В. П. Моденов

МАТЕМАТИКА

Пособие для поступающих в вузы

Москва
«Новая Волна»
2002

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я729
М74

Моденов В. П.

М74 Математика: Пособие для поступающих в вузы. — М.: ООО «Издательство Новая Волна», 2002. — 800 с.: ил.

ISBN 5-7864-0160-X

Пособие написано академиком Международной академии информатизации, доктором физико-математических наук, профессором Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Дана оригинальная методика решения многих задач, подкрепленная большим количеством разобранных экзаменационных примеров. В конце каждого параграфа помещены упражнения для самостоятельной работы из числа предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в МГУ.

Книга предназначена поступающим в вузы. Она также может быть рекомендована преподавателям математики при подготовке учащихся к сдаче выпускных экзаменов за курс средней школы.

УДК 51(075.4)
ББК 22.1я729

ISBN 5-7864-0160-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Глава II
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Глава III
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

ГЛАВА IV
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Глава V
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Глава VI
ПЛАНИМЕТРИЯ

Глава VII
ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

В данной главе приводятся некоторые сведения из аналитической геометрии — раздела математики, в котором рассматривается применение алгебраических методов к геометрическим вопросам.

§ 1. МЕТОД КООРДИНАТ

1. Координаты точки на прямой

Действительные числа изображаются точками прямой. Прямая, на которой указаны начало отсчета (фиксирована точка O), единица масштаба и положительное направление, называется ***числовой осью***. Число, определяющее положение точки на числовой оси, называется ***координатой*** точки на этой оси. Координата точки на числовой оси равна расстоянию точки от начала отсчета, выраженному в выбранных единицах масштаба и взятому со знаком «плюс», если точка лежит в положительном направлении от начала, и со знаком «минус» — в противном случае. Начало отсчета (точку O) называют ***началом координат***. Координата точки O равна нулю.

Таким образом, каждой точке прямой можно поставить в соответствие вполне определенное действительное число — ее координату, и, наоборот, каково бы ни было действительное число, существует одна и только одна точка, координата которой выражается данным числом. На рис. 1

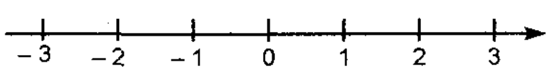


Рис. 1

изображены числовая ось и несколько точек, координаты которых выражаются целыми числами. Введение координат на прямой позволяет установить *взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек числовой оси*, а также дает возможность формулировать арифметические соотношения в геометрических терминах. Например, все решения неравенства $1 < x < 3$ можно представить в виде множества точек числовой оси, расположенных между точками с координатами 1 и 3.

2. Некоторые числовые множества

В дальнейшем нам придется иметь дело с различными множествами действительных чисел. Рассмотрим некоторые наиболее употребительные из этих множеств.

1^0. Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$, где $a < b$, называется ***сегментом*** (или ***отрезком***) и обозначается символом $[a, b]$.

2^0. Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, где $a < b$, называется ***интервалом*** и обозначается символом (a, b). Множество всех действительных чисел есть интервал $(-\infty, +\infty)$. Геометрически сегмент $[a, b]$ изображается на числовой оси множеством точек, лежащих между точками a и b, т.е. отрезком с концами в точках a и b, при этом сами концы a и b включаются в отрезок (рис. 2).

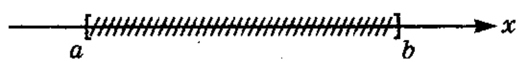


Рис. 2

Интервал (a, b) изображается отрезком с концами в точках a и b, причем сами концы исключаются (рис. 3).

Рис. 3

3^0. Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$, называется ***полусегментом*** $[a, b)$ (рис. 4), а множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x \le b$, называется ***полуинтервалом*** $(a, b]$ (рис. 5).

Рис. 4

Рис. 5

4^0. Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$, называется ***интервалом от a до*** $+\infty$ и обозначается символом $(a, +\infty)$ (рис. 6).

Рис. 6

Аналогично определяются множества $x \geq a$, $x < a$, $x \leq a$.

Рассмотренные выше различные виды интервалов, сегментов и т. д. (конечных и бесконечных) объединяются общим термином ***промежуток***.

3. Прямоугольная система координат на плоскости

Как уже говорилось выше, положение точки на числовой оси однозначно определяется ее координатой. Для задания положения точки на плоскости вводят понятие ***координат точки*** на плоскости. Чтобы их определить, проводят в этой плоскости две взаимно перпендикулярные числовые оси. Точку пересечения осей принимают за начало отсчета для каждой из двух числовых осей. Эту точку называют ***началом координат*** и обозначают буквой O. Одну из осей называют ***осью абсцисс*** или осью x (или Ox); другую — ***осью ординат*** или осью y (или Oy). Единицы масштаба на осях, как правило, выбирают одинаковыми.

Возьмем на плоскости некоторую точку M и опустим из нее перпендикуляры на ось Ox и ось Oy (рис. 7). Точки пересечения M_1 и M_2 этих перпендикуляров с осями называются ***проекциями*** точки на оси координат.

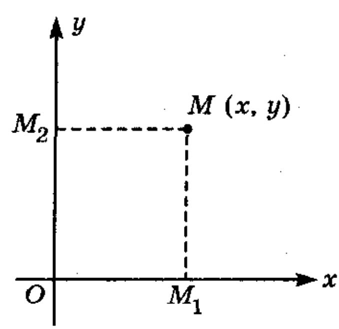


Рис. 7

Точка M_1 лежит на числовой оси Ox, поэтому ей соответствует определенное число x — ее координата на этой оси. Точно так же точке M_2 соответствует определенное число y — ее координата на оси Oy.

Следовательно, каждой точке M, лежащей на плоскости, ставится в соответствие упорядоченная пара чисел x и y, которые называются ***прямоугольными декартовыми координатами*** точки M. Число x называется ***абсциссой*** точки M, число y — ее ***ординатой***.

Обратно, какова бы ни была упорядоченная пара чисел (x, y), существует и притом только одна точка M, координаты которой равны x и y.

Таким образом, *между точками плоскости и упорядоченными парами чисел (x, y) установлено взаимно однозначное соответствие*: каждой точке плоскости соответствует одна определенная упорядоченная пара чисел (x, y) — ее координаты и, наоборот, какова бы ни была упорядоченная пара чисел (x, y), существует и притом только одна точка , координаты которой равны x и y. Кроме рассмотренных декартовых координат на плоскости, существуют другие системы координат (косоугольные, полярные и т. д.).

4. Полярная система координат

Способ задания положения точки на плоскости с помощью ее декартовых координат x и y не является единственным. Дадим понятие так называемой полярной системы координат.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки (точки O), называемой ***полюсом***, исходящего из этой точки луча (луча OP), называемого ***полярной осью***, и единицы масштаба для измерения длин. Будем считать положительными те повороты вокруг точки M, которые совершаются против хода часовой стрелки.

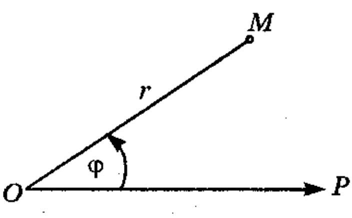


Рис. 8

Пусть заданы полюс O и полярная ось OP (рис. 8). Тогда положение произвольной точки M на плоскости можно определить однозначно заданием расстояния $r = |OM|$ точки M от полюса O и угла φ между полярной осью OP и лучом OM (φ — угол, на который нужно повернуть в положительном направлении луч OP до совмещения его с лучом OM).

Числа r и φ называют ***полярными координатами*** точки M (относительно заданной системы координат). При этом r называют ***полярным радиусом***, а число φ — ***полярным углом***. Всегда $r \geq 0$. Если точка M совпадает с полюсом, то полярный радиус равен нулю, а полярный угол не имеет определенного значения.

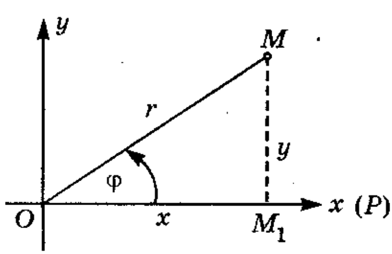


Рис. 9

Следует заметить, что если точка M задана, то ее полярный радиус определяется однозначно, а полярный угол φ — неоднозначно: каждой точке M соответствует бесчисленное множество полярных углов, отличающихся друг от друга на $2k\pi$, где k — любое целое число. Для устранения неоднозначности среди возможных значений полярного угла точки M выбирают такое значение φ , которое удовлетворяет неравенствам $-\pi < \varphi \leq \pi$. Это значение полярного угла называют ***главным***.

Нетрудно получить ***формулы перехода от полярных координат к декартовым*** и обратно ***от декартовых к полярным*** в случае, когда полюс полярной системы совпадает с началом декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс (рис.9).

Из ΔOM_1M имеем:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi; \tag{1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Заметим, что для определения главного значения полярного угла необходимо знать, в какой четверти лежит точка M.

Рассмотрим примеры записи уравнений в полярных координатах.

Уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2$$

в полярных координатах имеет вид $r = a(1 + \cos\varphi)$. Кривая, определяемая этими уравнениями, называется ***кардиоидой***.

Уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

в полярных координатах имеет вид

$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

Кривая, определяемая этими уравнениями, носит название ***лемнискаты Бернулли.***

Замечание. Наряду с полярными иногда рассматривают ***обобщенные полярные координаты***, которые определяются формулами

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi,\ \ y = br\sin^{\alpha}\varphi\ \ (r \geq 0),$$

где a, b и α — надлежащим образом подобранные постоянные.

Например, уравнение

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}\ \ (x > 0,\ y > 0)$$

в обобщенных полярных координатах

$$x = ar\cos^2\varphi,\ \ y = br\sin^2\varphi$$

имеет вид

$$r^2 = \frac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^4\varphi.$$

5. Понятие геометрического места точек. Уравнение линии

Геометрическим местом точек (плоскости или пространства), обладающих некоторым свойством, называется множество тех и только тех точек, которые обладают этим свойством.

Следовательно, для того чтобы установить, является ли некоторое множество точек, обладающих некоторым свойством, геометрическим местом, необходимо доказать следующее:

1) все точки данного множества обладают указанным свойством;

2) вне данного множества нет точек, обладающих этим свойством.

Можно также поступить иначе: исследуя все точки плоскости (или пространства), выяснить, принадлежат ли они искомому геометрическому месту или нет.

Различают два типа задач: 1) составление уравнения линии; 2) определение геометрического образа по его уравнению линии.

Рассмотрим примеры этих задач.

Пример 1. *Доказать, что уравнение прямой, проходящей через начало координат и не совпадающей с осью Оу, имеет вид*

$$y = kx. \tag{3}$$

Доказательство. Возьмем на этой прямой произвольную точку $M(x, y)$. Опустим из нее перпендикуляр MM_1 на ось Ox. Из прямоугольного треугольника OMM_1 найдем $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где α — угол, образованный данной прямой с положительным направлением оси Ox. Полагая

$$\mathrm{tg}\,\alpha = k, \tag{4}$$

получим $y = kx$, что и требовалось доказать.

Число k называют ***угловым коэффициентом.*** Если прямая образует с положительным направлением оси Ox острый угол α, то $k = \mathrm{tg}\,\alpha > 0$; если тупой, то $k = \mathrm{tg}\,\alpha < 0$. Обратно, по знаку углового коэффициента можно установить, какой угол образует прямая с осью Ox: если $k > 0$, т. е. $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$, то угол острый; если $k < 0$, т. е. $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$, то — тупой.

Пример 2. *Доказать, что уравнение* $y = kx$ ($k = \mathrm{const}$) *определяет прямую, проходящую через начало координат и образующую с положительным направлением оси Ох угол* α, *тангенс которого равен* k($\mathrm{tg}\,\alpha = k$).

Доказательство. Дадим x произвольное значение x_1 и вычислим соответствующее значение $y = y_1$. Из уравнения линии имеем $y_1 = kx_1$. Через начало координат и точку $A_1(x_1,\ y_1)$ проведем прямую (рис. 10). Пусть α_1 — угол, образованный этой прямой с положительным направлением оси Ox и отсчитываемый от оси Ox против хода часовой стрелки. Из прямоугольного треугольника OB_1A_1 находим тангенс этого угла:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{kx_1}{x_1} = k.$$

Дадим теперь x новое значение x_2 и вычислим соответствующее значение $y = y_2$. Из уравнения линии находим $y_2 = kx_2$. Покажем, что точка $A_2(x_2,\ y_2)$ лежит на той же самой прямой, что и точка $A_1(x_1,\ y_1)$. Для доказательства через начало координат и точку $A_2(x_2,\ y_2)$ проведем прямую. Из прямоугольного треугольника OB_2A_2 найдем тангенс угла наклона этой прямой к оси Ox:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{kx_2}{x_2} = k.$$

Таким образом, получаем, что $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_1$, т. е. $\alpha_2 = \alpha_1$ или $\alpha_2 = \alpha \pm \pi$. Это и означает, что точка $A_2(x_2,\ y_2)$ лежит на прямой, проходящей через начало координат и точку $A_1(x_1,\ y_1)$.

Так как x_1 и x_2 выбраны произвольно, то отсюда следует доказываемое утверждение.

Приведем еще примеры задания линий с помощью уравнений. Уравнению $y = x^2$ удовлетворяют все точки параболы с вершиной в начале координат и не удовлетворяют точки, не лежащие на ней. Поэтому уравнение $y = x^2$ называется ***уравнением*** этой ***параболы***. Уравнению $ax + by + c = 0$, где *a*, *b* и *c* — действительные числа, удовлетворяют все точки некоторой прямой и только точки этой прямой. Уравнение $ax + by + c = 0$ называется ***уравнением прямой.***

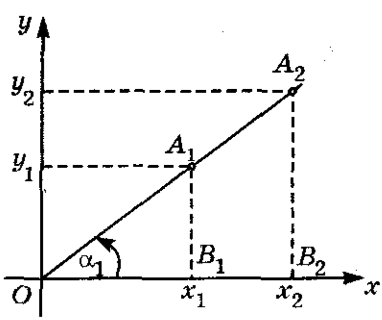


Рис. 10

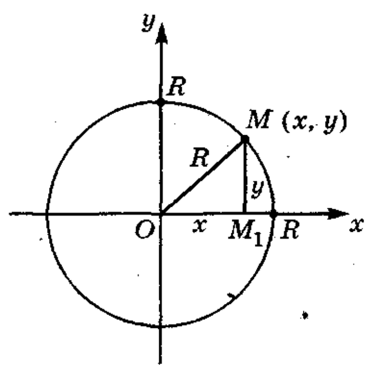


Рис. 11

Введение понятия уравнения линии дает возможность алгебраического подхода к решению геометрических задач. Составление уравнения линии, заданного в виде некоторого геометрического места точек, обладающих определенным свойством, заключается в алгебраической записи этого свойства.

Составим, например, уравнение окружности с центром в начале координат. В геометрии окружность определяется как геометрическое место точек плоскости, расстояние которых от некоторой точки этой плоскости (центра окружности) постоянно (равно числу $R > 0$, называемому ее радиусом) Пусть точка M (x, y) принадлежит данному геометрическому месту точек. Тогда из прямоугольного треугольника OM_1M (рис. 11) в силу теоремы Пифагора имеем

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (5)$$

Поскольку координаты (x, y) всех точек, лежащих на окружности, и только этих точек удовлетворяют уравнению (5), оно называется ***уравнением окружности с центром в начале координат.*** Если выразить явно y как функцию x, то получим

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ соответствует верхняя полуокружность, функции $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ соответствует нижняя полуокружность.

Пример 3. *Найти и изобразить на координатной плоскости xOy геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $y = kx$ при всех действительных значениях параметра k из отрезка* $-1 \le k \le 1$.

Решение. Геометрическим местом точек координатной плоскости xOy, координаты которых (x, y) при фиксированном k удовлетворяют уравнению $y = kx$, является прямая, проходящая через начало координат. Угловой коэффициент k равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox. При $k = 1$ указанный угол равен 45°. Следовательно, прямая $y = 1 \cdot x$ является биссектрисой первого и третьего координатных углов. При $k = -1$ уравнение примет вид $y = -1 \cdot x$ и является уравнением биссектрисы второго и четвертого координатных углов. При значениях углового коэффициента k из интервала $-1 < k < 1$ прямая $y = kx$ составляет с положительным направлением оси Ox угол α, заключенный в промежутке $-45° < \alpha < 45°$.

Таким образом, уравнение $y = kx$ при $-1 \le k \le 1$ есть уравнение множества прямых (***пучка прямых***), проходящих через начало координат и составляющих с положительным направлением оси Ox угол α, заключенный в промежутке $-45° \le \alpha \le 45°$.

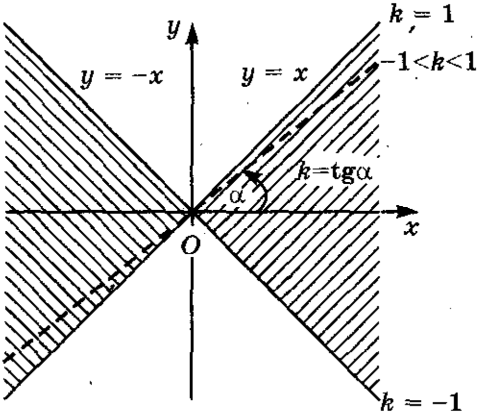


Рис. 12

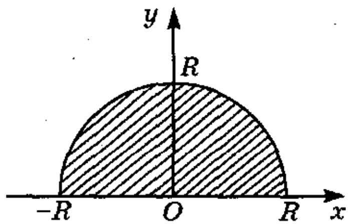


Рис. 13

Ответ. Искомое геометрическое место точек на рис. 12 заштриховано.

Пример 4. *На координатной плоскости построить геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенствам*

$$1 \le x^2 + y^2 \le 4.$$

Решение. Искомое геометрическое место точек представляет собой кольцо, внешняя граница которого — окружность $x^2 + y^2 = 4$ радиуса $R = 2$ и внутренняя — окружность $x^2 + y^2 = 1$ радиуса $R = 1$ также принадлежат рассматриваемому множеству.

Пример 5. *Изобразить множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенствам $-R \le x \le R,\ 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$.*

Решение. Искомое множество представляет собой полукруг радиуса R, расположенный в верхней полуплоскости (граничные точки области также принадлежат рассматриваемому множеству; рис. 13).

6. Абсолютная величина действительного числа

Абсолютной величиной (или ***модулем***) действительного числа a называют неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Напомним, что *число $|a|$ равно расстоянию до начала координат точки, изображающей на числовой оси число a.* Абсолютная величина разно-

сти двух действительных чисел $|a-b|$ равна расстоянию между точ
числовой оси, изображающими данные числа a и b.

Из определения абсолютной величины можно вывести следующие соотношения:

1^0. $|-a|=|a|$.

2^0. $|a-b|=|b-a|$.

3^0. $-|a|\le a\le|a|$.

4^0. Неравенство $|a|\le b$ $(b\ge 0)$ эквивалентно системе неравенств $-b\le a\le b$.

5^0. $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$.

6^0. $|a|-|b|\le|a-b|\le|a|+|b|$.

7^0. $||a|-|b||\le|a-b|$.

8^0. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

9^0. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$, если $b\ne 0$.

10^0. $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{|a-b|}{2}=\begin{cases} b, & \text{если } a\le b,\\ a, & \text{если } a\ge b;\end{cases}$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}=\begin{cases} a, & \text{если } a\le b,\\ b, & \text{если } a\ge b.\end{cases}$$

11^0. $\max(a,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

12^0. $\min(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

Доказательство свойства 4^0. Из неравенства $|a|\le b$ следует, что одновременно $a\le b$ и $a\ge -b$. Обратно, если дано, что $a\le b$ и $a\ge -b$, то имеем одновременно $a\le b$ и $-a\le b$; но одно из чисел a, $-a$ и есть $|a|$, так что $|a|\le b$.

Доказательство свойства 5^0. Сложив очевидные неравенства

$$-|a|\le a\le|a| \quad \text{и} \quad -|b|\le b\le|b|,$$

получим

$$-(|a|+|b|)\le a+b\le |a|+|b|;$$

но по доказанному выше, это эквивалентно неравенству $|a+b|\le|a|+|b|$.

Доказательство свойства 6^0. Так как $|a|=|(a-b)+b|$, то в силу свойства 5^0 имеем

$$|a-b|-|b|\le|(a-b)+b|\le|a-b|+|b|,$$

т. е.

$$|a-b|-|b|\le|a|\le|a-b|+|b|,$$

откуда

$$|a|-|b|\le|a-b|\le|a|+|b|.$$

Соотношения 8^0 и 9^0 следуют из свойств операций умножения и деления действительных чисел.

Соотношения 11^0 и 12^0 следуют из формул 10^0.

Доказательство свойства 7^0. В силу свойства 6^0 имеем

$$|a|-|b|\le|a-b| \text{ и } -(|a|-|b|)=|b|-|a|\le|b-a|=|a-b|.$$

Но $\big||a|-|b|\big|$ равно либо $|a|-|b|$, либо $-(|a|-|b|)$. Следовательно, $\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$.

С абсолютной величиной действительного числа связано понятие арифметического корня.

Число b называется ***арифметическим корнем*** из a $(a\ge 0)$, если: 1) $b^2=a$; 2) $b\ge 0$. Из этого определения следует, что

$$\sqrt{a^2}=|a|. \tag{7}$$

Соотношение (7) используется при преобразовании выражений, содержащих радикалы.

Воспользовавшись формулой (7), получим

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=|a|\cdot\sqrt{b}=\begin{cases} a\sqrt{b}, & \text{если } a\ge 0,\\ -a\sqrt{b}, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Отсюда следует другая, часто используемая при тождественных преобразованиях формула:

$$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, & \text{если } a\ge 0,\\ -\sqrt{a^2b}, & \text{если } a<0,\end{cases}$$

где $b\ge 0$.

В области II: $\sin(\sin x) > 0$, $\sin(\sin x) + \sin x > 0$ и, значит, при всех значениях x из этой области, т. е. при $2k\pi < x < (2k\pi + 1)\pi$, где k — любое целое число, исходное неравенство выполняется.

Ответ. $2k\pi < x < (2k\pi + 1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Пример 9. *На координатной плоскости построить геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству*

$$|x| + |y| \leq 1.$$

Решение. Данное множество точек симметрично относительно обеих осей координат, поэтому достаточно рассмотреть, например, первую четверть:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Воспользовавшись определением абсолютной величины, в рассматриваемом случае имеем

$$|x| = x, \; |y| = y.$$

Исходное неравенство примет вид

$$x + y \leq 1$$

или $0 \leq y \leq 1 - x$. Геометрическое место точек первой четверти, координаты (x, y) которых удовлетворяют полученной системе неравенств, или, что то же самое, соотношениям

$$0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1 - x,$$

представляет собой треугольник.

Воспользовавшись указанной выше симметрией, получим, что искомое множество точек есть квадрат (включая границу; рис. 15).

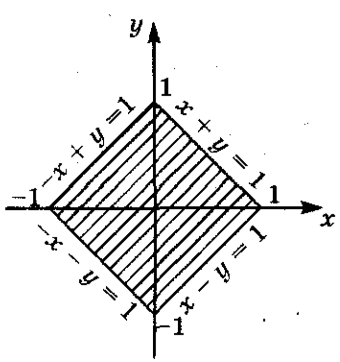


Рис. 15

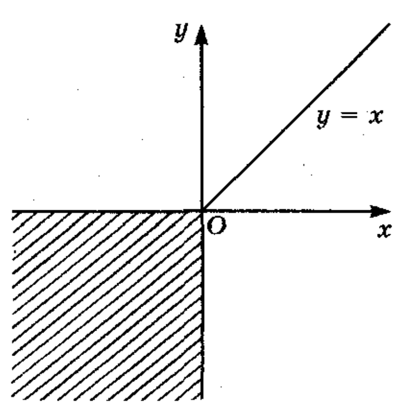


Рис. 16

П р и м е р 10. *На координатной плоскости построить геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению*

$$|y| + y = |x| + x.$$

Р е ш е н и е. Решая задачу в каждой из четырех частичных областей: I. $x \geq 0,\ y \geq 0$; II. $x < 0,\ y > 0$; III. $x \leq 0,\ y \leq 0$; IV. $x > 0,\ y < 0$, получим искомое множество точек (рис.16).

8. Координатно-параметрический метод (КП–метод)

При решении уравнений и неравенств с одним неизвестным, содержащих параметр *a*, удобно проводить исследование на координатно-параметрической плоскости (КП-плоскости) *aOx* (значение параметра будем откладывать по горизонтальной оси, а значение неизвестного *x* — по вертикальной).

П р и м е р 11. *Для каждого действительного параметра a решить уравнение* $|x-a| + |x+a+1| = 3$.

Р е ш е н и е. Построим на плоскости *aOx* с параметрической осью *Oa* и с координатной осью *Ox* прямые $x = a$ и $x = -a - 1$. Точка *P* пересечения этих прямых характеризуется значением параметра $a = -\frac{1}{2}$ и значением координаты $x = -\frac{1}{2}$. Рассмотрим четыре образовавшиеся на плоскости области, которые мы обозначим I, II, III, IV. В первой из них $x \leq a,\ x > -a-1$; во второй $x > a,\ x > -a-1$; в третьей $x \geq a,\ x < -a-1$; в четвертой $x < a$, $x < -a-1$.

Рассмотрим уравнение в каждой из четырех областей:

I. $a - x + x + a + 1 = 3$, т.е. $a = 1$;

II. $x - a + x + a + 1 = 3$, т.е. $x = 1$;

III. $x - a - x - a - 1 = 3$, т.е. $a = -2$;

IV. $a - x - x - a - 1 = 3$, т.е. $x = -2$.

Следовательно, на плоскости *aOx* все точки границы квадрата, изображенного на рис. 17, представляют собой решение исходного уравнения.

О т в е т. Если $a < -2$, то решений нет; если $a = -2$, то *x* — любое число из отрезка [–2, 1]; если $-2 < a < 1$, то $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; если $a = 1$, то *x* — любое число из отрезка [–2, 1]; если $a > 1$, то решений нет.

П р и м е р 12. *При каких значениях a все решения уравнения*

$$2|x-a| + a - 4 + x = 0$$

удовлетворяют неравенству $0 \leq x \leq 4$?

Р е ш е н и е. Данное уравнение эквивалентно совокупности двух смешанных систем

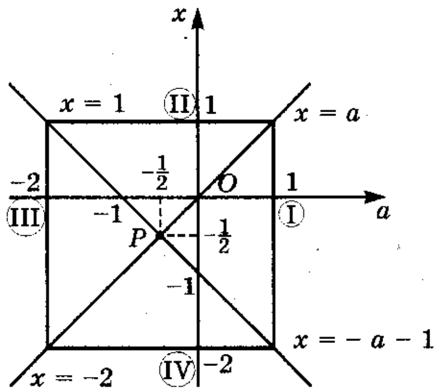


Рис. 17

$$\text{(I)} \begin{cases} x-a\ge 0, \\ 2(x-a)+a-4+x=0 \end{cases} \text{ и (II) } \begin{cases} x-a<0, \\ 2(a-x)+a-4+x=0. \end{cases}$$

Уравнение системы (I) имеет решение

$$x=\frac{a+4}{3},$$

удовлетворяющее при $a\le 2$ неравенству этой системы.

Уравнение системы (II) имеет решение

$$x=3a-4,$$

которое при $a<2$ удовлетворяет неравенству этой системы.

Следовательно, если $a=2$, то исходное уравнение имеет одно решение $x=2$, удовлетворяющее неравенству $0\le x\le 4$.

Если $a<2$, то исходное уравнение имеет два решения, которые будут удовлетворять неравенству $0\le x\le 4$ при значениях a, являющихся решением системы неравенств

$$\begin{cases} 0\le \frac{a+4}{3}\le 4, \\ 0\le 3a-4\le 4, \end{cases}$$

т. е. при $\frac{4}{3}\le a<2$.

На рис. 18 дана иллюстрация решения на КП–плоскости aOx.

Ответ. $\frac{4}{3}\le a\le 2$.

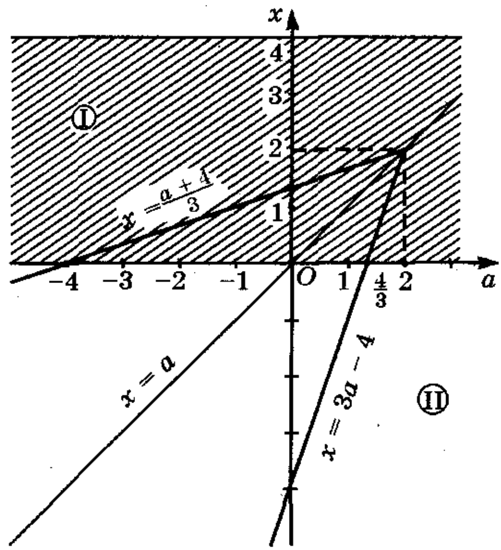


Рис. 18

УПРАЖНЕНИЯ

1. На числовой оси изобразить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $1 \le |x| \le 2$; в) $1 < |x-1| \le 2$;

б) $|x-1| < 2$; г) $x = |x|$.

Ответ. См. рис. 19, *а* – *г*.

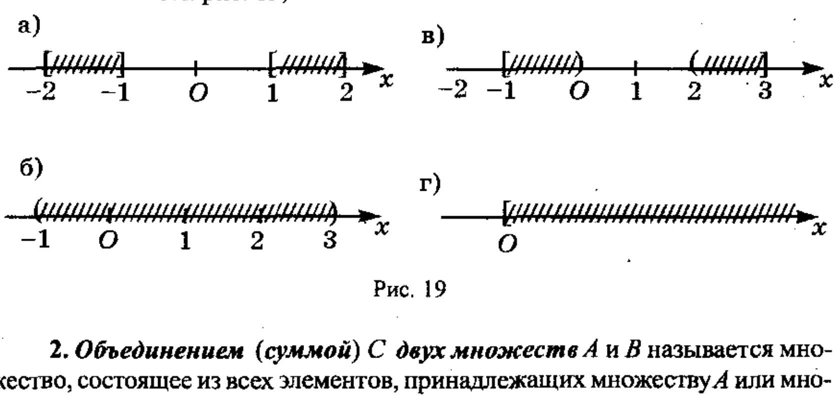


Рис. 19

2. ***Объединением (суммой) С двух множеств*** *A* и *B* называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству *A* или множеству *B* (не исключается возможность одновременной принадлежности некоторых элементов и множеству *A*, и множеству *B*).

Изобразить на числовой оси объединение множеств $|x| > 2$ и $x \geq 1$.

Ответ. См. рис. 20.

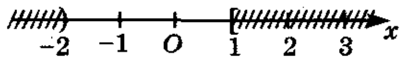


Рис. 20

3. ***Пересечением*** (***произведением***) *С двух множеств A* и *B* называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих и множеству *A*, и множеству *B*.

Изобразить на числовой оси пересечение множеств $|x| > 2$ и $x \geq 1$.

Ответ. См. рис. 21.

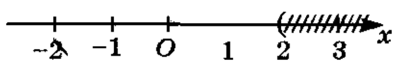


Рис. 21

На координатной плоскости xOy изобразить области, ограниченные линиями:

4. Осью абсцисс и прямыми $y = x$, $x = 2$, $x = 4$. Ответ. См. рис. 22.

5. $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$. Ответ. См. рис. 23.

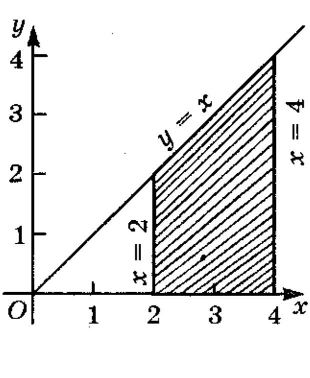


Рис. 22

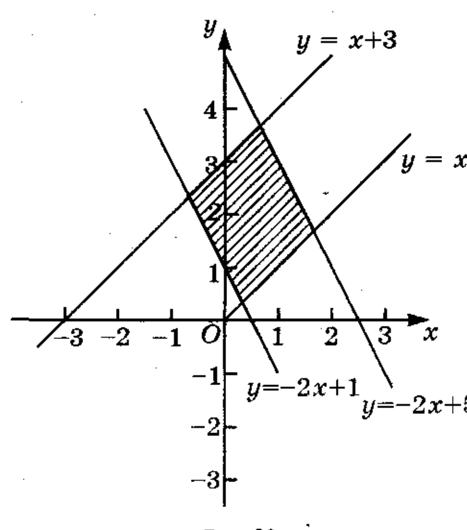


Рис. 23

6. Параболами $y = x^2$ и $y = 4 - x^2$. О т в е т. См. рис. 24.

7. Кубической параболой $y = x^3$ и прямой $y = x$. О т в е т. См. рис. 25.

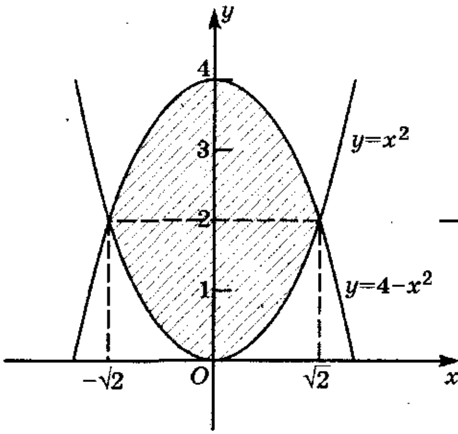


Рис. 24

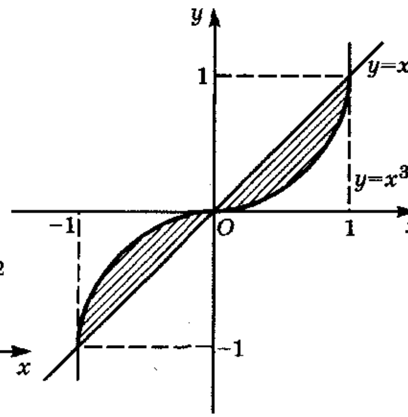


Рис. 25

8. Параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. О т в е т. См. рис. 26.

9. Полуокружностью $y = \sqrt{1 - x^2}$ и параболой $y = x^2$. О т в е т. См. рис. 27.

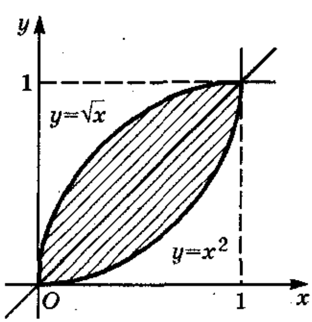


Рис. 26

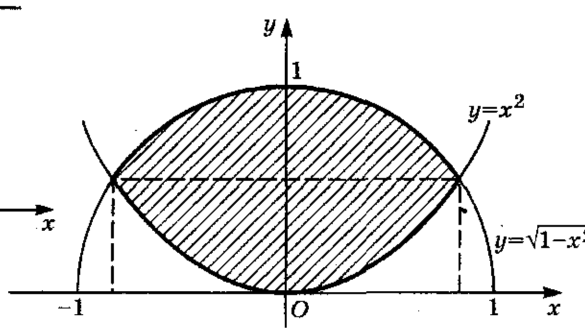


Рис. 27

На координатной плоскости xOy изобразить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют соотношениям:

10. $0 \le x \le 1$. О т в е т. См. рис. 28.

11. $-1 < y < 1$. О т в е т. См. рис. 29.

12. $x - y > 0$. О т в е т. См. рис. 30.

13. $y > x^2$. О т в е т. См. рис. 31.

14. $x^2 + y^2 > 1$. О т в е т. См. рис. 32.

15. $y \ge |x^2 - x|$. О т в е т. См. рис. 33.

16. $x^2 - 1 \le 0$. О т в е т. См. рис. 34.

17. $x^2 - 3x + 2 = 0$. О т в е т. См. рис. 35.

18. $|x - y| \ge 2$. О т в е т. См. рис. 36.

19. $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ $(a > 0, b > 0)$. О т в е т. См. рис. 37.

20. $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x$. О т в е т. См. рис. 38.

21. $-1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1$. О т в е т. См. рис. 39.

22. $1 < x < 2, 0 \le y \le 1$. О т в е т. См. рис. 40.

23. $y \le 2x,\ y \ge x$. О т в е т. См. рис. 41.

24. $0 \le y \le x + 1,\ y \le 1 - x$. О т в е т. См. рис. 42.

