длину отрезка SO .

 12


13. Плиточник должен уложить 300 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 5 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 5 дней раньше, чем наметил. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

 13

14. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 49}{x}$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

16

16. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC .

а) Постройте прямую пересечения плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC и SA , и плоскости, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.

17

17. Решите неравенство $\log_{|x+1|}^2 (x+1)^4 + \log_2 (x+1)^2 \leq 22$.

18

18. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.

19

19. Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Тимофей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тысяч рублей?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

21

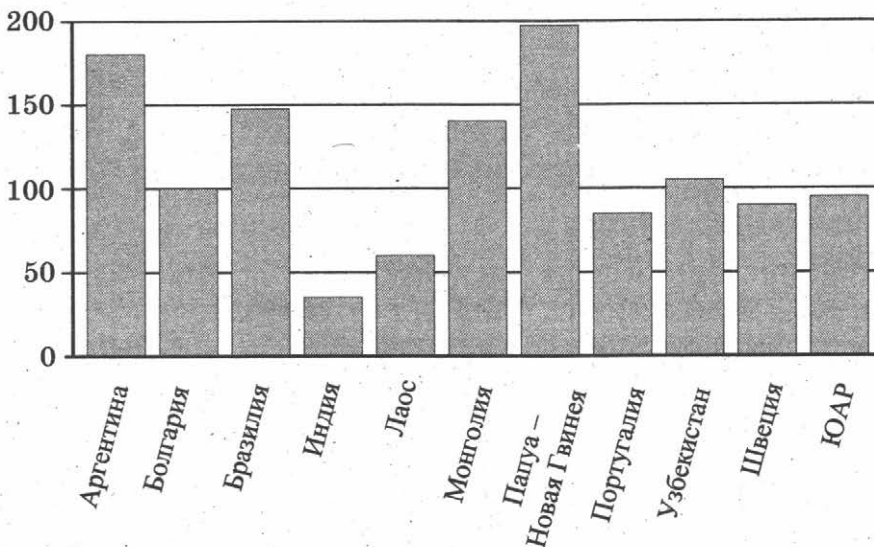
21. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение в точке $x = 11$ являются простыми числами. Найдите корни трёхчлена.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 26

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2500 руб. До установки счётчиков Александр платил за воду (холодную и горячую) ежемесячно 1700 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 1000 руб. при тех же тарифах на воду. За какое наименьшее количество месяцев при тех же тарифах на воду установка счётчиков окупится?
2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Аргентина?



3

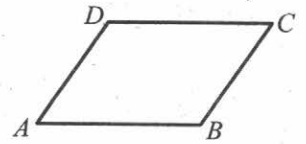
3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	21 600	20	6	3600
Дельта	22 300	15	12	1860
Омикрон	24 000	20	12	1750

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

4

4. Периметр параллелограмма равен 70. Меньшая сторона равна 16. Найдите большую сторону параллелограмма.



5

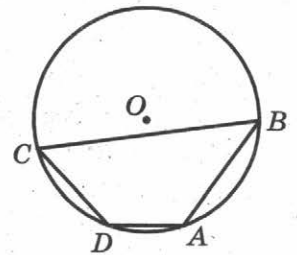
5. В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 5 из них встречается вопрос по теории вероятностей. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теории вероятностей.

6

6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x+7} = \frac{1}{3x+20}$.

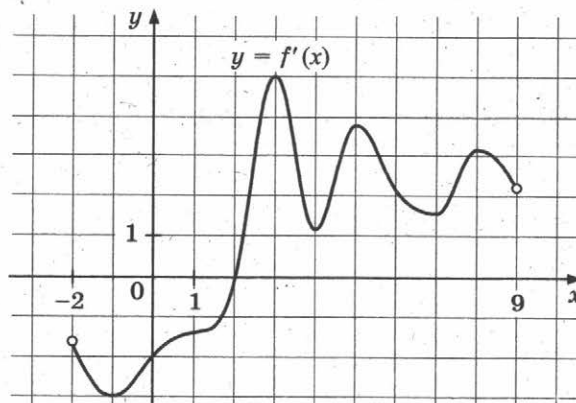
7

7. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 125° и 47° . Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

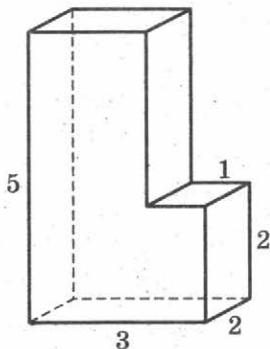


8

8. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[3; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



9

Часть 2

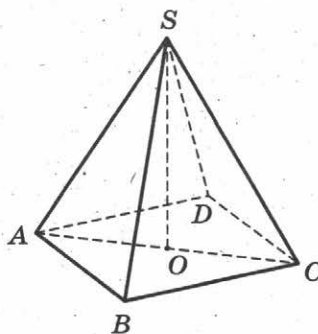
10. Найдите значение выражения $\frac{34}{\cos^2 101^\circ + \cos^2 191^\circ}$.

10

11. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1.4} = \text{const}$, где p (атм) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 24 л, а его давление равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде поднялось до 128 атмосфер? Ответ выразите в литрах.

11

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 20$, $AC = 24$. Найдите длину отрезка SO .



12

13. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 24 минуты. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

13

14. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 25}{x}$.

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} - 2 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

16

16. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $7\sqrt{10}$.

а) Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью, проходящей через диаметры оснований, перпендикулярные этим хордам.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

17

17. Решите неравенство $\log_{x+1}(x-1) \cdot \log_{x+1}(x+2) \leq 0$.

18

18. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 5 и 3. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

19

19. 31 декабря 2014 года Леонид взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Леонид переводит очередной транш. Леонид выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 700 тыс. рублей, во второй 440 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Леониду?

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| \frac{x^2 - 6x + a}{a - 2x} - 2 \right| \leq 1$ справедливо при всех значениях x из отрезка $[0; 1]$.

21

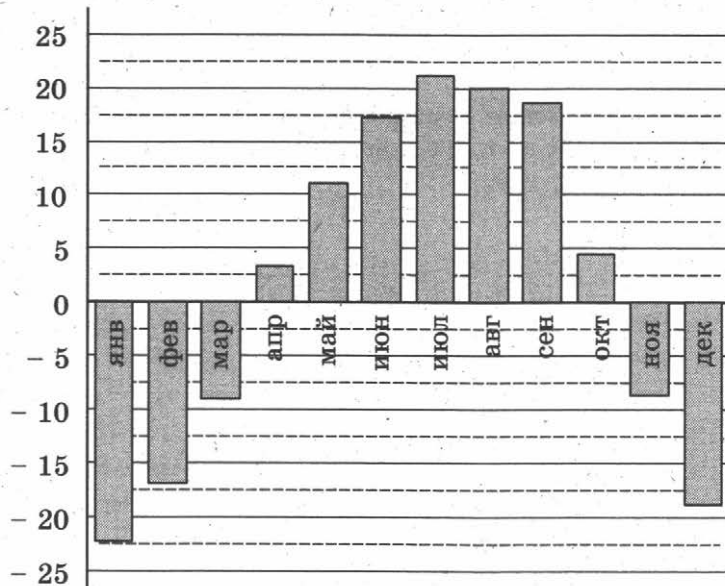
21. Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 27

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

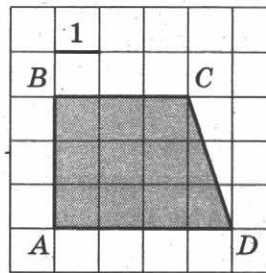
1. Для покраски потолка требуется 140 г краски на 1 м². Краска продаётся в банках по 3 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 42 м²?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Хабаровске по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда среднемесячная температура в Хабаровске отрицательна.



3. Для того чтобы связать свитер, хозяйке нужно 400 граммов шерстяной пряжи красного цвета. Можно купить красную пряжу по цене 60 рублей за 50 граммов, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 50 рублей за 50 граммов и окрасить её. Один пакетик краски стоит 10 рублей и рассчитан на окраску 200 граммов пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

4

4. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

5

5. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

6

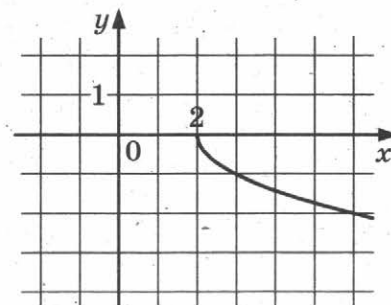
6. Решите уравнение $\log_{25}(2 - 3x) = 0,5$.

7

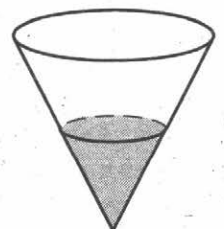
7. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 45° и 67° . Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины C . Ответ дайте в градусах.

8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1; 1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 3. Найдите $f'(3)$.

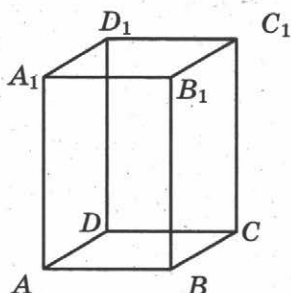
9

9. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 25 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

10. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
11. Высоту над землей (в метрах) подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t) = 1,4 + 14t - 5t^2$, где t — время в секундах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 8 метров?
12. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.



13. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.
14. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 12x^2 + 15$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $2 \sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

16

16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки C , A_1 и F_1 .

б) Найдите расстояние от точки C до прямой $A_1 F_1$.

17

17. Решите неравенство $\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4$.

18

18. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 3 и 2.

19

19. 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + 4x^2 = (3x + 5a)^3 + 6x + 10a$$

не имеет корней.

21

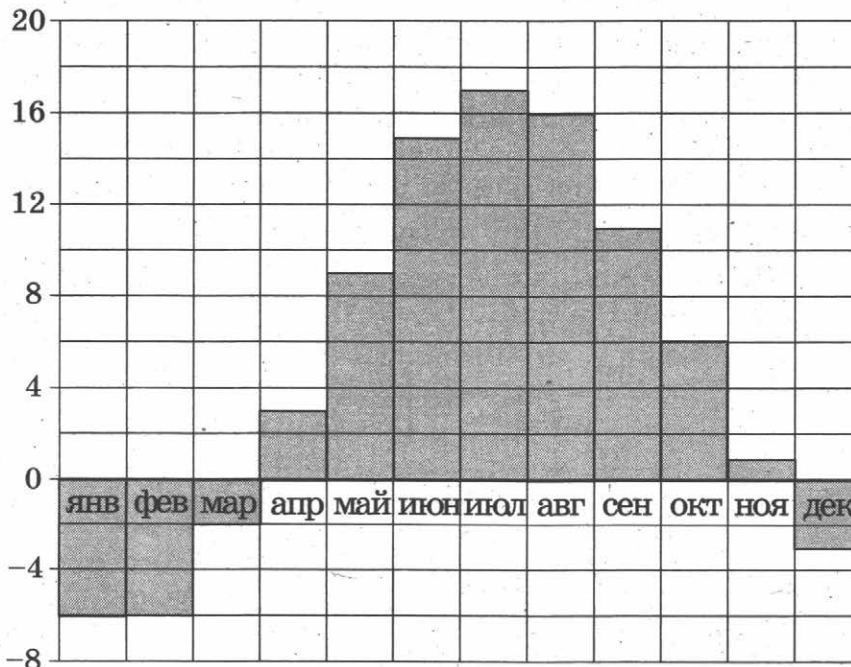
21. Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n , при которых уравнение $(x^2 + y^2)^{2010} = x^n \cdot y^n$ имеет натуральные решения.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 28

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В магазине «Сделай сам» мебель продаётся в разобранном виде. При желании покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 15% от стоимости самой мебели. Во сколько рублей обойдётся кухонный шкаф вместе со сборкой, если без сборки он продаётся за 3200 руб.?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Хельсинки за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была отрицательная.

 1 2

3

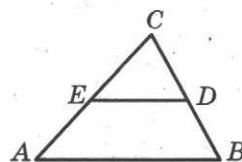
3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

Наименование продукта	Краснодар	Барнаул	Казань
Говядина (1 кг)	239	215	239
Подсолнечное масло (1 л)	62	52	60
Молоко (1 л)	56	56	50
Сыр (1 кг)	295	261	277
Рис (1 кг)	43	39	39
Картофель (1 кг)	42	30	31

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 1 кг говядины, 3 л молока, 2 кг риса. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

4

4. Площадь треугольника ABC равна 28. DE — средняя линия. Найдите площадь трапеции $ABDE$.



5

5. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

6

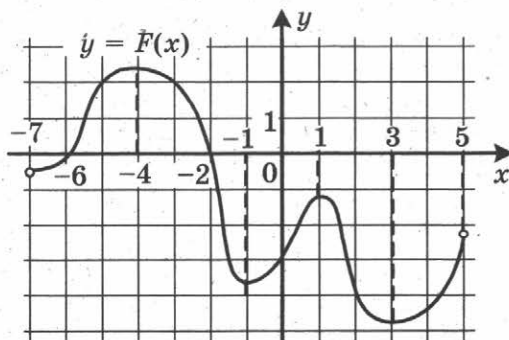
6. Решите уравнение $2^{5-x} = 0,25$.

7

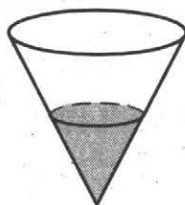
7. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите величину тупого угла ромба. Ответ дайте в градусах.

8

8. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 2]$.



9. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 12 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

10. Найдите значение выражения $\frac{5 \sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.
11. Компания Яндекс-Маркет вычисляет рейтинг интернет-магазинов по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)r_{\text{пок}} + 0,1},$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами компании (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин.

Найдите рейтинг интернет-магазина «Эпсилон», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,61.

12. Высота PH боковой грани PCD правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна $4\sqrt{3}$ и равна стороне CD основания пирамиды. Найдите расстояние между прямыми AB и PH .
13. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни — столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни?
14. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 2x + 17}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

16

16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра равны 1.
а) Постройте прямую пересечения плоскости $AA_1 DD_1$ с плоскостью, проходящей через точки D, B_1 и F_1 .
б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и $DB_1 F_1$.

17

17. Решите неравенство $4^{x-3} - 71 \cdot 2^{x-6} + 7 \leq 0$.

18

18. В параллелограмм вписана окружность.
а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.
б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 4 и 3. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

19

19. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк 2 662 000 рублей. Какую сумму взял Сергей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

21

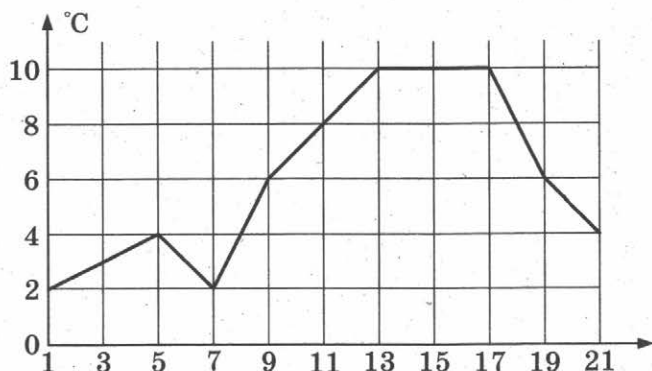
21. Друг за другом подряд выписали десятичную запись чисел 2^{50} и 5^{50} . Сколько всего цифр выписали?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 29

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Пакет молока стоит 21 рубль 30 копеек.
Сколько пакетов молока можно купить на 500 рублей?
2. Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее $+6^{\circ}\text{C}$. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха на первые три недели апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев петрушки.



3. В магазине одежды объявлена акция — если покупатель приобретает товар на сумму свыше 5000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин.

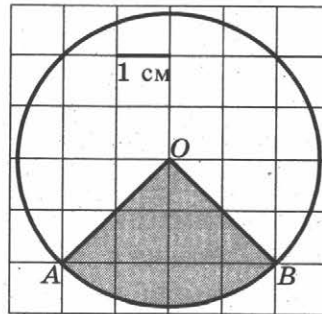
Покупатель В. хочет приобрести куртку ценой 4500 руб., рубашку ценой 800 руб. и кеды ценой 1600 руб. В каком случае В. заплатит за покупку меньше всего?

1. В. купит все три товара сразу.
 2. В. купит сначала куртку и рубашку, а потом кеды со скидкой.
 3. В. купит сначала куртку и кеды, а потом рубашку со скидкой.
- В ответ запишите сумму, которую заплатит В. за покупку в этом случае.

 1 2 3

4

4. Найдите площадь S сектора. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

5. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 56 шашистов, среди которых 12 участников из России, в том числе Валерий Стремянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Валерий Стремянкин будет играть с каким-либо шашистом из России.

6

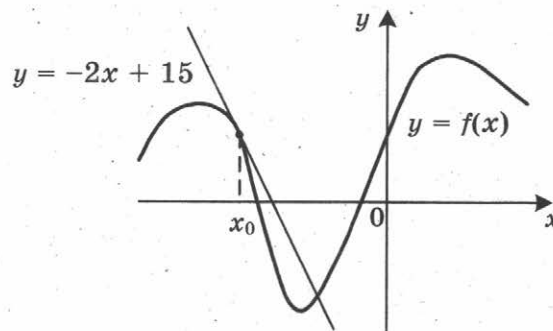
6. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

7

7. Отрезок AB является хордой окружности с центром O . Найдите угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A , если угол AOB равен 56° . Ответ дайте в градусах.

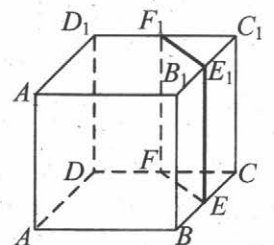
8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = -\frac{1}{4}f(x) + 5$ в точке x_0 .



9

9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер $BC, DC, B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 14. Найдите объём куба.



Часть 2

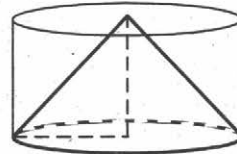
10. Вычислите значение выражения $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$.

 10

11. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 22$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 27,2 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

 11

12. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.


 12

13. В сосуд, содержащий 7 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 8 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

 13

14. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (21 - x)e^{20-x}$$

на отрезке $[19; 21]$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. Решите уравнение

$$\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \log_{13}(2 \sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2} \cos x)} = 0.$$

 15

16

16. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 4. Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{17}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

17

17. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 10x + 6}{x - 5} \leq x$.

18

18. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60° . Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O .

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{3}$.

19

19. 31 декабря 2014 года Георгий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Георгий переводит очередной транш. Георгий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 570 тыс. рублей, во второй 599,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Георгию?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\left| \frac{x^2 + x - 2a}{x + a} - 1 \right| \leq 2$ не имеет решений на интервале $(1; 2)$.

21

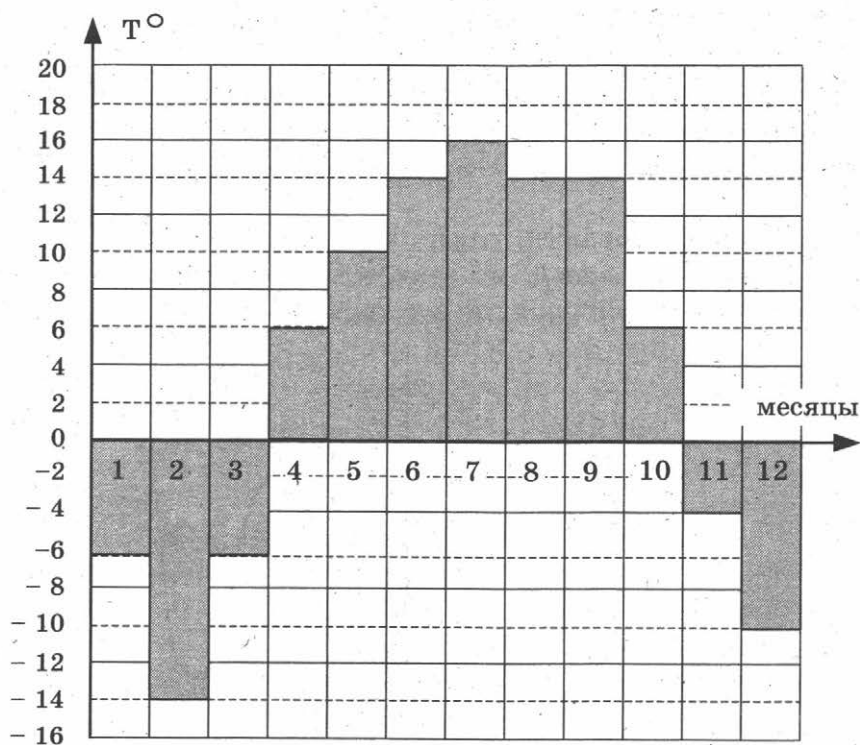
21. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 30

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 13 920 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

 1 2

3

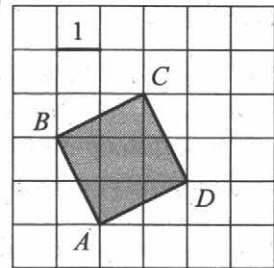
3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

Наименование продукта	Хабаровск	Пенза	Челябинск
Говядина (1 кг)	339	247	255
Подсолнечное масло (1 л)	77	56	67
Молоко (1 л)	83	54	60
Сыр (1 кг)	486	284	282
Рис (1 кг)	59	40	54
Картофель (1 кг)	51	24	33

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 кг говядины, 3 л подсолнечного масла, 1 кг сыра. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

4

4. Найдите площадь квадрата $ABCD$.