25. $y \le x,\ y \ge x^3$. О т в е т. См. рис. 43.

26. $-1 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2$. О т в е т. См. рис. 44.

27. $\frac{1}{2} \le y \le 1, -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$. О т в е т. См. рис. 45.

28. $1 \le x \le 2, 0 \le y \le \frac{1}{x}$. О т в е т. См. рис. 46.

29. $y - 2x \le 0,\ 2y - x \ge 0,\ xy \le 2$. О т в е т. См. рис. 47.

30. $x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$. О т в е т. См. рис. 48.

31. $0 \le x \le 1, 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x^2}$. О т в е т. См. рис. 49.

32. $0 \le x \le 1, \sqrt{1 - x^2} \le y \le 1$. О т в е т. См. рис. 50.

33. $0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}$. О т в е т. См. рис. 51.

34. $\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 1, \\ x^2 \le y \le x; \end{array}\right\}(\text{а}) \quad \left.\begin{array}{l} 0 \le y \le 1, \\ y \le x \le \sqrt{y}. \end{array}\right\}(\text{б})$ О т в е т. См. рис. 52.

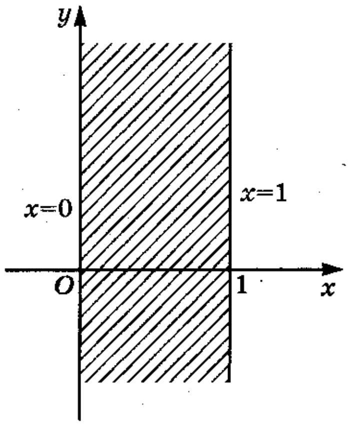


Рис. 28

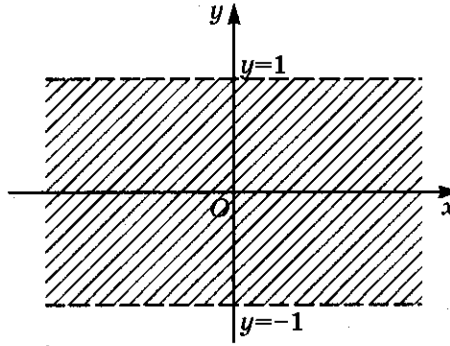


Рис. 29

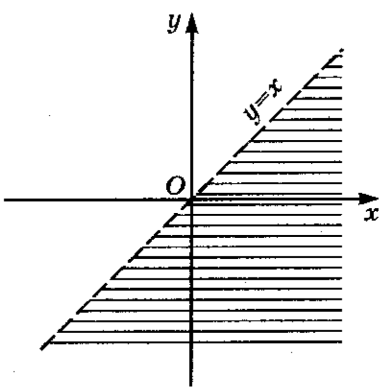


Рис. 30

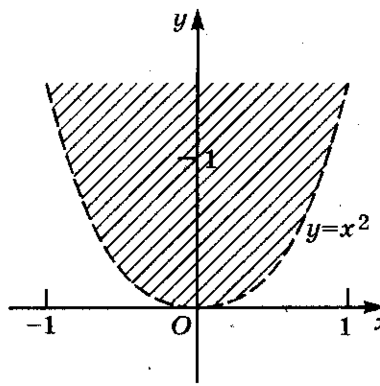


Рис. 31

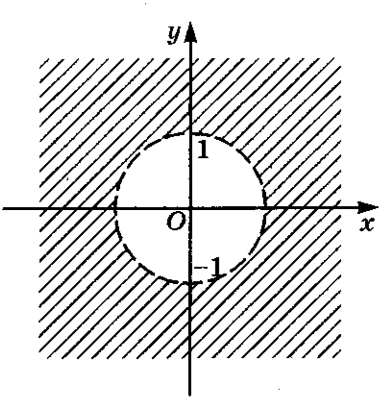


Рис. 32

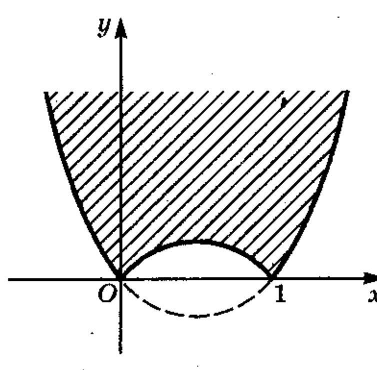


Рис. 33

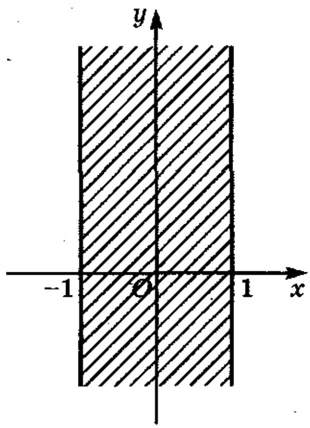


Рис. 34

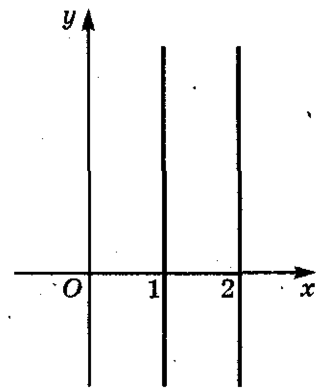


Рис. 35

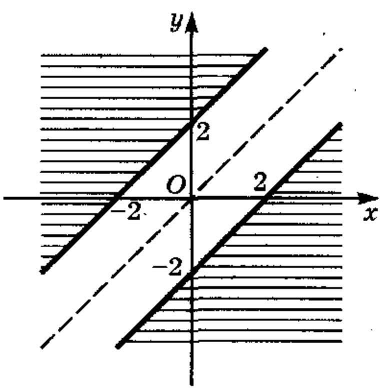


Рис. 36

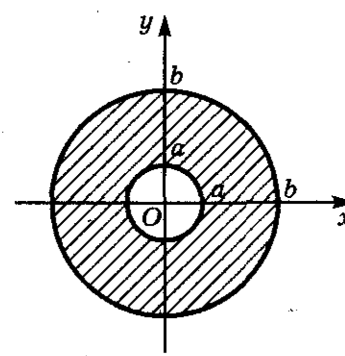


Рис. 37

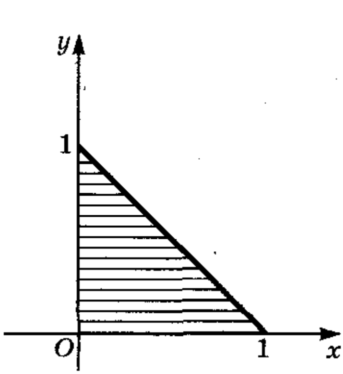


Рис. 38

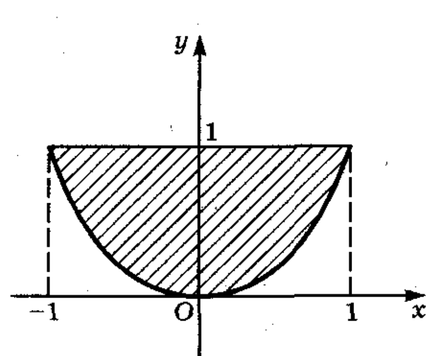


Рис. 39

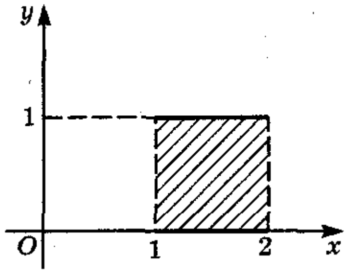


Рис. 40

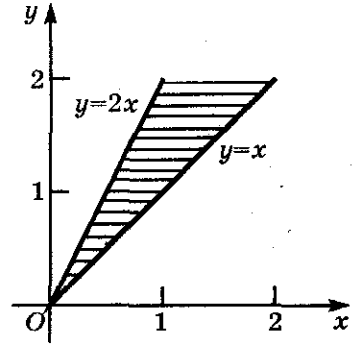


Рис. 41

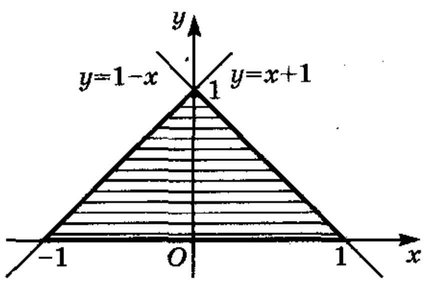


Рис. 42

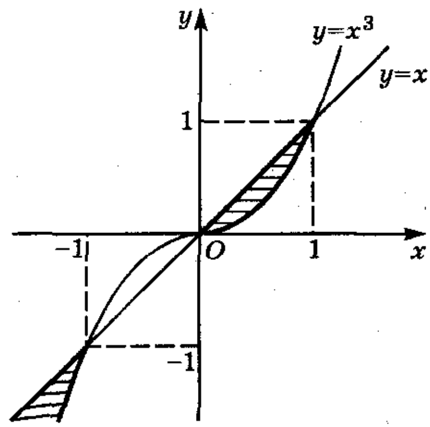


Рис. 43

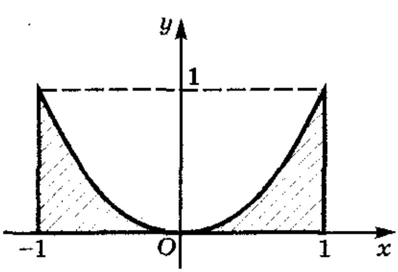


Рис. 44

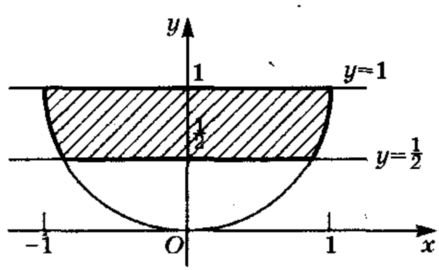


Рис. 45

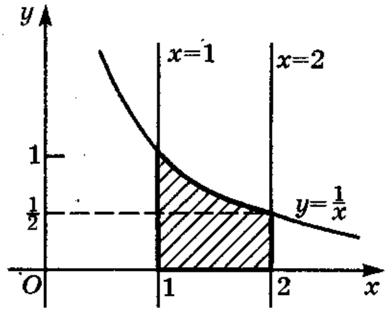


Рис. 46

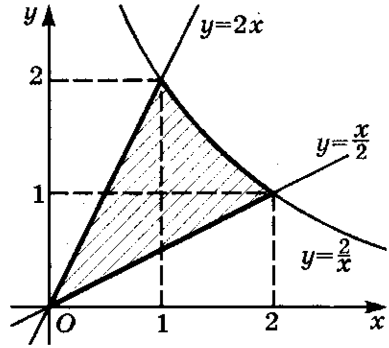


Рис. 47

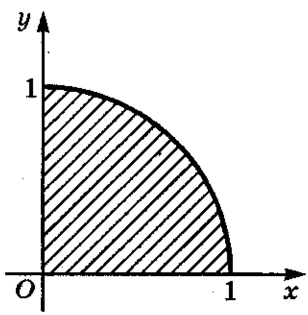


Рис. 48

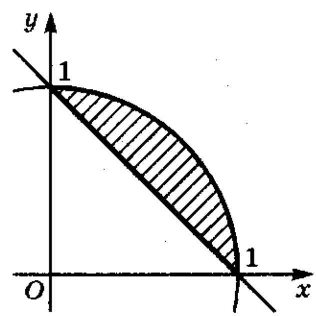


Рис. 49

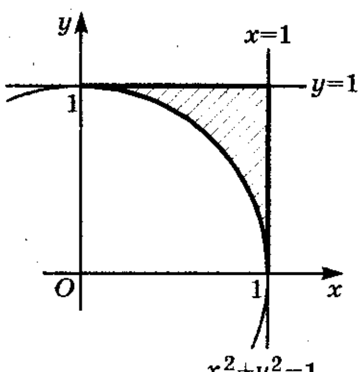


Рис. 50

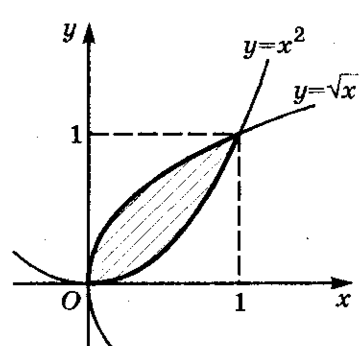


Рис. 51

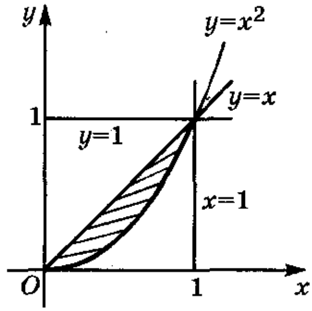


Рис. 52

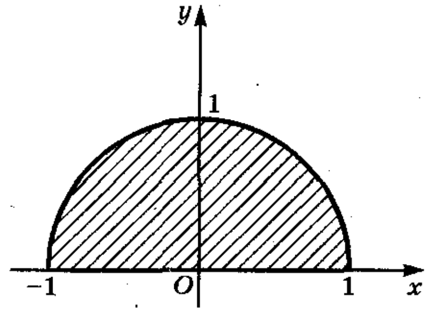


Рис. 53

35. $\left.\begin{matrix} -1 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}; \end{matrix}\right\}$ (а) $\left.\begin{matrix} 0 \le y \le 1, \\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}. \end{matrix}\right\}$ (б)

Ответ. См. рис. 53.

36. $\left.\begin{matrix} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x \end{matrix}\right\}$ и $\left.\begin{matrix} 1 < x \le 2, \\ 0 \le y \le 2-x; \end{matrix}\right\}$ (а) $\left.\begin{matrix} 0 \le y \le 1, \\ y \le x \le 2-y. \end{matrix}\right\}$ (б)

Ответ. См. рис. 54.

37. Задать аналитически множества точек плоскости, изображенные на рис. 55–57(данные множества заштрихованы).

Ответ к рис. 55. Например, $0 \le x \le 1,\ -x \le y \le x$, или $-1 \le y \le 1, |y| \le x \le 1$.

Ответ к рис. 56. Например, $0 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$ или $-1 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$.

Ответ к рис. 57. Например, $y \le -x^2$.

38. Изобразить на координатной плоскости объединение множеств (см. упр. 2), заданных системами неравенств:

а) $0 \le y < x$ и $-1 < y < 1$. Ответ. См. рис. 58.

б) $x^2 + y^2 \le 1$ и $|y| \le x$. Ответ. См. рис. 59.

39. Изобразить на координатной плоскости пересечение множеств (см. упр. 3), заданных системами неравенств:

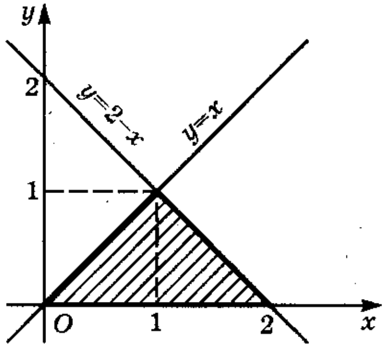


Рис. 54

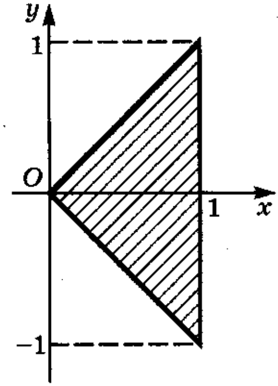


Рис. 55

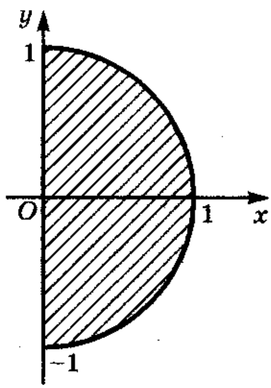


Рис. 56

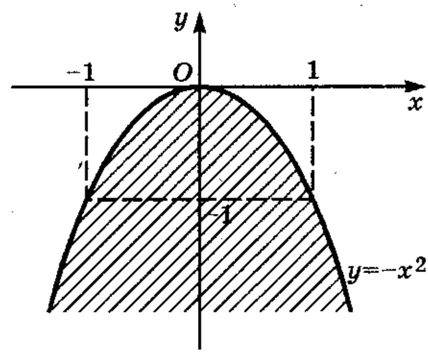


Рис. 57

а) $x^2+y^2 \le 1$ и $|x|+|y| \ge 1$. О т в е т. См. рис. 60.

б) $x^2+y^2 > x$ и $x \ge y^2$. О т в е т. См. рис. 61.

40. Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений:

а) $\begin{cases} x^2-4y^2=0, \\ (x-2y)(x+5y+6)=0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (2-y)(2x+y-1)=0, \\ (y-2)(6x+3y+1)(x-2y)=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 18x^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3=0, \\ 12y^2-2xy^2+3y^3=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} (3x+1)(x-3y-1)=0, \\ (3x+1)(6y-2x+1)(x+y)=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases}(1-x)(x+y+3)(2x-y)=0,\\(x-1)(3x+3y+1)=0;\end{cases}$ е) $\begin{cases}(2y+3)(4y-2x+3)(3x-y)=0,\\(2y+3)(2y-x-2)=0.\end{cases}$

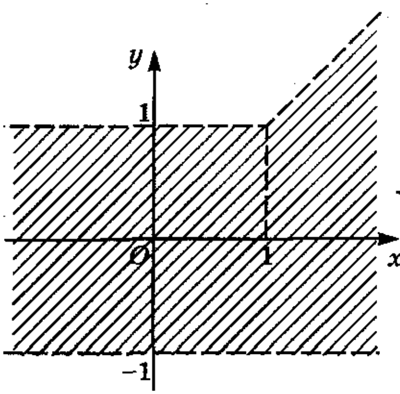


Рис. 58

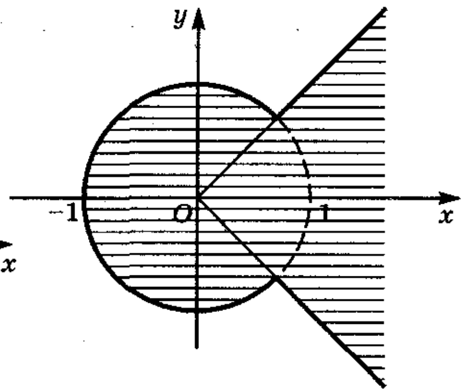


Рис. 59

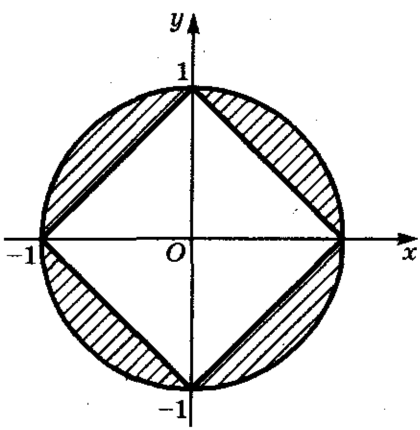


Рис. 60

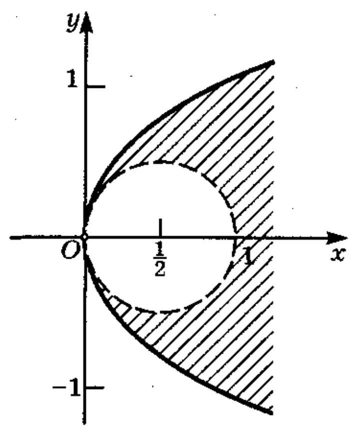


Рис. 61

О т в е т. а) Прямая $y=\frac{x}{2}$ и точка $(4, -2)$;

б) прямая $y=0$ и точки $(0, -4)$ и $\left(5, -\frac{2}{3}\right)$;

в) точки прямой $x=1$ и точка $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$;

3) $y=\dfrac{1}{x}$. Область определения функции представляет собой множество всех чисел x, отличных от нуля. Множество значений: $-\infty<y<0$, $0<y<+\infty$.

4) $y=|x|$. Область определения — вся числовая ось: $-\infty<x<+\infty$, а множество значений: $0\le y<+\infty$.

Если, в частности, областью определения функции является натуральный ряд чисел, то такая функция называется ***последовательностью***.

Например, $y=\dfrac{1}{n}$; $y=n^2$; $y=\dfrac{1}{n(n+1)}$, где $n=1, 2, 3, \ldots$

2. Способы задания функции

Существует несколько способов задания функции. Задать функцию — значит указать тот закон, по которому каждому значению аргумента ставится в соответствие одно определенное значение функции. Рассмотрим некоторые способы задания функции.

1^0. Задание функции с помощью формулы. Этот ***аналитический способ*** задания функции является наиболее важным в математике и нами уже использовался. Именно так были заданы функции

$$y=x^2,\ y=\sqrt{1-x},\ y=\frac{1}{x},\ y=|x|.$$

Некоторые функции на разных промежутках области определения могут быть заданы разными аналитическими выражениями.

Так, например, задается функция

$$y=|x|=\begin{cases} x, & \text{если} \quad x\ge 0; \\ -x, & \text{если} \quad x<0 \end{cases}$$

или функция

$$y=\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad x>0; \\ 0, & \text{если} \quad x=0; \\ -1, & \text{если} \quad x<0. \end{cases}$$

Функциональная зависимость y от x может быть задана:

1) ***явно***

$$y=f(x), \tag{1}$$

2) ***неявно*** с помощью уравнения

$$F(x, y)=0, \tag{2}$$

3) ***параметрически*** уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t), \tag{3}$$

где t — параметр.

В некоторых случаях удается перейти от неявного задания функции к явному, для чего достаточно решить уравнение (2) относительно y.

При переходе от параметрического способа задания достаточно исключить (если это удается) из уравнений (3) параметр t.

Например, пусть функция задана неявно с помощью уравнения

$$x^2-xy-y=0.$$

Разрешая это уравнение относительно y, перейдем к явному заданию:

$$y=\frac{x^2}{x+1}\ (x\neq-1).$$

Рассмотрим пример перехода от параметрического задания к неявному. Пусть функция задана параметрически уравнениями

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t\ \ (a>0,\ 0\le t\le\pi). \tag{4}$$

Возведя обе части этих уравнений в квадрат и сложив их, исключим параметр t:

$$x^2+y^2=a^2,\ y\ge0.$$

Полученное уравнение есть уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат. Таким образом, уравнения (4) представляют собой параметрическое задание полуокружности, которая может быть задана явно: $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

2^0. <u>*Задание функции с помощью таблицы*</u>.

x	–1	–0,5	0	0,5	1	2
y	5	3	2	4	8	10

Рассмотрим таблицу чисел:

Поставим в соответствие каждому числу x из первой строки находящееся под ним значение y из второй стоки. Про полученную при этом функцию будем говорить, что она задана ***таблицей***.

3^0. <u>*Задание функции с помощью графика*</u>.

Пусть дана функция $y=f(x)$. Рассмотрим на плоскости декартову систему координат. ***Графиком*** функции $f(x)$ называется совокупность точек (x, y) координатной плоскости таких, что $y=f(x)$. Легкая обозримость и наглядность графика делают его незаменимым вспомогательным средством исследования свойств функции. В дальнейшем мы часто будем прибегать к графической иллюстрации функций.

Каждая кривая, имеющая с любой прямой, параллельной оси Oy, не более одной общей точки, является графиком некоторой функции. В самом деле, обозначим через X множество всех абсцисс x точек рассматриваемой кривой, тогда каждому числу x из множества X соответствует одно число y — ордината такой точки кривой, абсцисса которой равна x. Таким образом, ордината точки кривой является функцией, определенной на множестве X, а исходная кривая — графиком этой функции.

Для построения графика функции $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат достаточно взять лучи, соответствующие некоторым значениям полярного угла φ, и отложить на этих лучах отрезки, равные соответствующим значениям r. Полученное геометрическое место точек с координатами r и φ дает искомый график функции $r = r(\varphi)$.

3. Ограниченные и неограниченные функции

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной*** на данном промежутке, содержащемся в области ее определения, если существует такое число $M > 0$, что при всех значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, имеет место неравенство

$$|f(x)| \le M.$$

Если же числа, обладающего этим свойством, не существует, то функция называется ***неограниченной***.

Если функция $f(x)$ не ограничена, то какое бы (большое) число M не было задано, существуют значения функции, большие по абсолютной величине, чем M, т. е. $|f(x)| > M$.

Пример 1. Функция $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ является ограниченной всюду на числовой оси, так как из неравенства $x^2+1 \ge 1$ следует, что $\dfrac{1}{x^2+1} \le 1$.

Пример 2. Функция $y = \sqrt{1-x^2}$ является ограниченной всюду в области ее определения, так как в этой области, т. е. при $-1 \le x \le 1$, имеем $\sqrt{1-x^2} \le 1$.

Пример 3. Функция $y = x^2$, рассматриваемая во всей области определения, т. е. при $-\infty < x < +\infty$, является неограниченной, а на любом сегменте $a \le x \le b$ она ограничена.

4. Четные и нечетные функции

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если ее значения равны при двух произвольных противоположных значениях аргумента:

$$f(x)=f(-x).$$

Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если ее значения противоположны при двух произвольных противоположных значениях аргумента:

$$f(x)=-f(-x).$$

Следует заметить, что как для четной, так и для нечетной функции, если какое-либо значение x принадлежит области определения, то и значение $-x$ также принадлежит области определения.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной функции — относительно начала координат.

Пример 4. Функция $y=ax$ нечетная, так как

$$y(-x)=-ax=-y(x).$$

Пример 5. Функция $y=|x|$ четная, так как

$$y(-x)=|-x|=y(x).$$

5. Монотонные функции

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на данном промежутке, если при любых двух различных значениях аргумента из данного промежутка большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$f(x_2)>f(x_1) \text{ при } x_2>x_1$$

для возрастающей функции и

$$f(x_2)<f(x_1) \text{ при } x_2>x_1$$

для убывающей функции.

Функция, возрастающая или убывающая в некотором промежутке, называется ***монотонной*** (строго) в этом промежутке.

Пример 6. Функция $y=x^2$ при $x\le 0$ является убывающей, а при $x\ge 0$ — возрастающей. Следовательно, эта функция не является монотонной всюду в области ее определения.

Действительно, составим разность

$$y_2-y_1=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1).$$

Если значения x_1 и x_2 принадлежат промежутку $x\le 0$, то $x_1<x_2\le 0$; в этом случае $y_2-y_1<0$, т. е. $y_2<y_1$; значит, функция убывает.

Если x_1 и x_2 принадлежат промежутку $x \geq 0$, то $0 \leq x_1 < x_2$ и $y_2 - y_1 > 0$, т. е. $y_2 > y_1$; значит, функция возрастает.

П р и м е р 7. Функция $y = \frac{m}{x}$ является монотонной в каждом из промежутков $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$.

6. Выпуклые вниз и вверх функции

Функция $y = f(x)$ называется ***выпуклой вниз*** в некотором промежутке, если для любой пары различных значений аргумента x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

(для функции ***выпуклой вверх*** выполняется неравенство противоположного смысла).

Геометрическая интерпретация выпуклости вверх и вниз. Середина любой хорды графика выпуклой вниз (выпуклой вверх) функции лежит выше (ниже) соответствующей точки дуги, т. е. точки, абсцисса которой равна абсциссе середины хорды.

П р и м е р 8. Функция $y = x^2$ является выпуклой вниз в области ее определения $-\infty < x < +\infty$. Действительно, для любых $x_1 \neq x_2$ из этой области

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4} < \frac{x_1^2 + x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2)}{4} <$$

$$< \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

7. Взаимно обратные функции

Пусть каждому значению y функции $y = f(x)$ можно поставить в соответствие единственное число x, то самое, при котором значение функции $f(x)$ равно y. В этом случае между множествами значений аргумента и значений функции устанавливается взаимно однозначное соответствие. Следовательно, x можно рассматривать как функцию от аргумента y:

$$x = g(y).$$

Областью определения функции $g(y)$ является множество значений функции $f(x)$.

Функции

$$y = f(x) \text{ и } x = g(y),$$

устанавливающие взаимно однозначное соответствие между множествами значений x и y, называются ***взаимно обратными***. Функцию $x = g(y)$ называют ***обратной*** по отношению к функции $y = f(x)$.

Примером двух взаимно обратных функций могут служить функции $y = 2x$ и $x = \frac{1}{2}y$.

Из определения обратной функции следует, что если какая-либо точка (x, y) лежит на графике одной из двух взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$, то она лежит и на графике другой.

Таким образом, две взаимно обратные функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ имеют один и тот же график. Так, например, функции $y = 2x$ и $x = \frac{1}{2}y$ изображаются графически одной прямой.

Если у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x, а значение функции — через y, то она запишется в виде $y = g(x)$. Функции $x = g(y)$ и $y = g(x)$ различаются только обозначениями переменных. Поэтому *график обратной функции $y = g(x)$ симметричен графику данной функции относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.*

8. Периодические функции

Функция называется ***периодической***, если существует такое число $T \neq 0$, что значение функции определено и не изменяется при прибавлении (или вычитании) этого числа к любому значению аргумента:

$$f(x \pm T) = f(x).$$

Примерами периодических функций являются тригонометрические функции (см. гл. IV, § 1).

Особое значение для периодической функции $f(x)$ имеет наименьшее положительное число $T \neq 0$, обладающее указанным свойством; его обычно называют ***периодом*** этой функции.

Рассмотрим некоторые элементарные функции и их графики.

9. Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида

$$y = kx + b. \tag{5}$$

Область определения функции — вся числовая ось: $-\infty < x < +\infty$. Графиком ее является прямая, тангенс угла наклона которой с осью Ox равен k ($k = \operatorname{tg}\alpha$), а b есть ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Для построения графика линейной функции достаточно вычислить координаты двух точек, например точек пересечения прямой с осями координат (если прямая непараллельна ни одной из этих осей), и провести через них прямую (рис. 63).

Построим, например, график функции

$$y = |x|.$$

По определению абсолютной величины имеем

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, при $x \geq 0$ графиком рассматриваемой функции служит биссектриса первого координатного угла, а при $x < 0$ — биссектриса второго координатного угла (рис. 64).

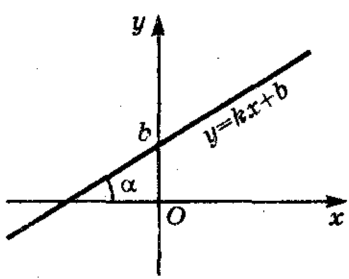


Рис. 63

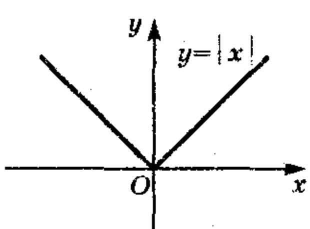


Рис. 64

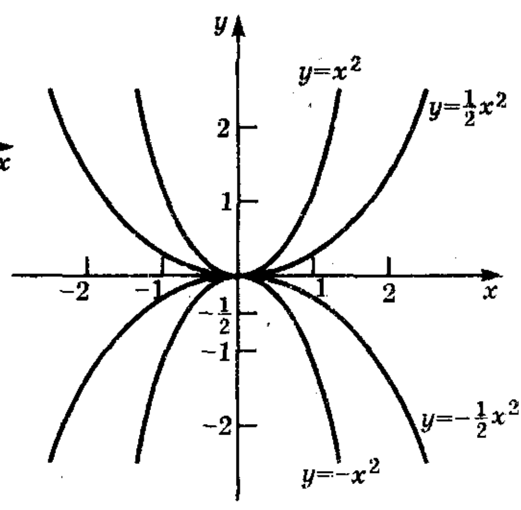


Рис. 65

10. Квадратичная функция

Функция вида

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (6)$$

при $a \neq 0$ называется ***квадратичной функцией***. Область ее определения — вся числовая ось: $-\infty < x < +\infty$. График этой функции называется параболой второй степени или просто ***параболой*** (и будет рассмотрен в § 3).

Рассмотрим лишь простейший случай — функцию

$$y = ax^2 (a \neq 0). \qquad (7)$$

На рис. 65 изображены кривые

$$y = x^2 \ (a = 1),$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 \left(a = \frac{1}{2}\right), \ y = -x^2 (a = -1), \ \text{и} \ y = -\frac{1}{2}x^2 \left(a = -\frac{1}{2}\right).$$

Функция $y = ax^2$ четная, следовательно, ее график симметричен относительно оси Oy. При $a > 0$ функция выпукла вниз, а при $a < 0$ — выпукла вверх (см. пример 8). Начало координат оказывается самой «низкой» точкой кривой при $a > 0$ и самой «высокой» при $a < 0$ и называется ***вершиной параболы***.

11. Дробно-линейная функция

Дробно-линейной функцией называется функция вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad (8)$$

где $c \neq 0$, a, b, d — действительные числа и $ad - bc \neq 0$. Область ее определения — вся числовая ось, кроме точки $x = -\dfrac{d}{c}$.

Кривая, которая служит графиком функции, называется ***гиперболой*** (рис. 66). Для ее построения, например, достаточно найти центр $O_1\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$, а также вертикальную $x = -\dfrac{d}{c}$ и горизонтальную $y = \dfrac{a}{c}$ асимптоты. (***Асимптотой*** называется прямая, к которой неограниченно приближается точка при движении по гиперболе и удалении в бесконечность.)

Рассмотрим, в частности, дробно-линейную функцию вида

$$y = \frac{m}{x}, \qquad (9)$$

которая при $m > 0$ выражает закон обратной пропорциональности между x и y: при увеличении x в несколько раз y уменьшается во столько же раз. Если $m > 0$, то график расположен в первой и третьей четвертях, так как x и y имеют одинаковые знаки, а если $m < 0$ — во второй и четвертой четвертях (рис. 67).

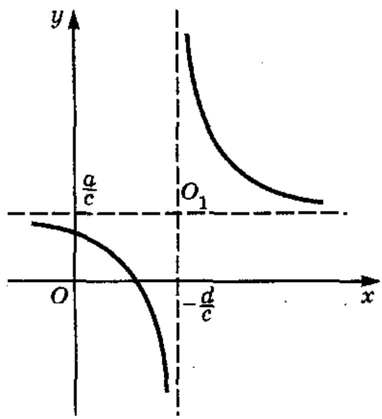


Рис. 66

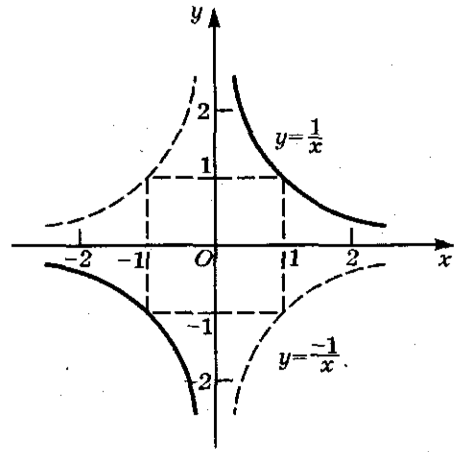


Рис. 67

12. Степенная функция

Функции $y = ax$, $y = ax^2$ и $y = \frac{m}{x}$, которые мы рассматривали выше, представляют собой частые случаи функции вида

$$y = ax^n, \tag{10}$$

где a и n — произвольные постоянные. Функция (10) называется ***степенной функцией.*** Ограничимся при построении графика этой функции лишь положительными значениями x и случаем $a = 1$. На рис. 68, *а* и *б* изображены графики, соответствующие различным значениям n. Все кривые проходят через точку (1,1). Для $n > 0$ кривые при $x > 1$ поднимаются вверх тем круче, чем больше величина n (см. рис. 65, *а*). Для $n < 0$ с возрастанием x ординаты y убывают (см. рис. 68, *б*).

Заметим, что при дробном n значение радикала считается положительным; например, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ считаем арифметическим корнем.

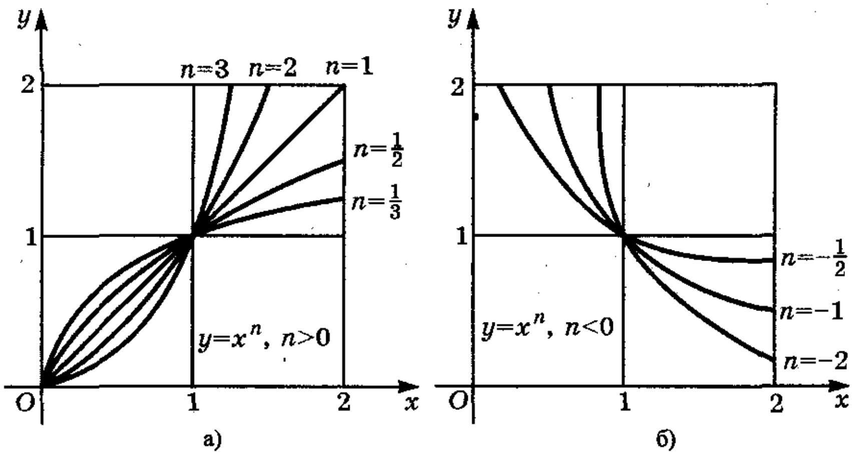


Рис. 68

УПРАЖНЕНИЯ

1. Записать функцию, выражающую зависимость радиуса r цилиндра от его высоты h при данном объеме V.