5

5. В каждой двадцать пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Коля покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Коля не найдёт приз в своей банке.

6

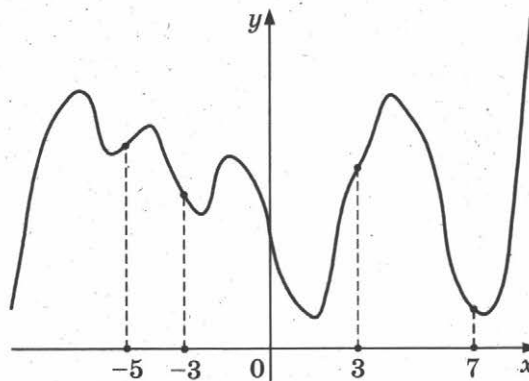
6. Найдите корень уравнения $(x + 7)^3 = 216$.

7

7. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите величину тупого угла ромба. Ответ дайте в градусах.

8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -5 , -3 , 3 , 7 . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



9. Объём данного правильного тетраэдра равен 2 см^3 . Найдите объём правильного тетраэдра, ребро которого в 3 раза больше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^3 .

9

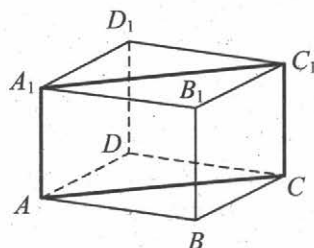
Часть 2

10. Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.
11. К дну высокого цилиндрического резервуара приварена трубка с краном. После открытия крана вода начинает вытекать из резервуара, при этом высота столба воды (в метрах) меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5 \text{ м}$ — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{800}$ — отношение площадей сечений трубки и резервуара, а $g = 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения. Через сколько секунд после открытия крана в резервуаре останется четверть первоначального объёма воды?
12. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 10, а диагональ BD_1 равна 26. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .

10

11

12



13. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 90 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 5 часов 24 минуты позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

13

14. Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 6x^2 + 19$.

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16

16. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно $2\sqrt{197}$.

а) Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью, проходящей через диаметры оснований, перпендикулярные этим хордам.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

17

17. Решите неравенство $(\log_2(x+4,2)+2)(\log_2(x+4,2)-3) \geq 0$.

18

18. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD .

19

19. 1 января 2015 года Михаил Юрьевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Михаил Юрьевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Михаил Юрьевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 250 тыс. рублей?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^6 + (5a - 8x)^3 + 3x^2 + 15a = 24x$$

не имеет корней.

21

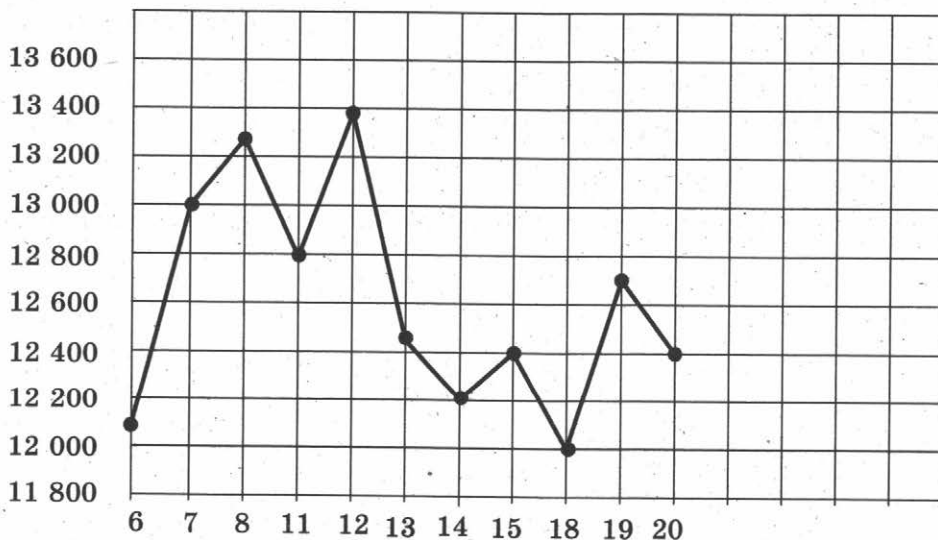
21. Десятичная запись натурального числа n должна состоять из различных (не менее двух) цифр одной чётности, а само оно должно быть квадратом целого числа. Найдите все такие n .

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 31

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Для ремонта квартиры купили 42 рулона обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?
2. На рисунке жирными точками показана цена тонны никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).

 1 2

3

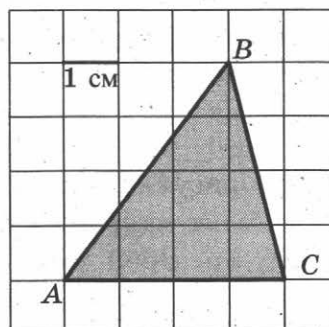
3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

Наименование продукта	Архангельск	Ростов-на-Дону	Пенза
Говядина (1 кг)	282	237	247
Подсолнечное масло (1 л)	75	66	56
Молоко (1 л)	76	58	54
Сыр (1 кг)	276	317	284
Рис (1 кг)	52	42	40
Картофель (1 кг)	36	39	24

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 кг говядины, 1 л подсолнечного масла, 3 кг картофеля. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

4

4. Найдите площадь треугольника ABC . Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

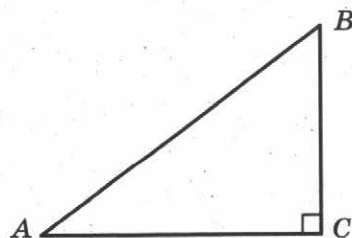
5. В группе туристов 5 человек, в том числе турист Д. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу Д. выпадет по жребию идти в село?

6

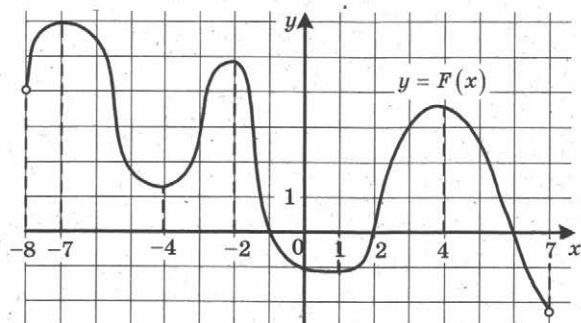
6. Найдите корень уравнения $\sqrt{15 - 7x} = 8$.

7

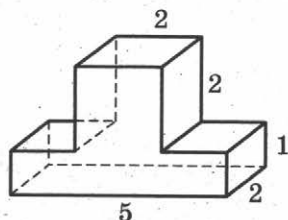
7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{3}{5}$. Найдите $\cos B$.



8. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 5]$.

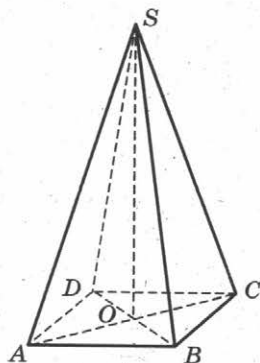


9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10. Найдите значение выражения $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.
11. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.
12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 13$, $BD = 10$. Найдите длину отрезка SO .



13

13. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{27 + 6x - x^2}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot (0,2)^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

16

16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 2, точка M — середина ребра AB , точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая MF перпендикулярна прямой SC .
б) Найдите угол между плоскостью MBF и плоскостью ABC .

17

17. Решите неравенство $2^x + 3 \cdot 2^{-x} \leq 4$.

18

18. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

19

19. Степан хочет взять в кредит 1,2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Степан взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 290 тысяч рублей?

20

20. При каких a уравнение $|x^2 - 4x - 5| - 3a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

21

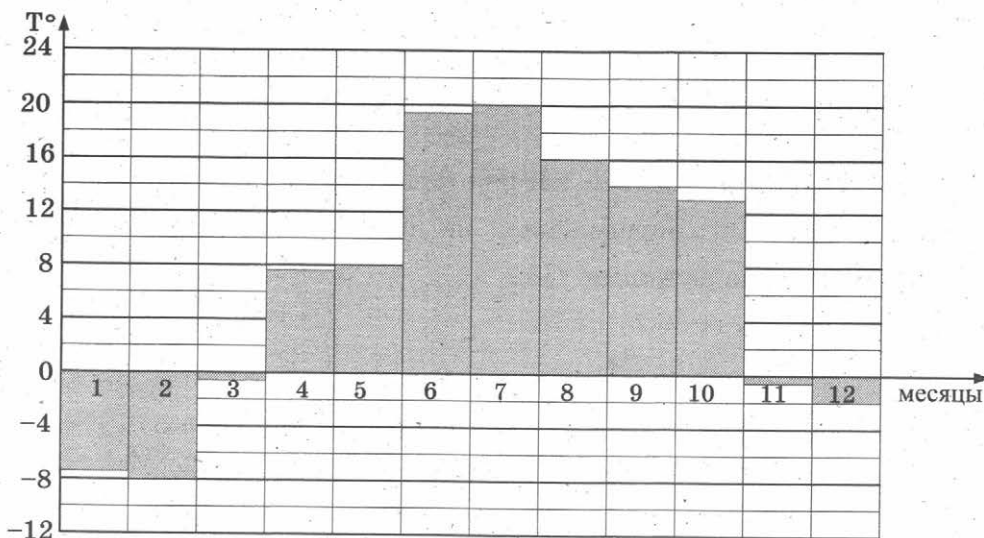
21. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящихся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 32

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Поезд Екатеринбург—Москва отправляется в 7:23, а прибывает в 9:23 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разницу средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1999 году в Санкт-Петербурге. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трёх разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Пользуясь данными таблицы, определите, в каком случае цена одного квад-

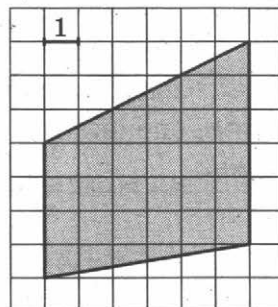
 1 2 3

ратного метра плитки будет наименьшей. В ответ запишите найденную наименьшую цену квадратного метра в рублях.

Размер плитки (см)	Количество плиток в пачке	Цена пачки
20×30	20	612 р.
30×40	11	679 р. 80 к.
20×20	29	585 р. 80 к.

4

4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

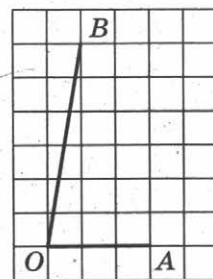
5. Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,84. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

6

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x + 31} = 9$.

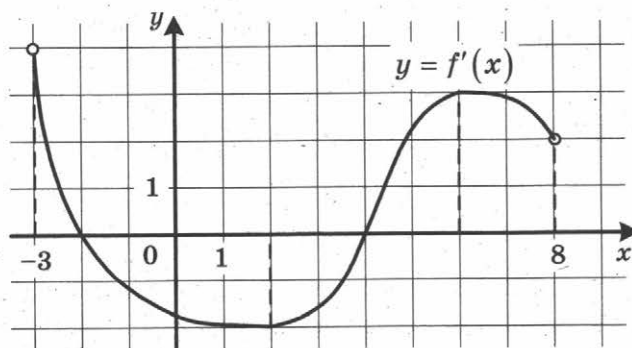
7

7. Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.

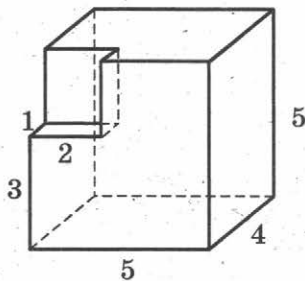


8

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).

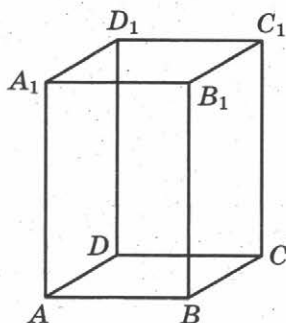

 9

Часть 2

10. Найдите $4 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,5$.
11. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 22$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,7$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 27,2 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).
12. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.

 10

 11

 12


13. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

 13

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 5e^x - 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $(16^{\sin x})^{\cos x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3} \sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

16

16. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC .

17

17. Решите неравенство $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right)$

18

18. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

19

19. 31 декабря 2014 года Родион взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Родион переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 1 464 100 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 674 100 рублей, то за 2 года. Под какой процент Родион взял деньги в банке?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$ имеет два корня.

21. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $-1, 2, 4, -6, 7, -8, -10, 12$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.
- а) Может ли в результате получиться 0?
 - б) Может ли в результате получиться 1?
 - в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 33

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

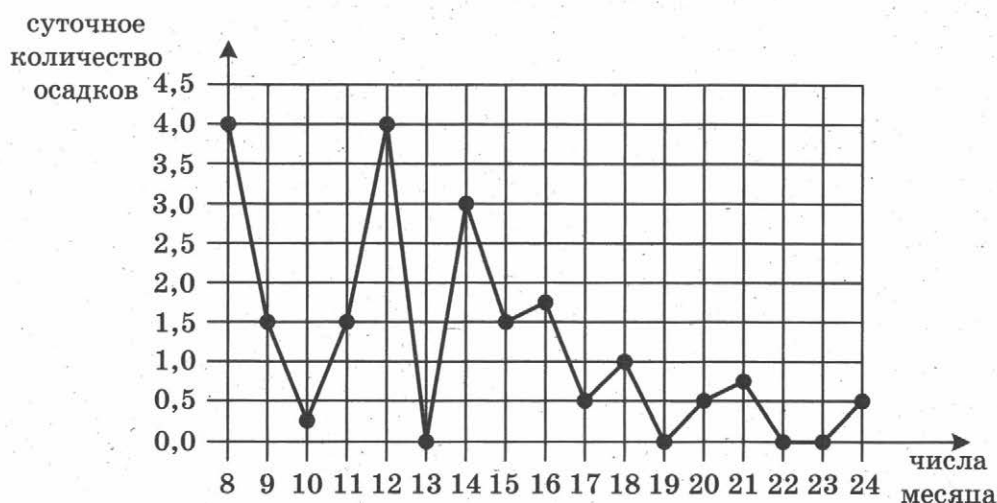
Часть 1

1

1. Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 26 кг яблок?

2

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода осадков не было.



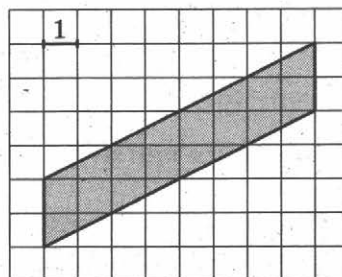
3

3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона	Первоначальный взнос (в процентах от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа
Эпсилон	22 000	25	6	3760
Дельта	24 900	30	6	3520
Омикрон	26 900	20	12	1900

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты) и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

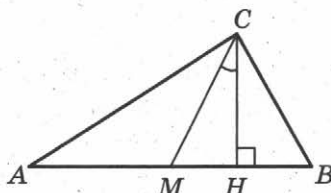
4. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



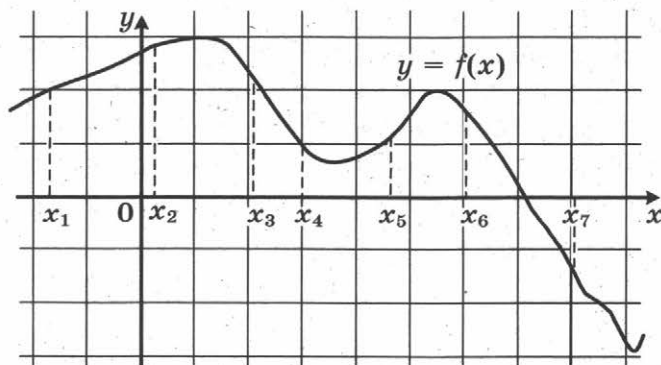
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

6. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{7x-8} = 2$.

7. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



8. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



9

9. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 98 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 7 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

10

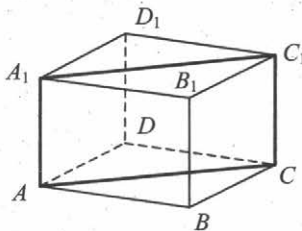
10. Найдите значение выражения $\frac{9 \sin 132^\circ}{\sin 228^\circ}$.

11

11. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 50 В? Ответ выразите в омах.

12

12. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 8, а диагональ BD_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .



13

13. В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 11 \operatorname{tg} x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15; 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $4 \sin^4 2x + 3 \cos 4x - 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

16. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .
 б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 .
17. Решите неравенство $\frac{2}{x^2 - 12x + 35} + \frac{3}{x^2 - 17x + 70} \leq 0$.
18. Противоположные стороны AD и BC четырёхугольника $ABCD$ параллельны. Через вершины B и D проведены параллельные прямые, пересекающие диагональ AC в точках M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MN = NC$.
 а) Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.
 б) Найдите отношение площади четырёхугольника $BMDN$ к площади параллелограмма $ABCD$.
19. 31 декабря 2014 года Сергей взял в банке 6 944 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Сергей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?
20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a - (a^2 - 2a - 3) \cos x + 4}{\sin^2 x + a^2 + 1} < 1$ содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.
21. При каком наибольшем n найдётся n семизначных чисел, являющихся последовательными членами одной геометрической прогрессии?

 16

 17

 18

 19

 20

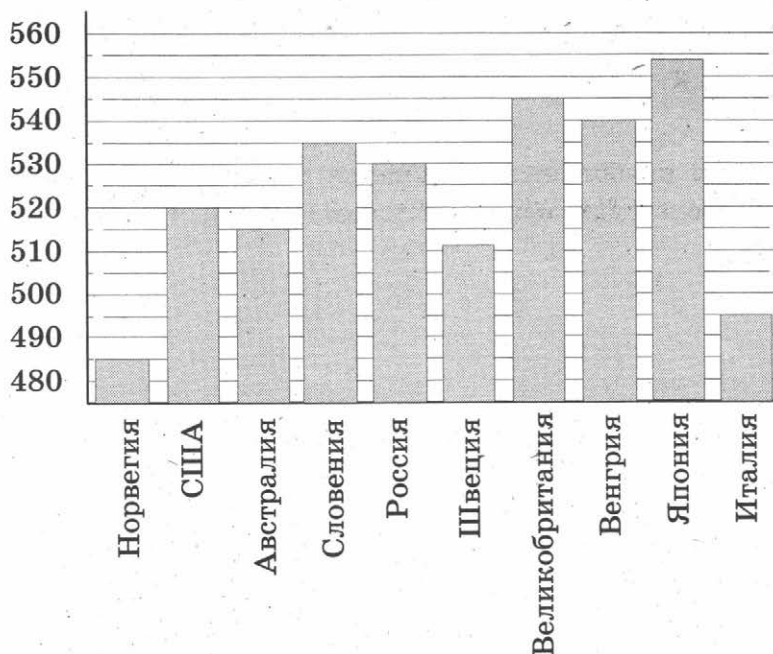
 21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 34

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 26 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит г-н Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?
2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран второе место принадлежит Великобритании. Определите, какое место занимает Россия.

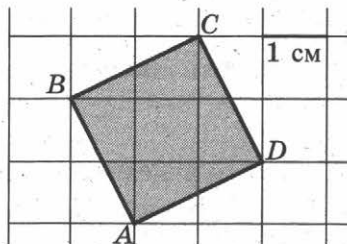


3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	10 500	10	6	1960
Дельта	11 600	5	6	2040
Омикрон	12 700	20	12	860

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

4. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

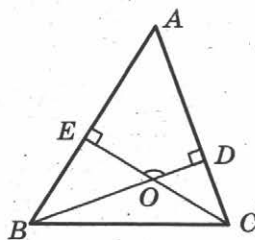
5. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 2 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

 5

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{25 + 3x} = 4$.

 6

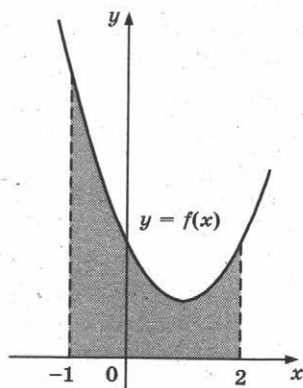
7. В треугольнике ABC угол A равен 56° , углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах.


 7

8. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Одна из первообразных этой функции равна

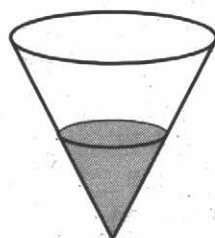
$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 5.$$

Найдите площадь заштрихованной фигуры.


 8

9

9. В сосуд, имеющий форму конуса, налили 50 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.) Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?



10

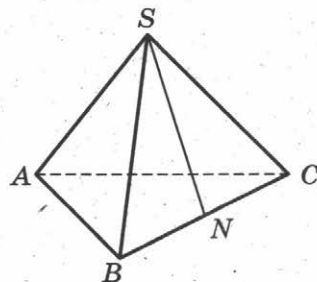
10. Найдите значение выражения $\frac{6 \cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

11

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $5,7 \cdot 10^{25}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $SN = 6$, а площадь боковой поверхности равна 72. Найдите длину отрезка AB .



13

13. Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси?

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4, 5; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $2 \sin^4 x + 3 \cos 2x + 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.
16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковые рёбра равны 2, а стороны основания — 1,
 а) Докажите, что плоскость, проходящая через вершину S и середины рёбер AF и CD перпендикулярна плоскости основания.
 б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF .
17. Решите неравенство $\frac{2 - (x - 6)^{-1}}{5(x - 6)^{-1} - 1} \leq -0,2$.
18. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .
 а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .
 б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.
19. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?
20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
- $$a^2 + 11|x + 2| + 3\sqrt{x^2 + 4x + 13} = 5a + 2|x - 2a + 2|$$
- имеет хотя бы один корень.
21. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
 а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.
 б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?
 в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

15

16

17

18

19

20

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 35

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

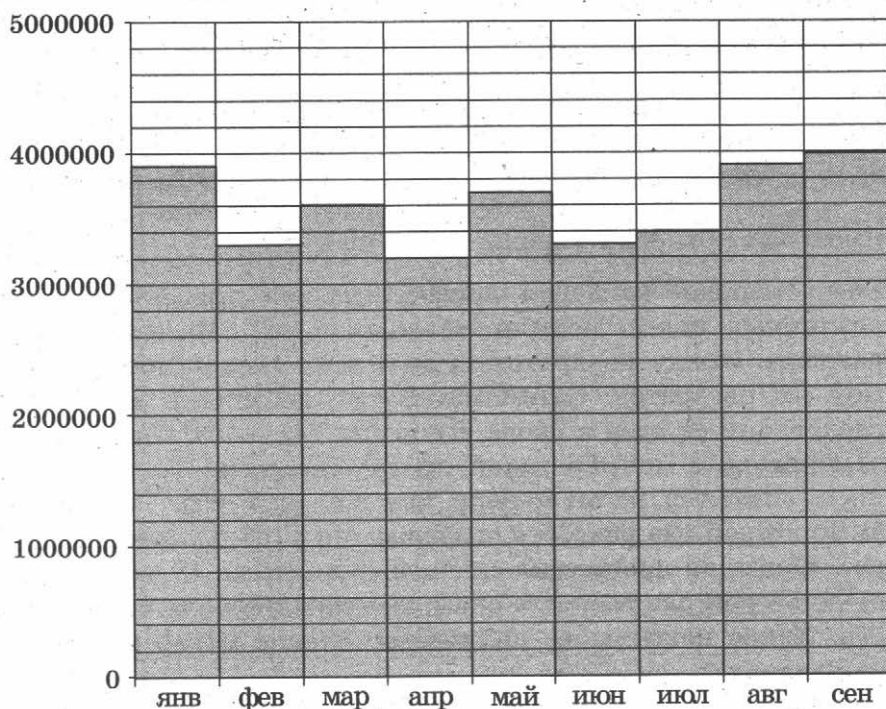
Часть 1

1

1. Каждый день во время конференции расходуется 120 пакетиков чая. Конференция длится 3 дня. Чай продаётся в пачках по 50 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

2

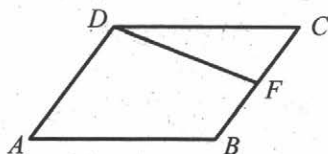
2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3. Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$$

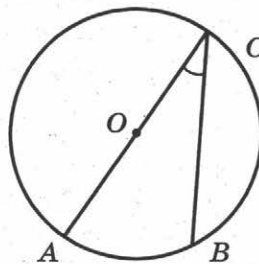
4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 92. Точка F — середина стороны BC . Найдите площадь трапеции $ADFB$.



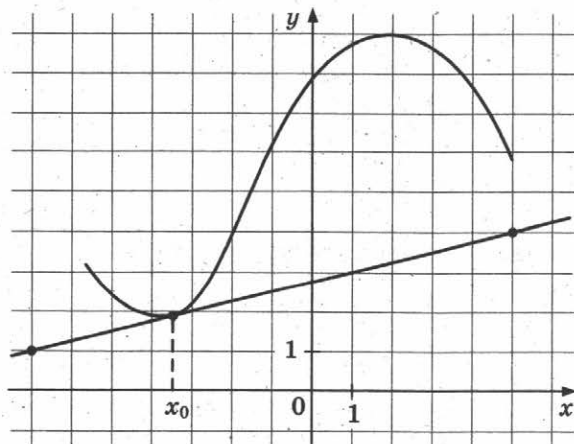
5. В среднем из каждых 50 поступивших в продажу аккумуляторов 48 аккумуляторов заряжены. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор не заряжен.

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{1 - 6x} = 7$.

7. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $1/5$ окружности. Ответ дайте в градусах.



8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .


 3

 4

 5

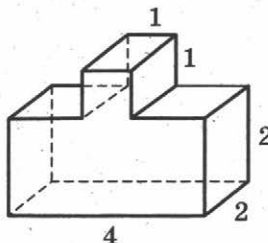
 6

 7

 8

9

9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10

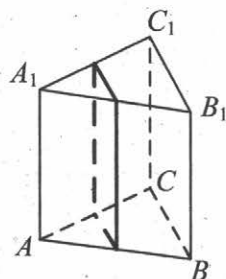
10. Найдите $16 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = 0,5$.

11

11. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,1$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 33 секунд. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

12

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 1, боковые рёбра равны 11. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .



13

13. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 11 \operatorname{tg} x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 \cos^2 x - \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

15

16. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 5.

а) Постройте прямую пересечения плоскости $BB_1 D_1 D$ с плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 .

б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 , и плоскостью основания призмы.

16

17. Решите неравенство $1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}$.

17

18. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60° . Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O .

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

18

19. 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Пётр переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых любое число из отрезка $2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

20

21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 312 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 36

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

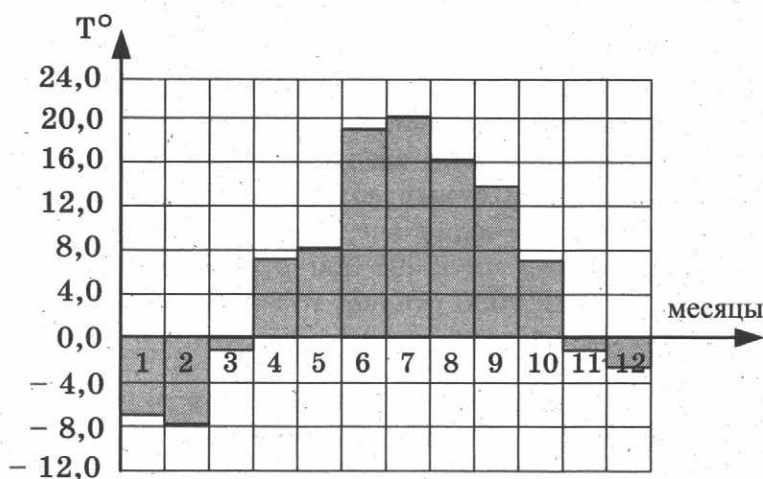
Часть 1

1

1. Флакон шампуня стоит 190 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

2

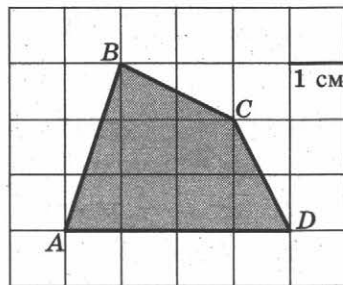
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев второго полугодия 1999 года средняя температура была ниже 14°C .



3

3. Чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 70 рублей за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 100 г и окрасить её. Один пакетик краски стоит 40 рублей и рассчитан на окраску 300 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

4. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

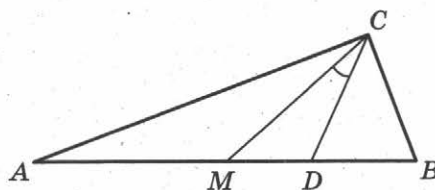
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

 5

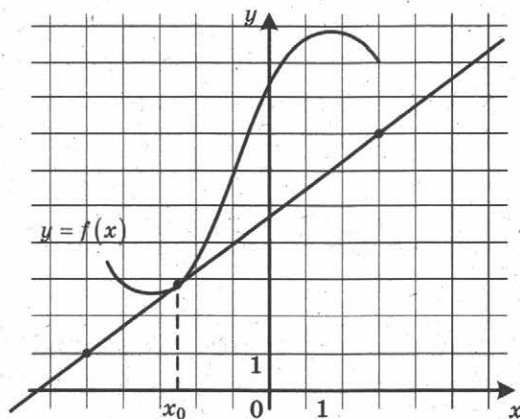
6. Найдите корень уравнения $\sqrt{4x+5} = 5$.

 6

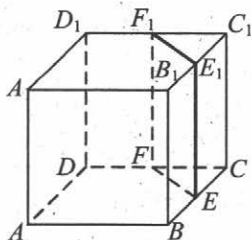
7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 69° и 21° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.


 7

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

 8


9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами ребер BC, DC, B_1C_1 и D_1C_1 соответственно. Объем призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 1. Найдите объем куба.

 9


Часть 2

10

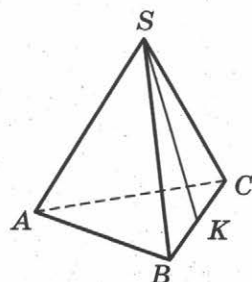
10. Найдите значение выражения $\frac{4 \cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

11

11. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора получена экспериментально: $T = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -30$ К/мин², $b = 180$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Через сколько минут после начала работы нужно отключить прибор?

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $AB = 6$, а длина отрезка $SK = 7$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



13

13. Первая труба наполняет бак объёмом 570 литров, а вторая труба — бак объёмом 530 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 4 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 19$ на отрезке $[-6; -2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.
 б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

16

16. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

17. Решите неравенство $2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \leq 0$.

17

18. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

18

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

19. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

19

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

20

21. Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a - K^3$ делится без остатка на $27 - K$. Найдите a .

21

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 37

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

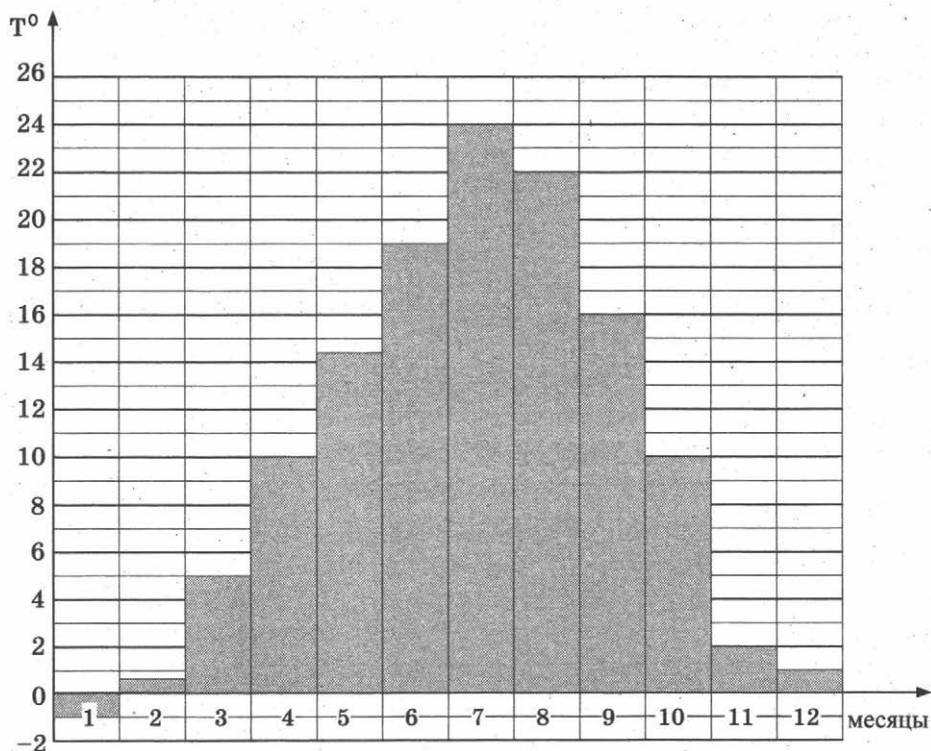
Часть 1

1

1. Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 950 рублей после понижения цены на 25%?

2

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Симферополе в 1988 году.

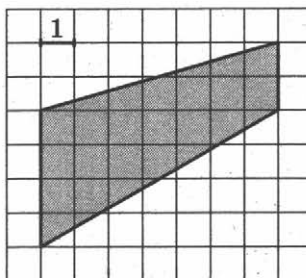


3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	11 900	15	12	910
Дельта	12 000	30	12	770
Омикрон	12 200	20	6	1700

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дороже всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наибольшую сумму в рублях.

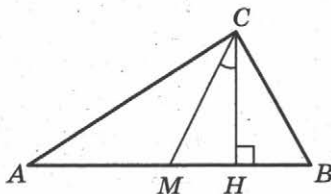
4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



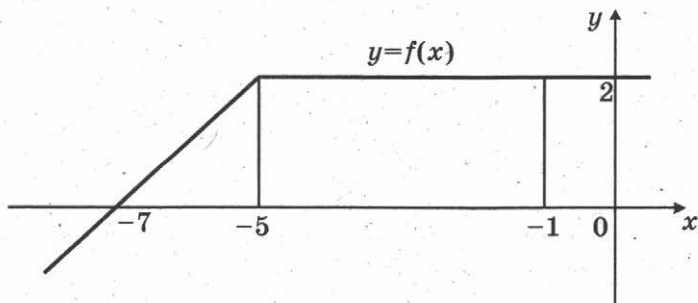
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

6. Найдите корень уравнения $\log_4(x+7) = 2$.

7. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 26° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



8. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл $\int_{-7}^{-1} f(x) dx$.



3

4

5

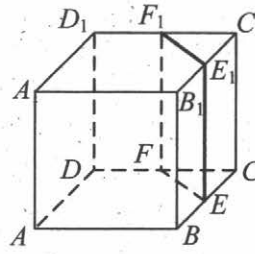
6

7

8

9

9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер $BC, DC, B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 21. Найдите объём куба.



Часть 2

10

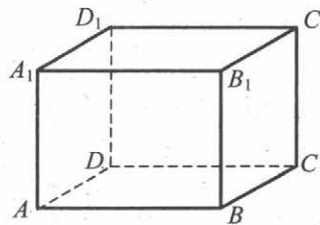
10. Найдите значение выражения $7 \cdot 5^{\log_5 2}$.

11

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

12

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3, AD = 4, AA_1 = 32$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C, C_1 и A .



13

13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 16 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она меньше 60 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

14. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x - 4 \operatorname{tg} x + \pi - 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $7^{x^2-2x} + 7^{x^2-2x-1} = 56$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

15

16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра равны 1.
а) Постройте прямую пересечения плоскости ABB_1 и плоскости, проходящей через точки C, C_1 перпендикулярно плоскости ACC_1 .
б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

16

17. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$.

17

18. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB .

18

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

19. 31 декабря 2014 года Никита взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Никита переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 2 073 600 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 3 513 600 рублей, то за 2 года. Под какой процент Никита взял деньги в банке?

19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

20

21. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
 - б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
 - в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 38

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

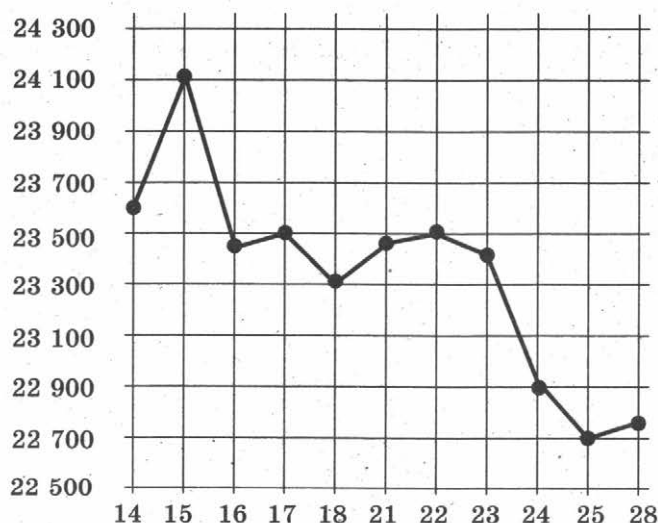
1. Система навигации, встроенная в спинку самолётного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 36 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

 1

2. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года.

 2

По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



3. Для изготовления книжных полок требуется заказать 60 одинаковых стекол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла равна

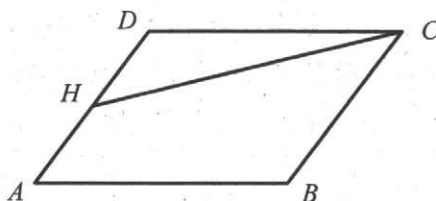
 3

0,15 м². В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м ²)	Резка стекла (руб. за одно стекло)
А	90	15
Б	80	20
В	140	Бесплатно

4

4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3. Точка H — середина стороны AD . Найдите площадь трапеции $AHCB$.



5

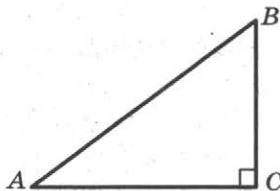
5. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выиграет.

6

6. Найдите корень уравнения $\log_6(8-x) = \log_{36} 9$.

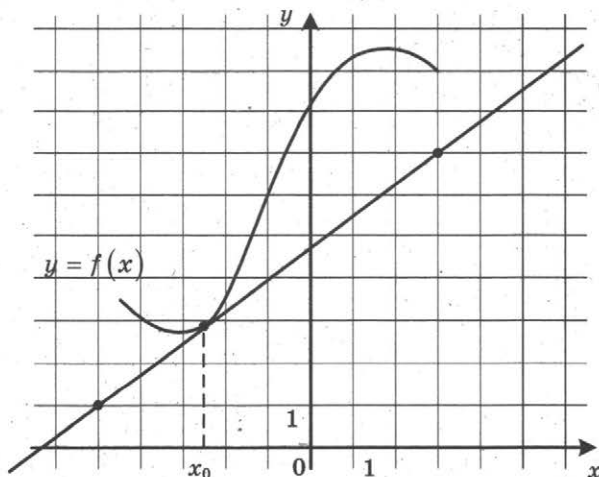
7

7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите $\sin B$.

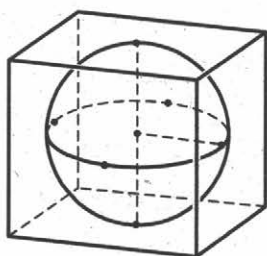


8

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

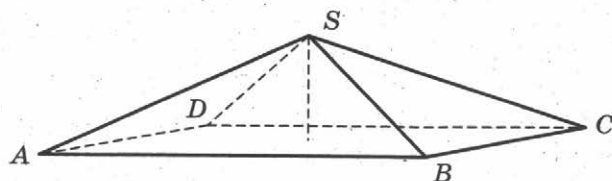


9. Шар, объём которого равен 21л, вписан в куб. Найдите объём куба.