Ответ. $r=\sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$.

2. Выразить зависимость длины y одного катета прямоугольного треугольника от длины x другого при постоянной гипотенузе $c=1$. Убедиться, что графиком этой функции служит четверть окружности.

Ответ. $y=\sqrt{1-x^2}$, $0<x<1$.

3. В равнобедренном треугольнике, сохраняющем постоянную площадь, стороны изменяются. Выразить длину l боковой стороны треугольника как функцию основания и указать область определения функции.

Ответ. $l=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4S^2}{a^2}}$, где a — длина основания, S — площадь треугольника. Область определения: $a>0$.

4. В шар радиуса R вписывается прямой конус. Найти функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса от его образующей x. Указать область определения этой функции.

Ответ. $S=\dfrac{\pi x^2}{2R}\sqrt{4R^2-x^2}$, $0<x<2R$.

5. В шар радиуса R вписывается цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V и площади боковой поверхности P цилиндра от его высоты. Указать области определения найденных функций.

О т в е т. $V=\pi\left(R^2x-\dfrac{x^3}{4}\right)$; $P=\pi x\sqrt{4R^2-x^2}$; $0<x<2R$, где x — высота цилиндра.

6. Тело движется прямолинейно под действием силы F. Исходя из закона Ньютона, записать функцию, выражающую зависимость между силой F и ускорением a, если известно, что когда тело движется с ускорением a_0, на пути s_0 совершается работа A_0.

О т в е т. $F=\dfrac{A_0}{a_0s_0}a.$

7. Равномерно движущаяся точка через t_1 с после начала движения находилась на расстоянии s_1 от некоторой начальной точки: через t_2 с после начала движения расстояние стало равным s_2. Выразить расстояние s как функцию времени t.

О т в е т. $s=\dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1}t.$

8. Отряд, двигаясь со скоростью 4 км/ч, совершил трехчасовой поход. Через полтора часа был сделан получасовой привал. Выразить длину пути s как функцию времени t. Построить график этой функции. Указать область определения и множество значений функции.

$$\text{О т в е т. } s=\begin{cases}4t, & \text{если } 0\le t\le \dfrac{3}{2};\\ 6, & \text{если } \dfrac{3}{2}<t\le 2;\\ 4t-2, & \text{если } 2<t\le 3.\end{cases}$$

График функции изображен на рис. 69. Область определения: $0\le t\le 3$; множество значений: $0\le s\le 10$.

9. При прыжке с самолета первые t_1 с до раскрытия парашюта парашютист падает под действием силы тяжести. После того как парашют раскроется, парашютист падает t_2 с со скоростью v м/с. Выразить путь парашютиста как функцию времени. Указать область определения и множество значений функции.

$$\text{О т в е т. } s=\begin{cases}\dfrac{gt^2}{2}, & \text{если } 0\le t\le t_1;\\ \dfrac{gt_1^2}{2}+v(t-t_1), & \text{если } t_1<t\le t_1+t_2.\end{cases}$$

Область определения: $0 \le t \le t_1 + t_2$; множество значений: $0 \le s \le \dfrac{gt_1^2}{2} + vt_2$.

10. Начертить графики зависимостей высоты h и скорости v от времени t для тела, брошенного вверх с начальной скоростью $v_0 = 9{,}81$ м/с. Графики построить для интервала времени от 0 до 2 с, т. е. для $0 \le t \le 2$. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ. См. рис 70.

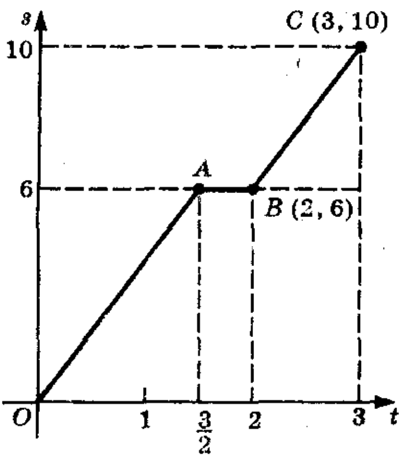


Рис. 69

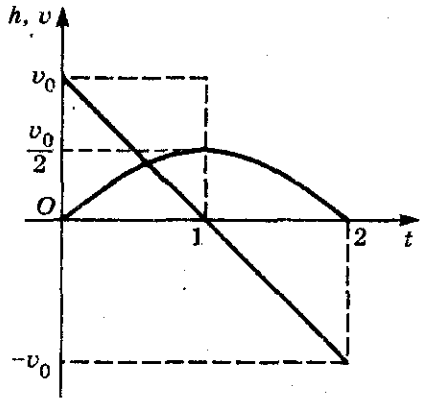


Рис. 70

11. Найти области определения следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$. Ответ. $-\infty < x < +\infty$, $x \ne -1$.

б) $y = \sqrt{3x - x^3}$. Ответ. $-\infty < x \le -\sqrt{3}$ и $0 \le x \le \sqrt{3}$.

в) $y = \sqrt{|x| - x} + \dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$. Ответ. $x \ne -1$, $x \ne 1$.

г) $y = 3\sqrt[4]{x^2+1} + \sqrt{|x+2| - 7}$. Ответ. $-\infty < x \le -9$, $5 \le x < +\infty$.

12. Определить множества значений функций:

а) $y = \dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$. Ответ. $-\infty < y < +\infty$.

б) $y = \dfrac{3}{x(x-2)}$. Ответ. $-\infty < y \le -3,\ 0 < y < +\infty$.

13. Тождественны ли функции:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2}$ и $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ и $\varphi(x) = x$;

в) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$?

Ответ. а) Да; б) тождественны в любом промежутке, не содержащем точку $x = 0$; в) тождественны при $0 \le x < +\infty$.

14. Какие из указанных ниже функций четны, какие нечетны, какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $y = 3x - x^3$; б) $y = x^4 - 2x^2$; в) $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

г) $y = x - x^2$; д) $y = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$; е) $y = 1 - x^2$?

Ответ. Функции б), в), е) — четные; а), д) — нечетные; г) — ни четная, ни нечетная.

15. Определить промежутки возрастания и убывания функций:

а) $y = ax + b$. Ответ. Возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$ на множестве $-\infty < x < +\infty$.

б) $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$. Ответ. Убывает в интервале $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ и возрастает в интервале $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$.

в) $y = \dfrac{x+2}{2x}$. Ответ. Функция определена всюду, кроме точки $x = 0$. В промежутках $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$ она убывает.

г) $y = \left|x^2 + 2x - 3\right|$. Ответ. Убывает при $x < -3$ и при $-1 < x < 1$, возрастает при $-3 < x < -1$ и при $x > 1$.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

Прежде всего сделаем ряд общих указаний, которые нам понадобятся в дальнейшем. А именно, для построения графика функции нужно:

1) определить область существования этой функции и исследовать функцию в граничных точках области; 2) выяснить симметрию графика (четность, нечетность); 3) найти значения x, при которых функция не определена; 4) найти нули функции и области, где она положительна, либо области, где она отрицательна; 5) выяснить промежутки возрастания и убывания функции; 6) найти асимптоты в случае их существования; 7) указать те или иные особенности графика.

Итак, *в основу построения графика функции должно быть положено изучение ее свойств*. Средствами элементарной математики удается исследовать только простейшие функции. Общая теория построения графиков рассматривается в дифференциальном исчислении.

В настоящем параграфе приводятся некоторые правила, которыми часто пользуются при построении эскизов графиков элементарных функций. При этом предполагается, что график функции $y = f(x)$ известен.

1. Прибавление к аргументу функции числа *a* (перенос графика вдоль оси *Ox*)

Пусть построен график функции $y = f(x)$; выясним, как связаны между собой графики функций $y = f(x)$ и $y = f(x+a)$.

График функции $y = f(x+a)$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *переносом вдоль оси Ox на a единиц масштаба влево, если* $a > 0$, *или вправо, если* $a < 0$.

Пример 1. На рис. 71 показано, как по известному графику функции $y = x^2$ построить график функции $y = (x+1)^2$.

2. Прибавление к функции числа *a* (перенос графика вдоль оси *Oy*)

График функции $y = f(x) + a$ *получается переносом графика функции* $y = f(x)$ *вдоль оси Oy на a единиц масштаба вверх, если* $a > 0$, *или вниз, если* $a < 0$.

Пример 2. На рис. 72 изображены данный график функции $y = x^2$ и полученный из него график функции $y = x^2 + 1$.

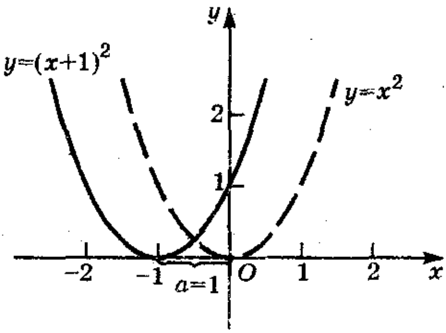


Рис. 71

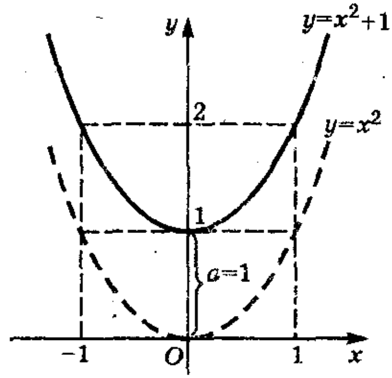


Рис. 72

Следует заметить, что в общем случае линия, заданная уравнением

$$f(x-x_0,\ y-y_0)=0,$$

получается параллельным переносом линии

$$f(x,\ y)=0$$

на $|x_0|$ единиц масштаба вправо, если $x_0>0$, влево — если $x_0<0$, и на $|y_0|$ единиц масштаба вверх, если $y_0>0$, вниз — если $y_0<0$.

Это утверждение можно доказать, если перейти от x и y к «новой» системе координат, связанной со «старой» соотношениями

$$x'=x-x_0,\ y'=y-y_0.$$

3. Умножение аргумента на число $a>0$ (растяжение или сжатие по оси Ox)

График функции $y=f(ax)$ получается из графика функции $y=f(x)$ растяжением по оси Ox в a раз, если $0<a<1$, или сжатием, если $a>1$.

Пример 3. На рис. 73 изображены заданный график функции $y=x^2$ и полученный из него график функции $y=\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

4. Умножение функции на число $a>0$ (растяжение или сжатие по оси Oy)

График функции $y=af(x)$ получается из графика фнкции $y=f(x)$ растяжением по оси Oy в a раз, если $a>1$, или сжатием, если $0<a<1$.

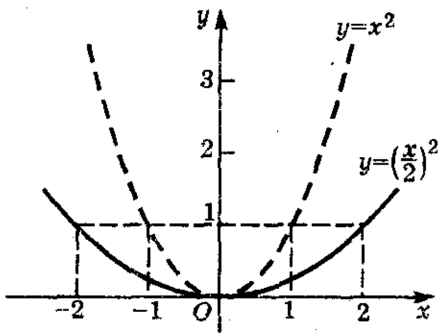


Рис. 73

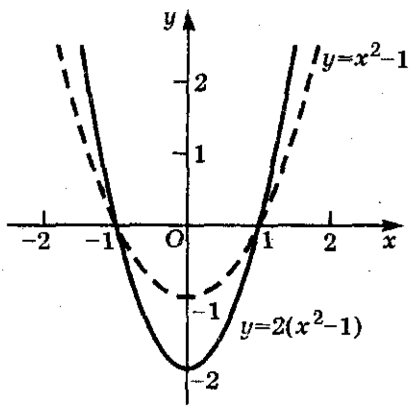


Рис. 74

П р и м е р 4. На рис. 74 показано, как по известному графику функции $y = x^2 - 1$ построить график функции $y = 2(x^2 - 1)$.

Правила 3 и 4 имеют место и тогда, когда линия задана уравнением

$$f(x,\ y) = 0.$$

В этом случае линия

$$f(ax,\ by) = 0$$

получается из заданной кривой сжатием или растяжением по оси Ox в a раз, а по оси Oy — в b раз $(a > 0,\ b > 0)$.

5. Изменение знака у аргумента (зеркальное отражение относительно оси Oy)

Графики функций $f(x)$ и $f(-x)$ симметричны относительно оси Oy, т. е. каждый из них можно получить из другого зеркальным отражением относительно оси Oy.

П р и м е р 5. На рис. 75 изображены данный график функции $y = (x+1)^3$ и полученный из него график функции $y = (-x+1)^3$.

6. Изменение знака у функции (зеркальное отражение относительно оси Ox)

График функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси Ox.

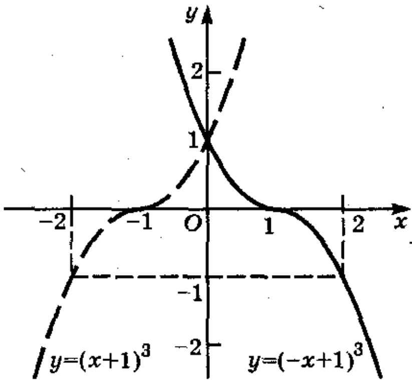


Рис. 75

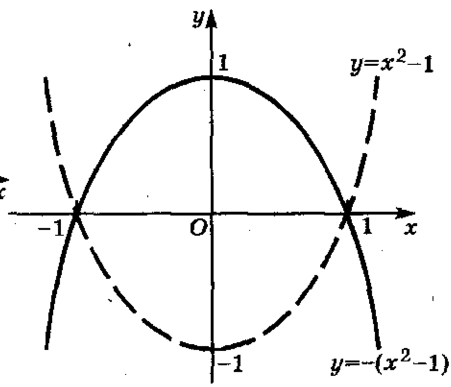


Рис. 76

П р и м е р 6. На рис. 76 показано, как по известному графику функции $y = x^2 - 1$ построить график функции $y = -(x^2 - 1)$.

7. Модуль функции

В силу определения модуля имеем:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = |f(x)|$, нужно часть графика $y = f(x)$, лежащую выше оси абсцисс, оставить без изменения,а часть, лежащую ниже оси абсцисс, отразить зеркально относительно этой оси.

Следовательно, график функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ для тех значений *x*, при которых $f(x) \geq 0$, и симметричен относительно оси *Ox* графику функции $y = f(x)$ для тех значений *x*, при которых $f(x) < 0$.

Сказанное выше непосредственно следует из определения абсолютной величины (см. § 1, п. 6).

П р и м е р 7. На рис. 77 показано, как по известному графику функции $y = x - 1$ построить график функции $y = |x - 1|$.

8. Функция от модуля аргумента

Чтобы получить из графика функции $y = f(x)$ *график функции* $y = f(|x|)$, *нужно часть первого графика, лежащую справа от оси ординат, отразить зеркально относительно этой оси.*

П р и м е р 8. На рис. 78 показано, как по известному графику функции $y = x - 1$ построить график функции $y = |x| - 1$.

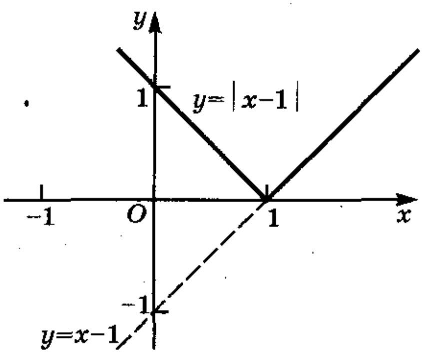


Рис. 77

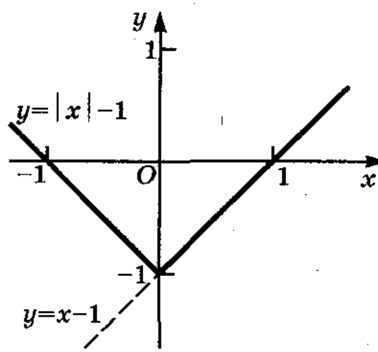


Рис. 78

9. Уравнение $|y| = f(x)$

Чтобы получить из графика функции $y = f(x)$ *зависимость между y и x, заданную уравнением* $|y| = f(x)$, *нужно часть этого графика, лежащую в верхней полуплоскости, отразить зеркально относительно оси Ox.*

П р и м е р 9. На рис. 79 показано, как по известному графику функции $y = -2x + 6$ построить график уравнения $|y| = -2x + 6$.

В заключение приведем примеры графиков, при построении которых могут быть использованы вышеперечисленные правила.

П р и м е р 10. *Построить график дробно-линейной функции*

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \ (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0).$$

Р е ш е н и е. Выделив целую часть, представим функцию в виде

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = y_0 + \frac{m}{x - x_0}. \qquad (1)$$

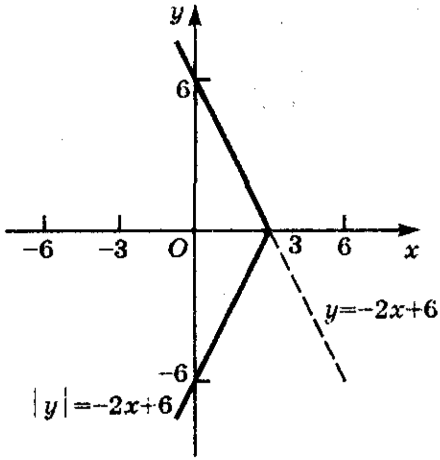


Рис. 79

Тогда, как нетрудно заметить, искомый график представляет собой график функции $y = \frac{m}{x}$ (гиперболу), смещенный на $|x_0|$ единиц масштаба вправо по оси Ox, если $x_0 > 0$, влево — если $x_0 < 0$, и на $|y_0|$ единиц масштаба вверх по оси Oy, если $y_0 > 0$, вниз — если $y_0 < 0$ (рис. 80). В частности, график дробно-линейной функции

$$y = \frac{2-x}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 1,$$

построенный изложенным выше способом, изображен на рис. 81.

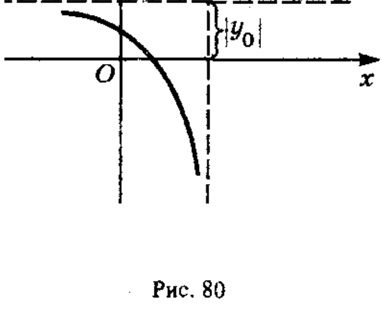


Рис. 80

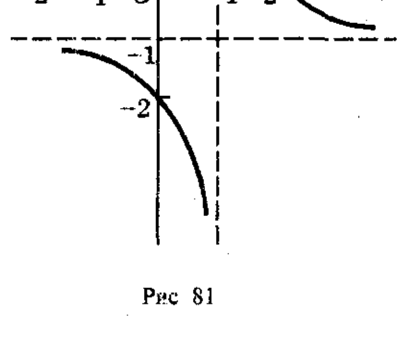


Рис 81

П р и м е р 11. *Построить график квадратичной функции*

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0).$$

Р е ш е н и е. Выделяя полный квадрат, получим

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right), \tag{2}$$

или

$$y = a(x + x_0)^2 + y_0,$$

где

$$x_0 = \frac{b}{2a},\ y_0 = c - \frac{b^2}{4a}. \tag{3}$$

Следовательно, график квадратичной функции (2) представляет собой параболу $y = ax^2$, смещенную влево по оси Ox на $|x_0|$ единиц масштаба, если $x_0 > 0$, вправо — если $x_0 < 0$, и вверх по оси Oy на $|y_0|$ единиц масштаба, если $y_0 > 0$, вниз — если $y_0 < 0$ (рис. 82). Ось симметрии параболы — прямая $x = -|x_0|$.

П р и м е р 12. *Составить уравнение окружности радиуса R с центром в точке* (x_0, y_0).

Р е ш е н и е. Как известно, при замене x на $x - x_0$ в выражении, связывающем y и x, соответствующая кривая смещается на $|x_0|$ единиц масштаба вправо, если $x_0 > 0$, и влево, если $x_0 < 0$, а при замене y на $y - y_0$ кривая смещается на $|y_0|$ единиц масштаба вверх, если $y_0 > 0$, и вниз, если $y_0 < 0$.

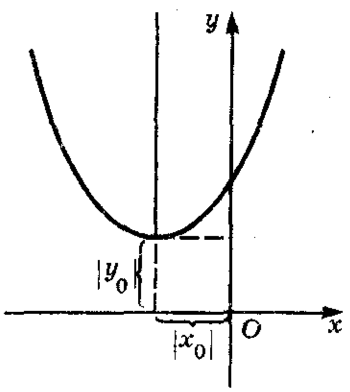


Рис. 82

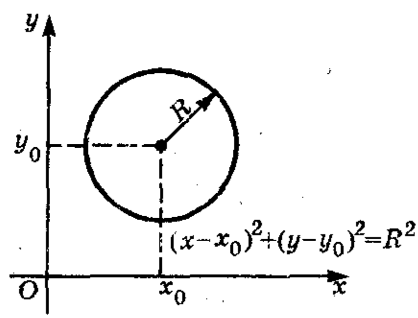


Рис. 83

Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат, как было показано раньше, имеет вид $x^2+y^2=R^2$. Заменяя x на $x-x_0$, а y на $y-y_0$, получаем искомое уравнение окружности радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) (рис. 83):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \tag{4}$$

Раскрывая в равенстве (4) квадраты разностей, можно записать уравнение окружности в следующем виде:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0, \tag{5}$$

где

$$a=-2x_0,\ b=-2y_0,\ c=x_0^2+y_0^2-R^2. \tag{6}$$

Пример 13. *На координатной плоскости xOy построить геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству*

$$|x|+\big||y|-1\big|\le 1.$$

Решение. Геометрическое место точек, удовлетворяющих заданному соотношению и расположенных в верхней полуплоскости, т. е. для которых $|x|+|y-1|\le 1$ (напомним, что $|y|=y$, если $y\ge 0$), представляет собой квадрат (см. § 1, пример 9), смещенный на единицу вверх (рис. 84). Так как координата y входит в исходное выражение под знаком модуля, то имеет место симметрия относительно оси Ox. Следовательно, заданное множество точек представляет собой область, изображенную на рис. 85.

Пример 14. *В основании первого цилиндра лежит круг радиуса y, большего, чем радиус x основания второго цилиндра. Высота первого ци-*

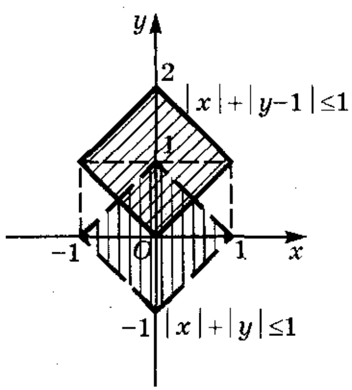


Рис. 84

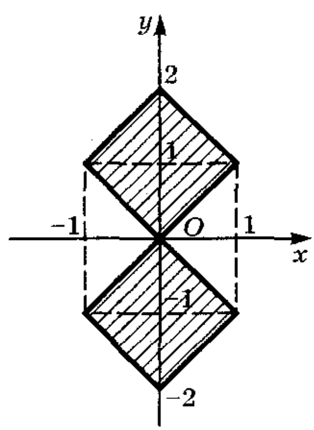


Рис. 85

линдра равна $\frac{1}{8}$, второго — $\frac{1}{2}$. Найти зависимость y от x и изобразить ее графически, если разность между площадью боковой поверхности и площадью основания первого цилиндра равна площади боковой поверхности второго.

Р е ш е н и е. Площадь боковой поверхности первого цилиндра равна $2\pi y\cdot\frac{1}{8}$; площадь его основания равна πy^2. Площадь боковой поверхности второго цилиндра равна $2\pi x\cdot\frac{1}{2}$, причем $y>x>0$.

Следовательно, по условию задачи имеем

$$2\pi y\cdot\frac{1}{8}-\pi y^2=2\pi x\cdot\frac{1}{2};\ y>x>0,$$

или

$$x=\frac{y}{4}-y^2,\ y>x>0.$$

Графиком полученной функциональной зависимости является часть параболы

$$x=\frac{y}{4}-y^2=\frac{1}{64}-\left(y-\frac{1}{8}\right)^2,$$

расположенная в области $y>x>0$ (рис.86). Координаты вершины этой параболы $x_0=\frac{1}{64}$, $y_0=\frac{1}{8}$. Ось симметрии $y=\frac{1}{8}$.

О т в е т. $x=\frac{y}{4}-y^2$, $y>x>0$; график изображен на рис. 86.

П р и м е р 15. *Определить графически, при каких а уравнение*

$$\sqrt{1-|x|}=a$$

имеет один или несколько корней.

Р е ш е н и е. Корнями данного уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y=\sqrt{1-|x|} \tag{7}$$

и

$$y=a. \tag{8}$$

Функция $y=\sqrt{1-|x|}$ — четная, следовательно, ее график симметричен относительно оси Oy. При $x \ge 0$ эта функция принимает вид $y=\sqrt{1-x}$ и ее график представляет собой часть параболы

$$y^2 = 1 - x,$$

расположенную в верхней полуплоскости $y \ge 0$.

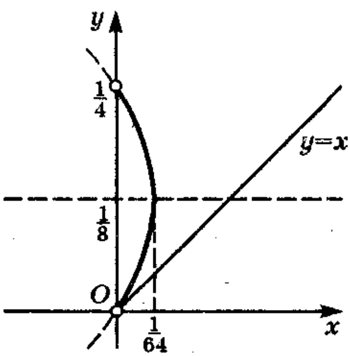


Рис. 86

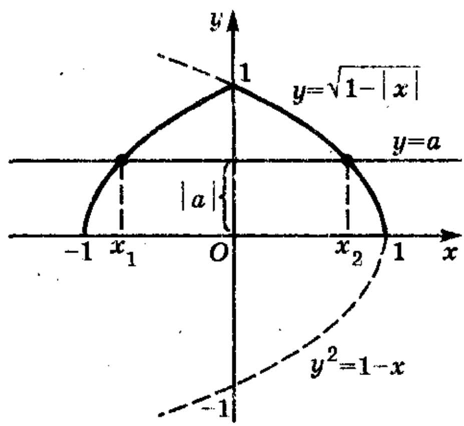


Рис. 87

Воспользовавшись указанной симметрией, строим график функции $y=\sqrt{1-|x|}$ (рис. 87).

Графиком функции $y = a$ является прямая, параллельная оси Ox и смещенная на $|a|$ единиц масштаба вверх по оси Oy, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.

При $a = 0$ график функции $y = a$ совпадает с осью абсцисс.

При $a < 0$ и $a > 1$ графики функций (7) и (8) не имеют точек пересечения. Таким образом, при этих значениях параметра a исходное уравнение корней не имеет.

При $0 \le a < 1$ графики функций (7) и (8) пересекаются в двух точках и, значит, уравнение имеет два корня.

При $a = 1$ графики имеют единственную точку пересечения. Следовательно, при этом значении a рассматриваемое уравнение имеет единственный корень, а именно $x = 0$.

О т в е т. При $a = 1$ уравнение имеет один корень, при $0 \le a < 1$ — два корня; при всех остальных значениях a уравнение действительных корней не имеет.

П р и м е р 16. *Определить графически, при каких a уравнение*

$$\sqrt{1-|x|}=x^2+a$$

имеет один или несколько корней.

Р е ш е н и е. Корни данного уравнения — это абсциссы точек пересечения графиков функций

$$y=\sqrt{1-|x|} \tag{9}$$

и

$$y=x^2+a. \tag{10}$$

Функция $y=\sqrt{1-|x|}$ была исследована в примере 15. Построим ее график (рис. 88).

Графиком функции $y=x^2+a$ является парабола $y=x^2$, смещенная на $|a|$ единиц масштаба вверх по оси Oy, если $a>0$, и вниз, если $a<0$.

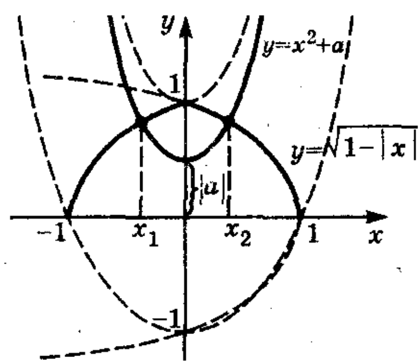


Рис. 88

При $a>1$ графики функций (9) и (10) не имеют точек пересечения. Таким образом, при этих значениях параметра a исходное уравнение корней не имеет.

При $a=1$ графики имеют единственную точку пересечения. Следовательно, при этом значении a рассматриваемое уравнение имеет единственный корень, а именно $x=0$.

При $-1\le a<1$ графики функций (9) и (10) пересекаются в двух точках и, значит, исходное уравнение имеет два корня.

П р и м е р 17. *На координатной плоскости xOy построить геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют соотношению*

$$\big||x|-1\big|+\big||y|-1\big|\le 1. \tag{11}$$

Р е ш е н и е. 1. Построим сначала множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству

$$|x|+|y|\le 1 \tag{12}$$

(см. § 1, пример 9). Это множество симметрично относительно обеих осей координат, поэтому достаточно рассмотреть, например, случай, когда $x\ge 0$, $y\ge 0$.

По определению абсолютной величины действительного числа a имеем

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Значит, в рассматриваемом случае

$$|x| = x,\ |y| = y.$$

Неравенство (12) примет вид

$$x + y \leq 1,$$

или

$$0 \leq y \leq 1 - x,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Геометрическое место точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют полученной системе неравенств или, что то же самое, соотношениям

$$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,$$

представляет собой треугольник.

Воспользовавшись указанной выше симметрией, получим, что множество точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют неравенству (12), есть квадрат (включая границу; см. рис. 15).

2. Построим теперь множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$|x - 1| + |y - 1| \leq 1. \qquad (13)$$

В общем случае кривая, заданная уравнением $f(x - x_0,\ y - y_0) = 0$, получается параллельным переносом кривой $f(x, y) = 0$ на $|x_0|$ единиц масштаба вправо, если $x_0 > 0$, влево — если $x_0 < 0$, и на $|y_0|$ единиц масштаба вверх, если $y_0 > 0$, вниз — если $y_0 < 0$.

Поэтому множество точек, координаты $(x,\ y)$ которых удовлетворяют неравенству (13), представляет собой квадрат, смещенный на единицу масштаба вправо и на единицу масштаба вверх.

3. Построим, наконец, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют заданному в условии неравенству (11):

$$\big||x| - 1\big| + \big||y| - 1\big| \leq 1.$$

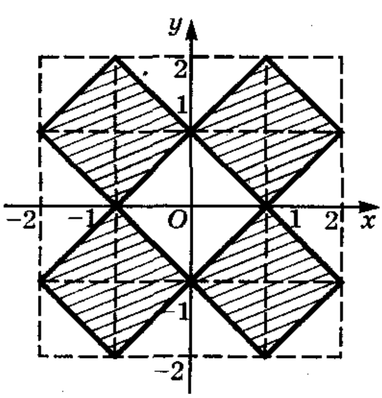


Рис. 89

Так как координаты x и y входят в это неравенство под знаком модуля, то имеет место симметрия относительно осей Ox и Oy. При $x \geq 0$ и $y \geq 0$ неравенство (11) принимает вид

$$|x - 1| + |y - 1| \leq 1$$

(напомним, что $|x| = x$ при $x \geq 0$ и $|y| = y$ при $y \geq 0$) и, следовательно, представляет собой квадрат, расположенный в первой четверти (рис. 89). Отсюда, воспользовавшись указанной симметрией, строим искомое множество точек (рис. 89).

О т в е т. На рис. 89 искомое множество точек заштриховано.

УПРАЖНЕНИЯ

Построить графики функций:

1. $y=|x+1|$.

2. $y=|x+2|+|x-1|+|x-4|$.

3. $y=2\,(1-|1-|x||)$.

4. $y=\dfrac{x+3}{x-3}$.

5. $y=\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|$.

6. $y=1-\dfrac{1}{|x|}$.

7. $y=|x^2-3x+2|$.

8. $y=x^2+5|x-1|+1$.

9. $y=|x^2-1|+x$.

10. $y=|x^2-3x+2|+|5-x|$.

11. $y=||x|-1|$.

12. $y=|x-1|\cdot|x-2|$.

13. $y=x+\dfrac{1}{x}$.

14. $y=x^3+3x^2$.

15. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

16. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

17. $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$.

18. $y=\dfrac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|}$.

19. $y=1-\sqrt{|x|}$.

20. $y=\sqrt{2\,(x+|x-2|)}$.

Построить линии, заданные уравнениями:

21. $y-1+(x+1)^2=0$.

22. $x-3=(y+5)^2$.

23. $y-|y|=2\,(x+1)$.

24. $|x-y|+|x+y|=3$.

25. $|x+y|=|y|-x$.

26. $|y-1|=x^2-4x+3$.

27. $x+y-2+|x^2-x-2|=0$.

28. $|y^2-1|=|x+y|$.

29. $|x|+|y|+|y^2-2x|=1$.

30. $|y|=\dfrac{1}{||x+1|-3|}$.

31. $|y|=\dfrac{|x|}{x}-x^2$.

32. $\dfrac{y}{|x|}+1=|xy|+y|y|$.

33. $x^2+4xy-5y^2=0$.

34. $x^3-x^2y-xy+y^2=0$.

Изобразить на координатной плоскости геометрические места точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют соотношениям:

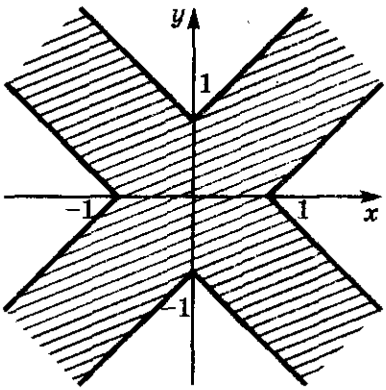


Рис. 90

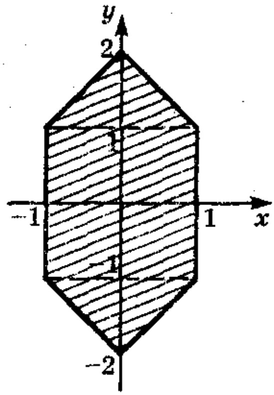


Рис. 91

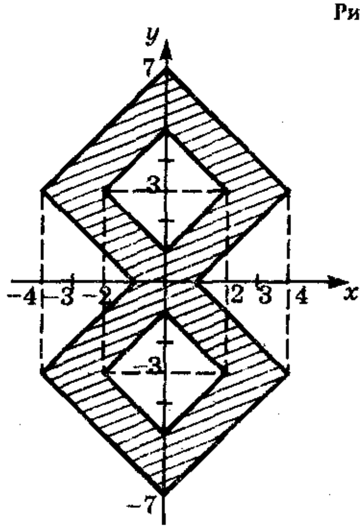


Рис. 92

35. $|x-1|+|y+2| \le 1$.

36. $|2-|x|| < ||y|-3|$.

37. $||x|-|y|| \le 1$.

О т в е т. См. рис. 90.

38. $|y-1|+|y+1|+2|x| \le 4$.

О т в е т. См. рис. 91.

39. $||x|+||y|-3|-3| \le 1$.

О т в е т. См. рис. 92.

ГЛАВА II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В данной главе рассматриваются наиболее распространенные методы решения линейных, нелинейных, иррациональных алгебраических уравнений и систем. При этом особое внимание обращается на эквивалентность уравнений.

§ 1. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

1. Общие сведения об уравнениях

Рассмотрим уравнение

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Областью определения этого уравнения называется общая часть областей определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (пересечение множеств $D(f_1) \cap D(f_2)$).

Пример 1. *Найти область определения уравнения*

$$\sqrt{2-x} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение. Областью определения функции $f_1(x) = \sqrt{2-x}$ является множество $x \le 2$, а областью определения функции $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ — множество $x > 1$.

Общая часть этих множеств (пересечение множеств) $1 < x \le 2$ является областью определения рассматриваемого уравнения.

Ответ. $1 < x \le 2$.

Замечание. Иногда область определения уравнения называют ***областью допустимых значений неизвестного*** (сокращенно ОДЗ).