 9

Часть 2

10. Найдите значение выражения $-20 \operatorname{tg} 52^\circ \cdot \operatorname{tg} 142^\circ$.
11. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 25$ метров, а зазор между соседними рельсами равен 12 мм. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре зазор между рельсами исчезнет? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)
12. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 8. Найдите её объём.

 10 11 12

13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 50 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.
14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 17$ на отрезке $[-1; 1]$.

 13 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right].$$

16

16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

17

17. Решите неравенство $1 + \log_6(4 - x) \leq \log_6(16 - x^2)$.

18

18. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

19

19. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

21

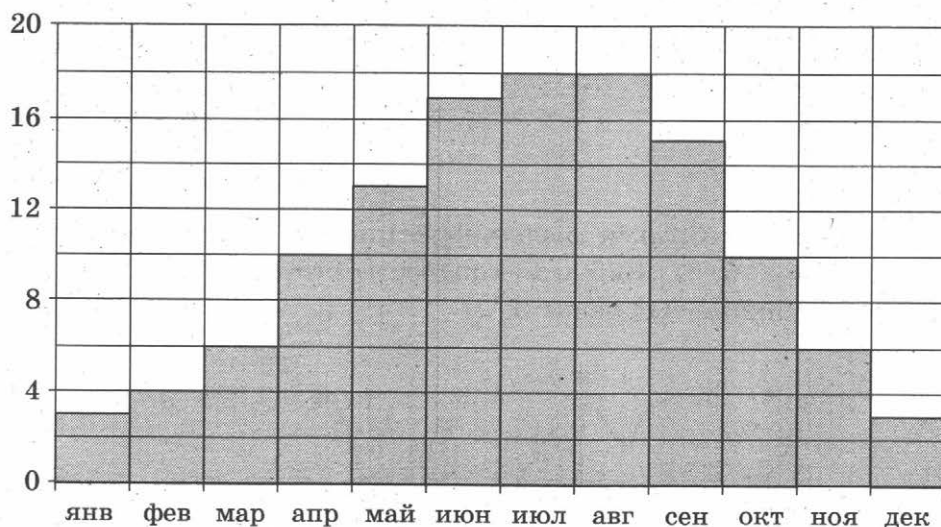
21. Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 39

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В спортивном лагере по настольному теннису каждый день ломается или теряется 8 теннисных шариков. Лагерная смена длится 18 дней. Шарик продают упаковками по 10 штук. Какое наименьшее количество упаковок шариков нужно купить на одну лагерную смену?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была равна 10 градусам Цельсия.



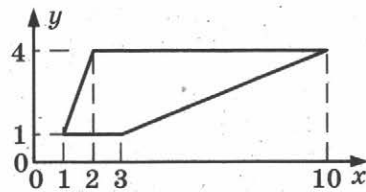
3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в

акции, он теряет право вернуть товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести пиджак ценой 9450 руб., футболку ценой 800 руб. и галстук ценой 900 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала пиджак и футболку, а потом галстук со скидкой.
 3. Б. купит сначала пиджак и галстук, а потом футболку со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

4

4. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



5

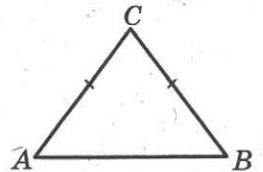
5. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

6

6. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

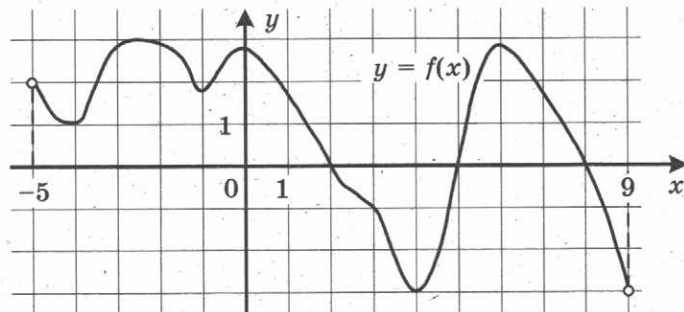
7

7. В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\sin A = \frac{4}{5}$.
Найдите AB .

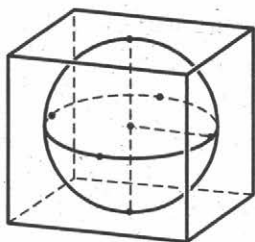


8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



9. Шар, объём которого равен π , вписан в куб. Найдите объём куба.

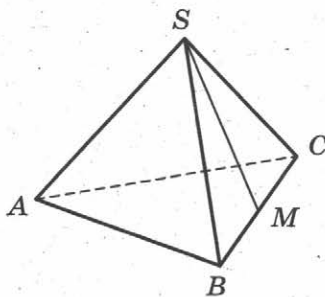


Часть 2

10. Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3,5$.

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{11} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $46,17 \cdot 10^{12}$. Определите температуру этой звезды.

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $AB = 6$, а площадь боковой поверхности равна 45. Найдите длину отрезка SM .



13. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,3 км от места отправления. Один идёт со скоростью 4 км/ч, а другой — со скоростью 4,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

14. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 80}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

9

10

11

12

13

14

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

16

16. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.

б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна 64.

17

17. Решите неравенство $9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511$.

18

18. На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

19

19. 1 января 2015 года Василий Михайлович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Василий Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Василий Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 137,5 тыс. рублей?

20

20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2(k+1)\cos t - k}{\sin t + \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке

$$\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

21

21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 672 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

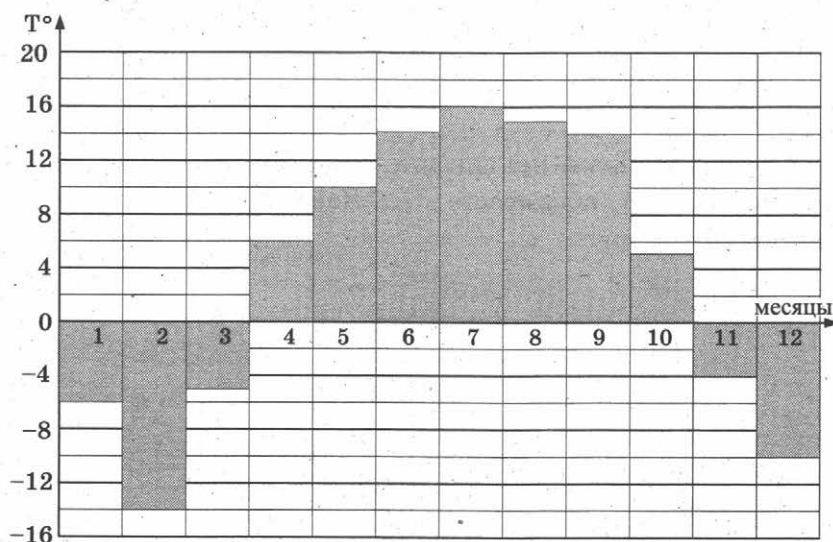
из них образуют геометрическую прогрессию?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 40

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3500 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1700 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1100 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.



3. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

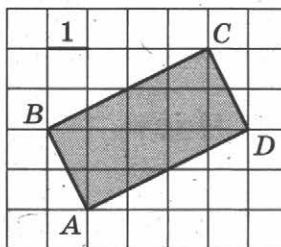
 1 2 3

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки
А	300 руб.	Нет	14 руб.
Б	Бесплатно	15 мин. — 225 руб.	17 руб.
В	120 руб.	20 мин. — 350 руб.	16 руб.

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

4

4. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.



5

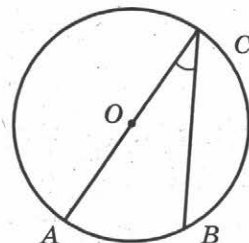
5. Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что первые два броска закончатся одинаково.

6

6. Решите уравнение $\sqrt{7-x} = 4$.

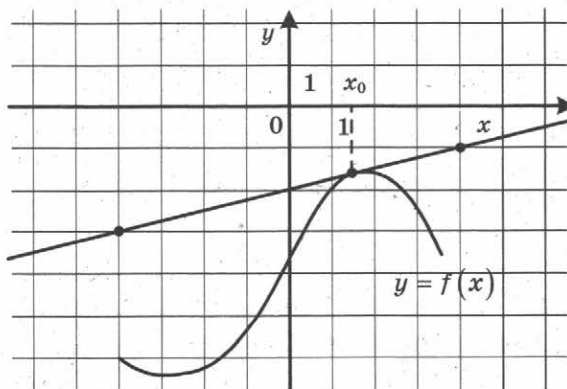
7

7. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{2}{9}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

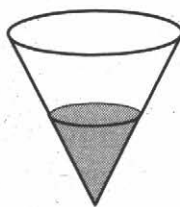


8

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



9. В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.). Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?


 9

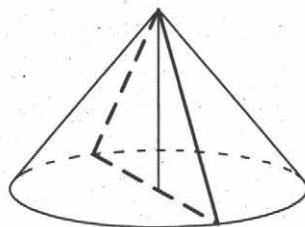
Часть 2

10. Вычислите $\log_5 135 - \log_5 5,4$.
11. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин, $b = -0,2$ К/мин². Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

 10

 11

12. Диаметр основания конуса равен 14, а длина образующей — 25. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.


 12

13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 21 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.
14. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 18x^2 + 17$ на отрезке $[-3; 3]$.

 13

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$.
 б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5; -4]$.

 15

16

16. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью, проходящей через диаметры оснований, перпендикулярные этим хордам.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

17

17. Решите неравенство $\log_{x^3-9x^2+27x-27}(9-x) \geq 0$.

18

18. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Из вершины A опущены перпендикуляры AF , AH , AP и AQ на прямые DE , BE , CD и BC соответственно.

а) Докажите, что $\angle FAH = \angle PAQ$.

б) Найдите AH , если $AF = a$, $AP = b$ и $AQ = c$.

19

19. 1 января 2015 года Тарас Павлович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Тарас Павлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Тарас Павлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

21

21. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3825.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

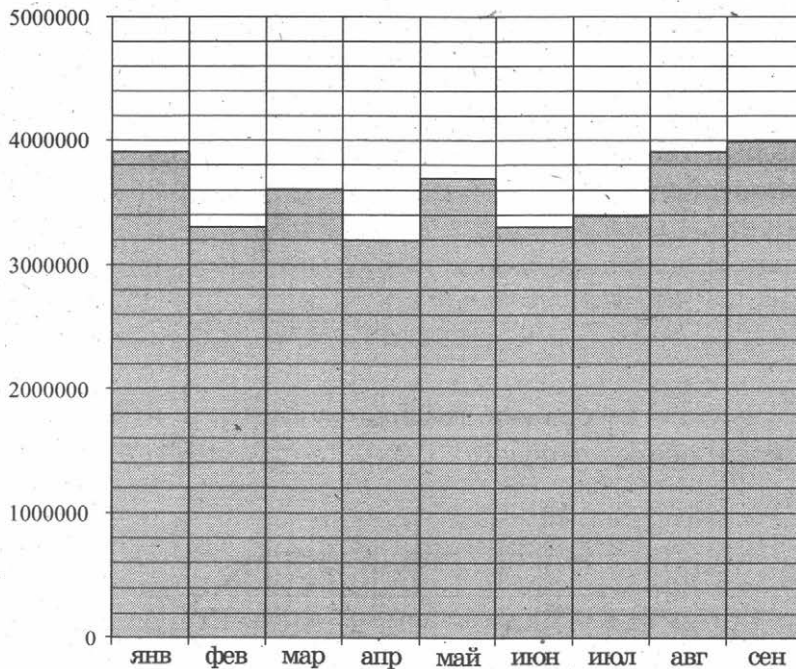
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 41

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Сырок стоит 5 руб. 40 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 40 рублей?
2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3. Рейтинговое агентство определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества

 1 2 2

Q и дизайна D . Каждый показатель оценивается читателями журнала по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле:

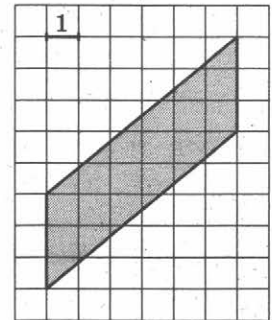
$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	3	5	5	3
Б	4	5	3	4	3
В	4	4	3	3	4

4

4. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

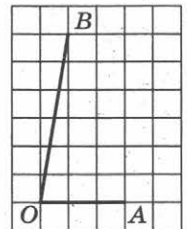
5. В каждой пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Галя покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Галя не найдёт приз в своей банке.

6

6. Найдите корень уравнения $\log_4(5 - x) = 2$.

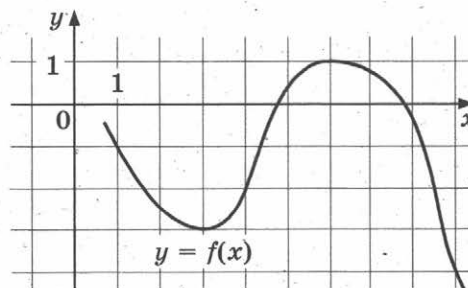
7

7. Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.

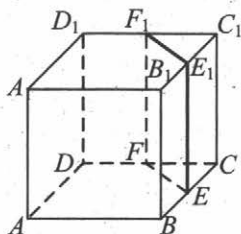


8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[1; 9]$.

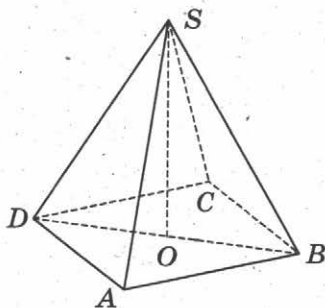


9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер $BC, DC, B_1 C_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1 , равен 42. Найдите объём куба.



Часть 2

10. Найдите значение выражения $\log_3 13 - \log_3 117$.
11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.
12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S вершина, $CS = 17$, $BD = 16$. Найдите длину отрезка SO .



13. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 39 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 26 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.
14. В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{3 - 3x - 2x^2}$ принимает наибольшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $3 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

16

16. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P — середина ребра BB_1 .
 а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно AC .
 б) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP .

17

17. Решите неравенство $\log_x(x-2) \cdot \log_x(x+2) \leq 0$.

18

18. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.
 а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
 б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

19

19. 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму в кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11%), затем Василий переводит в банк 3 696 300 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_5(x^2) - a - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2$ имеет ровно четыре решения.

21

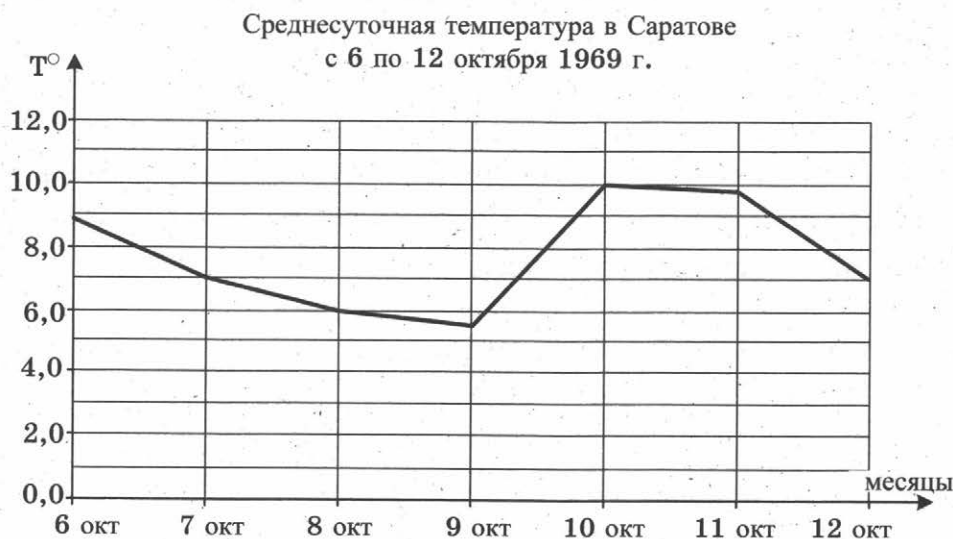
21. Друг за другом подряд выписали десятичную запись чисел 2^{50} и 5^{50} . Сколько всего цифр выписали?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 42

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Футболка стоит 160 рублей. Какое наибольшее число футболок можно купить на 600 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 20%?
2. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



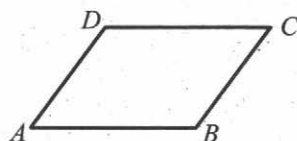
3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

Наименование продукта	Мурманск	Рязань	Тамбов
Говядина (1 кг)	288	260	202
Подсолнечное масло (1 л)	76	62	54
Молоко (1 л)	63	55	53
Сыр (1 кг)	284	257	245
Рис (1 кг)	56	37	40
Картофель (1 кг)	40	34	28

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 л молока, 1 кг сыра, 3 кг картофеля. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

4

4. Периметр параллелограмма равен 30. Большая сторона равна 10. Найдите меньшую сторону параллелограмма.



5

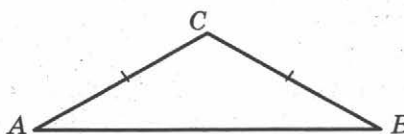
5. В группе туристов 10 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

6

6. Найдите корень уравнения: $\sqrt{5 + 2x} = 3$.

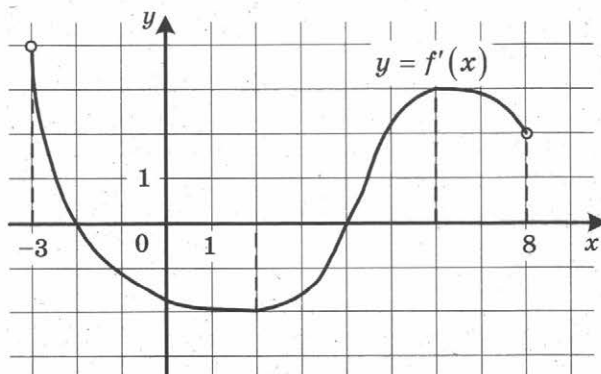
7

7. В треугольнике ABC угол A равен 29° , $AC = BC$. Найдите угол C .



8

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



9. В цилиндрический сосуд, в котором находится 4 литра воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объём детали? Ответ выразите в литрах.

9

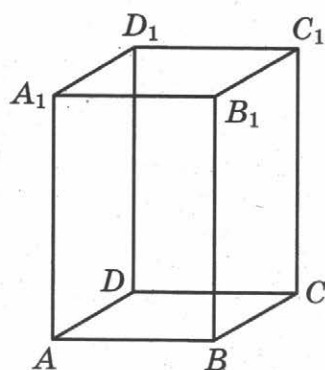
Часть 2

10. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.
11. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 155$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даёт формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В? Ответ выразите в омах.
12. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.

10

11

12



13. Из точки А в точку В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 7 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.
14. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 19$ на отрезке $[1; 3]$.

13

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $7 \sin^2 x + 8 \cos x - 8 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

16

16. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $AD = 8$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$.

а) Постройте прямую пересечения плоскости $AA_1 K$ с плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK .

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC .

17

17. Решите неравенство $9^{x-2} - 37 \cdot 3^{x-3} + 30 \leq 0$.

18

18. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M , причём $AM : MB = 1 : 2$. Найдите диагональ AC , если известно, что $AD = 2\sqrt{3}$.

19

19. 31 декабря 2014 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Андрей переводит в банк 2 733 750 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (a - 2x)^3 + 9x^2 + 3a = 6x$$

не имеет корней.

21

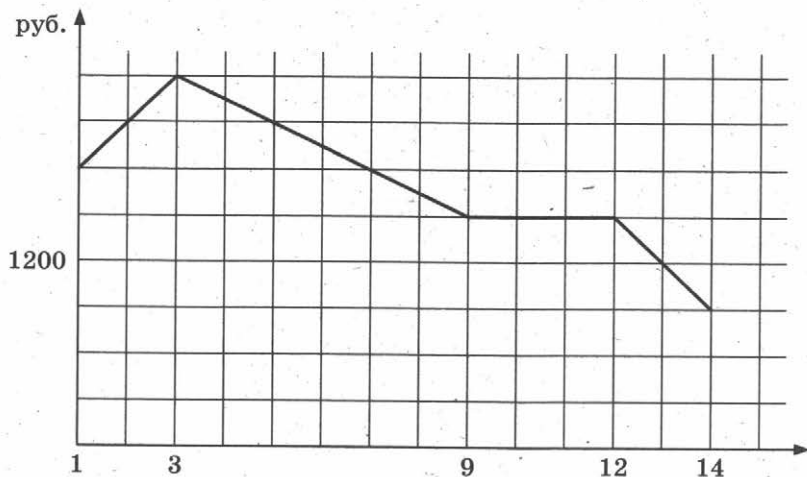
21. Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n , при которых уравнение $(x^2 + y^2)^{2010} = x^n \cdot y^n$ имеет натуральные решения.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 43

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

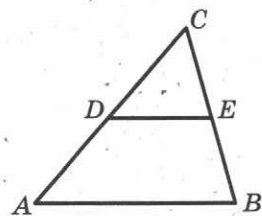
1. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 470 рублей после понижения цены на 25%?
2. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3. Семья из трёх человек планирует поехать из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 940 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 29 рублям за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

4

4. В треугольнике ABC DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 24. Найдите площадь треугольника ABC .



5

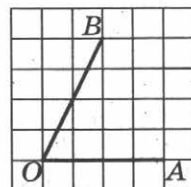
5. В группе туристов 8 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

6

6. Решите уравнение $\sqrt{x+9} = 5$.

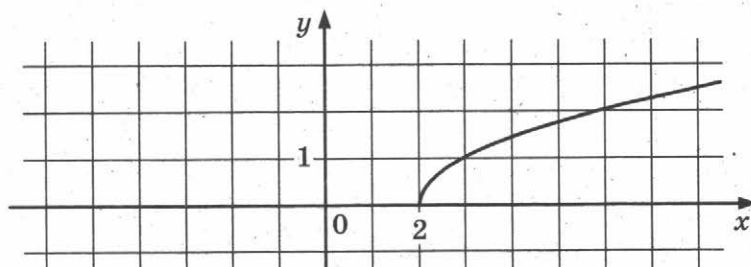
7

7. Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.



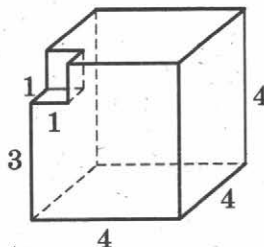
8

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



9

9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

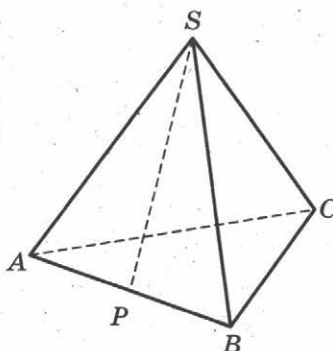
10

10. Найдите значение выражения $2 \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 105^\circ$.

11. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.

11

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $SP = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка BC .



12

13. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

13

14. В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$ принимает наименьшее значение?

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $5^{x^2 - 4x + 1} + 5^{x^2 - 4x} = 30$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 3]$.

15

16. В пирамиде $SABC$ известны длины ребер: $AB = AC = SB = SC = 10$, $BC = SA = 12$.

16

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и BC .

17. Решите неравенство $\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} + \frac{2}{x - 3} \leq x$.

17

18

18. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

19

19. Савелий хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Савелий взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?

20

20. Найдите все неотрицательные значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{2a + x^2 - 4 \log_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log_{1/3}^2(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

21

21. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчика и две девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять?

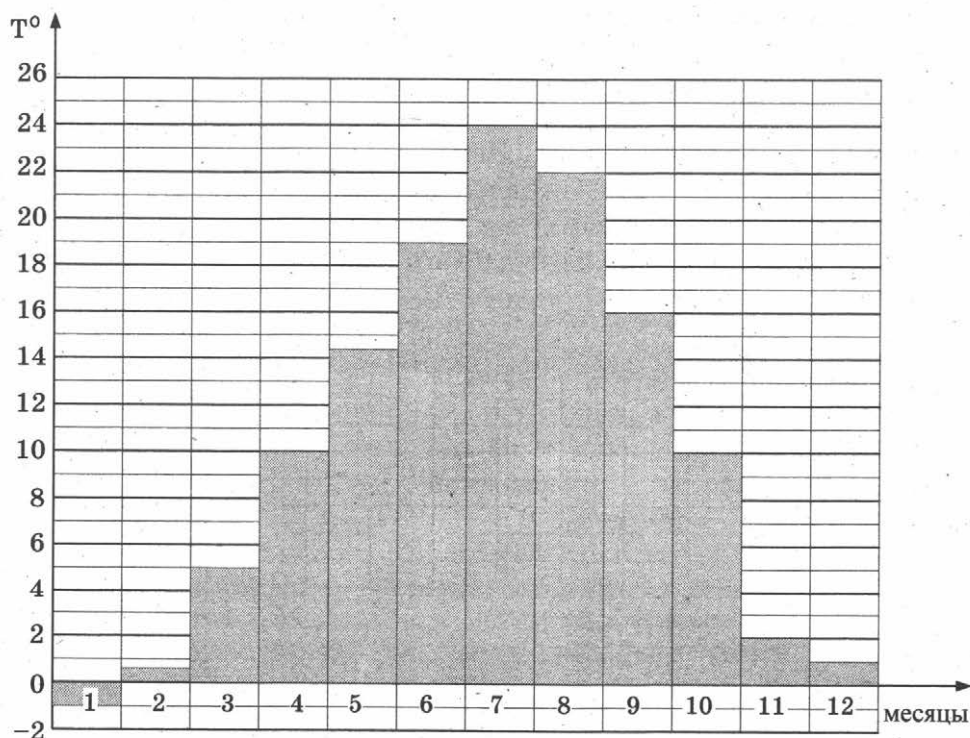
в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 44

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Летом килограмм черешни стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 800 г черешни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1988 году в Симферополе. Ответ дайте в градусах Цельсия.

 1 2

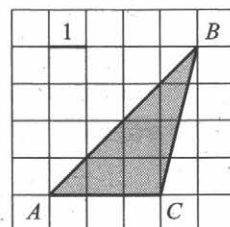
3

3. Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 шт. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответе напишите наименьшую сумму в рублях.

Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Доп. условия
А	394	300	Нет
Б	396	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3500 р.
В	398	200	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 р.

4

4. Найдите площадь треугольника ABC .



5

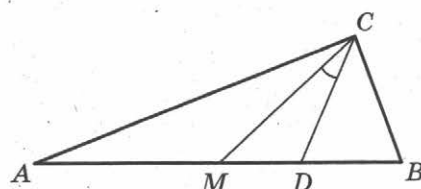
5. В среднем из 1800 садовых насосов, поступивших в продажу, 18 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

6

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{7x - 49} = \frac{1}{7}$.

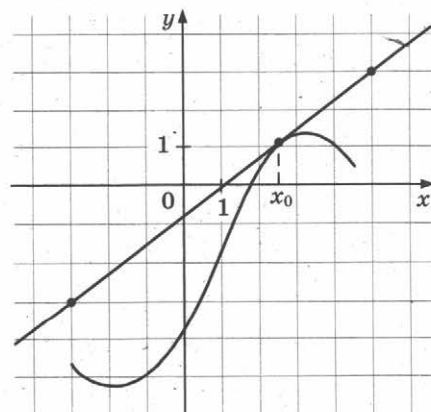
7

7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 87° и 3° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

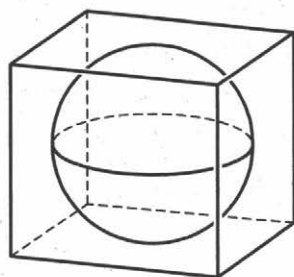


8

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



9. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 4. Найдите его объём.



9

Часть 2

10. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$.
11. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3,2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².
12. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 9, а высота боковой грани пирамиды, проведенная к ребру основания, равна $\sqrt{73}$. Найдите боковое ребро пирамиды.
13. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?
14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 + 20x^3 - 65x$ на отрезке $[-4; 0]$.

10

11

12

13

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $5 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

16

16. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 а) Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна, плоскости $A_1 B C_1$.
 б) Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.

17

17. Решите неравенство $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0$.

18

18. На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .
 а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.
 б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{6}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

19

19. 31 декабря 2014 года Евгений взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Евгений переводит очередной транш. Евгений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 540 тыс. рублей, во второй 649,6 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Евгению?

20

20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2 - (4 - 4k) \sin t}{\cos t - 4 \sin t} = 1$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

21

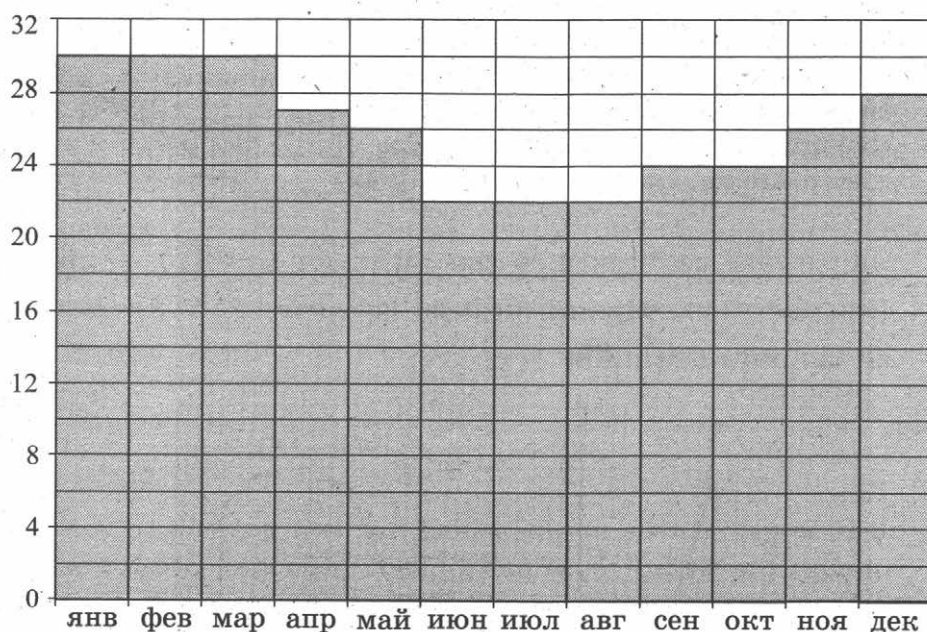
21. Десятичная запись натурального числа n должна состоять из различных (не менее двух) цифр одной чётности, а само оно должно быть квадратом целого числа. Найдите все такие n .

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 45

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячной температурой в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

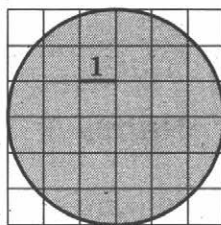


3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона	Первоначальный взнос (в процентах от цены)	Срок кредита (мес.)	Сумма ежемесячного платежа
Эпсилон	23 400	10	12	2160
Дельта	25 300	5	6	4520
Омикрон	27 800	25	6	3600

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты) и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

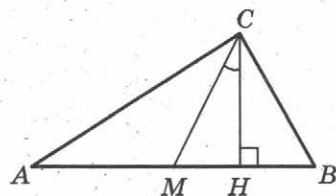
4. Найдите площадь S круга. В ответе укажите $\frac{S}{\pi}$.



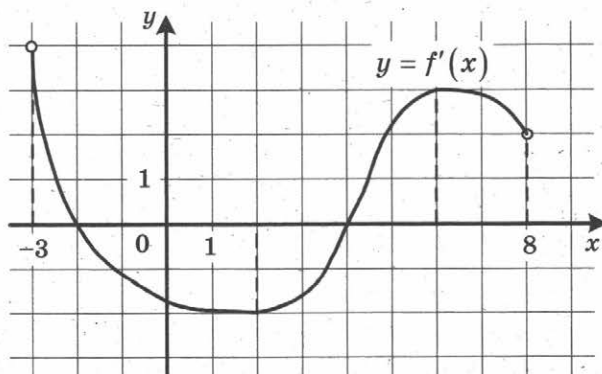
5. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{14 + 5x} = 7$.

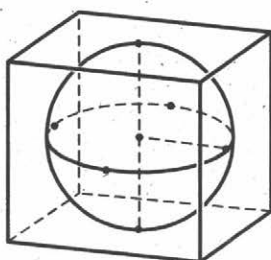
7. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 32° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



9. Шар, объём которого равен 42π , вписан в куб. Найдите объём куба.



9

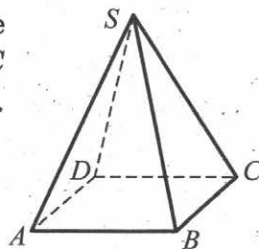
Часть 2

10. Найдите значение выражения $\log_6 144 - \log_6 4$.
11. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 200$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг?

10

11

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 17, сторона основания равна $15\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.



12

13. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
14. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

13

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. Решите уравнение $\frac{3 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \operatorname{ctg} x}{5 \cos^2 x - 4 \cos x} = 0$.

16

16. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1 , причём $BP : PB_1 = 1 : 3$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно AC .

б) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP .

17

17. Решите неравенство $\sqrt{x+4,2} + \frac{1}{\sqrt{x+4,2}} \geq \frac{5}{2}$.

18

18. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M . Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q , причём точка P лежит между точками D и Q . Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM .

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD .

19

19. 31 декабря 2014 года Владимир взял в банке некоторую сумму в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Владимир переводит в банк 4 548 600 рублей. Какую сумму взял Владимир в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\log_{0,5}(x^2) - a| - |\log_{0,5} x + 2a| = (\log_{0,5} x)^2$ имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

21

21. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи чисел получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 чисел получившейся последовательности, идущих подряд?

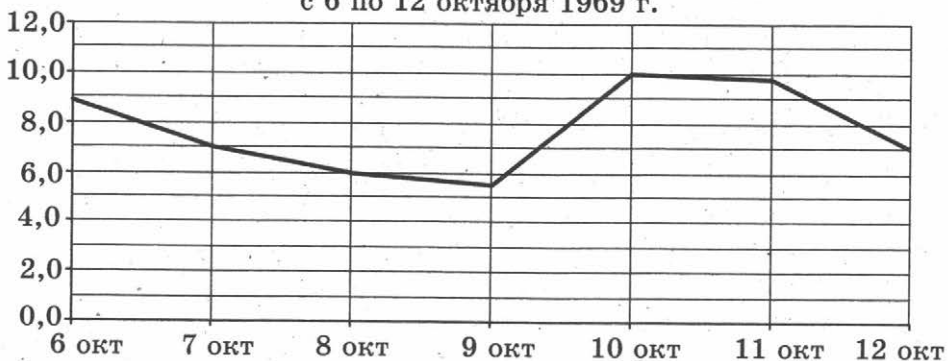
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 46

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Ответ округлите до целого числа.
2. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия.

Среднесуточная температура в Саратове
с 6 по 12 октября 1969 г.



Определите по графику, сколько дней из указанного периода средняя температура была в пределах от 6,5 °C до 9 °C.

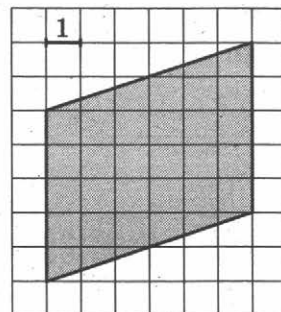
3. В трёх салонах сотовой связи один и тот же телефон продаётся в кредит на разных условиях. Условия даны в таблице.

Салон	Цена телефона, руб.	Первоначальный взнос, в процентах от цены	Срок кредита, мес.	Сумма ежемесячного платежа, руб.
Эпсилон	9 400	10	6	1580
Дельта	9 500	20	12	720
Омикрон	9 900	20	6	1400

Определите, в каком из салонов покупка обойдётся дешевле всего (с учётом переплаты), и в ответ напишите эту наименьшую сумму в рублях.

4

4. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

5. В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 990 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе. Результат округлите до тысячных.

6

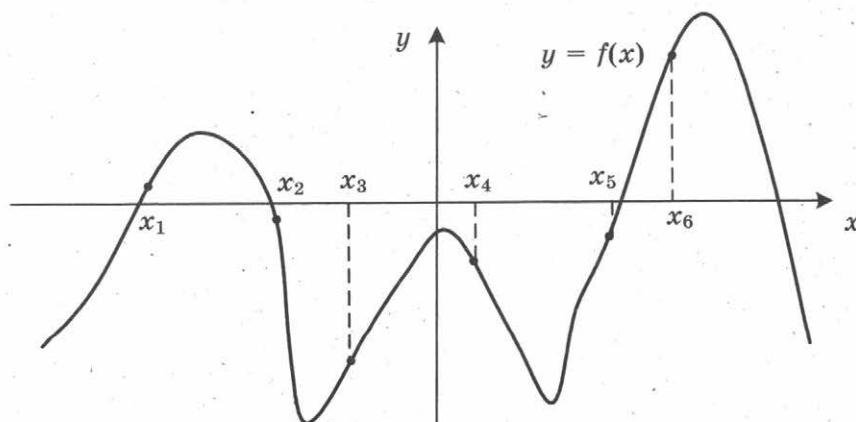
6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{4x+9} = \frac{1}{6x+12}$.

7

7. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56° . Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

8

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.



9. Объём цилиндра равен 12. Чему равен объём конуса, который имеет такое же основание и такую же высоту, как и данный цилиндр?

 9

Часть 2

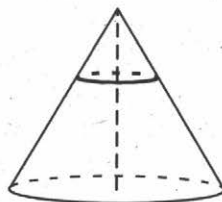
10. Найдите значение выражения $\frac{5 \sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.

 10

11. В электросеть включён предохранитель, рассчитанный на силу тока 20 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление электроприбора. (Ответ выразите в омах.)

 11

12. Площадь основания конуса равна 63. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 1 и 2, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.

 12

13. Из точки А в точку В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 14 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 105 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 50 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

 13

14. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1; 4]$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $6^{x^2-4x} + 6^{x^2-4x-1} = 42$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2; 4]$.

 15

16

16. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Точка L — середина ребра MB . Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$.
- а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые AO и LO перпендикулярны.
- б) Найдите высоту данной пирамиды.

17

17. Решите неравенство $\log_{|x|}^2(x^2) + \log_2(x^2) \leq 8$.

18

18. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB .
- а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.
- б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

19

19. 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Михаил переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

20

20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2 + (4 - 4k)\cos t}{4\cos t - \sin t} = 1$ не имеет решений на интервале $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$.

21

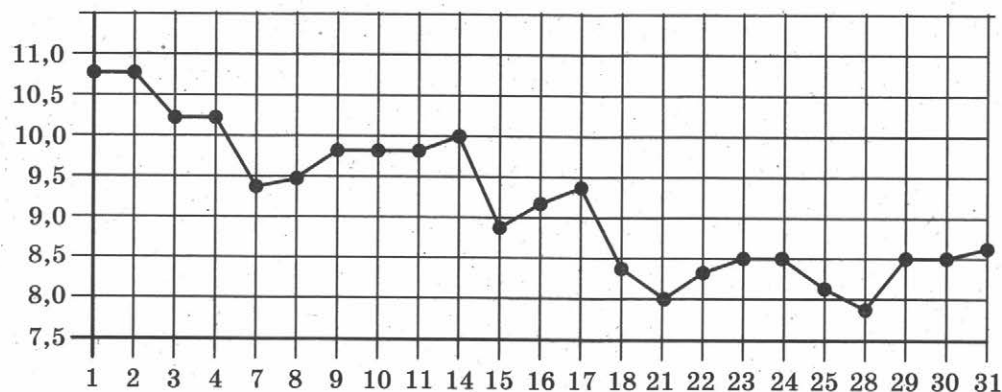
21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и
- а) пять;
- б) четыре;
- в) три
- из них образуют геометрическую прогрессию?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 47

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Поезд Москва–Ижевск отправляется в 17:41, а прибывает в 10:41 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?
2. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра была наименьшей за указанный период.



3. Автомобильный журнал определяет рейтинг автомобилей на основе показателей безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый отдельный показатель оценивается по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$$

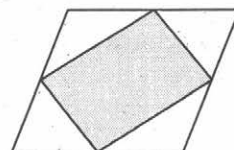
 1 2 3

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей автомобилей.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	2	5	5	3	2
Б	4	1	1	5	2
В	2	1	3	1	2

4

4. Площадь параллелограмма равна 14. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.



5

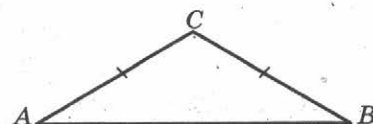
5. Двое играют в кости — они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадает поровну, то наступает ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выигрывает.

6

6. Найдите корень уравнения $\log_3(-5-x) = 1$.