Корнем (***решением***) уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ называется такое значение аргумента $x = x_0$, для которого справедливо числовое равенство

$f_1(x_0)=f_2(x_0)$. Следовательно, x_0 — корень уравнения $f_1(x)=f_2(x)$, если: 1) x_0 принадлежит области определения уравнения; 2) $f_1(x_0)=f_2(x_0)$.

Решить уравнение — это значит найти все его корни. Если не существует ни одного значения x, при котором $f_1(x)=f_2(x)$, то говорят, что уравнение решений не имеет $(x \in \varnothing)$.

Если все корни одного уравнения являются корнями второго, то второе называется ***следствием*** первого. Тот факт, что уравнение (II) является следствием уравнения (I), иногда обозначают так:

$$(\text{I}) \Rightarrow (\text{II}).$$

Два уравнения называются ***эквивалентными*** (или ***равносильными***), если все корни первого уравнения являются корнями второго и, наоборот, все корни второго уравнения являются корнями первого. Иногда эквивалентность обозначают знаком $\Leftrightarrow$. Ясно, что эквивалентные уравнения имеют одни и те же корни.

Если два уравнения имеют одинаковые корни на некотором множестве, принадлежащем областям определения уравнений, то эти уравнения называются ***эквивалентными на этом множестве***. Данное множество определяется чаще всего дополнительными условиями, например неравенствами.

Так, уравнение $x-2=0$ эквивалентно уравнению $x^2-4=0$ на множестве $x>0$. Используя символ эквивалентности, этот факт можно записать следующим образом:

$$x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0, \\ x>0. \end{cases}$$

Систему, состоящую из уравнений и неравенств, будем называть ***смешанной системой.***

Следовательно, в рассматриваемом примере уравнение $x-2=0$ эквивалентно смешанной системе

$$\begin{cases} x^2-4=0, \\ x>0. \end{cases}$$

Итак, вместо того, чтобы решать данное уравнение, можно решить ему эквивалентное (или эквивалентную ему смешанную систему), что широко используется на практике.

Если при решении некоторого уравнения мы заменяем его новым, то может произойти следующее:

1) если новое уравнение эквивалентно исходному, то все корни совпадают;

2) если новое уравнение не является следствием исходного, то корни могут быть потеряны;

3) если новое уравнение есть следствие исходного, то могут появиться «посторонние корни» (так в школьной практике называют те решения

уравнения-следствия, которые не удовлетворяют исходному уравнению). В этом случае необходима проверка, так как с ее помощью мы сможем обнаружить эти «посторонние корни».

2. Некоторые теоремы об эквивалентности уравнений

Теорема 1. *Если к обеим частям уравнения прибавить любую функцию, определенную при всех допустимых значениях неизвестного, то получится уравнение, эквивалентное данному.*

Доказательство. Рассмотрим два уравнения:

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad \text{(I)}$$

и

$$f_1(x)+\varphi(x)=f_2(x)+\varphi(x), \qquad \text{(II)}$$

где $\varphi(x)$ — любая функция, определенная при всех значениях, принадлежащих области определения уравнения (I).

Пусть при некотором значении $x=x_0$ выполняется равенство

$$f_1(x_0)=f_2(x_0),$$

тогда

$$f_1(x_0)+\varphi(x_0)=f_2(x_0)+\varphi(x_0).$$

Обратно, если при некотором значении $x=x_0$ имеем

$$f_1(x_0)+\varphi(x_0)=f_2(x_0)+\varphi(x_0),$$

то

$$f_1(x_0)=f_2(x_0).$$

Таким образом, любой корень уравнения (I) удовлетворяет уравнению (II) и, наоборот, любой корень уравнения (II) удовлетворяет также уравнению (I). Следовательно, уравнения (I) и (II) эквивалентны.

Следствие. *Члены уравнения можно переносить из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.*

Теорема 2. *Если обе части уравнения умножить на любую функцию, определенную и отличную от нуля при всех допустимых значениях неизвестного, то получится уравнение, эквивалентное данному.*

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad \text{(I)}$$

и

$$f_1(x)\varphi(x)=f_2(x)\varphi(x), \qquad \text{(II)}$$

где $\varphi(x)$ — любая функция, определенная и отличная от нуля при всех значениях x, принадлежащих области определения уравнения (I).

Если при некотором значении $x = x_0$ выполняется равенство

$$f_1(x_0) = f_2(x_0),$$

то

$$f_1(x_0)\varphi(x_0) = f_2(x_0)\varphi(x_0).$$

Обратно, если при некотором значении $x = x_0$ справедливо равенство

$$f_1(x_0)\varphi(x_0) = f_2(x_0)\varphi(x_0),$$

то при том же значении x_0 имеем

$$f_1(x_0) = f_2(x_0)$$

Таким образом, каждое решение уравнения (I) является решением уравнения (II) и, обратно, каждое решение уравнения (II) является решением уравнения (I). Следовательно, уравнения (I) и (II) эквивалентны.

Теорема 3. *Если обе части уравнения представляют собой функции, принимающие только неотрицательные значения, то при возведении их в одну и ту же целую положительную степень получится уравнение, эквивалентное данному.*

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{I}$$

$$f_1^m(x) = f_2^m(x), \tag{II}$$

где $f_1(x) \geq 0$ и $f_2(x) \geq 0$, а m — целое положительное число. Докажем, что эти уравнения эквивалентны.

Если функция $f_1(x)$ или $f_2(x)$ равна нулю, то эквивалентность очевидна.

Рассмотрим случай, когда $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$. Пусть $x = x_0$ — любой корень уравнения (I), т. е.

$$f_1(x_0) = f_2(x_0).$$

Возводя полученное числовое равенство в степень m, имеем

$$f_1^m(x_0) = f_2^m(x_0).$$

Следовательно, $x = x_0$ является корнем уравнения (II). Поскольку $x = x_0$ — любой корень уравнения (I), это означает, что все корни уравнения (I) будут также корнями уравнения (II), т. е. уравнение (II) есть следствие уравнения (I). Заметим, что при доказательстве данного утверждения не использовался тот факт, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принимают только положительные значения.

Теперь докажем, что все корни уравнения (II) являются корнями уравнения (I).

Пусть $x = x_0$ — любой корень уравнения (II). Это значит, что справедливо числовое равенство

$$f_1^m(x_0) = f_2^m(x_0),$$

или

$$f_1^m(x_0) - f_2^m(x_0) = [f_1(x) - f_2(x)] \times$$
$$\times [f_1^{m-1}(x_0) + f_1^{m-2}(x_0) f_2(x_0) + \ldots + f_2^{m-1}(x_0)] = 0.$$

Так как для положительных значений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ выражение

$$f_1^{m-1}(x_0) + f_1^{m-2}(x_0) f_2(x_0) + \ldots + f_2^{m-1}(x_0) > 0, \qquad \text{(III)}$$

то произведение равно нулю, когда

$$f_1(x_0) - f_2(x_0) = 0,$$

т. е.

$$f_1(x_0) = f_2(x_0).$$

Значит, $x = x_0$ является корнем уравнения (I). Поскольку $x = x_0$ — любой корень уравнения (II), все корни этого уравнения будут также корнями уравнения (I).

Итак, мы доказали, что все корни уравнения (I) являются корнями уравнения (II) и, наоборот, все корни уравнения (II) являются корнями уравнения (I), т. е., по определению, эти уравнения эквивалентны.

Доказательсво теоремы можно провести также методом от противного.

З а м е ч а н и е . Если m — нечетное число, то эквивалентность уравнений (I) и (II) имеет место для функций, принимающих как положительные, так и отрицательные значения, поскольку в этом случае выражение (III) всегда положительно.

Невыполнение какого-либо условия теорем 1, 2 и 3 может привести к нарушению эквивалентности уравнений. При решении уравнений часто также совершают преобразования, которые изменяют область определения уравнения. При этом если область определения уравнения расширяется, то возможно появление «посторонних корней»; если область определения уравнения сужается, то возможна потеря корней. Нарушение эквивалентности уравнений возможно и при преобразованиях, которые не изменяют область определения уравнения.

3. Примеры преобразований, приводящих к появлению «посторонних корней»

1. *Приведение подобных членов:*

$$f_1(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = f_2(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x).$$

П р и м е р 2. *Решить уравнение*

$$x^2 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е . Найдем область определения уравнения: $x \neq 1$. Приводя подобные члены, перейдем к уравнению

$$x^2 = 1, \qquad (2)$$

корень $x = 1$ которого не входит в область определения исходного уравнения (1). Здесь в результате приведения подобных членов произошло расширение области определения уравнения.

О т в е т . $x = -1$.

2. *Сокращение дроби на выражение, содержащее неизвестное.*

П р и м е р 3 . *Решить уравнение*

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 2x. \qquad (3)$$

Р е ш е н и е . Найдем область определения уравнения (3): $x \neq 1$. Сократим дробь, стоящую в левой части уравнения, на $x - 1$. Получим уравнение

$$x + 1 = 2x, \qquad (4)$$

область определения которого шире, чем область определения исходного уравнения и состоит из множества всех действительных чисел x.

Корень $x = 1$ уравнения (4) не входит в область определения уравнения (3), и, следовательно, не является его решением.

О т в е т . Уравнение решений не имеет.

3. *Умножение уравнения на выражение, содержащее неизвестное.* При такой операции можно приобрести «посторонние корни» уравнения, а именно те, которые обращают это выражение в нуль.

4. *Освобождение дроби от знаменателя, содержащего неизвестное.* Рассмотрим уравнения, в одной или обеих частях которых находятся рациональные алгебраические выражения, содержащие неизвестное в знаменателе. Такие уравнения, называемые дробными, решаются с помощью сведения к целым алгебраическим уравнениям.

А именно, можно, например, перенести все слагаемые правой части в левую с противоположными знаками, затем, используя тождественные преобразования(приведение подобных членов, сокращение дробей и т. д.), привести левую часть в виду частного от деления двух многочленов:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

Полученное уравнение является лишь следствием исходного уравнения, но не обязательно эквивалентно ему.

Умножив обе части последнего уравнения на знаменатель $Q(x)$ дроби (при этом происходит расширение области определения уравнения, а именно добавляются те значения x, при которых $Q(x) = 0$), получим новое уравнение

$$P(x) = 0,$$

которое является следствием предыдущего, а потому и следствием исходного уравнения. Среди корней уравнения $P(x) = 0$ содержатся все корни исходного уравнения, а также «посторонние корни», которые необходимо отбросить с помощью проверки.

Иногда при решении дробного уравнения умножают обе его части на общий знаменатель всех дробей, находящихся в левой и правой частях исходного уравнения. При этом также получают уравнение, являющееся следствием исходного.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-3}{x+2}=\frac{12}{x^2-4}. \tag{5}$$

Решение. *Область определения уравнения (5): $x \neq 2$ и $x \neq -2$.* Приведем дроби к общему знаменателю и перейдем к уравнению

$$(x+1)(x+2)+(x-3)(x-2)=12. \tag{6}$$

Область определения уравнения (6) шире, чем уравнения (5), и представляет собой множество всех действительных чисел. Корни уравнения (6) — это $x = 2$ и $x = -1$. Но для уравнения (5) $x = 2$ не является корнем, так как не принадлежит области определения этого уравнения.

Ответ. $x = -1$.

5. *<u>Возведение в квадрат</u> (<u>или в любую четную степень</u>). Если обе части уравнения*

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{I}$$

возвести в четную степень $m = 2n$, то полученное уравнение

$$f_1^{2n}(x) = f_2^{2n}(x) \tag{II}$$

будет следствием исходного. Действительно, как следует из доказательства теоремы 3, в случае, когда функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в области определения уравнения (I) принимают отрицательные значения, среди корней уравнения (II) могут оказаться «посторонние» для уравнения (I), а именно те, которые обращают в нуль выражение (III) (см. с. 65).

Пример 5. *Решить уравнение*

$$\sqrt{5-x} = 3-x. \tag{7}$$

Решение. Область определения уравнения (7) задается неравенством $x \leq 5$. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$5-x=(3-x)^2. \tag{8}$$

Область определения полученного уравнения (8) — множество всех действительных чисел. Произошло расширение области определения.

Решениями уравнения (8) являются $x = 1$ и $x = 4$; решением уравнения (7) — только $x = 1$; как показывает проверка, $x = 4$ — «посторонний корень».

Ответ. $x = 1$.

6. *Решение методом разложения левой части уравнения $f(x)=0$ на множители*. Для нахождения корней уравнения

$$f(x)=0, \tag{I}$$

левая часть которого разлагается на множители:

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots f_k(x),$$

решают каждое из уравнений

$$\begin{aligned} &f_1(x)=0,\\ &f_2(x)=0,\\ &\ldots\ldots\\ &f_k(x)=0 \end{aligned} \tag{II}$$

и объединяют все их корни. При этом решениями исходного уравнения (I) будут те из корней уравнений (II), которые принадлежат области определения уравнения (I), т. е. общей части (пересечению множеств) областей определения всех функций $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,f_k(x)$.

Замечание. Представляя данную функцию $f(x)$ в виде произведения функций $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_k(x)$, мы предполагаем, что всюду в области определения данной функции $f(x)$ каждая из них определена.

Пример 6. *Решить уравнение* $x\cdot\operatorname{ctg}x=0$.

Решение. Областью определения данного уравнения является множество значений $x\neq k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. Уравнение распадается на два:

1) $x=0$; 2) $\operatorname{ctg}x=0$, откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

Так как значение $x=0$ не принадлежит области определения исходного уравнения, то оно не является его решением.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

Итак, из рассмотренных выше примеров можно сделать следующий вывод: если при решении уравнения применяются преобразования 1 — 6, то необходимо сделать проверку, чтобы с ее помощью обнаружить появившиеся «посторонние корни».

4. Примеры преобразований, приводящих к потере корней

1. *Деление на выражение, содержащее неизвестное*. При делении на некоторое выражение, содержащее неизвестное, возможна потеря корней, именно тех, при которых это выражение равно нулю.

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\frac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x.$$

Решение. Разделим числитель и знаменатель левой части на $\sqrt[3]{x-5}$, предполагая, что $\sqrt[3]{x-5}\neq 0$:

$$\frac{\sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}}-1}{\sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}}+1}=6-x.$$

Сделав подстановку $\sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}}=t$, получим систему уравнений

$$\frac{t-1}{t+1}=6-x,\ t^3=\frac{7-x}{x-5}.$$

Из первого уравнения системы находим $t=\dfrac{7-x}{x-5}$, следовательно, второе уравнение примет вид

$$t^3=t,$$

откуда

$$t_1=0,\ t_2=1 \text{ и } t_3=-1.$$

Последний корень не удовлетворяет первому уравнению системы, так как обращает знаменатель дроби $\dfrac{t-1}{t+1}$ в нуль, первые два корня дают значения $x_1=7$, $x_2=6$. Проверка показывает, что эти числа удовлетворяют данному уравнению.

Остается рассмотреть ранее исключенный нами случай, когда $\sqrt[3]{x-5}=0$. В этом случае $x=5$; подставляя это значение x в исходное уравнение, заключаем, что и оно является его корнем.

Итак, данное уравнение имеет три корня.

Ответ. $x_1=7,\ x_2=6,\ x_3=5.$

Замечание. Если бы мы не рассмотрели случай $\sqrt[3]{x-5}=0$, то корень исходного уравнения $x=5$ был бы потерян.

Из теоремы 2 следует, что если обе части уравнения разделить на любую функцию, определенную и отличную от нуля при всех допустимых значениях неизвестного, то получим уравнение, эквивалентное данному. Никакой потери корней в этом случае не происходит.

2. *Сокращение обеих частей уравнения на общий множитель, содержащий неизвестное*. При таком преобразовании могут быть потеряны корни, обращающие в нуль этот общий множитель.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\sin^2 x = \sin x.$$

Решение. Переписав уравнение в виде

$$\sin^2 x - \sin x = 0, \text{ или } \sin x(\sin x - 1) = 0,$$

получим:

а) $\sin x = 0$, $x_1 = k\pi$;

б) $\sin x = 1$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Если бы мы сократили обе части исходного уравнения на sinx, то первая серия корней была бы потеряна.

Ответ. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

3. *Использование производных пропорций*. При использовании производных пропорций может нарушаться эквивалентность уравнений, причем возможна как потеря корней, так и приобретение «посторонних корней».

Пример 9. *Решить уравнение*

$$\frac{\sqrt{21+x} + \sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x} - \sqrt{21-x}} = \frac{21}{x}.$$

Решение. Область определения уравнения находится из условий:

$$21 + x \geq 0,\ 21 - x \geq 0,\ x \neq 0.$$

Используя производную пропорцию, получим

$$\frac{\sqrt{21+x}}{\sqrt{21-x}} = \frac{21+x}{21-x}, \text{ или } \frac{\sqrt{21+x}}{\sqrt{21-x}}\left(1 - \frac{\sqrt{21+x}}{\sqrt{21-x}}\right) = 0.$$

Отсюда $x_1 = -21$, $x_2 = 0$ («посторонний корень»). Корень $x_3 = 21$ потерян.

Ответ. $x = 21$ и $x = -21$.

Приведенные примеры не исчерпывают всего многообразия преобразований, при которых возможно нарушение эквивалентности уравнений.

Поэтому необходимо каждый раз любое из преобразований, применяемых при решении уравнений, анализировать с этой точки зрения.

5. Замена неизвестного в уравнении (метод подстановки)

Рассмотрим уравнение

$$f(x)=0, \tag{9}$$

областью определения которого является множество X. (Принадлежность элементов x множеству X будем обозначать так: $x \in X$). При решении уравнения иногда удобно вместо x ввести новое неизвестное t, сделав подстановку

$$x=\varphi(t). \tag{10}$$

Если функция $\varphi(t)$ имеет однозначную обратную функцию (см. гл. 1, § 2, п. 7), то соотношение (10) можно записать следующим образом:

$$t=\psi(x), \tag{11}$$

где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Множество значений функции $t=\psi(x)$ для всех x из области определения исходного уравнения X $(x \in X)$ задает область определения T нового уравнения

$$F(t)=0, \tag{12}$$

где $F(t)=f[\varphi(t)]$, $t \in T$. Определив корни уравнения (12) и воспользовавшись подстановкой (10), получим все корни исходного уравнения (9).

Пусть, например, область определения уравнения (9) представляет собой сегмент

$$a \le x \le b. \tag{13}$$

Введем вместо x новое неизвестное t, сделав подстановку $x=\varphi(t)$. Отсюда $t=\psi(x)$, причем множеством значений этой функции (обратной $\varphi(t)$) для всех x из сегмента $a \le x \le b$ является также сегмент

$$\alpha \le t \le \beta, \tag{14}$$

где $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$.

Следовательно, исходное уравнение (9) на множестве (13) подстановкой $x=\varphi(t)$ приводится к смешанной системе (12), (14):

$$\begin{cases} F(t)=0, \\ \alpha \le t \le \beta, \end{cases}$$

где $F(t)=f[\varphi(t)]$.

Пример 10. *Решить уравнение*

$$\frac{x}{1-x}+\sqrt{\frac{x}{1-x}}-2=0.$$

Решение. Область определения уравнения: $0 \le x < 1$. Подстановкой $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$, где $0 \le t < +\infty$, исходное уравнение сводится к смешанной системе

$$\begin{cases} t^2 + t - 2 = 0, \\ 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$

Квадратное уравнение $t^2 + t - 2 = 0$ имеет два корня: $t_1 = 1$ и $t_2 = -2$, из которых неравенству $0 \le t < +\infty$ удовлетворяет только первый. Следовательно, смешанная система имеет решение $t = 1$.

Воспользовавшись сделанной выше подстановкой, получим $\sqrt{\frac{x}{1-x}} = 1$, откуда $x = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x = \frac{1}{2}$.

6. Решение уравнения методом «частичных областей»

Проиллюстрируем идею этого метода на примере решения уравнения с одним неизвестным.

Решение уравнения

$$f(x) = 0,\ x \in X \tag{15}$$

на множестве X заключается в отыскании тех значений x из этого множества, которые удовлетворяют уравнению (15), т. е. являются его корнями. Этим множеством чаще всего является область определения функции $f(x)$.

Однако при решении многих уравнений нахождение корней уравнения сразу на всем множестве X может представить определенную трудность. Поэтому иногда оказывается целесообразным разбить область X на частичные области X_i ($X = \bigcup X_i$) и решать уравнение (15) (или другое уравнение, эквивалентное данному) в каждой из этих частичных областей. Естественно, частичные области выбираются таким образом, чтобы исходное уравнение в каждой из этих областей допускало более простое решение, чем во всей области X.

Особенно удобен метод «частичных областей» при решении уравнений и неравенств, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины. В случае уравнения с одним неизвестным частным случаем этого метода являются хорошо известный метод интервалов.

Так, например, уравнение вида

$$f\left(|x-x_1|, |x-x_2|, \ldots, |x-x_n|\right)=0$$

решается в каждой из $n+1$ частичных областей, на которые числовую ось Ox разбивают точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$.

Пример 11. *Решить уравнение*

$$|x-4|+|x-6|=2. \tag{16}$$

Решение. Разобьем числовую ось Ox точками $x=4$ и $x=6$ (в которых выражения, стоящие под знаком абсолютной величины, обращаются в нуль) на три частичные области: (I) $-\infty < x < 4$, (II) $4 \le x \le 6$, (III) $6 < x < +\infty$. Будем искать решение исходного уравнения (16) в каждой из этих частичных областей.

По определению абсолютной величины действительного числа имеем

$$|x-4|=\begin{cases} x-4, & \text{если } x \ge 4, \\ -(x-4), & \text{если } x < 4, \end{cases}$$

$$|x-6|=\begin{cases} x-6, & \text{если } x \ge 6, \\ -(x-6), & \text{если } x < 6. \end{cases}$$

В области (I): $-\infty < x < 4$ исходное уравнение примет вид

$$-(x-4)-(x-6)=2,$$

откуда $x=4$.

Значит, в рассматриваемой области уравнение корней не имеет.

В области (II): $4 \le x \le 6$ исходное уравнение принимает вид

$$(x-4)-(x-6)=2$$

и, следовательно, при всех x из рассматриваемой области удовлетворяется тождественно.

В области (III): $6 < x < +\infty$ исходное уравнение примет вид

$$(x-4)+(x-6)=2,$$

откуда $x=6$. Следовательно, в этой области уравнение (16) корней не имеет.

Ответ. $4 \le x \le 6$.

Замечание 1. Используя геометрический смысл абсолютной величины как расстояния, решение уравнения $|x-4|+|x-6|=2$ можно интерпретировать как нахождение множества точек x числовой оси, сумма расстояний которых до точек $x=4$ и $x=6$ равна 2. Очевидно, искомым множеством и является множество $4 \le x \le 6$.

Замечание 2. Решение уравнения (16) можно провести иначе: уравнение

$$|x-4|+|x-6|=2$$

эквивалентно совокупности трех смешанных систем:

$$\text{I. } \begin{cases} -\infty < x < 4, \\ -(x-4)-(x-6)=2; \end{cases} \qquad \text{II. } \begin{cases} 4 \le x \le 6, \\ (x-4)-(x-6)=2; \end{cases}$$

$$\text{III. } \begin{cases} 6 < x < +\infty, \\ (x-4)+(x-6)=2. \end{cases}$$

Решив каждую из них и объединив найденные решения, получим ответ.

УПРАЖНЕНИЯ

Выяснить, эквивалентны или нет следующие уравнения (в области действительных чисел); установить также, при каких условиях уравнения будут эквивалентны.

1. $f(x)=0,\ \sqrt[3]{f(x)}=0.$ Ответ. Эквивалентны.

2. $f(x)\cdot\varphi(x)=a,\ f(x)=\dfrac{a}{\varphi(x)}.$ Ответ. Эквивалентны, если $a \ne 0$; если же $a=0$, то уравнения будут эквивалентны в случае, когда уравнение $\varphi(x)=0$ не имеет корней.

3. $f(x)=0,\ \arcsin f(x)=0.$ Ответ. Эквивалентны.

4. $f(x)=0,\ \operatorname{arctg} f(x)=0.$ Ответ. Эквивалентны.

5. $x=0,\ \operatorname{tg}(\sin x)=0.$ Ответ. Не эквивалентны.

6. $f(x)=0,\ \sin\operatorname{tg} f(x)=0.$

Ответ. Эквивалентны, если уравнение $f(x)=s\pi+\ \operatorname{arctg} k\pi$ (k и s — целые числа) имеет корни лишь при $k=s=0$.

7. $f(x)=\varphi(x),\ \operatorname{arctg} f(x)=\operatorname{arctg}\varphi(x).$ Ответ. Эквивалентны.

8. Доказать, что уравнение $f_1(x)=f_2(x)$ есть следствие уравнения

$$\frac{f_1(x)}{\varphi(x)}=\frac{f_2(x)}{\varphi(x)}.$$

9. Доказать, что уравнение

$$f_1^2(x)-f_2^2(x)=[f_1(x)-f_2(x)]\cdot[f_1(x)+f_2(x)]=0 \qquad \text{(I)}$$

эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$f_1(x)=f_2(x);\quad f_1(x)=-f_2(x), \qquad \text{(II)}$$

т. е. корни уравнения (I) являются корнями либо первого, либо второго уравнений (II) и, наоборот, все корни уравнений (II) являются корнями уравнения (I).

10. Доказать, что уравнение

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = 0, \ x \in X,$$

эквивалентно на множестве X совокупности двух уравнений:

1) $f_1(x) = 0, \ x \in X$; 2) $f_2(x) = 0, \ x \in X$.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Линейное уравнение и его исследование

Линейным уравнением называют уравнение вида

$$ax = b, \tag{1}$$

где a и b — некоторые заданные числа, а x — неизвестная величина.

При исследовании этого уравнения рассмотрим три случая.

1^0. Если $a \neq 0$, то уравнение (1) имеет и притом единственный корень

$$x = \frac{b}{a}. \tag{2}$$

2^0. Если $a = 0$, а $b \neq 0$, то уравнение (1) корней не имеет.

3^0. Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение (1) имеет бесчисленное множество корней.

Рассмотренные случаи при действительных a и b допускают простую геометрическую интерпретацию.

Уравнение

$$y = ax - b \tag{3}$$

определяет прямую с угловым коэффициентом, равным a. Следовательно, решение уравнения (1) геометрически можно трактовать как отыскание абсцисс точек прямой (3), имеющих нулевые ординаты.

Случай 1^0 означает, что прямая (3) пересекает ось Ox в единственной точке $\left(\frac{b}{a}, 0\right)$.

Случай 2^0 означает, что прямая (3) параллельна оси Ox, т. е. не имеет с ней точек пересечения.

Случай 3^0 означает, что прямая (3) сливается с осью Ox, т. е. имеет с ней бесчисленное множество точек пересечения.

Рассмотрим некоторые уравнения, сводящиеся к линейному.

Уравнение

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \tag{4}$$

сводится к линейному уравнению (1). В самом деле, уравнение (4) эквивалентно следующему:

$$(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1. \tag{5}$$

Уравнение вида

$$\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (a_1b_2 \neq a_2b_1,\ a_2 \neq 0,\ c_2 \neq 0) \tag{6}$$

будем называть ***дробно-линейным***. Областью определения этого уравнения служит множество значений

$$x \neq -\frac{b_2}{a_2}. \tag{7}$$

Дробно-линейное уравнение (6) сводится к линейному

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x = b_2c_1 - b_1c_2, \tag{8}$$

областью определения которого является множество всех действительных чисел x.

Область определения уравнения (8) шире, чем область определения уравнения (6). Уравнение (8) является следствием уравнения (6). При переходе от уравнения (6) к уравнению (8) возможно получение «постороннего корня» для уравнения (6), а именно $x = -\frac{b_2}{a_2}$. Поэтому проверка в этом случае является логически необходимой.

Рассмотрим уравнение вида

$$|a_1x + b_1| = |a_2x + b_2|. \tag{9}$$

Оно эквивалентно каждому из следующих:

$$|a_1x + b_1|^2 = |a_2x + b_2|^2,$$

$$(a_1x + b_1)^2 = (a_2x + b_2)^2,$$

$$(a_1x + b_1)^2 - (a_2x + b_2)^2 = 0,$$

$$[(a_1x + b_1) - (a_2x + b_2)] \cdot [(a_1x + b_1) + (a_2x + b_2)] = 0.$$

Последнее распадается на два линейных уравнения, в совокупности эквивалентных рассматриваемому:

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2) = 0; \quad (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2) = 0. \tag{10}$$

Пример 1. *Исследовать уравнение*

$$\frac{a + 2x}{1 + ax} = 1. \tag{11}$$

Решение. Исследовать уравнение — это значит указать те значения числового параметра a, при которых данное уравнение имеет корни, и найти эти корни, а также указать значения параметра a, при которых уравнение корней не имеет.

Рассматриваемое уравнение сводится к линейному.

Действительно, всюду в области определения, т. е. при $1+ax \neq 0$, исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$\frac{a+2x}{1+ax}-1=0,$$

или

$$\frac{a+2x-1-ax}{1+ax}=0,$$

или

$$(2-a)x=1-a. \qquad (12)$$

Полученное уравнение (12) — линейное.

Линейное уравнение с одним неизвестным либо имеет единственный корень, либо совсем не имеет корней, либо имеет бесконечное множество корней.

1. Если коэффициент при неизвестном в линейном уравнении отличен от нуля, то уравнение имеет корень и притом единственный.

Значит, если $a \neq 2,$ то уравнение (12) имеет единственный корень

$$x=\frac{1-a}{2-a}.$$

При этом для исходного уравнения (11) должно выполняться условие

$$1+ax \neq 0,$$

т. е.

$$1+a\cdot\frac{1-a}{2-a} \neq 0, \text{ откуда } a \neq \pm\sqrt{2}.$$

2. Если коэффициент при неизвестном в линейном уравнении равен нулю, а свободный член не равен нулю, то уравнение не имеет корней.

Этот случай для уравнения (12) имеет место при $a=2$. Следовательно, исходное уравнение (11) при $a=2$ и $a=\pm\sqrt{2}$ корней не имеет.

3. Если коэффициент при неизвестном и свободный член в линейном уравнении равны нулю, то уравнение имеет бесконечное множество корней. Всякое число является корнем такого уравнения.

Последний случай для уравнения (12) не имеет места ни при каких a.

Ответ. При $a \neq 2$ и $a \neq \pm\sqrt{2}$ уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1-a}{2-a}$. При $a=2$ и $a=\pm\sqrt{2}$ уравнение корней не имеет.

<u>Геометрическая интерпретация исследования уравнения (11) на координатно-параметрической плоскости</u>. На рис. 93 пунктиром изобра-

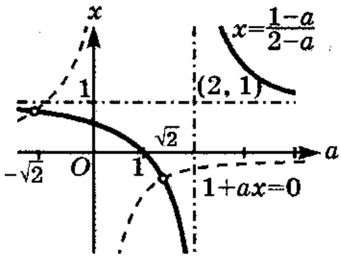


Рис. 93

жен график функции $x=-\frac{1}{a}$, а сплошной линией — график функции

$$x=\frac{1-a}{2-a}=1+\frac{1}{a-2}.$$

Из графиков видно, что при $a \neq 2$ и $a \neq \pm\sqrt{2}$ точки, лежащие на гиперболе

$$x=\frac{1-a}{2-a},$$

имеют координаты x, удовлетворяющие уравнению (11). Значение $a = 2$ не входит в область определения функции $x=\frac{1-a}{2-a}$. Значениям $a=-\sqrt{2}$ и $a=\sqrt{2}$ соответствуют точки гиперболы $x=\frac{1-a}{2-a}$, которые расположены также и на линии $1 + ax = 0$. Так как в области определения уравнения (11) $1+ax \neq 0$, то ординаты этих точек не удовлетворяют исходному уравнению.

2. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины

Как уже указывалось в п. 6 § 1, при решении уравнений, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины, особенно удобен метод «частичных областей», одномерным аналогом которого является известный метод интервалов.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$x+2|x|-3=0. \tag{13}$$

Решение. По определению абсолютной величины действительного числа x имеем

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Будем искать корни уравнения (13) в каждой из двух областей: в области $x \geq 0$ (I) и в области $x < 0$ (II).

I. Если $x \geq 0$, то уравнение (13) примет вид

$$x + 2x - 3 = 0,$$

или

$$3x - 3 = 0$$

и, следовательно, имеет корень $x = 1$, принадлежащей данной области.

II. Если $x < 0$, то уравнение (13) примет вид

$$x + 2(-x) - 3 = 0,$$

или

$$-x - 3 = 0$$

и, следовательно, имеет корень $x = -3$, принадлежащий рассматриваемой области.

Ответ. $x = 1$, $x = -3$.

Замечание 1. Решение уравнения (13) можно провести более кратко. Это уравнение эквивалентно совокупности двух смешанных систем:

$$\text{I. } \begin{cases} x \geq 0, \\ x + 2x - 3 = 0; \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} x < 0, \\ x + 2(-x) - 3 = 0, \end{cases}$$

которые имеют соответственно решения $x = 1$ и $x = -3$.

Замечание 2. Решение уравнения

$$2|x| = 3 - x$$

можно интерпретировать геометрически как отыскание абсцисс точек пересечения графика функции $y = 2|x|$ с графиком функции $y = 3 - x$ (рис. 94). Искомые точки пересечения графиков имеют координаты $(-3,6)$ и $(1,2)$.

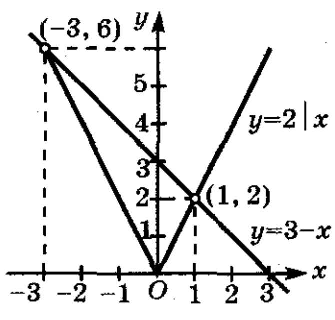


Рис. 94

Пример 3. *Решить уравнение*

$$|1 - x| + 2 = |3 - x|. \tag{14}$$

Решение. Для решения данного уравнения применим метод «частичных областей». Разобьем числовую ось Ox точками $x = 1$ и $x = 3$ (*при этих значениях x выражения, стоящие под знаком абсолютной величины,* обращаются в нуль) на три области:

$$-\infty < x \leq 1,\ 1 < x \leq 3,\ 3 < x < +\infty$$

и рассмотрим уравнение (14) в каждой из этих областей.

В первой области $-\infty < x \leq 1$ это уравнение обращается в тождество

$$(1 - x) + 2 = 3 - x.$$

Следовательно, все значения x из рассматриваемой области удовлетворяют уравнению (14).

Во второй области $1 < x \leq 3$ уравнение (14) принимает вид

$$(x - 1) + 2 = 3 - x$$

и в этой области корней не имеет.

В третьей области $3 < x < +\infty$ уравнение (14) также не имеет корней.

Ответ. $x \leq 1$.

3. О решении неопределенного уравнения первой степени в целых числах

Неопределенным уравнением первой степени с двумя неизвестными называют уравнение вида

$$ax + by = c, \tag{15}$$

где a, b и c — целые числа. Под решением неопределенного уравнения понимают его решение в целых числах, т. е. решение уравнения (15) при дополнительном условии: x и y — целые числа. Числа a, b и c будем предполагать взаимно простыми.

Теорема. *При взаимно простых a, b и c уравнение* (15) *имеет целые решения в том и только в том случае, если a и b взаимно просты.*

Если a и b взаимно просты, то существует бесконечное множество решений уравнения (15).

Доказательство. Если a и b не взаимно просты, то они имеют общий нетривиальный делитель:

$$a = a_1 d,\ b = b_1 d, \text{ где } d > 1.$$

В этом случае при любых целых x и y левая часть уравнения (15) делится на d, но правая, т. е. число c, не делится на d (так как a, b и c взаимно просты).

Предположим, что a и b взаимно просты. Рассмотрим общее решение уравнения (15):

$$x = \frac{c - by}{a}. \tag{16}$$

Полагая последовательно

$$y = 0, 1, 2, \ldots, a - 1,$$

получим соответствующие значения $c - by$. Эти значения дают при делении на a различные остатки. В самом деле, если предположить, что при $0 \le y_1 \le a - 1$, $0 \le y_2 \le a - 1$ и $y_1 \ne y_2$ числа $c - by_1$ и $c - by_2$ дают при делении на a равные остатки, то их разность должна делиться на a:

$$(c - by_1) - (c - by_2) = b(y_2 - y_1) = da,$$

что невозможно, так как a и b взаимно просты и $|y_2 - y_1| < a$. Следовательно, среди a различных неотрицательных остатков от деления $c - by$ на a содержится каждое из чисел: 0, 1, 2, ..., $a - 1$. Но если остаток при $y = y_1$ равен нулю, то левая часть равенства (16) есть целое число x_1, и пара чисел x_1, y_1 есть целое решение уравнения (15). Покажем, что в этом случае уравнение (15) имеет бесконечное множество целых решений.