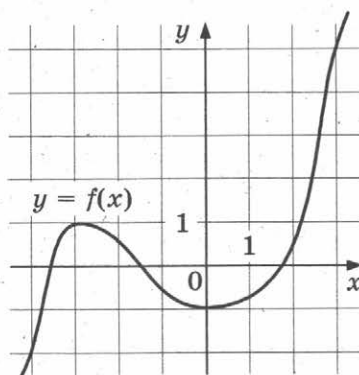
7

7. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AB = \sqrt{3}$. Найдите AC .



8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите точку, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4; 3]$.



9

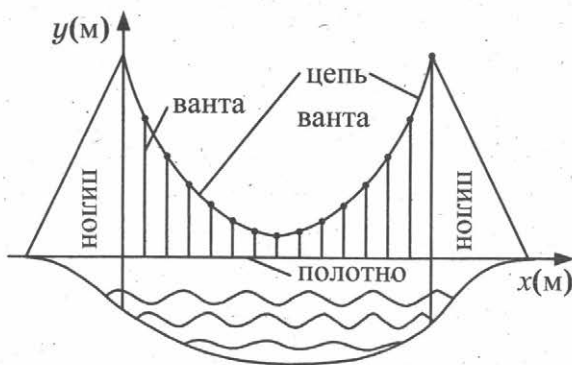
9. Объём данного правильного тетраэдра равен 64 см^3 . Найдите объём правильного тетраэдра, ребро которого в 2 раза меньше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^3 .

Часть 2

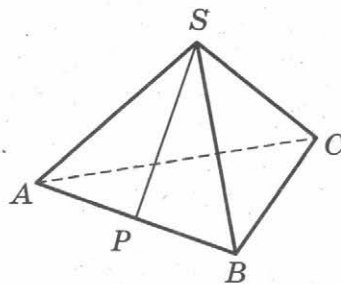
10. Найдите значение выражения $-50 \operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 117^\circ$.

 10

11. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,0013x^2 - 0,35x + 27$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

 11


12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $BC = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка SP .


 12

13. Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

 13

14. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 8e^x + 9$ на отрезке $[0; 2]$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

16

16. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC .

а) Постройте прямую пересечения плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC и SA , и плоскости, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

17

17. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 8x}{x - 7} \leq x$.

18

18. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 3$.

19

19. Семён хочет взять в кредит 1,3 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Семён взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тысяч рублей?

20

20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{1 + (2 - 2k)\sin t}{\cos t - \sin t} = 2k$ имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

21

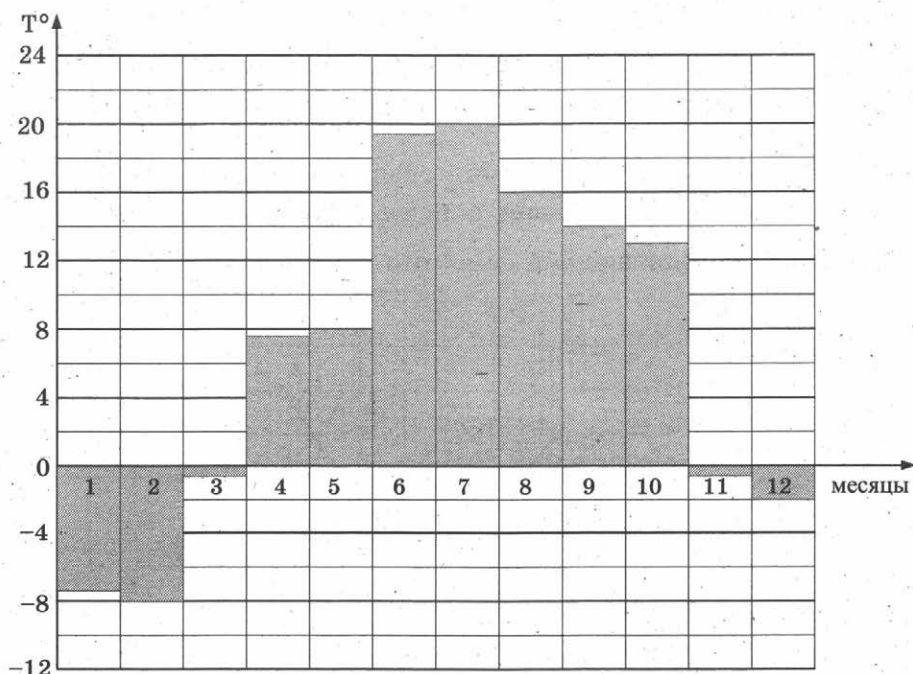
21. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 48

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 11% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,32 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 5 кг в течение суток?
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в Санкт-Петербурге в 1999 году.

 1 2

3

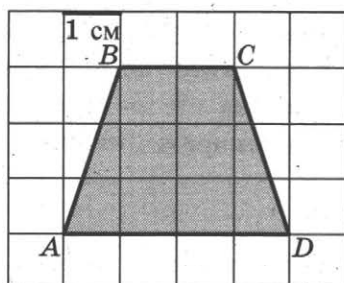
3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести дублёнку ценой 9400 руб., футболку ценой 850 руб. и перчатки ценой 950 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
2. Б. купит сначала дублёнку и футболку, а потом перчатки со скидкой.
3. Б. купит сначала дублёнку и перчатки, а потом футболку со скидкой.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

4

4. Найдите площадь трапеции $ABCD$. Размер каждой клетки 1 см \times 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

6

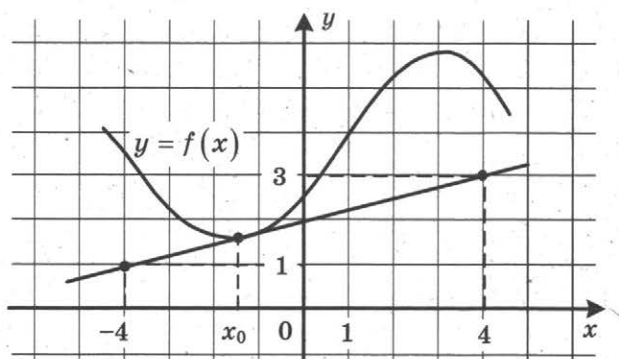
6. Найдите корень уравнения $2^{\log_{16}(9x+4)} = 5$.

7

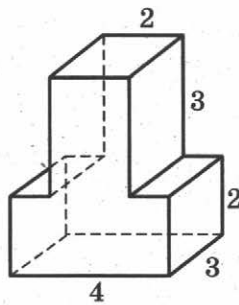
7. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 11$, $DC = 33$, $AC = 28$.

8

8. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



9

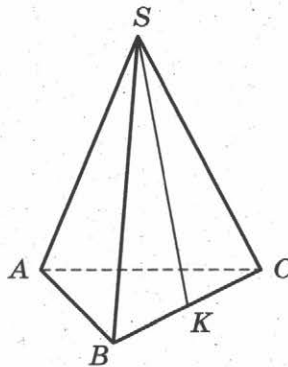
Часть 2

10. Найдите значение выражения $\frac{4 \sin 17^\circ \cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$.
11. Зависимость объёма спроса q (тыс. руб.) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 160 - 10p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 280 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

10

11

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $SK = 10$, а площадь боковой поверхности равна 60. Найдите длину отрезка AB .



12

13. Города A , B и C соединены прямолинейным шоссе, причём город B расположен между городами A и C . Из города A в сторону города C выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города B в сторону города C выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 28 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами A и B равно 112 км?

13

14. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 7$ на отрезке $[0; 2]$.

14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

16

16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 7$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями B_1CA_1 и BB_1C_1 .

17

17. Решите неравенство $4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 \leq 0$.

18

18. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

19

19. 31 декабря 2014 года Геннадий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Геннадий переводит очередной транш. Геннадий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 600 тыс. рублей, во второй 55 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Геннадию?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

21

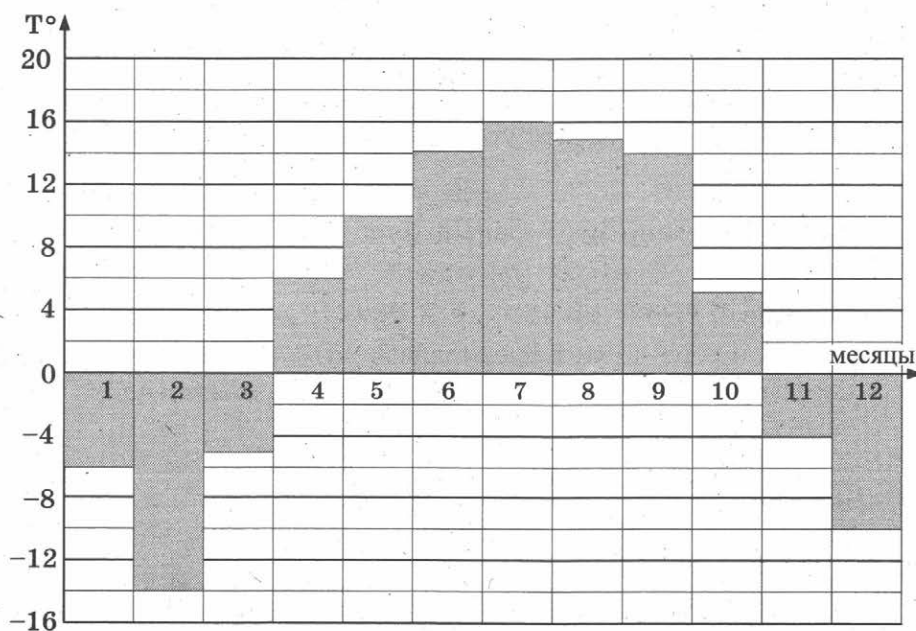
21. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение в точке $x = 11$ являются простыми числами. Найдите корни трёхчлена.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 49

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 900 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 400 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1994 году в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.

 1 2

3

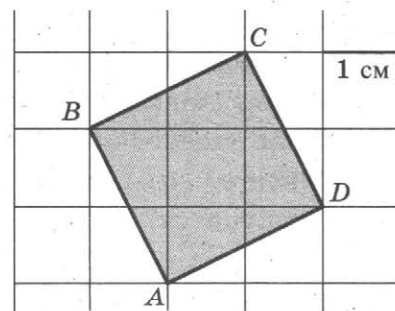
3. В магазине одежды объявлена акция — если покупатель приобретает товар на сумму свыше 5000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин.

Покупатель В. хочет приобрести куртку ценой 4500 руб., рубашку ценой 800 руб. и кеды ценой 1600 руб. В каком случае В. заплатит за покупку меньше всего?

1. В. купит все три товара сразу.
 2. В. купит сначала куртку и рубашку, а потом кеды со скидкой.
 3. В. купит сначала куртку и кеды, а потом рубашку со скидкой.
- В ответ запишите сумму (в рублях), которую заплатит В. за покупку в этом случае.

4

4. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки 1 см \times 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

5. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

6

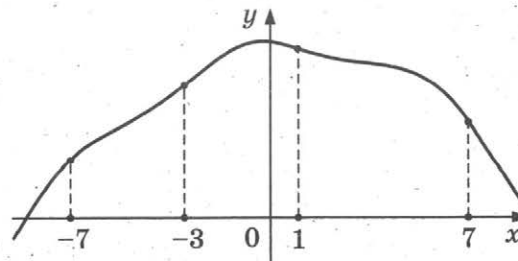
6. Найдите корень уравнения $\log_5(-2 - x) = 1$.

7

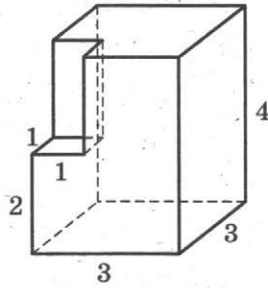
7. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21° , угол CAD равен 30° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

8

8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-7, -3, 1, 7$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10. Найдите значение выражения $\frac{2 \cos 28^\circ}{\cos 152^\circ}$.
11. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 65$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 60 В? Ответ выразите в омах.
12. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 6, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.
13. Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?
14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 8x^2 + 16x + 23$ на отрезке $[-13; -3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

9

10

11

12

13

14

15

16

16. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{11}$. Расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 12.

а) Постройте прямую пересечения плоскости $BB_1 DD_1$ с плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 , и плоскостью основания призмы.

17

17. Решите неравенство:

$$\log_7 \frac{3}{x} + \log_7 (x^2 - 7x + 11) \leq \log_7 \left(x^2 - 7x + \frac{3}{x} + 10 \right).$$

18

18. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую — в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

19

19. 1 января 2015 года Олег Владимирович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 3 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 3%), затем Олег Владимирович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Олег Владимирович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

20

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a - (a^2 - 2a - 3) \sin x + 4}{1,5 + 0,5 \cos 2x + a^2} < 1$ содержит отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6} \right]$.

21

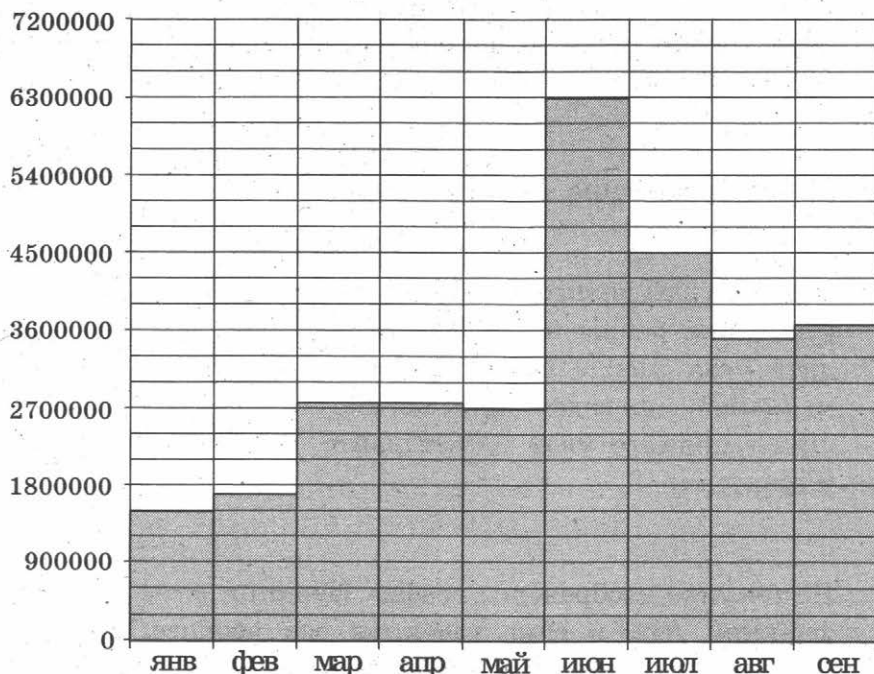
21. Найдите все такие натуральные n , что при вычеркивании первой цифры у числа 4^n снова получается число, являющееся натуральной степенью числа 4.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 50

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. В туристический поход отправляется группа из 18 человек. В походе на одного человека приходится 60 грамм гречки на прием пищи. Планируется 7 раз готовить гречку. Сколько килограммовых пачек необходимо купить, чтобы гречки хватило?
2. На диаграмме показано число запросов со словом ФУТБОЛ, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в указанный период, когда число запросов со словом ФУТБОЛ было меньше 3 600 000.

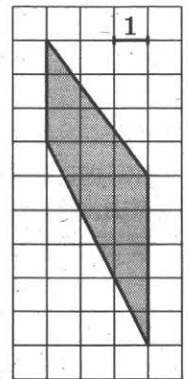
 1 2

3

3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести куртку ценой 9600 руб., жилет ценой 720 руб. и перчатки ценой 820 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?
1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала куртку и жилет, а потом перчатки со скидкой.
 3. Б. купит сначала куртку и перчатки, а потом жилет со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

4

4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см \times 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



5

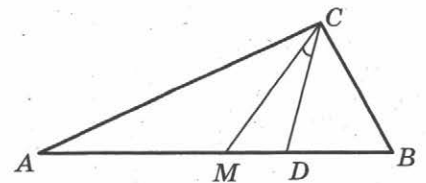
5. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зелёные». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах из трёх право первой владеть мячом получит команда «Белые».

6

6. Решите уравнение $\sqrt{x+4} = 7$.

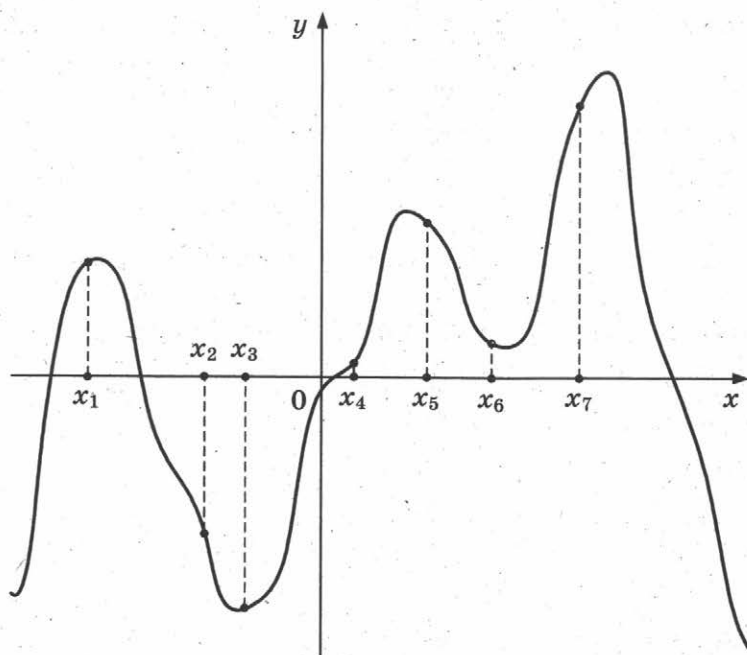
7

7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 63° и 27° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

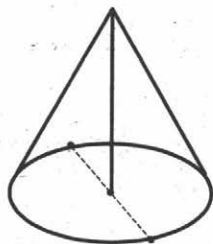


8

8. На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



9. Высота конуса равна 30, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.

 9


Часть 2

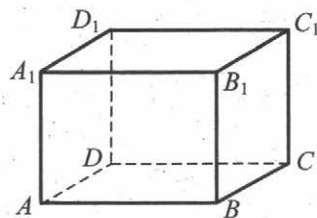
10. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{72} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $1,026 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

 10

 11

12

12. В прямоугольном параллелепипеде $AB-CDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 27$, $AD = 36$, $AA_1 = 10$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D , D_1 и B .



13

13. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{20-x}$ на отрезке $[19; 21]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $2 \cdot 9^{x^2-4x+1} + 42 \cdot 6^{x^2-4x} - 15 \cdot 4^{x^2-4x+1} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 3]$.

16

16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 6, точка M — середина ребра BC , точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды.
а) Постройте прямую пересечения плоскости MCF с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно прямой BC .
б) Найдите угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC .

17

17. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

18

18. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .
а) Докажите, что $CM \perp DK$.
б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 60 и 80.

19

19. 31 декабря 2014 года Иван взял в банке 8 540 000 рублей в кредит под 13,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 13,5%), затем Иван переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Иван выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\left|2^{1-x} - a\right| - \left|\frac{1}{2^x} + 2a\right| = 4^{-x}$ имеет единственное решение.

20

21. Найдите все такие целые a и b , что корни уравнения

$$x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$$

являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ — простыми числами.

21

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ.

ГЛАВА I. ЧАСТЬ 2

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 2

Часть 2

15. а) Решите уравнение $4 \sin^4 2x + 3 \cos 4x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$.

Из неё следует, что $\sin^4 2x = \frac{1}{4}(\cos^2 4x - 2 \cos 4x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\cos^2 4x - 2 \cos 4x + 1 + 3 \cos 4x - 1 = 0;$$

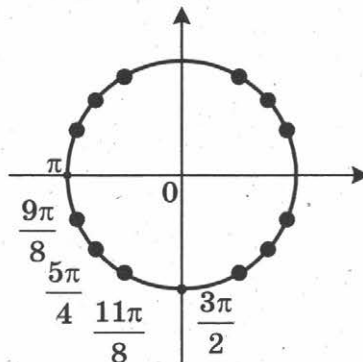
$$\cos^2 4x + \cos 4x = 0;$$

$$\cos 4x = -1 \quad \text{или} \quad \cos 4x = 0.$$

$$4x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим: $x = \frac{9\pi}{8}$; $x = \frac{5\pi}{4}$; $x = \frac{11\pi}{8}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{8}$.

16. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64.
- а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.
- б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна 64.

Решение.

Сторона основания пирамиды равна 8. Тогда диагональ основания AC равна $8\sqrt{2}$.