В самом деле, пусть $ax + by = c$ (где x и y — целые числа). Имеем

$$ax_1 + by_1 = c,$$

откуда

$$a(x-x_1)=-b(y-y_1). \qquad (17)$$

Так как b не делится на a, то $y-y_1$ делится на a: $y=y_1+at$, где t — целое число. Из равенства (17) получим $x=x_1-bt$. Проверкой убеждаемся, что

$$x=x_1-bt, \quad y=y_1+at \qquad (18)$$

при любом целом t есть решение уравнения (15), а поэтому формулы (18) дают общее решение уравнения (15) в целых числах.

Для решения неопределенного уравнения достаточно с помощью не более чем a испытаний, полагая последовательно $y = 0, 1, 2, ..., a-1$, найти одно целое решение x_1, y_1 и составить формулы общего решения (18).

Пример 4. *Решить в целых числах уравнение* $8x+13y=159$.

Решение. Имеем

$$x=\frac{159-13y}{8}=19-y+\frac{7-5y}{8}.$$

Полагая последовательно $y = 0, 1, 2, ..., 7$, при $y = 3$ получим целое число $x = 15$. Общее решение есть

$$x=15-13t, \; y=3+8t,$$

где t — произвольное целое число.

4. Решение линейных уравнений при различных дополнительных условиях. Смешанные системы

Часто на допустимые значения неизвестных, входящих в уравнение (или систему), налагаются дополнительные условия. Эти дополнительные условия могут быть самыми различными. Например, при решении задач с помощью уравнений эти условия устанавливаются в соответствии со смыслом задачи.

Чтобы решить уравнение (или систему уравнений) при дополнительных условиях, достаточно решить данное уравнение (систему) без этих условий и из полученного множества всех решений выбрать решения, удовлетворяющие дополнительным условиям.

Смешанной системой мы называли систему, состоящую из уравнений и неравенств. Эти неравенства можно рассматривать как дополнительные условия, при которых надо решать уравнения, входящие в состав смешанной системы.

Пример 5. *На координатной плоскости xOy изобразить множество всех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют смешанной системе*

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ x+y+1\ge 0. \end{cases}$$

Решение. Данное множество изображается точками прямой $y = x + 1$, лежащими в полуплоскости $x + y + 1 \geq 0$, и представляет собой луч (рис. 95).

Пример 6. *Установить, при каких действительных значениях параметра а решения уравнения*

$$\frac{a}{x-2} = 1 \tag{19}$$

, удовлетворяют условию

$$x \leq 3. \tag{20}$$

Решение. Система (19), (20), состоящая из уравнения и неравенства, является смешанной. Исследовать смешанную систему — это значит указать те значения числового параметра a, при которых данная система имеет решения, и найти эти решения, а также указать значения параметра a, при которых система решений не имеет.

Уравнение (19) сводится к линейному. Действительно, всюду в области его определения, т. е. при

$$x \neq 2, \tag{21}$$

уравнение (19) эквивалентно следующему:

$$\frac{a}{x-2} - 1 = 0,$$

или

$$\frac{a - x + 2}{x - 2} = 0,$$

откуда

$$x = a + 2. \tag{22}$$

Найденное решение (22) должно удовлетворять условиям (20) и (21), т. е. должны выполняться неравенства $2 \neq a + 2 \leq 3$, откуда получаем, что

$$a \neq 0, \ \ a \leq 1. \tag{23}$$

Следовательно, смешанная система (19), (20) имеет решение только при $a \neq 0$ и $a \leq 1$. При всех остальных значениях a эта система решений не имеет.

Ответ. $a \neq 0$, $a \leq 1$.

Геометрическая интерпретация исследования смешанной системы (19), (20) на координатно-параметрической плоскости aOx.

На рис. 96 пунктиром изображена прямая $x - 2 = 0$, а сплошной линией — график функции $x = a + 2$. Из графиков видно, что при $a \neq 0$ и $a \leq 1$ (это множество значений a на числовой оси Oa заштриховано) точки луча $x = a + 2$, расположенные в полуплоскости $x \leq 3$ (эта часть плоскости на рисунке заштрихована), имеют ординаты x, удовлетворяющие и уравнению (19), и неравенству (20).

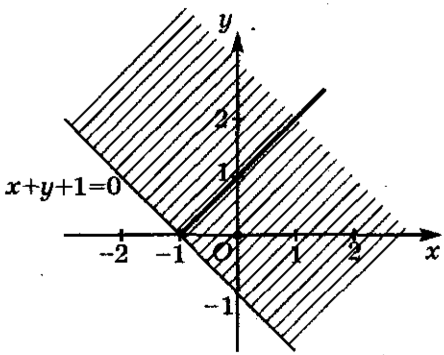


Рис. 95

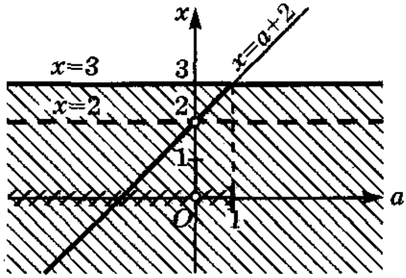


Рис. 96

Значению $a = 0$ соответствует точка прямой $x = a + 2$, которая лежит также и на прямой $x - 2 = 0$. Так как в области определения уравнения (19) $x - 2 \neq 0$, то ордината этой точки $x = 2$ не удовлетворяет исходному уравнению.

Пример 7. *Найти все значения параметра a, для которых числа x положительны и удовлетворяют уравнению*

$$\left|\frac{(a-1)x-(2a-1)}{x-1}\right| + \left|x - |1-a| + \frac{1}{2}\right| = 0.$$

Решение. Область определения уравнения и множество допустимых значений параметра a находятся из условия

$$x - 1 \neq 0. \qquad (24)$$

В силу неотрицательности модуля исходное уравнение выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{(a-1)x-(2a-1)}{x-1} = 0 \qquad (25)$$

и

$$x - |1-a| + \frac{1}{2} = 0. \qquad (26)$$

Значения параметра a, при которых числа x положительны и удовлетворяют уравнению (25), находятся из неравенства

$$x = \frac{2a-1}{a-1} > 0. \qquad (27)$$

Решив это дробно-линейное неравенство, получим, что ему удовлетворяет множество значений a из промежутков

$$a < \frac{1}{2} \text{ и } a > 1. \qquad (28)$$

В силу условия (24) имеем

$$x-1=\frac{2a-1}{a-1}-1\neq 0,$$

т. е.

$$a\neq 0. \tag{29}$$

Значения параметра a, при которых положительные числа x удовлетворяют уравнению (26), находятся из неравенств

$$1\neq x=|1-a|-\frac{1}{2}>0. \tag{30}$$

Решая эти неравенства, получим

$$a<\frac{1}{2},\ a>\frac{3}{2},\ a\neq-\frac{1}{2},\ a\neq\frac{5}{2}. \tag{31}$$

Кроме того, значение параметра a должно удовлетворять уравнению

$$x=\frac{2a-1}{a-1}=|1-a|-\frac{1}{2}. \tag{32}$$

Окончательно, учитывая условия (28), (29), (30) и (32), получим ответ.

Ответ. $a=-1,\ a=\dfrac{9+\sqrt{41}}{4}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $|x-5|=x$. Ответ. $x=\dfrac{5}{2}$.

2. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$. Ответ. $x=-2$.

3. $2|x+6|-|x|+|x-6|=18$. Ответ. $x=-12,\ 0\leq x\leq 6$.

4. $\big||x-1|+2|-1|+1\big|=2$. Ответ. $x=1$.

5. $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=1$. Ответ. $2\leq x\leq 3$.

6. Найти все действительные значения параметра a, для которых числа x и y положительны и удовлетворяют уравнению

$$\left|\frac{(3-x)a}{x-2}+1\right|+\left|2y-|2a-1|+\frac{1}{2}\right|=0.$$

Ответ. $a<\dfrac{1}{4},\ a\neq 0,\ a>1$.

Воспользовавшись геометрическим представлением решения на плоскости aOx, записать решения следующих уравнений, содержащих параметр a:

7. $|x| = 1 - |a|$.

Ответ. Если $a < -1$, то решений нет; если $a = -1$, то $x = 0$; если $-1 < a < 0$, то $x_1 = a + 1$, $x_2 = -a - 1$; если $0 \le a < 1$, то $x_1 = 1 - a$, $x_2 = a - 1$; если $a = 1$, то $x = 0$; если $a > 1$, то решений нет.

8. $||x| - |a|| = 1$.

Ответ. Если $-\infty < a < -1$, то $x_1 = -a + 1$, $x_2 = -a - 1$, $x_3 = a + 1$, $x_4 =$ $= a - 1$; если $a = -1$, то $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$; если $-1 < a < 0$, то $x_1 =$ $= -a + 1$, $x_2 = a - 1$; если $0 \le a < 1$, то $x_1 = -a - 1$, $x_2 = a + 1$; если $a = 1$, то $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$; если $1 < a < +\infty$, то $x_1 = -a + 1$, $x_2 = -a - 1$, $x_3 = a + 1$, $x_4 = a - 1$.

9. Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что:

а) $36k_1 - 25k_2 = 1$; б) $36k_1 - 49k_2 = 2$.

Ответ. а) $k_1 = 16$, $k_2 = 23$; б) $k_1 = 30$, $k_2 = 22$.

§ 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Основные определения

Два или несколько уравнений образуют ***систему уравнений***, если одноименные неизвестные в них обозначают одну и ту же величину. Число неизвестных может, вообще говоря, не быть равным числу уравнений.

Рассмотрим, например, систему из m уравнений с n неизвестными. ***Решением*** такой ***системы*** называется упорядоченная совокупность n чисел или алгебраических выражений, которые, будучи подставлены во все m уравнений системы вместо неизвестных, превращают каждое уравнение системы в числовое равенство. *Решить систему — значит найти все ее решения.*

Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Система называется ***определенной***, если она имеет конечное число решений, и ***неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

Две системы называются ***эквивалентными*** (***равносильными***), если все решения любой из них являются решениями и другой.

2. Эквивалентные преобразования систем

1. Любое из уравнений системы можно заменить эквивалентным ему;

2. Любое из уравнений можно заменить суммой или разностью данных уравнений, оставив другие без изменения;

3. Из одного уравнения системы можно выразить какое-либо неизвестное через другие и подставить это выражение в остальные уравнения. Полученная система уравнений будет эквивалентна исходной.

На этих преобразованиях основаны следующие хорошо известные из школьного курса алгебры способы решения систем уравнений: 1) способ алгебраического сложения; 2) способ подстановки.

3. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{1}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — произвольные действительные числа*.

Исследуем систему (1), т. е. ответим на вопросы: когда эта система будет несовместной, определенной или неопределенной, а также найдем ее решения в случае, когда система является совместной.

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Число Δ называется ***главным определителем*** системы (1), а числа Δ_1 и Δ_2 — ***вспомогательными определителями.*** Тогда исходная система (1) примет вид

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_1, \\ \Delta \cdot y = \Delta_2. \end{cases} \tag{2}$$

Действительно, если умножить первое уравнение системы (1) на b_2, а второе на $-b_1$ и сложить, то получим первое уравнение системы (2). Анало-

* Заметим, что все дальнейшие исследования (кроме геометрической интерпретации) остаются в силе и для системы уравнений с комплексными коэффициентами.

гично, если умножить второе уравнение системы (1) на a_1, а первое на $-a_2$ и сложить, то получим второе уравнение системы (2).

Система (2) является следствием системы (1). Возможны следующие случаи:

1) $\Delta \neq 0$. Тогда система (2) имеет единственное решение $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ (***формулы Крамера***), которое (как легко убедиться проверкой) является решением и исходной системы (1).

2) $\Delta = 0$, но $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$. Система (2) не имеет решений; следовательно, и исходная система (1) также несовместна.

3) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ *и по крайней мере один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля.* Система (1) в этом случае имеет бесконечное множество решений.

В самом деле, пусть, например, $a_1 \neq 0$. Тогда из первого уравнения системы (1) находим

$$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}.$$

Подставляя данное значение во второе уравнение системы, получим

$$a_2 x + b_2 y = \frac{a_2 c_1 - a_2 b_1 y}{a_1} + b_2 y = \frac{a_2 c_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) y}{a_1} = \frac{a_2 c_1}{a_1},$$

так как в рассматриваемом случае $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta = 0$. Из условия $\Delta_2 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$ имеем $\frac{a_2 c_1}{a_1} = c_2$. Следовательно, $a_2 x + b_2 y = c_2$, т. е. всякое решение первого уравнения системы (1) является также решением второго уравнения. Но первое уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}, \ y \text{ — любое число.}$$

Поэтому система (1) является неопределенной.

Если коэффициенты системы — действительные числа и

$$a_1^2 + b_1^2 \neq 0, \ a_2^2 + b_2^2 \neq 0,$$

то каждое из уравнений системы (1) задает прямую. При этом рассмотренные случаи допускают следующую геометрическую интерпретацию:

1) *прямые пересекаются в одной точке*; 2) *прямые параллельны*; 3) *прямые сливаются.*

Воспользовавшись выражениями для Δ, Δ_1, Δ_2, полученный результат исследования системы можно сформулировать иначе:

Система (1) имеет единственное решение, когда коэффициенты при неизвестных не пропорциональны: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. В случае их пропорциональности система либо имеет бесконечное множество решений (если коэффициенты при неизвестных пропорциональны свободным членам $\left.\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\right)$ либо не имеет решений (если коэффициенты при неизвестных не пропорциональны свободным членам: $\left.\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\right)$

Кроме того, остается разобрать случай, когда все коэффициенты при неизвестных равны нулю. Система (1) в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_2. \end{cases}$$

При $c_1 = c_2 = 0$ ей будет удовлетворять любая пара (x, y), т. е. система (1) является неопределенной. Если хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 отлично от нуля, то система несовместна.

Все полученные результаты исследования системы (1) сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если* $\Delta \neq 0$, *то система имеет единственное решение*

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Если $\Delta = 0$ *и хотя бы одно из чисел* Δ_1, Δ_2 *отлично от нуля, то система не имеет решений.*

Если $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, *но не все коэффициенты при неизвестных равны нулю, то система имеет бесконечное множество решений.*

Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ *и все коэффициенты при неизвестных равны нулю, но хотя бы одно из чисел* c_1 *и* c_2 *отлично от нуля, то система не имеет решений.*

Если все коэффициенты системы равны нулю, то система имеет бесконечное множество решений.

Пример 1. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 2|x| - y = 3, \\ x + |y| = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Будем искать решение данной системы в каждой из четырех частичных областей: (I) $x \geq 0,\ y \geq 0$; (II) $x < 0,\ y > 0$; (III) $x \leq 0,\ y \leq 0$; (IV) $x > 0,\ y < 0$.

В области (I): $x \geq 0,\ y \geq 0$ исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Найдем главный и вспомогательные определители полученной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Следовательно, по формулам Крамера имеем

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1.$$

Пара чисел $x = 2,\ y = 1$ принадлежит рассматриваемой области и является решением исходной системы уравнений.

В области (II): $x < 0,\ y > 0$ исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} -2x - y = 3, \\ \quad x + y = 3. \end{cases}$$

Для полученной системы имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9,$$

откуда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -6,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 9.$$

Значения $x = -6,\ y = 9$ принадлежит рассматриваемой области и, следовательно, являются решением исходной системы уравнений.

В области (III): $x \leq 0,\ y \leq 0$ исходная система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} -2x - y = 3, \\ \quad x - y = 3. \end{cases}$$

Найдем ее главный и вспомогательные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -9.$$

Значит, $x = 0,\ y = -3$. Эти значения принадлежат рассматриваемой области и, следовательно, являются решением исходной системы уравнений.

В области (IV): $x>0,\ y<0$ исходная система принимает вид

$$\begin{cases} 2x-y=3, \\ \quad x-y=3 \end{cases}$$

и, следовательно, не имеет решений, принадлежащих этой области.

Графическая интерпретация решения системы дана на рис. 97.

Ответ. (2, 1); (–6, 9); (0, –3).

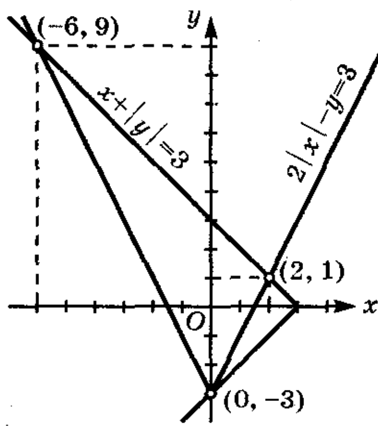


Рис. 97

Пример 2. *Числа a и b таковы, что система*

$$\begin{cases} a^2x-ay=1-a, \\ bx+(3-2b)y=3+a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x=1$, $y=1$. *Найти числа a и b.*

Решение. Так как по условию система имеет единственное решение, то ее главный определитель должен быть отличен от нуля:

$$\Delta(a,\ b)=\begin{vmatrix} a^2 & -a \\ b & 3-2b \end{vmatrix}\neq 0. \tag{3}$$

Далее, так как пара чисел $x=1$ и $y=1$ является решением исходной системы, то, следовательно, она удовлетворяет этой системе:

$$a^2-a=1-a, \tag{4}$$

$$b+(3-2b)=3+a. \tag{5}$$

Искомые числа a и b должны удовлетворять всем трем условиям (3)– (5) одновременно.

Условиям (4) и (5) удовлетворяют две пары чисел:

$$a_1 = 1,\ b_1 = -1;\ a_2 = -1,\ b_2 = 1.$$

Проверим, для какой из этих пар выполнено условие (3):

$$\Delta(a_1, b_1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0;\ \Delta(a_2, b_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, условию (3), а также и условиям (4), (5) удовлетворяют числа $a = 1$, $b = -1$. Они дают решение поставленной задачи.

Ответ. $a = 1,\ b = -1$.

Пример 3. *Исследовать систему*

$$\begin{cases} ax - by = 0, \\ a^2x - by = ab. \end{cases}$$

Решение. Вычислим $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ a^2 & -b \end{vmatrix} = ab(a-1);\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -b \\ ab & -b \end{vmatrix} = ab^2;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ a^2 & ab \end{vmatrix} = a^2b.$$

Если $\Delta \neq 0$, т. е. $ab(a-1) \neq 0$, что достигается при $a \neq 0$, $a \neq 1$ и $b \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{b}{a-1},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a}{a-1}.$$

Рассмотрим теперь все возможные случаи, когда $\Delta = 0$.

Пусть $a = 0,\ b \neq 0$. Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x - by = 0, \\ 0 \cdot x - by = 0. \end{cases}$$

Ее решения таковы: x — любое число, $y = 0$.

Пусть $b = 0,\ a \neq 0$, т. е. система принимает вид

$$\begin{cases} ax - 0 \cdot y = 0, \\ a^2x - 0 \cdot y = 0. \end{cases}$$

Ее решения таковы: $x = 0$, y — любое число.

Пусть $a = 1,\ b \neq 0$. В этом случае $\Delta_1 \neq 0$ и $\Delta_2 \neq 0$. Следовательно, система решений не имеет.

Остается рассмотреть случай, когда все коэффициенты при неизвестных равны нулю, т. е. когда $a = 0$ и $b = 0$. В этом случае любая пара (x, y) является решением системы.

О т в е т. Если $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = \frac{b}{a-1}$, $y = \frac{a}{a-1}$; если $a = 0$, $b \neq 0$, то все решения системы таковы: x — любое число, $y = 0$; если $a \neq 0$, $b = 0$, то все решения системы таковы: $x = 0$, y — любое число; если $a = 1$, $b \neq 0$, то система не имеет решений; если $a = b = 0$, то решением является любая пара чисел (x, y).

4. Некоторые частные способы решения линейных систем

Наряду с общими способами (использованием формул Крамера, алгебраического сложения и подстановки) существует множество частных способов решения линейных систем. Рассмотрим три таких способа.

1. *Применение специальных линейных комбинаций*. Например, можно выполнить такие преобразования системы: а) сложить и вычесть ее уравнения; б) сложить уравнения и из полученного уравнения вычесть каждое из уравнений исходной системы.

П р и м е р 4. *Решить систему*

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \ldots + x_n = a_1, \\ x_3 + x_4 + \ldots + x_1 = a_2, \\ x_4 + x_5 + \ldots + x_2 = a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = a_n. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Сложив почленно данные уравнения и вычитая из полученного уравнения последовательно каждое из данных уравнений, находим

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1} - a_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n-1} - a_n.$$

Проверкой убеждаемся, что это — решение исходной системы.

2. *Введение новых вспомогательных неизвестных*.

П р и м е р 5. *Решить систему*

$$\begin{cases} \frac{x_1 - a_1}{m_1} = \frac{x_2 - a_2}{m_2} = \frac{x_3 - a_3}{m_3} \quad (m_1 \neq 0, m_2 \neq 0, m_3 \neq 0), & (6) \\ A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = D. & (7) \end{cases}$$

Решение. Введем новое неизвестное t, положив

$$\frac{x_1-a_1}{m_1}=\frac{x_2-a_2}{m_2}=\frac{x_3-a_3}{m_3}=t.$$

Отсюда

$$x_1=a_1+m_1t,\ x_2=a_2+m_2t,\ x_3=a_3+m_3t. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим уравнение

$$at=b, \tag{9}$$

где $a=A_1m_1+A_2m_2+A_3m_3$; $b=D-(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)$. При решении уравнения (9) возможны три случая:

1. $a\neq 0$. В этом случае имеется единственное решение уравнения (9) $t=\dfrac{b}{a}$, а следовательно, и единственное решение исходной системы, определяемое формулами (8).

2. $a=0$, $b\neq 0$. Уравнение (9) и исходная система решений не имеют.

3. $a=0$, $b=0$. В этом случае уравнение (9) и исходная система имеют бесконечное множество решений.

3. <u>*Составление производных пропорций*</u>.

Пример 6. *Решить систему уравнений*

$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{x-y}{a-b},\ ax+by=a-c\ (a\neq\pm b).$$

Решение. Применив известное свойство пропорций к первому уравнению исходной системы, получим эквивалентное ему уравнение

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\ (a\neq 0,\ b\neq 0).$$

Введем вспомогательное неизвестное, положив

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=t.$$

Подставляя $x=at$, $y=bt$ во второе уравнение системы, имеем

$$t(a^2+b^2)=a-c\quad (a^2+b^2\neq 0).$$

Отсюда

$$t=\frac{a-c}{a^2+b^2},$$

а следовательно,

$$x=\frac{a(a-c)}{a^2+b^2},\ y=\frac{b(a-c)}{a^2+b^2}.$$

Рассмотрим теперь более сложные примеры исследования линейных систем.

П р и м е р 7. *Найти, при каких значениях а решение системы*

$$\begin{cases} 2x+\dfrac{1}{a}y=1, \\ ax+y=2 \end{cases} \tag{10}$$

существует и удовлетворяет неравенствам

$$x \ge 0, \ y \ge 0.$$

Р е ш е н и е. Задача заключается в исследовании линейной системы уравнений (10) и нахождении тех значений параметра a, при которых решения этой системы неотрицательны.

Исследовать линейную систему — значит решить вопрос, является ли она несовместной, определенной или неопределенной; в двух последних случаях необходимо найти ее решения.

Найдем определители системы (10):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \dfrac{1}{a} \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{a} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a-2}{a}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 4-a.$$

Так как $\Delta \ne 0$, то при всех a, отличных от нуля, система (10) является определенной и имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{a-2}{a}, \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4-a. \tag{11}$$

Значения a, при которых решение (11) неотрицательно, находятся из системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{a-2}{a} \ge 0, & (12) \\ 4-a \ge 0. & (13) \end{cases}$$

Неравенство (12) этой системы имеет решение

$$a < 0, \ a \ge 2, \tag{14}$$

а неравенство (13) — решение

$$a \le 4. \tag{15}$$

Пересечение множеств (14) и (15) дает решение системы неравенств (12), (13), а следовательно, и решение исходной задачи.

О т в е т. $a < 0, \ 2 \le a \le 4$.

П р и м е р 8. *Найти все действительные значения k, при которых решение системы*

$$\begin{cases} x-2y=k, \\ 3x+y=8 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям

$$x>\frac{1}{k},\ y>0.$$

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=7;\ \Delta_1=\begin{vmatrix} k & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}=k+16;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & k \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=8-3k.$$

По формулам Крамера находим

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{k+16}{7},\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{8-3k}{7}.$$

Дополнительные условия дают

$$\frac{k+16}{7}>\frac{1}{k},\ \frac{8-3k}{7}>0,\ \text{или}\ \frac{k^2+16k-7}{7k}>0,\ 8-3k>0,$$

откуда

$$-8-\sqrt{71}<k<0,\ \sqrt{71}-8<k<\frac{8}{3}.$$

Пример 9. *Найти, при каких действительных значениях параметра a решение системы* $x + ay = 3$, $ax + 4y = 6$ *существует и удовлетворяет неравенствам* $x>1,\ y>0$.

Решение. Система имеет единственное решение, если ее главный определитель отличен от нуля:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix}=4-a^2\neq 0,\ \text{т. е.}\ a\neq\pm 2.$$

Предполагая это условие выполненным, находим

$$x=\frac{6}{2+a},\ y=\frac{3}{2+a}.$$

Из условий

$$\frac{6}{2+a}-1>0,\ \frac{3}{2+a}>0$$

получаем

$$-2<a<4,$$

причем отсюда исключается значение $a = 2$, т. е. окончательно имеем

$$-2<a<2\ \text{и}\ 2<a<4.$$

Если $a = -2$, то система несовместна.

Если $a = 2$, то система сводится к одному уравнению $x + 2y = 3$, откуда $x = 3 - 2y$, и решений, удовлетворяющих поставленным условиям, в этом случае бесконечное множество: y — любое число из промежутка $0 < y < 1$, а $x = 3 - 2y$.

Ответ. $-2 < a < 4$.

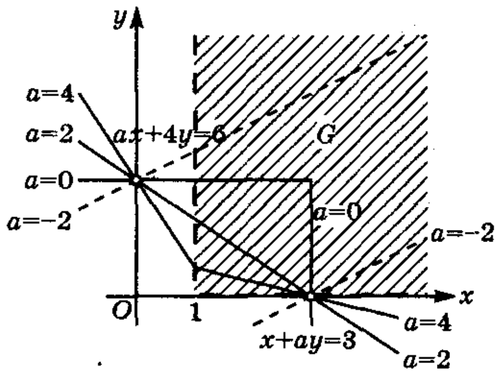


Рис. 98

Геометрическая интерпретация исследования данной системы. Геометрически поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: *найти, при каких значениях параметра а точки* (x, y) *пересечения прямых*

$$x + ay = 3 \tag{16}$$

и

$$ax + 4y = 6 \tag{17}$$

находятся в области G:

$$\{x > 1,\ y > 0\}$$

(на рис. 98 эта область координатной плоскости xOy заштрихована)

Уравнение (16) определяет пучок прямых, проходящих через точку (3, 0) (если $y = 0$, то $x = 3$ для любого a). Уравнение (17) определяет пучок прямых, проходящих через точку $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ (если $x = 0$, то $y = \dfrac{3}{2}$ для любого a). Параметр a характеризует угол наклона каждой из прямых пучков (16) и (17) к оси Ox. (Напомним, что в уравнении прямой $y = kx + b$ коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$ характеризует угол наклона этой прямой к положительному направлению оси Ox.)

При $a = -2$ прямые пучков (16) и (17) параллельны (на рис. 98 отмечены пунктиром); при $-2 < a < 4$ прямые этих пучков пересекаются в области G. В частности, если $a = 0$, то они перпендикулярны. При $a = 2$ прямые пучков совпадают, т. е. имеют бесчисленное множество точек пересечения, часть из которых попадает в область G. Наконец, если $a = 4$, то прямые пучков(16) и (17) пересекаются в граничной точке $(1, \frac{1}{2})$ области G.

Итак, при $-2 < a < 4$ точки пересечения прямых пучков (16) и (17) принадлежат области G.

Пример 10. *Доказать, что если уравнения*

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ и } a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \tag{18}$$

имеют общий корень, то

$$(ac_1 - a_1c)^2 = (ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c). \tag{19}$$

Доказательство. Пусть уравнения (18) имеют общий корень x_0. Тогда система линейных уравнений

$$\begin{cases} au + bv = -c, \\ a_1u + b_1v = -c_1 \end{cases} \tag{20}$$

имеет решение $u = x_0^2$, $v = x_0$. Если определитель этой системы отличен от нуля, то решение единственно и находится по формулам

$$u = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ v = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где $\Delta_1 = bc_1 - b_1c$, $\Delta_2 = a_1c - ac_1$, $\Delta = ab_1 - a_1b$. Отсюда $\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2^2}{\Delta^2}$, т. е. $\Delta_2^2 = \Delta \cdot \Delta_1$, что и требовалось доказать. Если же $\Delta = 0$, то и $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, поскольку система (20) совместна. При этом доказываемое равенство (19) выполняется во всех случаях.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x - 3y = -5, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$

Ответ. $x = 2, y = 3$.

2. $\begin{cases} x + 3y = 8, \\ 2x + 6y = 16. \end{cases}$

Ответ. $x = 8 - 3y$,
y — любое число.

3. $\begin{cases} x + 3y = 8, \\ 2x + 6y = 5. \end{cases}$

Ответ. Система несовместна.

4. $\begin{cases} |x - 2y| = 2, \\ 3x - y = 1. \end{cases}$

Ответ. $x_1 = 0, y_1 = -1$;
$x_2 = \frac{4}{5}, y_2 = \frac{7}{5}$.

5. На координатной плоскости изобразить геометрическое место точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют смешанной системе

$$2x-y+1=0,\ x+y+2>0.$$

6. При каких значениях a и b прямые $3x-y+b=0$ и $ax-2y-10=0$: а) пересекаются в точке $(2, -1)$; б) параллельны между собой; в) сливаются в одну прямую?

Ответ. а) При $a=4$, $b=-7$; б) при $a=6$, $b\neq-5$; в) при $a=6$, $b=-5$.

7. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} ax+y=0, \\ x+ay=0 \end{cases}$$

может иметь ненулевые решения?

Ответ. При $a=\pm1$.

8. При каких значениях параметра α система уравнений

$$\begin{cases} \alpha x-4y=\alpha+1, \\ 2x+(\alpha+6)y=\alpha+3 \end{cases}$$

не имеет решений?

Ответ. При $\alpha=-4$.

9. При каких значениях параметра A система уравнений

$$\begin{cases} 2x+Ay=A+2, \\ (A+1)x+2Ay=2A+4 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

Ответ. При $A=3$.

10. Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 5x+(a-1)y=3b, \\ x-2y=3 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

Ответ. При $a=-9$, $b=5$.

11. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} a^2x+(2-a)y=4+a^3, \\ ax+(2a-1)y=a^5-2 \end{cases}$$

не имеет решений?

Ответ. При $a=1$.

12. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} a^2x-by=a^2-b, \\ bx-b^2y=2+4b \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

Ответ. При $a_1 = 1, b_1 = -1; a_2 = 1, b_2 = -2; a_3 = -1, b_3 = -1; a_4 = -1, b_4 = -2$.

13. Числа a, b и c таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений, причем $x = 1, y = 3$ — одно из этих решений. Найти числа a, b и c.

Ответ. $a_1 = 0, b_1 = 0, c_1 = \frac{9}{4}; a_2 = 2, b_2 = -1; c_2 = 1$.

14. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} ax + y = b, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесконечное множество решений?

Ответ. а) При $a \neq -1$ единственное решение $x = \frac{b+2}{a+1}$, $y = \frac{b-2a}{a+1}$; б) при $a = -1, b \neq -2$ система не имеет решений; в) при $a = -1, b = -2$ бесконечное множество решений: $x = t$, $y = t - 2$, где t — любое число.

Исследовать системы уравнений:

15. $\begin{cases} (a+3)x - 2y = 5, \\ (a+1)x + y = 7. \end{cases}$

Ответ. Если $a \neq -\frac{5}{3}$, то система имеет единственное решение; если $a = -\frac{5}{3}$, то решений нет.

16. $\begin{cases} (a-5)x - 2y = a - 7, \\ (a+1)x + ay = 3a. \end{cases}$

Ответ. Если $a \neq 1$ и $a \neq 2$, то система имеет единственное решение; если $a = 1$, то бесконечное множество решений; если $a = 2$, то решений нет.

17. $\begin{cases} (a-4)x + 2y = 4, \\ (a-4)^3 x + 4ay = 16. \end{cases}$

Ответ. Если $a \neq 2, a \neq 4, a \neq 8$, то система имеет единственное решение $x = -\frac{8}{(a-4)(a-8)}$, $y = \frac{2(a-6)}{a-8}$; если $a = 2$, то x — любое число, $y = x + 2$; если $a = 4$ и $a = 8$, то решений нет.

18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x - y = k,\\ 6x - ky = 4\end{cases}$$

при дополнительных условиях $x > 0,\ y < 0.$

Ответ. При $k = 2$ решением системы является множество значений (x, y), удовлетворяющих условиям $3x - y = 2,\ 0 < x < \frac{2}{3}$.

Найти значения m, при которых имеют решения смешанные системы:

19. $\begin{cases}2x - 5y = 10,\\ 3x - 2y = m,\\ x > 0,\ \ y > 0.\end{cases}$ Ответ. $m > 15.$

20. $\begin{cases}3x + my = 3,\\ 2x - 4y = 1,\\ x < 0,\ \ y < 0.\end{cases}$ Ответ. $-12 < m < -6.$

21. Решить в области действительных чисел систему уравнений

$$\begin{cases}|x + y| = x - y + a,\\ |x - y| = x + y + b.\end{cases}$$

Ответ. Если $a = -b$, то $x \geq \frac{|a|}{2},\ y = \frac{a}{2}$; если $a \geq |b|$, то $x = -\frac{b}{2},\ y = \frac{a}{2}$; если $b \geq |a|$, то $x = -\frac{a}{2}$; $y = -\frac{b}{2}$, если $a = b \geq 0$, то $x = -\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$.

22. Решить систему уравнений

$\begin{cases}7x + 3y = 2,\\ x - 2y = -3,\\ 4x + 9y = 11.\end{cases}$ Ответ. $x = -\frac{5}{17},\ y = \frac{23}{17}.$

Указание. Найти решение системы первых двух уравнений и проверить, что оно удовлетворяет третьему уравнению исходной системы.

Решить системы уравнений:

23. $\begin{cases} ax+by+cz+dt=p, \\ -bx+ay+dz-ct=q, \\ -cx-dy+az+bt=r, \\ -dx+cy-bz+at=s, \end{cases}$

где a, b, c, d удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$.

Ответ.

$$x=\frac{ap-bq-cr-ds}{a^2+b^2+c^2+d^2},\quad y=\frac{bp+aq-dr+cs}{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

$$z=\frac{cp+dq+ar-bs}{a^2+b^2+c^2+d^2},\quad t=\frac{dp-cq-br-as}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

24. $\begin{cases} \alpha x_1+\alpha x_2+\ldots+\alpha x_{n-1}+\beta x_n=a_n, \\ \alpha x_1+\alpha x_2+\ldots+\beta x_{n-1}+\alpha x_n=a_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta x_1+\alpha x_2+\ldots+\alpha x_{n-1}+\alpha x_n=a_1, \end{cases}$

где $\alpha \neq \beta,\ (n-1)\alpha+\beta \neq 0$.

Ответ.

$$x_1=\frac{\alpha(a_1+a_2+\ldots+a_n)-a_1[(n-1)\alpha+\beta]}{(\alpha-\beta)[(n-1)\alpha+\beta]},$$

$$x_2=\frac{\alpha(a_1+a_2+\ldots+a_n)-a_2[(n-1)\alpha+\beta]}{(\alpha-\beta)[(n-1)\alpha+\beta]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n=\frac{\alpha(a_1+a_2+\ldots+a_n)-a_n[(n-1)\alpha+\beta]}{(\alpha-\beta)[(n-1)\alpha+\beta]}.$$

25. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots+nx_n=a_1, \\ nx_1+x_2+2x_3+3x_4+\ldots+(n-1)x_n=a_2, \\ (n-1)x_1+nx_2+x_3+2x_4+\ldots+(n-2)x_n=a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+\ldots+1\cdot x_n=a_n. \end{cases}$

Ответ. $x_1=\dfrac{A-(a_1-a_2)}{n},\ x_2=\dfrac{A-(a_2-a_3)}{n},\ldots,\ x_n=\dfrac{A-(a_n-a_1)}{n}$,

где $A=\dfrac{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n(n+1)}$.

Исследовать системы уравнений:

26. $\begin{cases} ax + y - z = 1, \\ x + ay - z = 1, \\ -x + y + az = 1. \end{cases}$

Ответ. Если $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, то $x = y = z = \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то система несовместна; если $a = 1$, то система является неопределенной: z — любое число, $x = z$, $y = 1$; если $a = -1$, то система является неопределенной: y — любое число, $x = y$, $z = -1$.

27. $\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2. \end{cases}$

Ответ. Если $a \neq -2$, $a \neq 1$, то $x = -\frac{1+a}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$; если $a = -2$, то система несовместна; если $a = 1$, то система является неопределенной: любые три числа, удовлетворяющие условию $x + y + z = 1$, образуют решения.

§ 4. СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Поскольку не представляется возможным дать общую теорию систем нелинейных алгебраических уравнений, мы ограничимся рассмотрением некоторых приемов решения этих систем в области действительных чисел.

1. Сведение к одному уравнению с одним неизвестным (способ подстановки)

Способ подстановки является наиболее общим приемом решения нелинейных систем.

Пусть, например, дана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если из первого уравнения удается представить одно неизвестное как функцию другого $y = \varphi(x)$, то для нахождения решения данной системы достаточно решить уравнение

$$\Phi[x,\ \varphi(x)] = 0.$$

Рассмотрим систему, состоящую из нелинейного и линейного уравнений:

$$\begin{cases} F(x,\ y) = 0, \\ ax + by = c\ (b \neq 0). \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения y через x и подставляя в первое, получим одно уравнение с одним неизвестным:

$$F\left(x, \frac{c - ax}{b}\right) = \Phi(x) = 0.$$

Способом подстановки решается, например, простейшая система уравнений, состоящая из одного уравнения первой и одного уравнения второй степени. А именно, из уравнения первой степени выражают одно из неизвестных через другое и затем подставляют в уравнение второй степени. В результате получают уравнение с одним неизвестным, вообще говоря, квадратное. Решив это уравнение, определяют затем значения другого неизвестного.

При таком способе решения систем проверка полученных решений с помощью подстановки их в уравнения не является логически необходимой и производится только для контроля правильности вычислений, так как можно доказать, что при исключении одного неизвестного указанным выше способом «посторонних решений» возникнуть не может.

Иногда применяется способ подстановки в более общем виде. А именно, из одного уравнения системы определяют некоторое выражение, зависящее от x и y, а затем подставляют его в другое уравнение системы. При этом иногда удается получить уравнение относительно данного выражения.

2. Системы уравнений второй степени с двумя неизвестными

Рассмотрим те случаи, когда система , состоящая из двух уравнений второй степени общего вида с двумя неизвестными, решается методами элементарной математики. А именно, решение системы сводится к решению систем, состоящих из одного уравнения второй степени и одного уравнения первой степени с двумя неизвестными.

Заметим, что даже простые на вид системы указанного типа, как например,

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ y^2 + x = 6 \end{cases}$$

нельзя решить, используя только сведения, которые известны учащемуся средней школы. Эта система приводит к решению уравнения четвертой степени

$$(5-x^2)^2+x=6,$$

и такое решение приводится уже в курсе высшей алгебры.

Докажем, что *система двух уравнений второй степени относительно x и y:*

$$\begin{cases} A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0, & (1)\\ A_2x^2+2B_2xy+C_2y^2+2D_2x+2E_2y+F_2=0 & (2)\end{cases}$$

решается элементарно (в указанном выше смысле) *в следующих случаях:*

1^0. *Линейная система*

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+D_1=0,\\ B_1x+C_1y+E_1=0\end{cases} \qquad (3)$$

имеет и притом только одно решение $x=x_1$, $y=y_1$; *линейная система*

$$\begin{cases} A_2x+B_2y+D_2=0,\\ B_2x+C_2y+E_2=0\end{cases} \qquad (4)$$

имеет и притом только одно решение $x=x_2$, $y=y_2$, *совпадающее с решением системы* (3).

2^0. *Левая часть одного из уравнений системы* (1), (2) *разлагается на линейные относительно x и y множители*; например*,

$$A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=$$
$$=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2).$$

Этими двумя случаями и исчерпываются все системы вида (1), (2), решение которых можно рассматривать в средней школе, не выходя за рамки существующей программы по математике (доказательство этого утверждения здесь не приводится). Так, например, приведенная выше система

$$x^2+y=5,\ y^2+x=6$$

не удовлетворяет ни одному из условий 1^0 и 2^0, а потому не может быть решена с использованием только сведений, входящих в программу по математике для средней школы.

---

* Это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1\\ B_1 & C_1 & E_1\\ D_1 & E_1 & F_1\end{vmatrix}=0.$$

Этого мы здесь также не доказываем.

Заметим также, что если даже все коэффициенты уравнений системы (1), (2) — действительные числа, то числа a_1, b_1, ... могут быть мнимыми.

1^0. Введем новые неизвестные $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, связанные со старыми соотношениями

$$x = \widetilde{x} + x_1, \quad y = \widetilde{y} + y_1,$$

где x_1 и y_1 — пока произвольные числа. Для того чтобы преобразованное уравнение (1) не содержало новые неизвестные $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ в первой степени, необходимо достаточно, чтобы x_1 и y_1 удовлетворяли системе (3).

Аналогично, для того чтобы при замене

$$x = \widetilde{x} + x_2, \quad y = \widetilde{y} + y_2$$

уравнение (2) не содержало $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ в первой степени, необходимо и достаточно, чтобы x_2 и y_2 удовлетворяли системе (4).

Обозначим через δ_1 и δ_2 определители линейных систем (3) и (4):

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Если $\delta_1 \neq 0$ и $\delta_2 \neq 0$, то системы (3) и (4) являются совместными и определенными, т. е. каждая из них имеет решение и притом единственное:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ C_1 & E_1 \end{vmatrix}}{\delta_1}, \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ E_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\delta_1}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} B_2 & D_2 \\ C_2 & E_2 \end{vmatrix}}{\delta_2}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} D_2 & A_2 \\ E_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\delta_2}.$$

Представляет интерес рассмотрение систем уравнений (1) и (2), для которых

$$x_1 = x_2 = x_0, \quad y_1 = y_2 = y_0. \tag{5}$$

Теорема. *Любая система двух уравнений второй степени, для которой выполняются соотношения* (5), *приводится к системе, содержащей однородное уравнение.*

Доказательство. Пусть для уравнений (1) и (2) выполнены соотношения (5). Произведем замену неизвестных

$$x = \widetilde{x} + x_0, \quad y = \widetilde{y} + y_0.$$

Так как x_0 и y_0 удовлетворяют одновременно системам линейных уравнений (3) и (4), то в преобразованной системе уравнений будут отсутствовать члены, содержащие новые неизвестные $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ в первой степени. А именно, при такой замене неизвестных исходная система уравнений (1), (2) примет вид

$$\begin{cases} A_1\widetilde{x}^2 + 2B_1\widetilde{x}\,\widetilde{y} + C_1\widetilde{y}^2 + \widetilde{F}_1 = 0, & (6) \\ A_2\widetilde{x}^2 + 2B_2\widetilde{x}\,\widetilde{y} + C_2\widetilde{y}^2 + \widetilde{F}_2 = 0, & (7) \end{cases}$$

где

$$\widetilde{F}_1 = D_1x_0 + E_1y_0 + F_1,\ \widetilde{F}_2 = D_2x_0 + E_2y_0 + F_2.$$

Если $\widetilde{F}_1 = 0$ или $\widetilde{F}_2 = 0$, то одно из указанных уравнений полученной системы будет однородным.

Если $\widetilde{F}_1$ и $\widetilde{F}_2$ отличны от нуля, то, умножив уравнение (6) на $\widetilde{F}_2$, а уравнение (7) — на $\widetilde{F}_1$ и вычитая одно из другого, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\overline{A}_1\widetilde{x}^2 + 2\overline{B}_1\widetilde{x}\,\widetilde{y} + \overline{C}_1\widetilde{y}^2 = 0, & (8)\\ A_2\widetilde{x}^2 + 2B_2\widetilde{x}\,\widetilde{y} + C_2\widetilde{y}^2 + \widetilde{F}_2 = 0, & (9)\end{cases}$$

где

$$\overline{A}_1 = A_1\widetilde{F}_2 - A_2\widetilde{F}_1,\ \overline{B}_1 = B_1\widetilde{F}_2 - B_2\widetilde{F}_1,\ \overline{C}_1 = C_1\widetilde{F}_2 - C_2\widetilde{F}_1.$$

Система уравнений (8), (9) эквивалентна системе уравнений (6), (7). Уравнение (8) полученной системы — однородное. Теорема доказана.

Решение системы двух уравнений второй степени, одно из которых однородное, не вызывает трудностей. Действительно, пусть $\overline{C}_1 \neq 0$, тогда $\widetilde{x} \neq 0$. Разделив уравнение (8) на $\widetilde{x}^2$, получим

$$\overline{A}_1 + 2\overline{B}_1\left(\frac{\widetilde{y}}{\widetilde{x}}\right) + \overline{C}_1\left(\frac{\widetilde{y}}{\widetilde{x}}\right)^2 = 0.$$

Подстановка $\dfrac{\widetilde{y}}{\widetilde{x}} = t$ приводит к квадратному уравнению

$$\overline{A}_1 + 2\overline{B}_1\, t + \overline{C}_1\, t^2 = 0,$$

корнями которого являются t_1 и t_2.

Следовательно, система уравнений (8), (9) распадается на две:

$$\begin{cases}\widetilde{y} = t_1\widetilde{x},\\ A_2\widetilde{x}^2 + 2B_2\widetilde{x}\,\widetilde{y} + C_2\widetilde{y}^2 + \widetilde{F}_2 = 0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\widetilde{y} = t_2\widetilde{x},\\ A_2\widetilde{x}^2 + 2B_2\widetilde{x}\,\widetilde{y} + C_2\widetilde{y}^2 + \widetilde{F}_2 = 0.\end{cases}$$

Решение двух последних систем, одно из уравнений которых — линейное, сводится к решению уравнений второй степени с одним неизвестным.

Пример 1. *Решить систему уравнений* (*найти действительные решения*)

$$\begin{cases}24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0, & (10)\\ x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0. & (11)\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Для этой системы $x_1 = x_2 = x_0 = 1$, $y_1 = y_2 = y_0 = -1$. Следовательно, систему (10), (11) можно свести к системе, содержащей однородное уравнение.

Замена неизвестных $x = \tilde{x} + 1$, $y = \tilde{y} - 1$ приводит данную систему к виду

$$\begin{cases} 24\tilde{x}^2 - 25\tilde{x}\,\tilde{y} - 84 = 0, & (12) \\ \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 7 = 0. & (13) \end{cases}$$

Умножив обе части уравнения (13) на 12 и вычитая его из уравнения (12), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 12\tilde{x}^2 - 25\tilde{x}\,\tilde{y} + 12\tilde{y}^2 = 0, & (14) \\ \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 7 = 0, & (15) \end{cases}$$

которая эквивалентна системе (12), (13). Первое уравнение полученной системы является однородным. Замена $\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = t$ $(\tilde{x} \neq 0)$ приводит его к квадратному уравнению $12t^2 - 25t + 12 = 0$, имеющему корни $t_1 = \dfrac{3}{4}$ и $t_2 = \dfrac{4}{3}$.

Следовательно, система уравнений (14), (15) распадается на две:

$$\begin{cases} \tilde{y} = \dfrac{3}{4}\tilde{x}, \\ \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{y} = \dfrac{4}{3}\tilde{x}, \\ \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 7 = 0. \end{cases}$$

Вторая система действительных решений не имеет. Решениями первой являются следующие пары чисел: (4, 3) и (–4, –3). Возвращаясь к первоначальным неизвестным x и y, получаем действительные решения исходной системы уравнений.

О т в е т. (5, 2); (–3, –4).

2^0. Если для одного из уравнений системы (1), (2), например для уравнения (1), $\delta_1 \neq 0$ и с помощью соответствующей замены неизвестных оно приводится к однородному (т. е. $\tilde{F}_1 = 0$), то независимо от вида второго уравнения эту систему можно решить методами элементарной математики.

П р и м е р 2. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0, & (16) \\ 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0. & (17) \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Для первого уравнения $x_1 = 3$, $y_1 = 0$. Выполним замену неизвестных:

$$x = \tilde{x} + 3,\ y = \tilde{y}.$$

Для определения $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\,\tilde{y} + 3\tilde{y}^2 = 0, & (18) \\ 9\tilde{x}^2 - 24\tilde{x}\,\tilde{y} + 16\tilde{y}^2 + 34\tilde{x} + 38\tilde{y} - 29 = 0. & (19) \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы является однородным. Его левую часть можно представить в виде произведения линейных множителей:

$$\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\,\tilde{y} + 3\tilde{y}^2 = (\tilde{x} + \tilde{y})(\tilde{x} + 3\tilde{y}) = 0. \qquad (20)$$

В силу соотношения (20) система уравнений (18), (19) распадается на две:

$$\begin{cases} \tilde{x} + \tilde{y} = 0, \\ 9\tilde{x}^2 - 24\tilde{x}\,\tilde{y} + 16\tilde{y}^2 + 34\tilde{x} + 38\tilde{y} - 29 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \tilde{x} + 3\tilde{y} = 0, \\ 9\tilde{x}^2 - 24\tilde{x}\,\tilde{y} + 16\tilde{y}^2 + 34\tilde{x} + 38\tilde{y} - 29 = 0. \end{cases}$$

Две последние системы эквивалентны следующим:

$$\begin{cases} \tilde{y} = -\tilde{x}, \\ 49\tilde{x}^2 - 4\tilde{x} - 29 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{x} = -3\tilde{y}, \\ 169\tilde{y}^2 - 64\tilde{y} - 29 = 0. \end{cases}$$

Найдя их решения и переходя к неизвестным x и y, получаем все решения данной системы:

$$\left(\frac{149 + 5\sqrt{57}}{49}, -\frac{2 + 5\sqrt{57}}{49}\right); \left(\frac{149 - 5\sqrt{57}}{49}, -\frac{2 - 5\sqrt{57}}{49}\right);$$

$$\left(\frac{411 - 30\sqrt{237}}{169}, \frac{32 + 5\sqrt{237}}{169}\right); \left(\frac{411 + 30\sqrt{237}}{169}, \frac{32 - 5\sqrt{237}}{169}\right).$$

Если $\delta_1 = 0$ (или $\delta_2 = 0$), то система (3) (или (4)) либо совсем не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Во втором случае левая часть уравнения (1) (или (2)) разлагается на множители первой степени.

П р и м е р 3. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases}4x^2-4xy+y^2+2x-y-2=0,\\ 2x^2+xy+y^2+x-y-4=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Левую часть первого уравнения можно разложить на линейные множители:

$$\begin{cases}(2x-y+2)(2x-y-1)=0,\\ 2x^2+xy+y^2+x-y-4=0.\end{cases}$$

Полученная система уравнений распадается на две:

$$\begin{cases}y=2x+2,\\ 2x^2+xy+y^2+x-y-4=0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}y=2x-1,\\ 2x^2+xy+y^2+x-y-4=0.\end{cases}$$

Решая каждую из них, находим решения данной системы:

$$\left(\frac{-9-\sqrt{145}}{16}, \frac{7-\sqrt{145}}{8}\right); \left(\frac{-9+\sqrt{145}}{16}, \frac{7+\sqrt{145}}{8}\right); \ (1,\ 1); \left(-\frac{1}{4}, \quad -\frac{3}{2}\right).$$

З а м е ч а н и е. Коэффициенты A_1, B_1, ... уравнений (1) и (2) могут быть комплексными. Если эти коэффициенты действительные, то рассмотренные в данном пункте случаи допускают простую геометрическую интерпретацию. Для тех, кто знаком с элементами аналитической геометрии, заметим, что случай 1^0 соответствует рассмотрению системы уравнений, определяющих две центральные линии с общим центром.

В случае 2^0 одно из уравнений системы (например, первое) определяет либо точку (при $\delta_1 > 0$), либо пару пересекающихся прямых (при $\delta_1 < 0$). При $\delta_1 = 0$ линия второго порядка, определяемая этим уравнением, либо не имеет центра, либо имеет бесконечно много центров (тогда уравнение системы определяет пару параллельных прямых).

3. Использование свойств симметрических многочленов

Многочлен $P(x, y)$ от данных аргументов x и y называется ***симметрическим***, если он не изменяется при перестановке его аргументов, т. е.

$$P(x,\ y)=P(y,\ x).$$

Например, симметрический многочлен второй степени с двумя аргументами имеет вид

$$P(x,\ y)=A(x^2+y^2)+Bxy+C(x+y)+D,$$

симметрический многочлен третьей степени — вид

$$P_3(x,\ y)=A(x^3+y^3)+B(x^2y+y^2x)+Cxy+$$
$$+D(x^2+y^2)+E(x+y)+F.$$

Многочлены $u=x+y$, $v=xy$ от двух аргументов x и y называют ***основными симметрическими функциями.*** В высшей алгебре доказывается, что *всякий симметрический многочлен может быть представлен в виде многочлена от основных симметрических функций.*

Так, например, в случае симметрического многочлена второй степени с двумя аргументами имеем

$$A(x^2+y^2)+Bxy+C(x+y)+D=$$
$$=A[(x+y)^2-2xy]+Bxy+C(x+y)+D=\ A\,(u^2-2v)+Bv+C\,u+D.$$

Поэтому если в левую часть уравнений системы входят симметрические многочлены относительно x и y, то удобно *в качестве новых переменных взять основные симметрические функции.* Тогда такая система приводится к системам относительно $u=x+y$ и $v=xy$.

При этом используются следующие формулы:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy; \qquad (21)$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y); \qquad (22)$$

$$x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2; \qquad (23)$$

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x+y)^3+5x^2y^2\,(x+y) \qquad (24)$$

и т. д.

Рассмотрим, например, систему двух уравнений, левые части которых представляют собой симметрические многочлены второй степени с двумя аргументами:

$$\begin{cases} A_1(x^2+y^2)+B_1xy+C_1(x+y)+D_1=0,\\ A_2(x^2+y^2)+B_2xy+C_2(x+y)+D_2=0.\end{cases}$$

Выполним замену неизвестных, взяв в качестве новых неизвестных основные симметрические функции $x+y=u$, $xy=v$. Тогда относительно новых неизвестных u и v система примет вид

$$\begin{cases} A_1(u^2-2v)+B_1v+C_1u+D_1=0,\\ A_2(u^2-2v)+B_2v+C_2u+D_2=0.\end{cases}$$

Умножая первое уравнение этой системы на A_2, второе — на A_1 и вычитая одно из другого, получим систему

$$\begin{cases}(A_2B_1 - A_1B_2)v + (C_1A_2 - C_2A_1)u + A_2D_1 - A_1D_2 = 0,\\ A_2(u^2 - 2v) + B_2v + C_2u + D_2 = 0,\end{cases}$$

первое уравнение которой — линейное. Решение этой системы, как известно, сводится методом исключения неизвестных к решению уравнения второй степени. Определив u и v и воспользовавшись подстановкой $x + y = u$, $xy = v$, получим решение исходной системы уравнений.

Пример 4. *Найти действительные решения системы уравнений*

$$\begin{cases}x^2 + xy + y^2 = 4,\\ x + xy + y = 2.\end{cases}$$

Решение. Левые части уравнений представляют собой симметрические многочлены относительно x и y. Возьмем в качестве новых переменных основные симметрические функции $x + y = u$, $xy = v$. Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases}u^2 - v = 4,\\ u + v = 2.\end{cases}$$

Отсюда получаем две системы

$$\begin{cases}u_1 = 2,\\ v_1 = 0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}u_2 = -3,\\ v_2 = 5,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}x + y = 2,\\ xy = 0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}x + y = -3,\\ xy = 5.\end{cases}$$

Первая система имеет два решения $x_1 = 2$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 0$, $y_2 = 2$, которые будут также решениями и исходной системы. Вторая система действительных решений не имеет.

Ответ. $x_1 = 2$, $y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = 2$.

Пример 5. *Найти действительные решения системы уравнений*

$$\begin{cases}x + y = 1,\\ x^5 + y^5 = 31.\end{cases}$$

Решение. Левые части уравнений системы представляют собой симметрические многочлены относительно x и y. Следовательно, вводя новые переменные $x+y=u$, $xy=v$ и воспользовавшись формулой (24), исходную систему можно привести к виду

$$\begin{cases} u=1, \\ u^5-5vu^3+5v^2u=31. \end{cases}$$

Последняя система имеет два решения:

$$u_1=1,\ v_1=3 \text{ и } u_2=1,\ v_2=-2.$$

Второму из них соответствуют два действительных решения исходной системы:

$$x_1=2,\ y_1=-1 \text{ и } x_2=-1,\ y_2=2.$$

Ответ. $x_1=2$, $y_1=-1$; $x_2=-1$, $y_2=2$.

Иногда удается введением новых (вспомогательных) неизвестных свести исходную систему двух уравнений с двумя неизвестными к симметрической системе.

Например, если в системе

$$\begin{cases} x-y=5, \\ x^3-y^3=35 \end{cases}$$

заменить неизвестное y новым неизвестным $z=-y$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+z=5, \\ x^3+z^3=35 \end{cases}$$

левые части которых являются симметрическими многочленами относительно x и z.

Введением вспомогательных неизвестных удается также в некоторых случаях свести уравнение с одним неизвестным к симметрической системе двух уравнений с двумя неизвестными.

Пример 6. *Найти действительные решения уравнения*

$$x^4+(1-x)^4=1.$$

Решение. Полагая $1-x=y$, получим следующую симметрическую систему:

$$\begin{cases} x^4+y^4=1, \\ x+y=1. \end{cases}$$

Взяв в качестве новых переменных основные симметрические функции $u=x+y$, $v=xy$, и используя формулу (23), имеем

$$\begin{cases} u^4-4u^2v+2v^2=1, \\ u=1. \end{cases}$$

Решениями последней системы являются

$$u_1 = 1,\ v_1 = 0 \quad \text{и} \quad u_2 = 1,\ v_2 = 2.$$

Они дают два действительных решения симметрической системы:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 0 \ \text{ и } \ x_2 = 0,\ y_2 = 1.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = 1 \ \text{ и } \ x_2 = 0.$$

Ответ. $x_1 = 1$; $x_2 = 0$.

4. Некоторые специальные приемы решения систем

Система уравнений вида

$$\begin{cases} A\,[F(x,\ y)]^2 + BF(x,\ y) + C = 0\ (A \neq 0), \\ \Phi(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

эквивалентна совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} F(x,\ y) = F_1, \\ \Phi(x,\ y) = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} F(x,\ y) = F_2, \\ \Phi(x,\ y) = 0, \end{cases}$$

где F_1 и F_2 — корни квадратного уравнения

$$AF^2 + BF + C = 0.$$

Аналогично, система уравнений

$$\begin{cases} A \cdot \dfrac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)} + B \cdot \dfrac{Q(x,\ y)}{P(x,\ y)} + C = 0\ (A \neq 0), \\ \Phi(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

подстановкой

$$\frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)} = Z(x,\ y)$$

сводится к двум системам уравнений, эквивалентным в совокупности исходной системе:

$$\begin{cases} P(x,\ y) = Z_1(x,\ y) \cdot Q(x,\ y), \\ \Phi(x,\ y) = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} P(x,\ y) = Z_2(x,\ y) \cdot Q(x,\ y), \\ \Phi(x,\ y) = 0, \end{cases}$$

где $Z_1(x,\ y)$ и $Z_2(x,\ y)$ — корни квадратного уравнения

$$AZ^2 + CZ + B = 0.$$

Иногда систему нелинейных уравнений удается свести к системе линейных.

Например, система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x + y = b \ (b \neq 0) \end{cases}$$

сводится к эквивалентной ей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} (x-y)\,(x+y) = a, \\ x+y = b, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = \dfrac{a}{b} \\ x + y = b, \end{cases}$$

которая исследуется обычным образом.

Если в системе

$$\begin{cases} x^n + y^n = a, \\ x^n - y^n = b \end{cases}$$

сложить и вычесть уравнения, то получим два двучленных уравнения:

$$x^n = \frac{a+b}{2}, \quad y^n = \frac{a-b}{2}.$$

Корни этих уравнений, удовлетворяющие исходной системе, дают ее решения.

При решении некоторых нелинейных систем применяется ***теорема Виета***: *сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение этих корней равно свободному члену.*

В системе

$$\begin{cases} F(x,\ y) + \Phi\ (x,\ y) = A, \\ F(x,\ y) \cdot \Phi\ (x,\ y) = B \end{cases}$$

сделаем подстановку $F(x,\ y) = u$ и $\Phi\ (x,\ y) = v$, Рассмотрим уравнение

$$t^2 - At + B = 0.$$

Пусть t_2 и t_2 — его корни; тогда в силу теоремы Виета пары чисел $u = t_1$, $v = t_2$ и $u = t_2$, $v = t_1$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u + v = A, \\ uv = B. \end{cases}$$

Следовательно, исходная система эквивалентна совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} F(x,\ y) = t_1, \\ \Phi(x,\ y) = t_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} F(x,\ y) = t_2, \\ \Phi(x,\ y) = t_1. \end{cases}$$

П р и м е р 7. *Найти действительные решения системы уравнений*

$$\begin{cases} x^2-y^2+x-y=5; \\ x^3-x^2y-xy^2+y^3=6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} (x^2-y^2)+(x-y)=5, \\ (x^2-y^2)(x-y)=6. \end{cases}$$

Сделаем подстановку

$$x^2-y^2=u, \quad x-y=v.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} u+v=5, \\ uv=6. \end{cases}$$

Применяя теорему Виета, составим уравнение

$$t^2-5t+6=0,$$

корни которого $t_1=2$, $t_2=3$. Следовательно,

$$\begin{cases} u_1=x^2-y^2=2, \\ v_1=x-y=3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} u_2=x^2-y^2=3, \\ v_2=x-y=2, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{v_1}=x+y=\dfrac{2}{3}, \\ x-y=3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \dfrac{u_2}{v_2}=x+y=\dfrac{3}{2}, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Решив две последние линейные системы уравнений, находим решения данной системы.

О т в е т. $x_1=\dfrac{11}{6}$, $y_1=-\dfrac{7}{6}$; $x_2=\dfrac{7}{4}$, $y_2=-\dfrac{1}{4}$.

П р и м е р 8. *Найти действительные решения системы*

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \tag{25}$$

Р е ш е н и е. Воспользовавшись тождеством

$$(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2),$$

получим

$$c^2+(bx-ay)^2=a^2+b^2,$$

или

$$bx - ay = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Итак, для отыскания x и y имеем системы двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ bx - ay = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}. \end{cases}$$

Отсюда при $a^2 + b^2 \ge c^2$ находим

$$x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{bc \mp b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}. \tag{26}$$

Таким образом, если $a^2 + b^2 < c^2$, то рассматриваемая система (25) действительных решений не имеет. Если $a^2 + b^2 \ge c^2$, то все действительные решения системы (25) определяются из формул (26) (перед радикалами одновременно берутся либо оба верхних, либо оба нижних знака), в чем убеждаемся проверкой. Геометрически решение системы можно трактовать как отыскание точек (x, y), в которых прямая $ax + by = c$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 1$. Координаты этих точек определяются соотношением (26).

Мы рассмотрели только некоторые приемы решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Отсутствие общих методов исследования таких систем приводит к необходимости проявления при их решении изобретательности и сообразительности.

Пример 9. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases} \tag{27}$$

Решение. Рассмотрим четыре способа решения системы (27).

I способ. Левые части уравнений системы представляют собой симметрические многочлены относительно x и y. Следовательно, их можно выразить через основные симметрические функции $u = x + y$, $v = xy$. А именно,

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v, \; xy = v.$$

Введем новые неизвестные — основные симметрические функции. Относительно этих неизвестных исходная система уравнений примет вид

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 13, \\ v = 6. \end{cases} \tag{28}$$

Мы получили простейшую систему уравнений, состоящую из одного уравнения первой и одного уравнения второй степени. В общем случае система такого вида решается способом подстановки.

В рассматриваемом случае, подставляя значение $v = 6$ в первое уравнение системы (28), получим $u^2 = 25$. Следовательно, система (28) имеет решения

$$u_1 = 5,\ v_1 = 6;\ u_2 = -5,\ v_2 = 6.$$

Возвращаясь к первоначальным неизвестным, имеем

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6. \end{cases}$$

В силу теоремы Виета x и y являются корнями квадратных уравнений

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \ \text{ или } \ t^2 + 5t + 6 = 0,$$

т. е.

$$x_1 = 3,\ y_1 = 2;\ x_2 = 2,\ y_2 = 3$$

или

$$x_3 = -3,\ y_3 = -2;\ x_4 = -2,\ y_4 = -3.$$

Ответ. (3, 2); (2, 3); (–3, –2); (–2, –3).

<u>II способ</u>. Рассматриваемую систему уравнений можно свести к системе, одно из уравнений которой — однородное. В самом деле, умножая первое уравнение исходной системы на 6, второе — на 13 и вычитая из первого результата второй, получим

$$\begin{cases} 6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0, \\ xy = 6. \end{cases} \tag{29}$$

Подстановка $\frac{y}{x} = t$ $(x \neq 0)$ приводит первое уравнение системы (29) к квадратному уравнению

$$6 - 13t + 6t^2 = 0,$$

корни которого $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{2}{3}$. Следовательно, система (29) эквивалентна совокупности систем

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{3}x, \\ xy = 6, \end{cases}$$

решая которые находим все решения исходной системы.

Геометрически решение системы (27) можно интерпретировать как отыскание координат точек пересечения окружности $x^2+y^2=(\sqrt{13})^2$, радиус которой равен $\sqrt{13}$, а центр совпадает с началом координат, и гиперболы $y=\frac{6}{x}$.

<u>III способ</u>. Из второго уравнения исходной системы (27) выразим $y=\frac{6}{x}$ $(x\neq 0)$. Подставив это выражение в первое уравнение, имеем

$$x^2+\frac{36}{x^2}=13,$$

или

$$x^4-13x^2+36=0.$$

Полученное уравнение является биквадратным. Четырем корням этого уравнения

$$x_1=3,\ x_2=2,\ x_3=-3,\ x_4=-2$$

соответствуют значения

$$y_1=2,\ y_2=3,\ y_3=-2,\ y_4=-3.$$

<u>IV способ</u>. Из второго уравнения исходной системы (27) получаем

$$x^2y^2=36.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Виета, x^2 и y^2 можно рассматривать как корни квадратного уравнения

$$t^2-13t+36=0,$$

откуда $x^2=9,\ y^2=4$ или $x^2=4,\ y^2=9$.

Пример 10. *Определить, при каких значениях a существуют решения системы уравнений*

$$\begin{cases}|x|+|y|=a,\\ x^2+y^2=1.\end{cases} \tag{30}$$

Найти решения и дать графическую иллюстрацию.

Решение. Во-первых, заметим, что в силу неотрицательности абсолютной величины из первого уравнения системы следует, что $a\geq 0$.

Во-вторых, ввиду симметрии достаточно найти только неотрицательные решения $(x_0,\ y_0)$. Тогда $(-x_0,\ y_0)$, $(-x_0,\ -y_0)$ и $(x_0,\ -y_0)$ также являются решениями данной системы.

Итак, будем искать неотрицательные решения системы (30), или, что то же самое, системы

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Так как $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, то

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=\dfrac{a^2-1}{2}, \end{cases}$$

т. е. x и y определяются как неотрицательные корни квадратного уравнения

$$t^2-at+\frac{a^2-1}{2}=0.$$

Это уравнение имеет неотрицательные корни

$$t_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}$$

при $1\le a\le\sqrt{2}$.

Ответ. Неотрицательные решения системы при $1\le a\le\sqrt{2}$:

$$x_1=\frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2},\ y_1=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2};$$

$$x_2=\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2},\ y_2=\frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}.$$

Остальные решения системы имеют следующий вид:

$$x_3=-x_1,\ y_3=y_1;\ x_4=-x_2,\ y_4=y_2;\ x_5=-x_1,\ y_5=-y_1;$$

$$x_6=-x_2,\ y_6=-y_2;\ x_7=x_1,\ y_7=-y_1;\ x_8=-x_2,\ y_8=-y_2.$$

Геометрически решение системы (30) можно трактовать как отыскание координат точек пересечения квадрата со стороной $a\sqrt{2}$ и окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

В частности, при $a=\sqrt{2}$ и при $a=1$ система (30) имеет 4 решения; при $1<a<\sqrt{2}$ — 8 решений; при всех остальных значениях a система решений не имеет.

П р и м е р 11. *Объем бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равен* 30 *см*^{3}, *площадь полной поверхности равна* 62 *см*^{2}. *Периметр основния равен* 10 *см. Найти размеры бруска.*

Р е ш е н и е. Обозначим через x, y стороны основания, через z — высоту бруска $(x>0,\ y>0,\ z>0)$. По условию задачи имеем

$$\begin{cases} xyz=30, \\ 2(xy+xz+yz)=62, \\ 2\,(x+y)=10, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} xyz=30, & (31) \\ xy+xz+yz=31, & (32) \\ x+y=5. & (33) \end{cases}$$

Запищем уравнение (32) следующим образом:

$$xy+(x+y)z=31,$$

или, воспользовавшись уравнениями (31) и (33):

$$\frac{30}{z}+5z=31.$$

Отсюда для нахождения z имеем квадратное уравнение, корни которого

$$z_1=5,\ z_2=\frac{6}{5}.$$

При $z_1=5$ получим систему

$$\begin{cases} xy=6, \\ x+y=5, \end{cases}$$

откуда либо $x=2$, $y=3$, либо $x=3$, $y=2$.

При $z_2=\dfrac{6}{5}$ получаем систему

$$\begin{cases} xy=25, \\ x+y=5, \end{cases}$$

которая действительных решений не имеет.

О т в е т. 2 см, 3 см, 5 см.

П р и м е р 12. *Найти первые три члена возрастающей арифметической прогрессии, если их сумма равна* 27, *а сумма их квадратов равна* 275.

Р е ш е н и е. Пусть x, y, z — искомые числа, причем $x<y<z$. По условию имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=27, & (34)\\ x^2+y^2+z^2=275. & (35)\end{cases}$$

Кроме того,

$$\frac{x+z}{2}\cdot 3=27,$$

т. е.

$$x+z=18. \qquad (36)$$

Из соотношений (34) и (36) находим $y = 9$.

Зная y, запишем систему (35) , (36) следующим образом:

$$\begin{cases} x+z=18, & (37)\\ x^2+z^2=194. & (38)\end{cases}$$

Получили систему, состоящую из линейного уравнения и уравнения второй степени. Исключая z ($z = 18 - x$), для нахождения x получаем квадратное уравнение

$$x^2-18x+65=0.$$

Условию $x<9$ удовлетворяет корень $x=5$ этого уравнения. Ему соответствует $z = 13$.

Ответ. 5, 9, 13.

Замечание. Решение системы (37), (38) геометрически можно интерпретировать как отыскание координат x, z $(x<z)$ одной из точек пересечения прямой $x+z=18$ с окружностью $x^2+z^2=194$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1,\\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2\end{cases} \left(d_1\neq 0,\ c_2\neq 0,\ d_2\neq 0,\ \frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}\right)$$

приводится к системе, одно из уравнений которой однородное и которая является следствием исходной.

2. Решить систему

$$\begin{cases} 9x^2+16y^2=24xy+3x-4y+2,\\ 8x+7y=68\end{cases}$$

а) способом подстановки, используя линейность второго уравнения; б) рассматривая первое уравнение системы как квадратное относительно функции $z=3x-4y$ и сводя систему к двум более простым системам.

О т в е т. $x_1 = 5,\ y_1 = 4;\ x_2 = \frac{286}{53},\ y_2 = \frac{188}{53}$.

Решить системы уравнений:

3. $\begin{cases} xy + x + y = 19, \\ x^2y + xy^2 = 84. \end{cases}$

О т в е т. $x_1 = 4,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = 4;$
$x_3 = 6 + \sqrt{29},\ y_3 = 6 - \sqrt{29};$
$x_4 = 6 - \sqrt{29},\ y_4 = 6 + \sqrt{29}$.