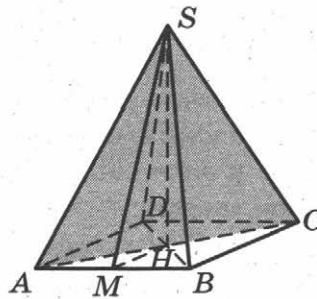
а) Пусть SH — высота пирамиды. Тогда H — середина основания пирамиды. Значит, SH — искомая прямая.

б) Площадь сечения, проходящего через S и диагональ AC , равна $\frac{1}{2}AC \cdot SH = 64$, откуда $SH = \frac{2 \cdot 64}{8\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$. Пусть SM — высота грани SAB . Тогда

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{128 + 16} = 12.$$

Следовательно, $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 = 48$.

Поэтому площадь боковой поверхности равна $48 \cdot 4 = 192$.



Ответ: 192.

17. Решите неравенство $\frac{2 - (x - 6)^{-1}}{5(x - 6)^{-1} - 1} \leq -0,2$.

Решение.

Сделаем замену $y = \frac{1}{x - 6}$. Получим

$$\frac{2 - y}{5y - 1} \leq -0,2; \quad \frac{1,8}{5y - 1} \leq 0; \quad y < \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x - 6} < \frac{1}{5}$; $\frac{11 - x}{x - 6} < 0$; $x < 6$ или $x > 11$.

Ответ: $(-\infty; 6)$; $(11; +\infty)$.

18. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
- а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
- б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

Решение.

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, \quad S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, \quad S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, \quad S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \quad \text{и} \quad S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$

б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .

Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2, \quad \text{откуда} \quad AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM , значит,

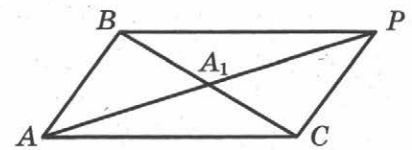
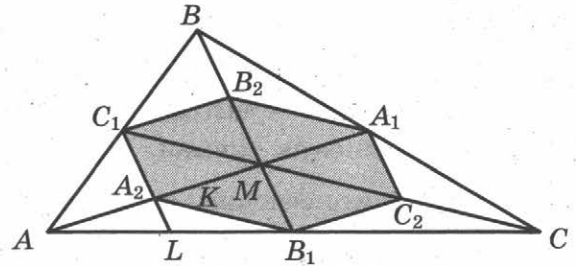
$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}$.

Ответ: $\frac{43}{2}$.



19. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

По условию двумя выплатами Дмитрий должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - (1 + b)X = 0$, откуда $X = \frac{Sb^2}{b + 1}$.

При $S = 4\,290\,000$ и $a = 14,5$, получаем: $b = 1,145$ и

$$X = \frac{4\,290\,000 \cdot 1,311025}{2,145} = 2\,622\,050 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 2 622 050.

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 4a - 2) - (x - a^2 + 2a + 3) = 2a - 5.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 4a - 2$, $n = x - a^2 + 2a + 3$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем:

$$x - a^2 + 2a + 3 \leq 0 \leq x - a^2 + 4a - 2;$$

$$a^2 - 4a + 2 \leq x \leq a^2 - 2a - 3.$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$, только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 \leq a^2 - 2a - 3, \\ a^2 - 2a - 3 \geq 5, \\ a^2 - 4a + 2 \leq 23; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a \geq 5, \\ a^2 - 2a - 8 \geq 0, \\ a^2 - 4a - 21 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 2,5, \\ (a - 4)(a + 2) \geq 0, \\ (a - 7)(a + 3) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 2,5, \\ -3 \leq a \leq -2, \\ 4 \leq a \leq 7. \end{cases}$$

Ответ: $4 \leq a \leq 7$.

21. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Например, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов этих чисел равна $25 - 13 = 12$. Если добавить число 4, то разность будет равна $81 - 29 = 52$, что ровно на 40 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии a_1, a_2, \dots, a_n . Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ & = 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ & + 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ & + \dots + \\ & + 2a_3(a_1 + a_2) + \\ & + 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d — разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1768,$$

откуда $n \leq 12$. Значит, 13 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1768$ следует, что n является делителем числа $1768 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 17$. Наибольший делитель, меньший 13, равен 8. При $n = 8$ получаем

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 221.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше, чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 221$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 165 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 5.

Значит, прогрессия из восьми чисел 5, 6, 7, ..., 12 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 2, 3; б) нет; в) 8.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 6

Часть 2

15. а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

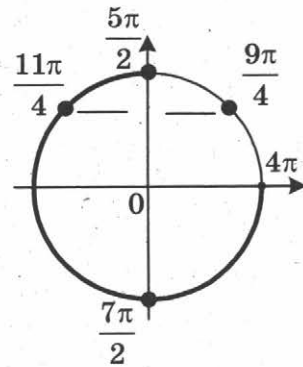
а) Преобразуем уравнение:

$$7^{2 \cos x \sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}; \quad 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x; \quad \cos x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0; \quad \cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберем корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Получаем: $\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}$.



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}$.

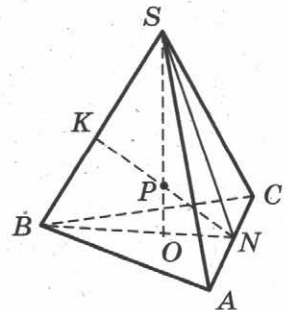
16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

- а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .
 б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

Решение:

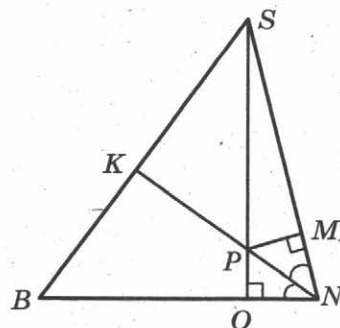
а) Точка O принадлежит отрезку BN , значит точка P , лежащая на отрезке SO , находится в плоскости SBN . Поэтому прямая PN содержится в плоскости SBN и пересекает SB в точке K .

$\triangle SNB$ равнобедренный, поскольку отрезки SN и BN — медианы одинаковых равносторонних треугольников SAC и BAC . Поэтому $SN = BN$. В точке O пересекаются медианы основания, значит, $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$.



Опустим перпендикуляр из точки P на сторону SN . Пусть он пересекает SN в точке M . Треугольники SPM и SNO подобны, поэтому $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3$.

Значит, $PM = \frac{1}{3}SP = PO$. Следовательно, треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB . В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, $NK \perp BS$.



б) Так как BS перпендикулярно NK , то искомое расстояние равно длине отрезка BK . Так как NK является медианой треугольника SNB , то $BK = \frac{1}{2}BS = 2$.

Ответ: 2.

17. Решите неравенство $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right)$.

Решение.

Сделаем замену $a = \frac{1}{x}$, $b = x^2 + 3x - 9$.

Неравенство принимает вид

$$\log_3 a + \log_3 b \leq \log_3 (a + b - 1);$$

$$\begin{cases} \log_3 ab \leq \log_3 (a + b - 1), \\ a > 0, \\ b > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} ab \leq a + b - 1, \\ a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

В первом из полученных неравенств перенесём все члены в левую часть и разложим её на множители: $(a - 1)(b - 1) \leq 0$.

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} - 1\right)(x^2 + 3x - 10) \leq 0, \\ \frac{1}{x} > 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1)(x^2 + 3x - 10) \geq 0, \\ x > 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1)(x + 5)(x - 2) \geq 0, \\ x > 0, \\ \left(x + \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

При условии $x > 0$ из первого неравенства получаем: $0 < x \leq 1$ или $x \geq 2$.

А из второго неравенства находим: $x > \frac{3\sqrt{5} - 3}{2}$.

Так как $\frac{3\sqrt{5} - 3}{2} > 1$, решением всей системы является промежуток $[2; +\infty)$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

18. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.
- а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
- б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Решение:

а) Пусть AB — диаметр большей из трёх окружностей, O — её центр, O_1 — центр окружности радиуса r , касающейся окружности с диаметром AB в точке A , O_2 — центр окружности радиуса R , касающейся окружности с диаметром AB в точке C , окружности с центром O_1 — в точке D , отрезка AB — в точке E .

Точки O , O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$. Аналогично

$OO_1 = OA - O_1A = OA - r$ и $O_1O_2 = O_1D + O_2D = r + R$.

Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r + OC - R + r + R = OA + OC = 2OA = AB.$$

б) Пусть $OA = 6$, $r = 2$. Тогда

$$O_2E = R, O_1O_2 = 2 + R, OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4, OO_2 = OC - O_2C = 6 - R.$$

Из прямоугольных треугольников O_1O_2E и OO_2E находим, что

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2 + R)^2 - R^2} = \sqrt{4 + 4R},$$

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6 - R)^2 - R^2} = \sqrt{36 - 12R},$$

а так как $O_1E = OO_1 + OE$, то $\sqrt{4 + 4R} = 4 + \sqrt{36 - 12R}$. Из этого уравнения находим, что $R = 3$ (это значит, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трёх окружностей, то есть точка E совпадает с O).

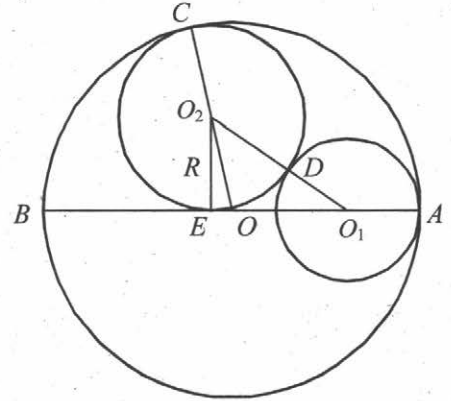
Ответ: 3.

19. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение:

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$



После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

После четвертой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1 + b + b^2 + b^3)X = Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1} \cdot X = 0, \text{ откуда } X = \frac{Sb^4(b - 1)}{b^4 - 1}.$$

При $S = 6\,902\,000$ и $a = 12,5$, получаем: $b = 1,125$ и

$$X = \frac{6\,902\,000 \cdot 1,601806640625 \cdot 0,125}{0,601806640625} = 2\,296\,350 \text{ (рублей).}$$

Ответ: 2 296 350.

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых любое число из отрезка $2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

Решение:

Если $2a + 5 < 0$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $a = -2,5$. Тогда уравнение имеет вид

$$|x + 0,5| + |x + 0,5| = 0,$$

и ни одно число из отрезка $[2, 3]$ не является его решением.

Пусть $a > -2,5$. Будем использовать геометрический подход и запишем уравнение в виде

$$x - (a + 2) + |x - (-a - 3)| = 2a + 5.$$

Заметим, что при $a > -2,5$ верно неравенство $-a - 3 < a + 2$. Поэтому решением неравенства является любое число из отрезка $[-a - 3, a + 2]$: ведь длина этого отрезка равна $(a + 2) - (-a - 3) = 2a + 5$ и неравенству удовлетворяют те и только те точки x , сумма расстояний от каждой из которых до точек $x = a + 2$; $x = -a - 3$ равна $2a + 5$. Осталось выбрать те значения a , при каждом из которых отрезок $[-a - 3, a + 2]$ содержит отрезок $[2, 3]$. Это выполнено тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} -a - 3 \leq 2, \\ a + 2 \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq -5, \\ a \geq 1; \end{cases} \quad a \geq 1.$$

Ответ: $a \geq 1$.

21. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящихся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

Решение:

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, делится на 11.

Запишем все цифры подряд: 9876543210. В написанном числе указанная разность сумм равна 5. Меняя местами, например, 5 и 8, мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую

уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, становится равной 11. Меняя местами, например, 4 и 7, или 3 и 6, получаем требуемые примеры.

Примечание. В задаче не требуется нахождение всех чисел, обладающих указанным свойством.

Ответ: Да.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 9

Часть 2

15. а) Решите уравнение $2 \sin^4 x + 3 \cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Из неё следует, что $\sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos^2 2x - 2 \cos 2x + 1)$.

Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2} \cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3 \cos 2x + 1 = 0;$$

$$\cos^2 2x + 4 \cos 2x + 3 = 0.$$

Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$

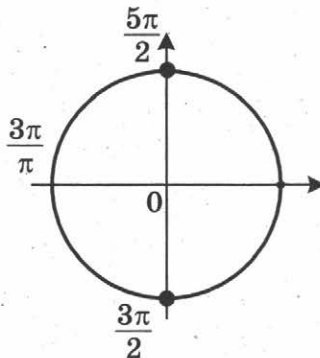
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$

$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

16. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC .

Решение.

Площадь основания пирамиды равна $144 - 108 = 36$, поэтому $AB = 6$.

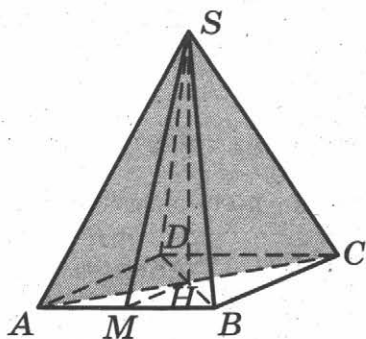
Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$.

Пусть SM — высота грани SAB . Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27$, поэтому $SM = 9$.

а) Пусть SH — высота пирамиды. Тогда H — середина основания пирамиды. Значит, SH — искомая прямая.

б) Имеем $SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36$.



Ответ: 36.

17. Решите неравенство $1 - \frac{2}{|x|} \leq \frac{23}{x^2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x^2 - 2|x| - 23}{x^2} \leq 0;$$

$$\frac{(|x| - 1 - 2\sqrt{6})(|x| - 1 + 2\sqrt{6})}{x^2} \leq 0.$$

Учитывая, что $|x| + 2\sqrt{6} - 1 > 0$ при всех значениях x , получаем:

$$|x| - 1 - 2\sqrt{6} \leq 0 \text{ при условии } x \neq 0.$$

Тогда $-1 - 2\sqrt{6} \leq x < 0$ или $0 < x \leq 1 + 2\sqrt{6}$.

Ответ: $[-1 - 2\sqrt{6}; 0), (0; 1 + 2\sqrt{6}]$.

18. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.
- а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .
- б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение:

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB , поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 , у этих треугольников общая:

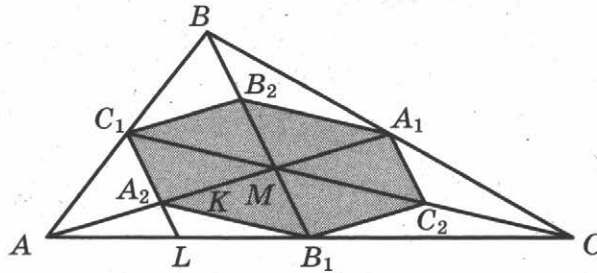
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем еще 5 равенств:

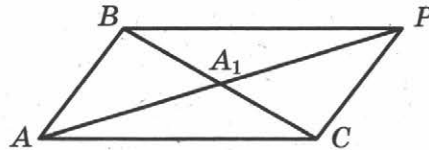
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC , AC , AB треугольника ABC через a , b , c .



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2, \text{ откуда } AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$.

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM , значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC : $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned} 2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) &= \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \\ &= \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC , получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

19. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

Решение:

Заметим, что за 4 месяца Александр Сергеевич выплатит 1,1 млн рублей. Таким образом, он не покроеет долг с процентами.

Каждый месяц долг увеличивается не более, чем на $1\,100\,000 \cdot 0,01 = 11\,000$ рублей. Значит, за пять месяцев Александр Сергеевич должен будет выплатить не более $1\,100\,000 + 5 \cdot 11\,000 = 1\,155\,000$ рублей, что менее чем $5 \cdot 275\,000 = 1\,375\,000$ рублей. Таким образом, Александр Сергеевич сможет выплатить кредит за 5 месяцев.

Ответ: 5.

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

Решение:

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x - a^2 + 3a - 1) - (x - a^2 + a + 2) = 2a - 3.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 3a - 1$, $n = x - a^2 + a + 2$.

Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \leq 0 \leq m$. Получаем

$$\begin{aligned} x - a^2 + a + 2 \leq 0 \leq x - a^2 + 3a - 1; \\ a^2 - 3a + 1 \leq x \leq a^2 - a - 2. \end{aligned}$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу (4; 19), только если правая граница отрезка решений не больше 4 или левая граница не меньше 19. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \leq a^2 - a - 2, \\ a^2 - a - 2 \leq 4, \\ a^2 - 3a + 1 \geq 19; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a \geq 3, \\ a^2 - a - 6 \leq 0, \\ a^2 - 3a - 18 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 1,5, \\ (a-3)(a+2) \leq 0, \\ (a-6)(a+3) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 1,5, \\ a \leq -3, \\ -2 \leq a \leq 3, \\ a \geq 6. \end{cases}$$

Ответ: $1,5 \leq a \leq 3$; $a \geq 6$.

21. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
- а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
- б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
- в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна $36 - 14 = 22$. Если добавить число 4, то разность будет равна $100 - 30 = 70$, что ровно на 48 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии a_1, a_2, \dots, a_n . Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = \\ = 2a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \\ + 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + \\ + \dots + \\ + 2a_3(a_1 + a_2) + \\ + 2a_2a_1. \end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1} , то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2(a_1 + nd) \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = (a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n,$$

где d — разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1440,$$

откуда $n \leq 11$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1 + nd)(2a_1 + (n-1)d)n = 1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11$.

Если $n = 10$, получаем

$$(a_1 + 10d)(2a_1 + 9d) = 144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90 \cdot 4 = 360 > 144$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 29a_1 - 54 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 9$, получаем

$$(a_1 + 9d)(2a_1 + 8d) = 160.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72 \cdot 4 = 288 > 160$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 8$, получаем:

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180$.

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 4.

Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

Единый государственный экзамен

Бланк
ответов № 1



Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ 7 6 5 4 3 2 1 0
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z ,

Регион Код предмета Название предмета

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
----------------------	----------------------	----------------------

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение номеров вариантов в задании
и бланке регистрации подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Номер варианта

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
----------------------	----------------------	----------------------

ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета

Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

1	<input type="text"/>	21	<input type="text"/>
2	<input type="text"/>	22	<input type="text"/>
3	<input type="text"/>	23	<input type="text"/>
4	<input type="text"/>	24	<input type="text"/>
5	<input type="text"/>	25	<input type="text"/>
6	<input type="text"/>	26	<input type="text"/>
7	<input type="text"/>	27	<input type="text"/>
8	<input type="text"/>	28	<input type="text"/>
9	<input type="text"/>	29	<input type="text"/>
10	<input type="text"/>	30	<input type="text"/>
11	<input type="text"/>	31	<input type="text"/>
12	<input type="text"/>	32	<input type="text"/>
13	<input type="text"/>	33	<input type="text"/>
14	<input type="text"/>	34	<input type="text"/>
15	<input type="text"/>	35	<input type="text"/>
16	<input type="text"/>	36	<input type="text"/>
17	<input type="text"/>	37	<input type="text"/>
18	<input type="text"/>	38	<input type="text"/>
19	<input type="text"/>	39	<input type="text"/>
20	<input type="text"/>	40	<input type="text"/>

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

ОТВЕТЫ. ГЛАВА I

Тренировочная работа 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
26	4	0,84	5	0,04	2	6	0,75	8	-8	40	168	4	-5
15	а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$												
16	$\frac{\sqrt{2}}{4}$												
17	$(5; 7), (7; 10)$												
18	$\frac{ac}{b}$												
19	10												
20	$a < \frac{3 - \sqrt{57}}{4}; a > \frac{3 + \sqrt{57}}{4}$												
21	а) нет, б) нет, в) да												

Тренировочная работа 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	1	12860	21	0,5	-8	58	0,25	18	-6	6000	5	56	51
15	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}; \frac{5\pi}{4}; \frac{11\pi}{8}$												
16	192												
17	$(-\infty; 6); (11; +\infty)$												
18	$\frac{43}{2}$												
19	2 622 050												
20	$4 \leq a \leq 7.$												
21	а) 2, 3; б) нет; в) 8												

Тренировочная работа 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	4	505	15	0,17	-9	0,8	6	168	-2	2,25	6	9	20
15	а) $\left\{ \left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$												
16	б) $\arctg \frac{21}{17}$												
17	$[0; \log_2 3]$												
18	49												
19	6												
20	$[7 - \sqrt{39}; 7 + \sqrt{39}]; [-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}]$												
21	а) нет; б) нет; в) 16												

Тренировочная работа 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	25	630	10	0,5	2	36	10	126	2	25	160	6	16
15	а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$												
16	192												
17	$(-4; -3), (-1; 3)$												
18	4 : 21												
19	20												
20	$a = 2$												
21	$a = 27^3$												

Тренировочная работа 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
32	5	1260	7,5	0,5	25	124	6	6	-9	1200	80	53	-8,25
15	а) 0; $-\log_2 19$; б) $-\log_2 19$												
16	$\frac{1}{4}$												
17	$[2; 4)$												
18	7												
19	2 916 000												
20	$\left[\frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}; \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2} \right]$												
21	$m = n = k = 2$												

Тренировочная работа 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10980	4000000	622	2,25	0,999	5	0,6	3	175	2	7	5,5	3	16
15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}; \frac{7\pi}{2}$												
16	2												
17	$[2; +\infty)$												
18	3												
19	2 296 350												
20	$a \geq 1$												
21	Да												

Тренировочная работа 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	1400	28060	69	0,5	5	6	4	350	2	1	12	16	8
15	а) πk ; $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) 2π ; $\frac{17\pi}{6}$; 3π ; $\frac{19\pi}{6}$												
16	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$												
17	$(3 + \log_9 7; +\infty)$												
18	15												
19	6												
20	$0; \frac{49}{16}$												
21	11												

Тренировочная работа 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	2	1160	8	0,14	9	40	4	2	14	5,5	120	6	6
15	а) $1 \pm \sqrt{3}$; б) $1 - \sqrt{3}$												
16	$\frac{\sqrt{5}}{5}$												
17	$(4; 8]$												
18	1:3												
19	9												
20	$-2 \leq k < \sqrt{2} - 2$ или $\sqrt{2} - 2 < k \leq 0$												
21	а) нет, б) да (225, 3375, 225), в) 479.												