4. $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0, \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + \\ +7y + 3 = 0. \end{cases}$

О т в е т. $x_1 = 1,\ y_1 = -1;\ x_2 = 3,\ y_2 = -3,$
$x_3 = -13 - \sqrt{157},\ y_3 = \frac{-13 - \sqrt{157}}{2},$
$x_4 = -13 + \sqrt{157},\ y_4 = \frac{-13 + \sqrt{157}}{2}$.

5. $\begin{cases} 2x^2y + 3xy^2 - xy = 72, \\ 4x + 6y - 3xy = 8. \end{cases}$

О т в е т. $x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = \frac{9}{2},\ y_2 = \frac{4}{3},$
$x_{3,4} = 2\,(-1 \pm \sqrt{7}),\ y_{3,4} = \frac{4}{3}(-1 \mp \sqrt{7})$.

Найти все действительные решения систем уравнений:

6. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$

О т в е т. $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4},\ y_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4};$
$x_2 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3},\ y_2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$.

7. $\begin{cases} (x+y)(x^2 - y^2) = 9, \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 5. \end{cases}$

О т в е т. $x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = -1,\ y_2 = -2$.

8. $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^4 + y^4 = 7. \end{cases}$

О т в е т. $x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2},\ y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

9. $\begin{cases} |xy - 2| = 6 - x^2, \\ 2 + 3y^2 = 2xy. \end{cases}$

О т в е т. $x_1 = \sqrt{6},\ y_1 = \frac{\sqrt{6}}{3};$
$x_2 = -\sqrt{6},\ y_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

10. $\begin{cases} x^2+3=\sqrt{3}|xy|, \\ 4-y^2=(2x-\sqrt{3y})^2. \end{cases}$

Ответ. $x_1=\sqrt{3},\ y_1=2;\ \ x_2=-\sqrt{3},\ y_2=-2.$

11. $\begin{cases} x^2+xy+y^2-x+y-18=0, \\ x^2-xy+y^2-3(x-y)-4=0. \end{cases}$

Ответ. $x_1=4,\ y_1=1;\ x_2=-1,\ y_2=-4;\ \ x_3=3,\ y_3=2;$
$x_4=-2,\ y_4=-3.$

12. $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+9=0, \\ xy+3x-2y-6+\sqrt{3}=0. \end{cases}$

Ответ. $x_1=\sqrt{3}+2,\ y_1=-4;\ x_2=-\sqrt{3}+2,\ y_2=-2;$
$x_3=3,\ y_3=-\sqrt{3}-3;\ \ x_4=1,\ y_4=\sqrt{3}-3.$

13. $\begin{cases} 4(x^2+xy+y^2)-2(7x+5y)-3=0, \\ 4xy+2(x-y)-13=0. \end{cases}$

Ответ. $x_1=\dfrac{7}{2},\ y_1=\dfrac{1}{2};\ x_2=\dfrac{3}{2},\ y_2=\dfrac{3}{2}.$

14. $\begin{cases} x^2-xy-2y^2-19x+32y+34=0, \\ x^2-xy-y^2-16x+29y-9=0. \end{cases}$

Ответ. $(13,4);\ (15,2);\ \left(-1-\sqrt{157},\ \dfrac{-3-\sqrt{157}}{2}\right);$

$\left(-1+\sqrt{157},\ \dfrac{-3+\sqrt{157}}{2}\right).$

15. $\begin{cases} 2x^2+y^2-4x+2y+3=0, \\ 5(x-1)^2+(y-2)^2=9. \end{cases}$

Ответ. $(1,-1).$

16. Найти на плоскости геометрическое место точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют следующим условиям:

а) $\begin{cases} 3x^2+4xy+y^2-2x-1\le 0, \\ 5x^2+4xy+y^2-6x-2y+2=0. \end{cases}$

Ответ. Точка $(1, -1)$.

б) $\begin{cases} 4x^2-4xy+y^2+2x-y-2\le 0, \\ 50x^2-20xy+2y^2-35x+7y-4\le 0. \end{cases}$

Ответ. Параллелограм с вершинами $\left(-\frac{1}{2}, -2\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right), (1, 1), (2,6)$.

17. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

имеет решение? Найти эти решения. Дать геометрическую интерпретацию.

Ответ. $\frac{1}{2}\le a\le 1$; $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{2a-1}}{2}$, $y_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{2a-1}}{2}$; $x_3=-x_2$, $y_3=y_2$; $x_4=-x_1$, $y_4=y_1$; $x_5=-x_1$, $y_5=-y_1$; $x_6=-x_2$, $y_6=-y_2$; $x_7=x_2$, $y_7=-y_2$; $x_8=x_1$, $y_8=-y_1$ (при $a=\frac{1}{2}$ и $a=1$ некоторые решения совпадают).

18. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^5y^8=a, \\ x^7y^{11}=b. \end{cases}$$

Ответ. Если $a=0, b\ne 0$ или $b=0, a\ne 0$, то система решений не имеет; если $a=0, b=0$ то $x=0$, y — любое число или x — любое число, $y=0$; если $a\ne 0, b\ne 0$, то $x=\frac{b^8}{a^{11}}$, $y=\frac{a^7}{b^5}$.

19. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^3-ay^3=\frac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3+ax^2y+xy^2=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение и всякое ее решение удовлетворяет уравнению $x+y=0$ (a, x, y — действительные числа).

Ответ. $a_{1,2}=\pm 1$.

20. Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y, z — действительные числа).

Ответ. $a=b=-2$.

§ 5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, в котором некоторые выражения, зависящие от неизвестного, находятся под знаком радикала, называется ***иррациональным***. Мы ограничимся рассмотрением простейших иррациональных алгебраических уравнений в области действительных чисел, причем в этой области все корни считаем арифметическими (если не оговорено противное).

Основная идея большинства способов решения таких уравнений заключается, как правило, в сведении к рациональным алгебраическим уравнениям.

1. Способ возведения в степень

Рассмотрим способ решения иррационального уравнения с помощью последовательного возведения обеих его частей в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного, т. е. возможно появление «посторонних корней», которые должны быть устранены проверкой.

Например, если обе части уравнения

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad (1)$$

возвести в квадрат, то, вообще говоря, получается уравнение, неэквивалентное данному, — возможно появление «посторонних корней».

Действительно, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения (1). Возведем обе части его в квадрат:

$$[f_1(x)]^2=[f_2(x)]^2, \qquad (2)$$

или

$$[f_1(x)]^2-[f_2(x)]^2=[f_1(x)-f_2(x)]\cdot[f_1(x)+f_2(x)]=0.$$

Из последнего уравнения следуют два: исходное уравнение

$$f_1(x)=f_2(x)$$

и уравнение

$$f_1(x) = -f_2(x). \qquad (3)$$

Таким образом, кроме корней $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ уравнение (2) может иметь еще корни уравнения (3).

Корни уравнения (3) являются «посторонними» для уравнения (I) (исключение составляют лишь те корни x_0 уравнения (3), для которых $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$).

Итак, при решении иррационального уравнения возведением обеих его частей в квадрат логически необходима проверка, которая основана на следующем:

1) «посторонние корни» должны либо не входить в область определения исходного уравнения, либо являться корнями уравнения (3);

2) корнями исходного уравнения (1) будут те из корней уравнения (2), которые: а) либо удовлетворяют уравнению (1); б) либо не являются корнями уравнения (3).

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}.$$

Решение. Последовательно возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}} \Rightarrow x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = x - \sqrt{x+8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \sqrt{x+1}) = -\sqrt{x+8} \Rightarrow 4(1 - 2\sqrt{x+1} + x + 1) = x + 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 8\sqrt{x+1} \Rightarrow 9x^2 = 64(x+1) \Leftrightarrow 9x^2 - 64x - 64 = 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = 8,\ x_2 = -\frac{8}{9}.$$

Проверка с помощью подстановки значений x_1 и x_2 в исходное уравнение показывает, что x_2 не является его решением (x_2 не принадлежит области определения исходного уравнения).

Ответ. $x = 8$.

Замечание. Способ решения иррационального уравнения последовательным возведением обеих частей уравнения в степень не удобен или вовсе не применим, когда проверка затруднительна.

Применим способ возведения в степень для решения уравнения вида

$$\sqrt[3]{f_1(x)} + \sqrt[3]{f_2(x)} = \sqrt[3]{f_3(x)}.$$

Возведем обе части этого уравнения в куб:

$$f_1(x) + f_2(x) + 3\sqrt[3]{f_1(x) \cdot f_2(x)}\ [\sqrt[3]{f_1(x)} + \sqrt[3]{f_2(x)}] = f_3(x).$$

Заменяя выражение в квадратных скобках на $\sqrt[3]{f_3(x)}$, получим уравнение

$$f_1(x)+f_2(x)+3\sqrt[3]{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)}=f_3(x),$$

которое является следствием предыдущего. Оставляя радикал в левой части и снова возводя в куб, получим рациональное уравнение

$$27f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)=[f_3(x)-f_1(x)-f_2(x)]^3.$$

2. Сведение к смешанной системе

Понятие смешанной системы, т. е. системы, состоящей из уравнений и неравенств, весьма эффективно может быть использовано для решения иррациональных уравнений. При этом также используется теорема 3 §1.

Сущность рассматриваемого способа заключается в том, что иррациональное уравнение заменяется эквивалентным ему рациональным с помощью возведения в степень обеих частей иррационального уравнения в области, где левая и правая его части имеют одинаковые знаки. Эта область определяется, как правило, неравенствами.

Например, если требуется решить уравнение

$$\sqrt{f(x)}=\varphi(x), \tag{4}$$

то можно воспользоваться следующей эквивалентностью:

$$\sqrt{f(x)}=\varphi(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=[\varphi(x)]^2,\\ \varphi(x)\geq 0.\end{cases} \tag{5}$$

Неравенство смешанной системы (5) выражает условие, при котором правая часть уравнения (4) неотрицательна. На множестве, задаваемом этим условием, возведение в квадрат обеих частей исходного уравнения (4) приводит его к уравнению, эквивалентному на данном множестве. Возведение в квадрат устраняет иррациональность. При этом в силу неотрицательности $\varphi^2(x)$ для искомых значений переменной x <u>автоматически выполнено условие $f(x)\geq 0$,</u> задающее область определения иррациональной функции.

Если уравнение смешанной системы имеет дискретное множество корней, то решением исходного уравнения будут те из них, которые удовлетворяют неравенству смешанной системы, в чем можно непосредственно убедиться подстановкой этих корней в неравенство $\varphi(x)\geq 0$.

Вернемся к уравнению (4). Из приведенных выше рассуждений вытекает, что, полагая в нем $f(x)=g^2(x)$, получаем следующую цепочку эквивалентных преобразований:

$$\sqrt{g^2(x)}=\varphi(x)\Leftrightarrow|g(x)|=\varphi(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)\geq 0,\\ g^2(x)=\varphi^2(x)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\varphi(x)\geq 0,\\ g(x)-\varphi(x)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}\varphi(x)\geq 0,\\ g(x)+\varphi(x)=0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ g(x)-\varphi(x)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\leq 0,\\ g(x)+\varphi(x)=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Замечание. Если обе части уравнения

$$f_1(x)=f_2(x)$$

при всех значениях x, принадлежащих его области определения, имеют одинаковые знаки, то, возводя в квадрат, получим уравнение

$$[f_1(x)]^2=[f_2(x)]^2,$$

эквивалентное данному всюду в области его определения.

При возведении обеих частей уравнения в нечетную степень получается уравнение, эквивалентное данному.

Доказательство этих утверждений аналогично доказательству теоремы 3 § 1, и мы предоставляем провести его самостоятельно.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}. \tag{6}$$

Решение. Область определения уравнения находится из системы неравенств

$$\begin{cases}5x+7\geq 0,\\ 3x+1\geq 0,\\ x+3\geq 0\end{cases}$$

и представляет собой множество $x\geq -\frac{1}{3}$.

Перепишем уравнение (6) так:

$$\sqrt{5x+7}=\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}.$$

Всюду в области определения уравнения обе его части неотрицательны; следовательно, возводя их в квадрат, получим уравнение

$$5x+7=(3x+1)+2\sqrt{(3x+1)(x+3)}+(x+3), \tag{7}$$

эквивалентное данному при $x\geq -\frac{1}{3}$. Перепишем уравнение (7) следующим образом:

$$x+3=2\sqrt{(3x+1)(x+3)}. \tag{8}$$

В области $x \geq -\frac{1}{3}$, где $x+3>0$, левая и правая части уравнения (8) снова неотрицательны; поэтому, возводя их в квадрат, получим уравнение, эквивалентное исходному при $x \geq -\frac{1}{3}$:

$$(x+3)^2 = 4(3x+1)(x+3),$$

или

$$11x^2 + 34x + 3 = 0,\ x_1 = -\frac{1}{11},\ x_2 = -3.$$

Следовательно, в области $x \geq -\frac{1}{3}$ последнее, а значит, и исходное уравнение имеет один корень $x = -\frac{1}{11}$ (x_2 не принадлежит области определения исходного уравнения).

Ответ. $x = -\frac{1}{11}$.

3. Способ введения вспомогательных неизвестных (способ подстановки)

Вводя вспомогательные неизвестные, иррациональное уравнение можно привести к системе рациональных уравнений. При этом вспомогательные неизвестные должны удовлетворять необходимым ограничениям (см. § 1), которые позволяют избежать потери корней, а также устранить «посторонние корни» в процессе решения системы.

Например, иррациональное уравнение

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$$

с помощью введения вспомогательного неизвестного $\sqrt{f(x)} = y \geq 0$ приводится к системе рациональных уравнений

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ f(x) = y^2. \end{cases}$$

Иначе говоря, имеет место следующая эквивалентность:

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = y^2. \end{cases}$$

Как правило, способ подстановки удобен, когда в уравнение входят радикалы разных степеней.

П р и м е р 3. *Решить уравнение*

$$\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$$

Р е ш е н и е. Введем новые вспомогательные неизвестные, положив

$$\sqrt[3]{2-x}=u,\ \sqrt{x-1}=v \text{ (причем } v\geq 0).$$

Заменяем данное уравнение системой

$$\begin{cases} u^3=2-x, \\ v^2=x-1, \\ u+v=1, \\ v\geq 0. \end{cases}$$

Исключая из первых двух уравнений x, приходим к системе

$$\begin{cases} u^3+v^2=1, \\ u+v=1, \\ v\geq 0, \end{cases}$$

которая является следствием предыдущей.

Решаем эту систему:

$$v=1-u,\ u^3+u^2-2u=0,\ u_1=0,\ u_2=-2,\ u_3=1;\ v_1=1,\ v_2=3,\ v_3=0.$$

Следовательно, $x_1=2$, $x_2=10$, $x_3=1$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

О т в е т. $x_1=2$, $x_2=10$, $x_3=1$.

Иногда при решении иррациональных уравнений следует комбинировать способ возведения в степень со способом введения вспомогательных неизвестных.

П р и м е р 4. *Решить уравнение*

$$2\sqrt{x^2-3x+11}-\sqrt{x^2-3x+3}=5.$$

Р е ш е н и е. Областью определения данного уравнения является множество всех действительных чисел.

Введем новое неизвестное, выполнив подстановку

$$\sqrt{x^2-3x+11}=t,$$

где $t\geq\frac{\sqrt{35}}{2}$. Тогда $x^2-3x+11=t^2$ и $x^2-3x+3=t^2-8$.

Таким образом, для нового неизвестного имеем уравнение

$$2t-\sqrt{t^2-8}=5\ \left(t\geq\frac{\sqrt{35}}{2}\right). \qquad (9)$$

Освободившись от радикала, получим

$$3t^2-20t+33=0 \quad \left(t\ge\frac{\sqrt{35}}{2}\right), \tag{10}$$

откуда $t_1=\frac{11}{3}$, $t_2=3$. Оба корня удовлетворяют уравнению (9).

Далее, воспользовавшись подстановкой $x^2-3x+11=t^2$, получим для определения x два уравнения:

$$x^2-3x+2=0 \quad \text{и} \quad x^2-3x-\frac{22}{9}=0.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1=2$, $x_2=1$. Корнями второго являются $x_3=\frac{11}{3}$, $x_4=-\frac{2}{3}$.

Ответ. $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=\frac{11}{3}$, $x_4=-\frac{2}{3}$.

Пример 5. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{(x+1)^3}=0. \tag{11}$$

Решение. Область определения данного уравнения есть общая часть (пересечение множеств) областей определения функций $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x(x+2)}$, $y=\sqrt{(x+1)^3}$ и представляет собой множество

$$x\ge 0. \tag{12}$$

Запишем уравнение (11) следующим образом:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{(x+1)^3}. \tag{13}$$

Возводя в квадрат обе части (неотрицательные) уравнения (13), на множестве $x\ge 0$ получим уравнение

$$x+2\sqrt{x^2(x+2)}+x(x+2)=(x+1)^3, \tag{14}$$

эквивалентное на этом множестве данному.

Уравнение (14) преобразуем к виду

$$2\sqrt{x^2(x+2)}=x^3+2x^2+1,$$

или

$$2\sqrt{x^2(x+2)}=x^2(x+2)+1. \tag{15}$$

Уравнение (15) с помощью подстановки

$$\sqrt{x^2(x+2)}=t \quad (t\ge 0 \ \text{при} \ \ x\ge 0)$$

приводится к смешанной системе

$$\begin{cases} 2t=t^2+1, \\ t\ge 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $t=1$.

Следовательно, получаем уравнение

$$\sqrt{x^2(x+2)}=1,$$

эквивалентное на множестве (12) исходному уравнению (11), а также уравнению

$$x^2(x+2)=1. \tag{16}$$

Последнее с помощью подстановки

$$x+1=y \quad (y\ge 1, \ \text{так как} \ x\ge 0)$$

приводится на множестве (12) к смешанной системе

$$\begin{cases} y(y^2-y-1)=0, & (17) \\ y\ge 1. & (18) \end{cases}$$

Кубическое уравнение (17) имеет корни

$$y_1=0,\ y_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \ y_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

из которых неравенству (18) удовлетворяет только третий. Следовательно, смешанная система (17), (18) имеет решение $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ему соответствует значение $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

В силу эквивалентности на множестве (12) уравнений (16) и (11) найденное значение является корнем исходного уравнения (11).

Ответ. $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. Некоторые специальные приемы

Существует много других способов решения иррациональных уравнений, кроме рассмотренных выше.

Иногда можно умножением уравнения на некоторый множитель исключить радикалы в уравнении. При этом могут появиться «посторонние корни». Поэтому необходима проверка решений, например подстановкой их в данное уравнение.

Так, чтобы исключить радикалы в уравнении

$$\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}-\sqrt{C(x)}=0,$$

достаточно умножить обе его части на множитель

$$M=(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})(-\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})(\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}).$$

При этом получится рациональное алгебраическое уравнение.

Часто применяется операция выделения полного квадрата под знаком радикала или искусственный прием, заключающийся в том, что, зная разность (или сумму) радикалов, находят их сумму (или разность), а затем и сами радикалы.

Например, решение уравнения

$$\sqrt{f(x)+a}+\sqrt{f(x)+b}=c \ (c>0)$$

сводится (умножением на разность радикалов, входящих в левую часть этого уравнения) к решению системы уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{f(x)+a}+\sqrt{f(x)+b}=c,\\ \sqrt{f(x)+a}-\sqrt{f(x)+b}=\dfrac{a-b}{c},\end{cases}$$

откуда

$$\sqrt{f(x)+a}=\frac{c^2+a-b}{2c},\ \sqrt{f(x)+b}=\frac{c^2+b-a}{2c}.$$

Если $\begin{cases}c^2+a-b\ge 0,\\ c^2+b-a\ge 0,\end{cases}$ то для определения x имеем уравнение

$$f(x)=\frac{c^4+2c^2(a+b)+(a-b)^2}{4c^2}.$$

П р и м е р 6. *Решить уравнение*

$$\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1. \qquad (19)$$

Р е ш е н и е. Из тождества

$$\left(\sqrt{2x^2+5x-2}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2+5x-9}\right)^2=7$$

в силу равенства (19) следует

$$\sqrt{2x^2+5x-2}+\sqrt{2x^2+5x-9}=7. \qquad (20)$$

Сложив равенства (19) и (20), получим $\sqrt{2x^2+5x-2}=4$, откуда $x_1=2$, $x_2=-\frac{9}{2}$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения x удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ. $x_1=2$, $x_2=-\frac{9}{2}$.

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}}=1.$$

Решение. Выделяя под знаками радикалов квадраты разностей, получим

$$\sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-3)^2}=1,$$

или

$$\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}+3\right|=1. \qquad (21)$$

Радикал имеет смысл, если $x\geq-1$. По определению модуля имеем

$$\left|\sqrt{x+1}-2\right|=\begin{cases}\sqrt{x+1}-2, \text{ если } \sqrt{x+1}\geq 2, \text{ т. е. } x\geq 3;\\ 2-\sqrt{x+1}, \text{ если } -1\leq x<3;\end{cases}$$

$$\left|\sqrt{x+1}-3\right|=\begin{cases}\sqrt{x+1}-3, \text{ если } x\geq 8;\\ 3-\sqrt{x+1}, \text{ если } -1\leq x<8.\end{cases}$$

Значит, для левой части уравнения (21) получаем следующие выражения:

$$\begin{array}{ll} 5-2\sqrt{x+1}, & \text{если } -1\leq x<3;\\ 1, & \text{если } \ 3\leq x\leq 8,\\ 2\sqrt{x+1}-5, & \text{если } \ x>8.\end{array}$$

На сегменте $3\leq x\leq 8$ уравнение удовлетворяется тождественно. В промежутке $-1\leq x<3$ уравнение $5-2\sqrt{x+1}=1$ не имеет корней, так как единственным его корнем служит $x=3$. Аналогично, уравнение $2\sqrt{x+1}-5=1$ не имеет корней в промежутке $8<x<+\infty$.

Ответ. Уравнение имеет бесконечное множество корней $3\leq x\leq 8$.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=1.$$

Р е ш е н и е. Исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=1. \tag{22}$$

Так как $\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$, $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$, то уравнение (22) можно переписать так:

$$|x-2|+|x-3|=1. \tag{23}$$

По определению абсолютной величины действительного числа имеем:

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, & \text{если } x\geq 2;\\ 2-x, & \text{если } x<2;\end{cases} \quad |x-3|=\begin{cases}x-3, & \text{если } x\geq 3;\\ 3-x, & \text{если } x<3.\end{cases}$$

Числовую ось Ox разобьем точками, в которых выражения под знаком абсолютной величины обращаются в нуль, на три частичные области $-\infty<x<2$, $2\leq x<3$, $3\leq x<+\infty$. Рассмотрим уравнение в каждой из этих частичных областей.

В области $-\infty<x<2$ уравнение (23) примет вид

$$2-x+3-x=1, \text{ или } -2x=-4$$

и, следовательно, в этой области корней не имеет.

В области $2\leq x<3$ уравнение (23) превращается в тождество

$$x-2+3-x=1,$$

справедливое при всех значениях x из данной области.

В области $3\leq x<+\infty$ уравнение (23) принимает вид

$$x-2+x-3=1, \text{ или } 2x=6$$

и, значит, имеет единственный корень $x=3$, принадлежащий этой области.

Суммируя результаты трех рассмотренных случаев, заключаем, что решением исходного уравнения является множество значений x из отрезка $2\leq x\leq 3$.

О т в е т. $2\leq x\leq 3$.

З а м е ч а н и е 1. Уравнение (23) эквивалентно совокупности трех следующих смешанных систем:

$$\text{I. }\begin{cases}-\infty<x<2,\\ 2-x+3-x=1;\end{cases} \quad \text{II. }\begin{cases}2\leq x<3,\\ x-2+3-x=1;\end{cases} \quad \text{III. }\begin{cases}3\leq x<+\infty,\\ x-2+x-3=1.\end{cases}$$

Объединив решения каждой из этих систем, получим решение уранения (23).

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, результат исследования будет тот же самый, если при решении уравнения (23) рассматривать следующие частичные области:

$$-\infty<x\leq 2,\ 2<x<3,\ 3\leq x<+\infty$$

или

$$-\infty < x \le 2,\ 2 < x \le 3,\ 3 < x < +\infty$$

или

$$-\infty < x < 2,\ 2 \le x \le 3,\ 3 < x < +\infty.$$

Замечание 3. Используя геометрический смысл абсолютной величины $|x-a|$ как расстояния между точками, изображающими на числовой оси числа x и a, решение уравнения (23) можно трактовать как отыскание точек x, сумма расстояний которых до точек 2 и 3 равна единице. Очевидно, все точки x отрезка $2 \le x \le 3$ удовлетворяют этому требованию.

Рассмотрим иррациональные уравнения, содержащие параметр.

Пример 9. *Решить уравнение*

$$x-\sqrt{a-x^2}=1.$$

Решение. I способ. Перепишем уравнение в виде

$$x-1=\sqrt{a-x^2} \tag{24}$$

и возведем обе части уравнения (24) в квадрат:

$$x-1=\sqrt{a-x^2} \Rightarrow (x-1)^2=a-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-2x+1-a=0,$$

откуда

$$x_1=\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2},\ x_2=\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\ \left(a \ge \frac{1}{2}\right).$$

Если $a<\frac{1}{2}$, то действительных решений нет. Проверим, какие из найденных значений x удовлетворяют уравнению (24).

Подставляя значение x_1 в уравнение (24), получим, что его левая часть $-\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$ отрицательна, а правая $\sqrt{a-\left(\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}\right)^2}$ неотрицательна, так что x_1 не удовлетворяет уравнению.

Подставим теперь x_2:

$$\frac{\sqrt{2a-1}-1}{2}=\sqrt{a-\left(\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\right)^2}.$$

Полученное равенство верно тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{2a-1}-1 \geq 0, \text{ т.е. } a \geq 1.$$

II способ. Сведем уравнение (24) к эквивалентной смешанной системе:

$$x-1=\sqrt{a-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2=a-x^2, \\ x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-2x+1-a=0, \\ x\geq 1.\end{cases}$$

Находим корни квадратного уравнения (действительные при $a \geq \frac{1}{2}$):

$$x_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2a-1}}{2}\leq \frac{1}{2}<1,\ x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2a-1}}{2};\ \ x_2\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2a-1}\geq 1 \Leftrightarrow a\geq 1.$$

Ответ. Если $a<1$, то решений нет: если $a\geq 1$, то $x=\dfrac{\sqrt{2a-1}+1}{2}$.

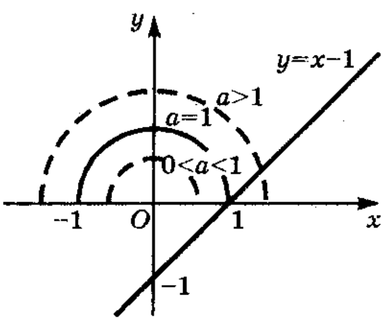


Рис. 99

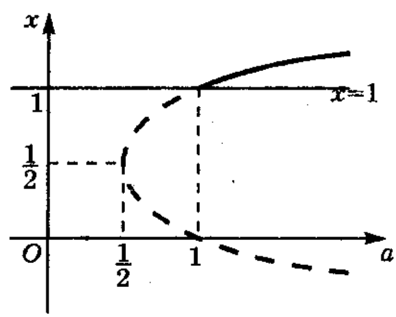


Рис. 100

Геометрическая интерпретация. На координатной плоскости xOy решение уравнения $x-1=\sqrt{a-x^2}$ эквивалентно отысканию точек пересечения прямой $y=x-1$ с полуокружностями $y=\sqrt{a-x^2}$.

Из рис. 99 видно, что эти линии пересекаются при $a\geq 1$ в единственной точке (т. е. исходное уравнение при $a\geq 1$ имеет только одно решение).

Представим теперь графически решение рассматриваемого уравнения на координатно–параметрической плоскости aOx. Так как уравнение эквивалентно смешанной системе

$$\begin{cases}a=2x^2-2x+1, \\ x\geq 1,\end{cases}$$

то его решение можно рассматривать как отыскание на КП–плоскости aOx точек параболы $a=2x^2-2x+1$, для которых $x\geq 1$.

Как видно из рис. 100, решение существует при $a\geq 1$, причем каждому значению $a\geq 1$ соответствует одно решение (одна точка на параболе, для которой $x\geq 1$.

Пример 10. *Для каждого действительного параметра a решить уравнение*

$$x+\sqrt{x}=a.$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\sqrt{x}=a-x. \tag{25}$$

Уравнение (25) эквивалентно смешанной системе

$$\begin{cases} x=(a-x)^2, \\ a-x\geq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2=0, & (26) \\ a-x\geq 0. & (27) \end{cases}$$

Найдем действительные корни уравнения (26):

$$x_1=a+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+a},\ x_2=a+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}.$$

Первый корень x_1 удовлетворяет условию (27), если

$$a-x_1=\sqrt{\frac{1}{4}+a}-\frac{1}{2}\geq 0.$$

Неравенство $\sqrt{\frac{1}{4}+a}\geq\frac{1}{2}$ эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{4}+a\geq\frac{1}{4},$$

откуда следует, что $a\geq 0$.

Второй корень x_2 не удовлетворяет условию (27) ни при каком a, так как

$$a-x_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+a}<0.$$

Следовательно, решением исходного иррационального уравнения является только первый корень квадратного уравнения (26) при $a \geq 0$.

Ответ. $x = a + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}$, $a \geq 0$.

Замечание. Решение уравнения (25) геометрически можно интерпретировать как отыскание абсцисс точек пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ (части параболы $y^2 = x$, расположенной в верхней полуплоскости) с однопараметрическим семейством прямых $y = a - x$ (рис. 101). При $a \geq 0$ имеется единственная точка пересечения, при $a < 0$ точек пересечения нет.

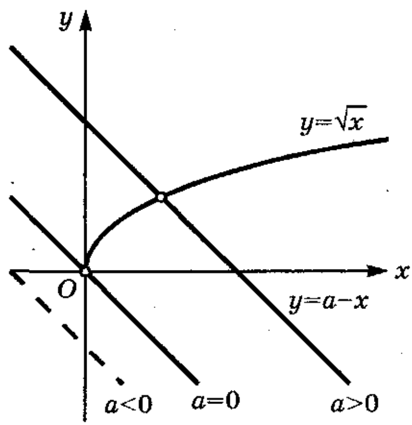


Рис. 101

Пример 11. *Для каждого действительного положительного a найти все действительные корни уравнения*

$$\sqrt{a + \sqrt{a + x}} = x.$$

Решение. Рассмотрим три способа решения этого иррационального алгебраического уравнения.

I способ. Последовательно возводя в квадрат обе части уравнений в области, где левые и правые части неотрицательны, получим эквивалентные друг другу смешанные системы:

$$\begin{cases} a + \sqrt{a + x} = x^2, \\ x > 0, \\ a + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{a + x}\right)^2 = (x^2 - a)^2, \\ x \geq \sqrt{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+x=x^4-2ax^2+a^2, \\ x \ge \sqrt{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0, \\ x \ge \sqrt{a} > 0. \end{cases}$$

Рассматривая последнее уравнение как квадратное относительно параметра a и найдя его корни $a_1 = x^2+x+1$, $a_2 = x^2 - x$, разложим левую часть этого уравнения на множители:

$$\begin{cases} [a-(x^2+x+1)]\cdot[a-(x^2-x)]=0, \\ x \ge \sqrt{a} > 0. \end{cases}$$

Таким образом, корни исходного уравнения находятся как решения полученной смешанной системы, которая распадается на две системы:

$$\begin{cases} x^2+x+(1-a)=0, \\ x \ge \sqrt{a} > 0; \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} x^2-x-a=0, \\ x \ge \sqrt{a} > 0. \end{cases} \tag{27}$$

Решив уравнение системы (26), получим

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2},\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}.$$

Ни одно из этих значений условию $x \ge \sqrt{a} > 0$ не удовлетворяет.

Решив уравнение системы (27), находим

$$x_3 = \frac{1-\sqrt{4a+1}}{2},\ x_4 = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Условию $x \ge \sqrt{a} > 0$ удовлетворяет только значение

$$x = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2},$$

которое является корнем исходного уравнения.

<u>II способ</u>. Выполним замену неизвестного с помощью подстановки

$$\sqrt{a+x} = u \ (u \ge 0).$$

Тогда рассматриваемое уравнение будет эквивалентно следующим смешанным системам:

$$\begin{cases} \sqrt{a+x} = u, \\ x^2 - a = u, \\ u \geq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a + x = u^2, \\ x^2 - a = u, \\ u \geq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = u^2 - a, \\ x^2 = u + a, \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Исключая из последней системы параметр a, получим

$$x + x^2 = u^2 + u,$$

или

$$(x-u) + (x^2 - u^2) = 0,$$

или

$$(x-u)(x+u+1) = 0.$$

Отсюда, воспользовавшись подстановкой $u = \sqrt{a+x}$, имеем:

1) $x + 1 + \sqrt{a+x} = 0$, или $x^2 + x + (1-a) = 0$;

2) $x - \sqrt{a+x} = 0$, или $x^2 - x - a = 0$.

Исследование корней полученных квадратных уравнений проводится так же, как и при I способе решения. В итоге получаем тот же ответ: $x = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

Замечание. Для исследования смешанных систем (26) и (27) можно применить КП–метод.

III способ. Обозначив

$$f(x) = \sqrt{a+x},$$

получим

$$f(f(x)) = x.$$

При определенных условиях, накладываемых на функцию $f(x)$ (строгая монотонность), имеем

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x.$$

В данном случае, учитывая, что $a > 0$, получаем

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}} = x \Leftrightarrow \sqrt{a+x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - a = 0, \\ x > 0 \end{cases}$$

и снова приходим к тому же результату.

Ответ. $x = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$, $a > 0$.

Рассмотрим систему уравнений, содержащих неизвестные под знаком радикала.

Пример 12. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} (x-y)^4 = 13x - 4, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{3x-y} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Решение. Последовательно возводя три раза обе части второго уравнения в квадрат, получим систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)^4 = 13x-4, \\ \sqrt{(x+y)(3x-y)} = 1-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^4 = 13x-4, \\ (x-y)^2 = 4x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^4 = 13x-4, \\ (x-y)^4 = (4x-1)^2, \end{cases}$$

которая является следствием исходной. Для определения x имеем уравнение

$$13x - 4 = (4x-1)^2,$$

откуда $x = \dfrac{5}{16}$ и $x = 1$. Для определения y воспользуемся уравнением

$$(x-y)^2 = 4x - 1.$$

Значению $x = \dfrac{5}{16}$ соответствуют $y_1 = \dfrac{13}{16}$ и $y_2 = -\dfrac{3}{16}$; значению $x = 1$ соответствуют $y_3 = 1+\sqrt{3}$ и $y_4 = 1-\sqrt{3}$.

Проверка показывает, что исходной системе уравнений удовлетворяют только $x = \dfrac{5}{16}$, $y = \dfrac{13}{16}$ и $x = \dfrac{5}{16}$, $y = -\dfrac{3}{16}$.

Ответ. $x = \dfrac{5}{16}$, $y = \dfrac{13}{16}$ и $x = \dfrac{5}{16}$, $y = -\dfrac{3}{16}$.

Замечание. При решении данной системы уравнений можно применить *способ сведения к смешанной системе. Для этого второе уравнение* три раза последовательно возведем в квадрат в области, где левая и правая части уравнения неотрицательны. Эта область задается неравенствами

$$x+y\geq 0,\ 1-2x\geq 0,\ 3x-y\geq 0,\ 4x-1\geq 0$$

и представляет собой трапецию (на рис. 102данная область координатной плоскости xOyзаштрихована).

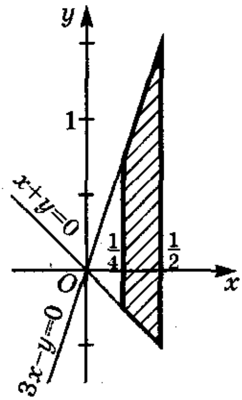


Рис. 102

5. Способ рационализации

Рассмотрим один из способов решения иррациональных алгебраических уравнений в области действительных чисел, считая в этой области все корни арифметическими.

Иногда удается с помощью некоторой подстановки, переходя к новому неизвестному, привести иррациональное выражение к рациональному виду. *В таком случае будем говорить, что эта подстановка* рационализирует рассматриваемое иррациональное выражение, и называть ее ***рационализирующей***.