Тренировочная работа 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
60	5	12840	30	0,25	-7	59	0,75	18	-4	4000	63	60	17
15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$												
16	36												
17	$[-1 - 2\sqrt{6}; 0), (0; 1 + 2\sqrt{6}]$												
18	$\frac{63}{2}$												
19	5												
20	$1,5 \leq a \leq 3; a \geq 6$												
21	а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8												

Тренировочная работа 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
42	28	11060	16	0,6	-3	24	0,25	96	20	5	8	48	17
15	а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $-\arctg 3 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi - \arctg 3$; $\frac{9\pi}{4}$												
16	$\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$												
17	$[1; \log_2 5]$												
18	1:6												
19	20												
20	$-24 < a < 18$												
21	а) нет, б) нет, в) да.												

Тренировочная работа 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	4500	28260	6	0,58	16	122	0,25	4	2	14	450	140	-7
15	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^{m+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi - \arcsin \frac{2}{3}$, $\pi + \arcsin \frac{2}{3}$												
16	0,5												
17	$(-\infty; 1], (2; 3)$												
18	98												
19	6 510 000												
20	$x = 0$ при $a = 0$ или $a = 1$												
21	а) 7; б) 5002; в) 5054												

Тренировочная работа 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
63	28	3960	7	0,505	7	1	5	252	-0,75	17,67	84	21	-2
15	а) $2 \pm \sqrt{5}$; б) $2 - \sqrt{5}$												
16	0,5												
17	$(-\infty; 2], [3; +\infty)$												
18	19												
19	6 409 000												
20	$\frac{1}{2} < k < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ или $k > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$												
21	64 и 6084												

Тренировочная работа 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	3	435	5	0,17	45	21	7	8	-2	12	6	53	44
15	а) $2 \pm \sqrt{6}$; б) $2 - \sqrt{6}$												
16	$\operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{2}}{3}$												
17	$(2; 3]$												
18	$4\sqrt{2}$												
19	6 330 000												
20	$k = 1 - \frac{\sqrt{17}}{2}$ или $k > \frac{-\sqrt{3}}{4}$												
21	2011, 3015												

Тренировочная работа 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	5	10380	12	0,125	-7	61	3	42	-2	6000	4	52	4
15	а) $n\pi$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 2π ; $\frac{17\pi}{6}$; 3π												
16	5												
17	$(-\infty; 0], [1; 7)$												
18	2												
19	7 490 000												
20	$a \leq -0,75$; $a \geq 0,75$												
21	а) нет, б) нет, в) да.												

Тренировочная работа 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	25	11105	30	0,25	2	42	0,75	34	-2	6	4	84	15
15	а) $2 \pm \sqrt{2}$; б) $2 - \sqrt{2}$												
16	2												
17	$[-2; 2]$												
18	1:10												
19	6												
20	$0,5 \leq k < 1 + \frac{\sqrt{17}}{2}$ или $k > 1 + \frac{\sqrt{17}}{2}$												
21	$x_1 = 12, x_2 = 13$												

Тренировочная работа 16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	8	0,78	9	0,99	69	6	0,25	32	0,75	6000	1200	9	9
15	а) $2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arccos \frac{1}{6}, -2\pi + \arccos \frac{1}{6}$												
16	$\frac{12}{7}$												
17	$[\log_3 30; 4]$												
18	$\frac{24}{5}\sqrt{6}$												
19	10												
20	$-\frac{9}{4} < a < 2$												
21	51												

Тренировочная работа 17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	4000000	1827	9	0,375	-1,5	99	-2	512	0,4	11	15	63	23
15	а) $2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{7} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $0, \pm \arccos \frac{1}{7}$												
16	2												
17	$(-\infty; 0), \left[2; \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right), [5; +\infty)$												
18	68												
19	5 152 900												
20	$-\frac{1}{12} < a < 0$ или $0 < a < \frac{1}{12}$												
21	а) 14; б) 90; в) 1												

Тренировочная работа 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	30	11058	18	0,2	-8	18	-4	63	50	15	4	63	-0,75
15	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$												
16	$\frac{\pi}{3}$												
17	$(-2; -1] \cup (1; 2)$												
18	$\frac{17-4\sqrt{13}}{3}$												
19	5												
20	$a < \frac{3-\sqrt{57}}{4}; a > \frac{3+\sqrt{57}}{4}$												
21	$a = -3, b = -1$												

Тренировочная работа 19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
356	6	0,68	5	0,5	-11	2	2	336	-5	90	7	4	1
15	а) $\pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arccos \frac{2}{5}, -2\pi + \arccos \frac{2}{5}$												
16	2												
17	$(-4, 2; -3, 95], [-0, 2; +\infty)$												
18	1,92												
19	12												
20	$a = -\frac{9}{4}, a = 0, a = \frac{1}{12}$												
21	$n = 0, x = 3; n = 0, x = -3$												

Тренировочная работа 20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
17	6	6740	96	0,8	42	34	4	2	2	7	10	10	-2
15	$x = \pi - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$												
16	$2\sqrt{7}$												
17	$[-4; -1), (-1, 0), (0, 1), (1; 4]$												
18	9 : 7												
19	6												
20	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$												
21	3												

Тренировочная работа 21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2420	4500	387000	20	0,98	8	3	0,25	84	535	400	84	120	9
15	а) $2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arccos \frac{1}{6}, -2\pi + \arccos \frac{1}{6}$												
16	б) $\frac{10}{7}$												
17	$(-\infty; -2]; 0; [1; 5]$												
18	289												
19	13												
20	$-\frac{9}{4} < a \leq -2$												
21	$a = -3, b = -1$												

Тренировочная работа 22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
318,6	6	168000	5	0,4	6	60	2	343	2	13,75	420	40	181
15	а) $\pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arccos \frac{2}{5}, -2\pi + \arccos \frac{2}{5}$												
16	1,2												
17	$(3; 4), [5; 6), (6; 7]$												
18	$\frac{11 - 2\sqrt{10}}{3}$												
19	12,5												
20	$x = 0$ при $a = 4$												
21	а) нет; б) нет; в) да												

Тренировочная работа 23

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
27	0,8	507	10,5	0,25	-20	0,8	3	4	12	1000	16	40	-18
15	а) $-2 \pm \sqrt{5}$; б) $-2 + \sqrt{5}$												
16	б) $\frac{21}{16}$												
17	$(-6; -4], [4; +\infty)$												
18	13												
19	5												
20	$0 \leq k < \frac{4\sqrt{2} - 2}{21}$ или $\frac{4\sqrt{2} - 2}{21} < k \leq \frac{1}{3}$												
21	24												

Тренировочная работа 24

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6000	9	200	2,25	0,012	1,5	99	2	20	9	8,39	45	30	9
15	а) $\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$												
16	$\frac{\pi}{3}$												
17	$(-\infty; -1], 0, [2; 6)$												
18	$2\sqrt{7}$												
19	3 703 860												
20	$\left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$												
21	а) 36; б) 72; в) 1												

Тренировочная работа 25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
11	5	23610	10	0,26	-6	155	1	28	-22	8	6	15	7
15	а) $-\arctg 2 + \pi n$, $-\arctg 3 + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi - \arctg 2$, $-\pi - \arctg 3$												
16	б) 1												
17	$[-9; -2), (-2, -1), (-1, 0), (0; 7]$												
18	1:15												
19	6												
20	$\left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$												
21	$x_1 = 12, x_2 = 13$												

Тренировочная работа 26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	2	25920	19	0,25	-13	55	3	24	34	0,75	16	9,6	-5
15	а) $2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$												
16	б) $\arctg 3$												
17	$(-\infty; -1], [2; +\infty)$												
18	$\frac{15}{2}\sqrt{15}$												
19	10												
20	$(-\infty; 0)$												
21	2500 или 400												

Тренировочная работа 27

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	5	420	10,5	0,375	-1	11	-0,5	175	-0,4	1,6	6	53	8
15	а) $\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-5\pi; -4\pi$												
16	14												
17	$[-1; 4)$												
18	0,96												
19	12,5												
20	$\left(-\infty; -\frac{9}{40}\right)$												
21	2011, 3015												

Тренировочная работа 28

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3680	4	461	21	0,375	7	120	3	312	-5	0,81	6	10	4

15	a) 1; $\log_2 6$; б) $\log_2 6$
16	$\frac{2}{3}$
17	$[\log_2 7; 6]$
18	$\frac{96}{7}\sqrt{3}$
19	6 620 000
20	$a \leq -0,75$; $a \geq 0,75$
21	51

Тренировочная работа 29

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
23	11	6740	2	0,2	2	28	0,5	112	20	5,5	1	7	1

15	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
16	80
17	$[1; \log_2 5]$
18	$3\sqrt{5}$
19	11
20	$(-\infty; -\frac{1}{5}]; [8; +\infty)$
21	$n = 0, x = 3$; $n = 0, x = -3$

Тренировочная работа 30

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16000	30	946	5	0,96	-1	120	3	54	2	400	240	10	-4

15	a) $\left\{ \left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$
16	14
17	$(-4, 2; -3, 95], [3, 8; +\infty)$
18	$\frac{85}{3}$
19	5
20	$\left(\frac{16}{5}; +\infty \right)$
21	64 и 6084

Тренировочная работа 31

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	1400	622	8	0,6	-7	0,6	4	18	-2	7	12	6	6
15	а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$												
16	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$												
17	$[0; \log_2 3]$												
18	$\frac{63}{2}$												
19	6												
20	$0; \frac{49}{16}$												
21	Да												

Тренировочная работа 32

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
26	28	505	30	0,14	25	6	4	96	2	5,5	6	6	-8,25
15	а) $\pi k; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$												
16	36												
17	$[2; +\infty)$												
18	49												
19	10												
20	$-24 < a < 18$												
21	а) нет; б) нет; в) 16												

Тренировочная работа 33

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
32	4	28060	16	0,5	2	59	3	2	-9	5	120	16	16
15	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}; \frac{5\pi}{4}; \frac{11\pi}{8}$												
16	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$												
17	$(5; 7), (7; 10)$												
18	1:3												
19	2 916 000												
20	$a < \frac{3 - \sqrt{57}}{4}; a > \frac{3 + \sqrt{57}}{4}$												
21	11												

Тренировочная работа 34

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
60	5	12860	5	0,999	-3	124	6	350	-6	4000	8	3	20
15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$												
16	$\frac{\sqrt{5}}{5}$												
17	$(-\infty; 6); (11; +\infty)$												
18	1:6												
19	5												
20	$\left[\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \right]$												
21	а) 2, 3; б) нет; в) 8												

Тренировочная работа 35

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	4000000	0,84	69	0,04	-8	36	0,25	18	-8	2,25	5,5	9	16
15	а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, -\arctg 3 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi - \arctg 3; \frac{9\pi}{4}$												
16	$\frac{\sqrt{2}}{4}$												
17	$[-1 - 2\sqrt{6}; 0), (0; 1 + 2\sqrt{6}]$												
18	15												
19	20												
20	$a \geq 1$												
21	а) нет, б) нет, в) да												

Тренировочная работа 36

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	4	630	7,5	0,5	5	24	0,75	8	-4	1	63	53	51
15	а) $\left\{ \left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$												
16	192												
17	$[1; \log_2 5]$												
18	$\frac{43}{2}$												
19	2 622 050												
20	$[7 - \sqrt{39}; 7 + \sqrt{39}]; [-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}]$												
21	$a = 27^3$												

Тренировочная работа 37

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
42	1	12840	21	0,25	9	58	10	168	14	6000	160	48	-5
15	а) $1 \pm \sqrt{3}$; б) $1 - \sqrt{3}$												
16	$\frac{1}{4}$												
17	$(-4; -3), (-1; 3)$												
18	7												
19	20												
20	$4 \leq a \leq 7$.												
21	а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8												

Тренировочная работа 38

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10980	25	1260	2,25	0,5	5	0,8	0,75	126	20	40	80	60	17
15	а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$												
16	2												
17	$[2; 4)$												
18	3												
19	2 296 350												
20	$a = 2$												
21	$m = n = k = 2$												

Тренировочная работа 39

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	2	11060	15	0,17	2	6	6	6	2	1200	5	4	8
15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}; \frac{7\pi}{2}$												
16	192												
17	$(3 + \log_9 7; +\infty)$												
18	4 : 21												
19	9												
20	$-2 \leq k < \sqrt{2} - 2$ или $\sqrt{2} - 2 < k \leq 0$												
21	а) нет, б) нет, в) да.												

Тренировочная работа 40

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	5	1160	10	0,5	-9	40	0,25	175	2	25	168	56	17
15	а) $0; -\log_2 19$; б) $-\log_2 19$												
16	б) $\operatorname{arctg} \frac{21}{17}$												
17	$(4; 8]$												
18	$\frac{ac}{b}$												
19	6												
20	$1,5 \leq a \leq 3; a \geq 6$												
21	а) нет, б) да (225, 3375, 225), в) 479.												

Тренировочная работа 41

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	4000000	0,78	18	0,8	-11	6	-4	336	-2	6000	15	52	-0,75
15	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, (-1)^{m+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi m, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}, 2\pi - \arcsin \frac{2}{3}, \pi + \arcsin \frac{2}{3}$												
16	2												
17	$(2; 3]$												
18	1,92												
19	6 330 000												
20	$-\frac{1}{12} < a < 0$ или $0 < a < \frac{1}{12}$												
21	51												

Тренировочная работа 42

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	6	435	5	0,2	2	122	-2	2	0,75	15	6	63	15
15	а) $2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{7} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $0, \pm \arccos \frac{1}{7}$												
16	2												
17	$[\log_3 30; 4]$												
18	$4\sqrt{2}$												
19	6 510 000												
20	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$												
21	2011, 3015												

Тренировочная работа 43

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	4500	1827	96	0,25	16	2	0,25	63	-2	7	4	63	4
15	а) $2 \pm \sqrt{5}$; б) $2 - \sqrt{5}$												
16	$2\sqrt{7}$												
17	$(-\infty; 1], (2; 3)$												
18	$\frac{17 - 4\sqrt{13}}{3}$												
19	6												
20	$x = 0$ при $a = 0$ или $a = 1$												
21	а) 14; б) 90; в) 1												

Тренировочная работа 44

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
356	25	3960	6	0,99	42	42	0,75	512	-0,75	90	10	9	44
15	а) $\pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arccos \frac{2}{5}, -2\pi + \arccos \frac{2}{5}$												
16	$\frac{\pi}{3}$												
17	$(-\infty; 2], [3; +\infty)$												
18	9 : 7												
19	12												
20	$0,5 \leq k < 1 + \frac{\sqrt{17}}{2}$ или $k > 1 + \frac{\sqrt{17}}{2}$												
21	64 и 6084												

Тренировочная работа 45

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	8	28260	9	0,58	7	61	4	252	2	12	1200	53	9
15	$x = \pi - \operatorname{arccotg} \frac{4}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$												
16	0,5												
17	$(-4, 2; -3, 95], [-0, 2; +\infty)$												
18	68												
19	7 490 000												
20	$-\frac{9}{4} < a < 2$												
21	а) 7; б) 5002; в) 5054												

Тренировочная работа 46

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
63	3	10380	30	0,505	-1,5	34	2	4	-5	11	7	84	-2
15	а) $2 \pm \sqrt{6}$; б) $2 - \sqrt{6}$												
16	5												
17	[-4; -1), (-1, 0), (0, 1), (1; 4]												
18	19												
19	6 409 000												
20	$k = 1 - \frac{\sqrt{17}}{2}$ или $k > \frac{-\sqrt{3}}{4}$												
21	а) нет, б) нет, в) да.												

Тренировочная работа 47

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
17	28	0,68	7	0,5	-8	1	3	8	50	17,67	4	10	-7
15	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$												
16	2												
17	$(-\infty; 0], [1; 7)$												
18	1:10												
19	6												
20	$\frac{1}{2} < k < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ или $k > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$												
21	$n = 0, x = 3; n = 0, x = -3$												

Тренировочная работа 48

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	5	11105	9	0,125	69	21	0,25	42	2	14	4	4	-2
15	а) $n\pi; \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{17\pi}{6}; 3\pi$												
16	$\frac{12}{7}$												
17	[-2; 2]												
18	$\frac{24}{5}\sqrt{6}$												
19	10												
20	$a \leq -0,75; a \geq 0,75$												
21	$x_1 = 12, x_2 = 13$												

Тренировочная работа 49

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	30	6740	5	0,17	-7	99	7	34	-2	6	84	140	23
15	а) $2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z};$ б) $-2\pi - \arccos \frac{1}{6}, -2\pi + \arccos \frac{1}{6}$												
16	0,5												
17	$(-\infty; 0), \left[2; \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right), [5; +\infty)$												
18	2												
19	5												
20	$a < \frac{3-\sqrt{57}}{4}; a > \frac{3+\sqrt{57}}{4}$												
21	3												

Тренировочная работа 50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	6	11058	12	0,375	45	18	5	32	0,4	6000	450	21	1
15	а) $2 \pm \sqrt{2};$ б) $2 - \sqrt{2}$												
16	$\operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{2}}{3}$												
17	$(-2; -1] \cup (1; 2)$												
18	98												
19	5 152 900												
20	$a = -\frac{9}{4}, a = 0, a = \frac{1}{12}$												
21	$a = -3, b = -1$												

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 ЕГЭ 2015. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий / И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров, С. Е. Посицельский, А. В. Семенов, М. А. Семенова, В. А. Смирнов, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль, И. В. Яценко; под ред. **И. В. Яценко**. — М. : Издательство «Экзамен», 2015. — 246 [2] с. (Серия «ЕГЭ. 50 вариантов. Типовые тестовые задания»)

ISBN 978-5-377-08304-7

Книга содержит 50 вариантов комплектов типовых тестовых заданий по математике, составленных с учетом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена 2015 года.

Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов по математике, степени трудности заданий.

Авторы пособия — ведущие специалисты, принимающие непосредственное участие в разработке методических материалов для подготовки к выполнению контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов, приводятся решения всех заданий части 2 одного из вариантов.

Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и абитуриентами — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60×90/8.

Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 11,75.

Усл. печ. л. 31. Тираж 20 000 экз. Заказ 3031/14.

ISBN 978-5-377-08304-7

© Высоцкий И. Р., Захаров П. И., Посицельский С. Е., Семенов А. В., Семенова М. А., Смирнов В. А., Шестаков С. А., Шноль Д. Э., Яценко И. В., 2015
© Издательство «**ЭКЗАМЕН**», 2015

Справочное издание

**Высоцкий И. Р., Захаров П. И.,
Посицельский С. Е., Семенов А. В., Семенова М. А., Смирнов В. А.,
Шестаков С. А., Шноль Д. Э., Ященко И. В.**

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство **«ЭКЗАМЕН»**

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16582 от 08.04.2014 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Л. К. Корнилова, Н. Н. Яковлева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.: 641-00-30 (многоканальный).