Способ решения иррациональных уравнений (или неравенств), основанный на применении рационализирующих подстановок, назовем ***способом рационализации***.

Применяя рационализирующую подстановку, необходимо следить за тем, чтобы область определения нового рационального уравнения, получаемого в результате этой подстановки, соответствовала области определения данного иррационального уравнения.

Например, вводя в уравнении

$$f(x)=0,\ x\in X$$

вместо x новое неизвестное t с помощью подстановки $x=\varphi(t)$ (или $t=\psi(x)$, где функция $\psi(x)$ — обратная по отношению к $\varphi(t)$), получим уравнение

$$F(t)=0,\ t\in T,$$

где $F(t)=f[\varphi(t)]$, областью определения которого T является множество значений функции $t=\psi(x)$ для всех $x\in X$.

Рассмотрим преобразования некоторых выражений, содержащих радикалы, с помощью рационализирующих подстановок и использование этих подстановок при решении иррациональных уравнений.

Для обозначения рациональной функции двух аргументов, т. е. такой функции, которая представима в виде отношения произвольных многочленов от двух аргументов, в дальнейшем будем использовать символ $R(u,\ v)$.

1. <u>*Рационализация выражения* $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$</u>. Выражение вида

$$R(x,\sqrt[n]{ax+b}), \tag{28}$$

где R означает рациональную функцию, a и b — постоянные, а n — любое целое положительное число, рационализируется подстановкой

$$t=\sqrt[n]{ax+b}. \tag{29}$$

Действительно, возводя обе части равенства (29) в n-ю степень, получим $t^n=ax+b$, откуда $x=\dfrac{t^n-b}{a}=\varphi(t)$, причем функция $\varphi(t)$ рациональна. Следовательно,

$$R(x,\sqrt[n]{ax+b})=R(\varphi(t),t).$$

Поскольку рациональная функция от рациональной функции представляет собой также рациональную функцию, выражение в правой части последнего равенства является рациональным.

Пример 13. *Решить уравнение*

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8.$$

Решение. Найдем область определения уравнения: $x\ge 0$. С помощью рационализирующей подстановки $t=\sqrt{x}$ $(t\ge 0)$ это уравнение приводится к смешанной системе

$$\begin{cases}\dfrac{t^2-4}{t+2}=t^2-8,\\ t\ge 0.\end{cases}$$

Далее, сокращая дробь на $t+2>0$, получаем систему

$$\begin{cases}t^2-t-6=0,\\ t\ge 0,\end{cases}$$

решением которой является $t=3$. Воспользовавшись указанной подстановкой, получим $x=9$.

Ответ. $x=9$.

2. <u>*Рационализация дробно–линейных иррациональностей*</u>. Аналогично предыдущему доказывается, что функцию вида

$$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \tag{30}$$

где a, b, c и d — некоторые постоянные, а n — любое целое положительное число (***дробно-линейная иррациональность***), при условии $ad - bc \neq 0$ можно привести к рациональному виду подстановкой

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}. \tag{31}$$

Иррациональная функция

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\right) \tag{32}$$

рационализируется с помощью подстановки

$$t = \sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \tag{33}$$

где r — наименьшее общее кратное показателей радикалов n, m, ...

Пример 14. *Решить уравнение*

$$6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

Решение. Будем искать корни данного уравнения в области $(x-2)(x-3) > 0$ (очевидно, что числа $x = 2$ и $x = 3$ не являются его корнями). Разделим обе части уравнения на $\sqrt[3]{x-3}$:

$$6 + \sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}} = 5\sqrt[6]{\frac{x-2}{x-3}}.$$

Полученное уравнение в рассматриваемой области с помощью рационализирующей подстановки

$$t = \sqrt[6]{\frac{x-2}{x-3}} \quad (t > 0)$$

приводится к смешанной системе

$$\begin{cases} t^2 - 5t + 6 = 0, \\ t > 0, \end{cases}$$

эквивалентной ему в этой области. Определив решения этой системы $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$ и воспользовавшись указанной подстановкой, находим корни исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 3\frac{1}{63}$, $x_2 = 3\frac{1}{728}$.

3. *Рационализация биномиальных выражений*. Можно доказать, что выражение

$$y = x^m (a + bx^n)^p, \tag{34}$$

где a и b — постоянные, а показатели степеней m, n — некоторые рациональные числа, допускает рационализирующие подстановки только в тех случаях, когда одно из чисел p, $\frac{m}{n}$ или $\frac{m}{n}+p$ оказывается целым. В этих случаях рационализирующими подстановками являются соответственно

$$t = \sqrt[r]{x},\ t = \sqrt[s]{a+bx^n}\ \ и\ \ t = \sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^m}}, \tag{35}$$

где r — наименьшее общее кратное знаменателей чисел m и n, а s — знаменатель числа p.

Существование указанных трех рационализирующих подстановок доказывает возможность приведения к рациональному виду уравнений $R(x,\ y) = 0$ в первом случае и $R(x^n,\ y) = 0$ во втором и третьем случаях.

Пример 15. *Решить уравнение*

$$(5x+2)\sqrt{1-x} + (5x-7)\sqrt{x} = 0.$$

Решение. Область определения уравнения — сегмент $0 \le x \le 1$. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$(5x+2)\sqrt{\frac{1-x}{x}} + (5x-7) = 0$$

($x \ne 0$, т. е. $x = 0$ не является корнем).

Здесь имеет место третий случай рационализации ($m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$, $p = \frac{1}{2}$; $\frac{m}{n} + p = 0$ — целое число). Следовательно, с помощью подстановки $t = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ $(t \ge 0)$ иррациональное уравнение приводится к рациональному

$$2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0, \text{ или } (t-1)(t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Определив корни этого уравнения $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = \frac{1}{2}$ и воспользовавшись указанной подстановкой, находим $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{4}{5}$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{4}{5}$.

4. *Рационализация квадратичных иррациональностей с помощью подстановок Эйлера*. ***Квадратичной иррациональностью*** называется функция вида

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}), \tag{36}$$

где $a \neq 0$, b и c — некоторые постоянные. Покажем, что это выражение всегда рационализируется с помощью одной из так называемых подстановок Эйлера. При этом будем считать, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c неотрицателен и не имеет равных корней (в противном случае радикал можно заменить рациональным выражением).

а) Сначала рассмотрим случай, когда дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$. В этом случае знак коэффициента c квадратного трехчлена ax^2+bx+c совпадает со знаком a, и так как этот трехчлен положителен (в силу условия $D<0$ равенство трехчлена нулю невозможно), то $a>0$.

Таким образом, мы можем сделать следующую подстановку:

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a} \quad (\text{или } t = \sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a}\,). \tag{37}$$

Подстановку (37) называют ***первой подстановкой Эйлера***. Докажем, что она рационализирует функцию (36) в рассматриваемом случае. Возводя в квадрат обе части равенства

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$$

(при этом $t - x\sqrt{a} \geq 0$), получим

$$bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}tx,$$

откуда

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b} = \varphi(t),\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b} = \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — рациональные. Значит,

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R(\varphi(t), \psi(t)).$$

Правая часть полученного равенства является рациональной функцией.

б) Рассмотрим теперь случай, когда дискриминант $D>0$, т. е. квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет (различные) действительные корни x_1 и x_2. Следовательно,

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Аналогично предыдущему доказывается, что в этом случае функция (36) рационализируется с помощью подстановки

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1} \quad (x \neq x_1), \tag{38}$$

называемой ***второй подстановкой Эйлера***.

Замечание 1. Рационализирующая подстановка (38) справедлива при условии $x \neq x_1$. Следовательно, применяя эту подстановку при решении иррационального уравнения, необходимо проверить, не является ли значение $x = x_1$ корнем данного уравнения (иначе возможна потеря этого корня).

Замечание 2. Если $c > 0$, то в этом случае можно положить

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} \quad (\text{или } \sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}). \tag{39}$$

Случаи $a > 0$ и $c > 0$ приводятся один к другому подстановкой $x = \frac{1}{z}$. Поэтому всегда можно избежать использования указанной подстановки (39).

Пример 16. *Решить уравнение*

$$4x^3 + x^2 - 4x - 1 + (4x^2 - x - 5)\sqrt{x^2 + x + 1} = 0.$$

Решение. Область определения уравнения: $-\infty < x < +\infty$. Применим первую подстановку Эйлера

$$t = \sqrt{x^2 + x + 1} + x.$$

Для определения нового неизвестного t получаем уравнение

$$t(t^2 - t - 6) = 0,$$

корни которого $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ и $t_3 = -2$. Воспользовавшись указанной подстановкой, находим $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{8}{7}$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{8}{7}$.

Для рационализации выражения

$$R(x,\ x^2 + px + q,\ \sqrt{ax^2 + bx + c}) \tag{40}$$

применяют дробно-рациональную подстановку

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}. \tag{41}$$

Коэффициенты α и β выбирают так, чтобы в обоих трехчленах одновременно отсутствовали члены, содержащие x в первой степени. Тогда преобразованное выражение примет вид

$$R_1(t, \sqrt{\lambda t^2 + B})$$

и рационализируется с помощью подстановок, рассмотренных выше.

Мы рассмотрели только некоторые, наиболее распространенные рационализирующие подстановки.

Следует отметить, что, как правило, одно и то же иррациональное уравнение можно свести к рациональному алгебраическому уравнению с помощью нескольких различных рационализирующих подстановок. От выбора этих подстановок зависит вид получаемого рационального уравнения.

Пример 17. *Решить уравнение*

$$(x+2)(1+\sqrt{3-2x-x^2}) = 3.$$

Решение. Область определения уравнения: $-3 \le x \le 1$. Здесь оказывается эффективной рационализирующая подстановка

$$t = \sqrt{3-2x-x^2} + x + 1 \quad (-2 \le t \le 2\sqrt{2}).$$

Применяя ее, получаем для определения нового неизвестного t смешанную систему

$$\begin{cases} t^2 + 2t - 8 = 0, \\ -2 \le t \le 2\sqrt{2}, \end{cases}$$

откуда $t = 2$. Затем, воспользовавшись указанной подстановкой, находим корни исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = -1,\ x_2 = 1.$

5. Рационализация с помощью тригонометрических подстановок. Рассмотрим функцию

$$R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \ (a \ne 0). \tag{42}$$

Применим рационализирующую подстановку

$$x = |a| \sin t. \tag{43}$$

При этом $\sqrt{a^2 - x^2} = |a| \cos t$. Будем считать, что x изменяется между $-|a|$ и $|a|$, (т. е. $-|a| \le x \le |a|$), а t — между $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}$ (т. е. $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$). Поэтому

$t = \arcsin\dfrac{x}{|a|}$. С помощью подстановки (43) рассматриваемая функция приводится к следующему виду:

$$R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) = R(|a|\sin t, |a|\cos t).$$

Функцию (42) можно также рационализировать с помощью подстановки

$$x = |a|\cos t, \qquad (44)$$

причем $0 \le t \le \pi$, т. е. $t = \arccos\dfrac{x}{|a|}$.

Аналогично, функция

$$R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \qquad (45)$$

подстановкой

$$x = |a|\operatorname{tg} t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right) \qquad (46)$$

приводится к виду $R\,(|a|\operatorname{tg} t, |a|\sec t)$, так как $\sqrt{a^2 + x^2} = |a|\sec t$.

Для рационализации функции

$$R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \qquad (47)$$

можно применить подстановку

$$x = |a|\sec t. \qquad (48)$$

Выполняя рационализацию выражения $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ с помощью тригонометрических подстановок, необходимо предварительно привести это выражение к одному из рассмотренных выше видов (42), (45) или (47).

Пример 18. *Решить уравнение*

$$1 + x^3 = (x^2 + 3x - 1)\sqrt{1 - x^2}.$$

Решение. Область определения уравнения: $|x| \le 1$. Применяя подстановку $x = \sin t$, получаем уравнение

$$1 + \sin^3 t + \cos^3 t = 3\sin t\cos t,$$

симметрическое относительно функций $\sin t = x$ и $\cos t = \sqrt{1 - x^2}$. Следовательно (см. гл. IV, § 2), это уравнение подстановкой

$$z=\sin t+\cos t=x+\sqrt{1-x^2}\quad \left(|z|\le\sqrt{2}\right)$$

приводится к смешанной системе

$$\begin{cases} z^3+3z^2-3z-5=0, \\ |z|\le\sqrt{2}, \end{cases}$$

которая имеет решение $z=-1$. Отсюда $x+\sqrt{1-x^2}=-1$, т. е. $x=-1$.

Ответ. $x=-1$.

Приведенные примеры не исчерпывают всего многообразия тригонометрических подстановок, применяемых для рационализации иррациональных выражений. Например, функция $R(x,\ \sqrt{(x-a)(b-x)})$, где $a<x<b$, рационализируется введением нового неизвестного t с помощью подстановки

$$x=a\cos^2 t+b\sin^2 t\quad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right);$$

функция $R(x,\ \sqrt{(x^2-a^2)^3})$ рационализируется подстановкой $x=|a|\sec t$ и т. д.

В заключение отметим, что способ рационализации может успешно использоваться также при решении иррациональных неравенств, при вычислении и преобразовании иррациональных выражений и т. д.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $\sqrt{2-x}-\sqrt{x-3}=1.$ Ответ. Решений нет.

2. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$ Ответ. $x=3$.

3. $\sqrt{4-x}-\sqrt{5+x}=3.$ Ответ. $x=-5$.

4. $\sqrt{14-x}=\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}.$ Ответ. $x=5$.

5. $\sqrt{8-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{26+x}.$ Ответ. $x=-1$.

6. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}.$ Ответ. $x_1=1; x_2=\frac{3}{2}$; $x_3=2$.

7. $(2x+1)^{\frac{3}{2}}-6{,}5x=1.$ Ответ. $x_1=0; x_2=4$.

8. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$ Ответ. $x_1=1; x_2=-\dfrac{8}{3}.$

9. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1.$ Ответ. $x=7.$

10. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{34+x}-\sqrt{7+x}.$ Ответ. $x=2.$

11. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$ Ответ. $5\le x\le 10.$

12. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$ Ответ. $x\ge 2.$

Решить системы уравнений:

13. $\begin{cases} x^4+x^2y+y^2=21, \\ x\sqrt{y}=2. \end{cases}$

Ответ. $x_1=2,\ y_1=1;\ x_2=1,\ y_2=4.$

14. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ xy=27. \end{cases}$

Ответ. $x_1=27,\ y_1=1;\ x_2=-1,\ y_2=-27.$

15. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y}=\sqrt{2}+4, \\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y}=2\sqrt{2}-2. \end{cases}$

Ответ. $x=-4,\ y=6.$

16. $\begin{cases} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\dfrac{2}{3}x+5, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$

Ответ. $x_1=3,\ y_1=2;\ x_2=\dfrac{17}{27},\ y_2=-\dfrac{14}{9}.$

17. $\begin{cases} x-y=\dfrac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right), \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3. \end{cases}$

Ответ. $x_1=216,\ y_1=27;\ x_2=-27,\ y_2=-216.$

18. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}}+2\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}=3,\\ x+xy+y=7.\end{cases}$

Ответ. $x_1=-5,\ y_1=-3;\ x_2=3,\ y_2=1; x_3=\sqrt{10}-1,\ y_3=\dfrac{\sqrt{160}-5}{5};$

$x_4=-\sqrt{10}-1,\ y_4=-\dfrac{\sqrt{160}+5}{5}.$

Найти действительные корни уравнений:

19. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1.$ Ответ. $x=1.$

20. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}.$ Ответ. $x=\dfrac{5}{3}.$

21. $\sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{(x+1)^3}=0.$ Ответ. $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$

22. $(3-x)\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}+(x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{3-x}}=2.$ Ответ. $x=2.$

23. $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}.$ Ответ. $x=3.$

24. $x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{35}{12}.$ Ответ. $x_1=\dfrac{5}{3}; x_2=\dfrac{5}{4}.$

25. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}.$ Ответ. $x_1=\dfrac{4}{5}; x_2=\dfrac{3}{5}.$

26. $\sqrt[3]{\dfrac{2x+3}{2x-3}}+\sqrt[3]{\dfrac{2x-3}{2x+3}}=\dfrac{8}{13}\cdot\dfrac{4x^2+9}{4x^2-9}.$

Ответ. $x_1=\dfrac{27}{14},\ x_2=-\dfrac{27}{14},\ x_3=\dfrac{7}{6},\ x_4=-\dfrac{7}{6}.$

27. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}.$

Ответ. $x_1=6,\ x_2=-3.$

28. $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x).$

Ответ. $x_1=3,\ x_2=\dfrac{9}{8}\left(9-\sqrt{97}\right).$

Для каждого действительного числа a решить уравнения:

29. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$.

Ответ. Если $a\neq 0$, то $x_1=\frac{63}{65}a$, $x_2=0$; если $a=0$, то $x=0$.

30. $a\sqrt[4]{1+x}+\frac{a}{x}\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{x}$ (найти все действительные корни).

Ответ. Если $0<a<1$, то $x=a^{4/5}(1-a^{4/5})^{-1}$; если $a\leq 0$ и $a\geq 1$, то решений нет.

31. $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$ (найти только действительные корни).

Ответ. Если $0<a\leq 1$, то $x_{1,2}=\pm\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2$. При остальных a решений нет.

32. $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$, где $a>1$.

Ответ. $x=\frac{1+2a+\sqrt{1+4a}}{2}$.

33. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$, $a\neq 0$.

Ответ. Если $a\geq 1$, то уравнение имеет корень $x=\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$; если $a<1$, то корней нет.

34. Решить и исследовать в области действительных чисел уравнение $x+\sqrt{x(a-x)}=b$, где a и b — положительные параметры.

Ответ. 1) Не имеет решений, если $a<2(\sqrt{2}-1)b$; 2) имеет единственное решение $x=\frac{2b+a-\sqrt{a^2+4ab-4b^2}}{4}$, если $a>b$; 3) имеет два решения $x_1=\frac{2b+a-\sqrt{a^2+4ab-4b^2}}{4}$ и $x_2=\frac{2b+a+\sqrt{a^2+4ab-4b^2}}{4}$, если $2(\sqrt{2}-1)b<a\leq b$; 4) имеет единственное решение $x=\frac{\sqrt{2}}{2}b$, если $a=2(\sqrt{2}-1)b$.

Методом введения параметра решить уравнения:

35. $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x.$ Ответ. $x=\frac{7+\sqrt{13}}{2}.$

36. $\sqrt{5+\sqrt{5+x}}=x.$ Ответ. $x=\frac{1+\sqrt{21}}{2}.$

§ 6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Будем называть ***целой рациональной функцией*** (или ***многочленом***) функцию, определяемую целым рациональным выражением, т. е. выражением, составленным из аргументов и чисел с помощью только лишь действий сложения, вычитания и умножения (разрешается также деление на число, не равное нулю, поскольку такое деление сводится к умножению на число, обратное рассматриваемому).

Многочленом n-й степени от неизвестного x называется выражение вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \tag{1}$$

где $a_0\neq 0$, n — целое положительное число. Уравнение

$$P_n(x)=0 \tag{2}$$

называется ***целым алгебраическим***, а степень многочлена $P_n(x)$ — ***порядком*** этого уравнения.

Дробно-рациональной функцией

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \tag{3}$$

называется частное двух целых рациональных функций ($Q_m(x)\neq 0$), а уравнение

$$R(x)=0 \tag{4}$$

— ***рациональным алгебраическим уравнением.*** Для нахождения решения этого уравнения достаточно найти корни уравнения (2), которое является следствием данного. При этом корнями уравнения (4) будут все те корни уравнения (2), для которых $Q_m(x)\neq 0$. Значения x_0, при которых $Q_m(x)=0$, называются ***полюсами*** дробно-рациональной функции $R(x)$.

В курсе высшей алгебры доказывается, *что уравнение n-й степени* (2) *имеет n корней* (*действительных и комплексных*). Нас будут интересовать лишь действительные корни этого уравнения.

Для целых алгебраических уравнений степени не выше четвертой существуют формулы, которые позволяют с помощью конечного числа действий (сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня) получить решения этих уравнений. Для уравнений третьей и четвертой степеней эти формулы достаточно громоздки. Доказано, что для всякого n, начиная с $n = 5$, можно указать неразрешимые в радикалах уравнения n-й степени даже с целочисленными коэффициентами, т. е. для этих уравнений нельзя найти формулы, выражающие корни данного уравнения через коэффициенты с помощью некоторой комбинации радикалов.

Поэтому представляет интерес рассмотрение специальных приемов решения некоторых уравнений высших степеней.

Распространенными методами решения уравнений степени выше второй, являются: 1) метод разложения на множители; 2) метод замены неизвестного (метод подстановки).

1. Метод разложения на множители

Прежде чем рассмотреть применение метода разложения на множители к решению целого алгебраического уравнения, приведем ряд сведений теоретического характера.

Многочлен $\varphi(x)$ называется ***делителем*** многочлена $P(x)$, если существует такой многочлен $\psi(x)$, что

$$P(x) = \varphi(x)\psi(x). \tag{5}$$

Степень $\varphi(x)$, очевидно, не больше степени $P(x)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых двух многочленов $P(x)$ и $g(x)$ существуют такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что*

$$P(x) = g(x)q(x) + r(x), \tag{6}$$

причем степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$ или же $r(x) = 0$. Многочлены $q(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющие этому условию, определяются однозначно.

Многочлен $q(x)$ называется ***частным*** от деления $P(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ — ***остатком*** от этого деления.

Следствие. *Необходимым и достаточным условием делимости многочлена $P(x)$ на $g(x)$ является тождественное равенство нулю остатка.*

Доказательство. Необходимость. Если многочлен $P(x)$ делится на $g(x)$, то

$$P(x) = g(x)Q(x). \tag{7}$$

Сопоставляя равенства (7) и (6), получим $q(x) = Q(x)$ и $r(x) = 0$.

Достаточность. Пусть $r(x)=0$, тогда равенство (6) примет вид $P(x)=g(x)q(x)$, и, следовательно, $P(x)$ делится на $g(x)$, что и требовалось доказать.

Пусть дан многочлен $P_n(x)$ степени n $(n \geq 1)$ с действительными коэффициентами.

Многочлен $P_n(x)$ называется ***приводимым*** в области действительных чисел, если для $P_n(x)$ существуют делители, степень которых больше нуля, но меньше n, и ***неприводимым***, если таких делителей не существует.

Теорема 2. *Всякий многочлен $P_n(x)$ степени $n(n \geq 1)$ разлагается в произведение неприводимых множителей.*

Доказательство. Если многочлен $P_n(x)$ неприводим, то указанное произведение состоит всего из одного множителя. Если же он приводим, то его можно разложить в произведение множителей меньшей степени. В случае, когда среди этих множителей снова имеются приводимые, производим их дальнейшее разложение на множители и т. д. Этот процесс должен прекратиться после конечного числа шагов, так как при любом разложении $P_n(x)$ на множители сумма степеней этих множителей должна быть равна n и поэтому число множителей, зависящих от x, не может превосходить n.

Можно доказать, *что указанное разложение однозначно с точностью до множителей нулевой степени.*

Решение целого алгебраического уравнения n-й степени $P_n(x)=0$ методом разложения на множители основано на разложении многочлена $P_n(x)$ в произведение множителей (приводимых или неприводимых). Приравнивая нулю каждый из множителей в отдельности и решая полученные уравнения, определяем все корни исходного уравнения (см. § 1).

При этом оказывается полезным следующее утверждение, называемой ***теоремой Безу***.

Теорема 3. *Остаток от деления многочлена*

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

на $x-\alpha$ *равен значению этого многочлена при* $x=\alpha$, *т. е. равен числу* $P_n(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_n$.

Доказательство. Разделив многочлен $P_n(x)$ на $x-\alpha$, получим частное, которое обозначим через $q_{n-1}(x)$, и некоторый остаток $r(x)$. Этот остаток является многочленом, степень которого меньше степени делителя $x-\alpha$, т. е. равна нулю. Поэтому $r(x)=r$ является числом. Итак,

$$P_n(x) = (x-\alpha)\, q_{n-1}(x) + r. \tag{8}$$

Чтобы найти число r, положим в этом равенстве $x = \alpha$ и получим $P_n(\alpha) = r$. Теорема Безу доказана.

Следствие. *Если число α является корнем многочлена $P_n(x)$ (т. е. если $P_n(\alpha) = 0$), то этот многочлен без остатка делится на $x - \alpha$.*

Например, отсюда следует, что многочлен $x^n - a^n$ делится без остатка на $x - a$. В самом деле, заменяя x на a, получаем $P_n(a) = a^n - a^n = 0$. Таким образом,

$$x^n - a^n = (x-a)\, q_{n-1}(x), \tag{9}$$

где многочлен $q_{n-1}(x)$ имеет вид

$$q_{n-1}(x) = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1} x + c_n. \tag{10}$$

Для нахождения коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ необходимо подставить выражение (10) для многочлена $q_{n-1}(x)$ в равенство (9). Имеем

$$x^n - a^n = (x-a)(c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1} x + c_n) =$$

$$= c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x^2 + c_n x - ac_1 x^{n-1} - \ldots - ac_{n-2} x^2 - ac_{n-1} x - ac_n,$$

т. е.

$$x^n - a^n = c_1 x^n + (c_2 - ac_1) x^{n-1} + \ldots +$$

$$+ (c_{n-1} - ac_{n-2}) x^2 + (c_n - ac_{n-1}) x - ac_n. \tag{11}$$

По определению, два многочлена считаются равными (или тождественно равными) в том случае, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в многочленах, стоящих в левой и правой частях равенства (11), получим $c_k = ac_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$, т. е.

$$c_1 = 1,\ c_2 = a, \ldots,\ c_{n-1} = a^{n-2},\ c_n = a^{n-1}.$$

Таким образом, имеет место следующая формула:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2} x + a^{n-1}). \tag{12}$$

Следствие из теоремы Безу часто используется для нахождения корней многочлена n-й степени: *если известен один корень этого многочлена, то задачу можно свести к нахождению корней многочлена степени на единицу меньше.*

При нахождении целых корней многочленов с целыми коэффициентами применяется следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть все коэффициенты многочлена*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

являются целыми числами и α ***— целый корень этого многочлена. Тогда*** α ***является делителем свободного члена*** a_n.

В самом деле, по условию имеем

$$P_n(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

и, значит,

$$a_n = -\alpha(a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}).$$

Поскольку выражение в скобках является целым числом (все коэффициенты a_k, так же как и число α, — целые), свободный член a_n делится на α.

Итак, в силу доказанного, *для отыскания целых корней многочлена с целыми коэффициентами надо взять свободный член многочлена и выписать все его делители* (как положительные, так и отрицательные). *После этого, подставляя найденные делители в многочлен, проверить, какие из них обращают его в нуль.* Если же окажется, что ни один делитель свободного члена не обращает многочлен в нуль, то этот многочлен не имеет целых корней.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0.$$

Решение. Непосредственная проверка показывает, что число $x = 2$ (один из делителей числа 30) является корнем данного уравнения, так как

$$P_3(2) = 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 2 - 30 = 0.$$

Тогда на основании следствия из теоремы Безу многочлен в левой части уравнения делится на $x - 2$:

$$x^3 - 2x^2 + 8x^2 - 16x + 15x - 30 = (x-2)(x^2 + 8x + 15).$$

Далее, разлагая квадратный трехчлен в произведение неприводимых множителей, получим

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x-2)(x+3)(x+5) = 0.$$

Ответ. $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -5.$

Отыскание рациональных корней многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами сводится к отысканию целых корней некоторого другого многочлена, также имеющего целые коэффициенты. Для этого умножим многочлен $P_n(x)$ на a_0^{n-1} (от этого его корни не изменятся) и положим $a_0 x = y$. Тогда получим приведенный многочлен (т. е. многочлен, у которого коэффициент при старшем члене равен 1)

$$Q_n(y) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 a_0 y^{n-2} + \ldots + a_n a_0^{n-1}$$

с целыми коэффициентами. Нетрудно доказать, что если многочлен $Q(y)$ имеет рациональный корень, то этот корень обязательно является целым.

Часто при разложении на множители левой части уравнения, содержащего параметры, используют следующий прием: решают это уравнение относительно одного из параметров, временно считая его неизвестным, а остальные величины, входящие в уравнение, известными.

Пример 2. *Для каждого действительного положительного числа a решить уравнение*

$$x^4+x^3-3ax^2-2ax+2a^2=0.$$

Решение. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно a:

$$2a^2-(3x^2+2x)a+x^4+x^3=0$$

и найдем его корни

$$a_1=x^2+x,\ a_2=\frac{x^2}{2}.$$

Далее, разлагая левую часть исходного уравнения на множители, получим

$$[a-(x^2+x)]\cdot\left(a-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

откуда легко найти корни данного уравнения.

Ответ. $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{2a}$.

2. Метод замены неизвестного (метод подстановки)

Проиллюстрируем этот метод на примере уравнения вида

$$A[f(x)]^2+B[f(x)]+C=0,\ A\neq 0.$$

Подстановкой $f(x)=t$ оно сводится к решению двух уравнений

$$f(x)=t_1 \text{ и } f(x)=t_2,$$

где t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения

$$At^2+Bt+C=0.$$

Пример 3. *Решить уравнение*

$$x^4+a^4-3ax^3+3a^3x=0 \ (a \text{ — некоторое число}).$$

Решение. Сгруппируем члены уравнения следующим образом:

$$(x^2-a^2)^2-3ax(x^2-a^2)+2a^2x^2=0. \qquad (13)$$

Разделим теперь обе части уравнения на a^2x^2 (это можно сделать при $a \neq 0$, так как $x = 0$ не является при этом решением уравнения, т. е. $ax \neq 0$):

$$\left(\frac{x^2-a^2}{ax}\right)^2 - 3\left(\frac{x^2-a^2}{ax}\right) + 2 = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $\frac{x^2-a^2}{ax}$, имеющее корни 1 и 2. Итак, остается решить два уравнения:

$$\frac{x^2-a^2}{ax} = 1 \text{ и } \frac{x^2-a^2}{ax} = 2.$$

При $a = 0$ получаем решение $x = 0$.

Ответ. $x_{1,2} = a\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x_{3,4} = a(1 \pm \sqrt{2})$ при $a \neq 0$; $x = 0$ при $a = 0$.

Замечание. Уравнение (13) можно решить также, рассматривая его как квадратное относительно $ax = t$:

$$2t^2 - 3t(x^2 - a^2) + (x^2 - a^2)^2 = 0$$

(см. метод введения параметра в п. 5).

3. Возвратные уравнения

Алгебраическое уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{14}$$

коэффициенты которого связаны соотношением $a_k = a_{n-k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), называется ***возвратным***.

Возвратные уравнения нечетной степени имеют корень $x = -1$. Поэтому в силу следствия из теоремы Безу их решение сводится к решению уравнений степени на единицу меньше. Можно доказать, что полученные при этом уравнения также будут возвратными. В частности,

$$P_5(x) = (x+1)P_4(x),$$

где

$$P_4(x) = a_0x^4 + (a_1 - a_0)x^3 + (a_2 - a_1 + a_0)x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0.$$

Итак, задача сводится в нахождению корней возвратного уравнения четной степени.

Метод решения возвратных уравнений рассмотрим на примере уравнения четвертой степени:

$$P_4(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\ (a_0 \neq 0). \tag{15}$$

Разделив обе части уравнения на $x^2 (x \neq 0)$ и сгруппировав члены с одинаковыми коэффициентами, получим

$$a_0\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_2 = 0. \tag{16}$$

Введем новое неизвестное

$$y = x + \frac{1}{x},$$

причем

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = y^2 - 2.$$

Тогда уравнение (16) примет вид

$$a_0(y^2 - 2) + a_1y + a_2 = 0.$$

Пусть $y = y_1$, $y = y_2$ — его решения; тогда, воспользовавшись снова указанной подстановкой, найдем все корни исходного уравнения четвертой степени.

Пример 4. *Решить возвратное уравнение*

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Решение. Пусть $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда, разделив на x^2 и сгруппировав члены с одинаковыми коэффициентами, приведем исходное уравнение к следующему виду:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0,$$

или

$$y^2 - 6y + 8 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни $y_1 = 2$, $y_2 = 4$. Следовательно, если $x + \frac{1}{x} = 2$, т. е. $x^2 - 2x + 1 = 0$, то $x_{1,2} = 1$; если $x + \frac{1}{x} = 4$, т. е. $x^2 - 4x + 1 = 0$, то $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Ответ. $x_{1,2} = 1$; $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$.

4. Трехчленные уравнения

Трехчленными уравнениями называют уравнения вида

$$ax^{2n}+bx^n+c=0 \ (a\neq 0;\ n=1,2,\ldots). \tag{17}$$

При $n=2$ уравнение (17) называют ***биквадратным***.

С помощью замены $x^n=y$ трехчленное уравнение (17) сводится к квадратному уравнению

$$ay^2+by+c=0.$$

Пусть y_1 и y_2 — его корни; тогда для определения x получим два двучленных уравнения n-й степени:

$$x^n=y_1,\ x^n=y_2.$$

Биквадратное уравнение

$$x^4+bx^2+c=0 \tag{18}$$

можно решить несколькими способами:

1. Заменой $x^2=y$, приводящей его к квадратному уравнению

$$y^2+by+c=0.$$

2. Методом выделения полного квадрата в случае, когда

$$b<2\sqrt{c}\ (c>0).$$

При этом решение биквадратного уравнения (18) сводится к решению двух квадратных. Действительно,

$$x^4+bx^2+c=(x^4+c)+bx^2=(x^4+2\sqrt{c}x^2+c)-(2\sqrt{c}-b)x^2=$$

$$=(x^2+\sqrt{c})^2-(2\sqrt{c}-b)x^2=$$

$$=\left(x^2+x\sqrt{2\sqrt{c}-b}+\sqrt{c}\right)\left(x^2-x\sqrt{2\sqrt{c}-b}+\sqrt{c}\right)=0.$$

3. Наконец, в случае, когда $c>0$, применяется тот же самый прием, что и при решении возвратного уравнения. А именно, разделив обе части уравнения (18) на x^2, получим

$$x^2+\frac{c}{x^2}+b=0.$$

Последнее уравнение подстановкой $x+\dfrac{\sqrt{c}}{x}=y$ приводится в квадратному.

Следует заметить, что описанный прием особенно удобен, когда c является квадратом рационального числа.

П р и м е р 5. *Определить все действительные значения а, при каждом из которых уравнение*

$$x^4-(a+2)x^2-(a+3)=0$$

имеет действительные решения, и найти все эти решения.

Р е ш е н и е. С помощью подстановки $x^2=t$ $(t\geq 0)$ рассматриваемое биквадратное уравнение приводится к смешанной системе

$$\begin{cases} t^2-(a+2)t-(a+3)=0, \\ t\geq 0, \end{cases}$$

которая имеет решение $t=a+3$ при $a\geq -3$.

Воспользовавшись снова указанной подстановкой, получим

$$x^2=a+3,\ a\geq -3,$$

откуда

$$x_1=\sqrt{a+3},\ x_2=-\sqrt{a+3}.$$

О т в е т. $a\geq -3$, $x=\pm\sqrt{a+3}$.

5. Метод введения параметра

Рассмотрим уравнение

$$f(x,\ t)=0, \tag{19}$$

где $x\in X$, а $t\in T$. Выберем и зафиксируем какое-нибудь определенное значение переменной *t* из множества *T*. Тогда левая часть уравнения (19), т. е. $f(x,\ t)$, станет функцией одной переменной, определенной на множестве *X*. Решение этого уравнения, вообще говоря, зависит от выбранного нами значения переменной *t*, принимает определенное значение при каждом таком выборе и, вообще говоря, изменяется при изменении *t*. Таким образом, оно является функцией от *t*, определенной на множестве *T*. Обозначим это решение через $x_0(t)$, так что

$$f[x_0\ (t),\ t]=0,\ t\in T. \tag{20}$$

Переменную *t*, от которой зависит функция $f(x,\ t)$, но которая при решении уравнения считается постоянной величиной, называют ***параметром***. От выбранного значения такого параметра зависит решение $x_0(t)$ уравнения (19).

Если *t* есть функция от *x*, то такой параметр будем называть ***функциональным***.

Возможен случай, когда левая часть уравнения

$$f(x, t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \tag{21}$$

представляет собой функцию, зависящую от целого ряда параметров $t_1, t_2, \dots, t_n$. В этом случае решение $x_0(t_1, t_2, \dots, t_n)$ уравнения (21) является функцией всей совокупности этих параметров.

Иногда бывает задано такое уравнение, которое никаких параметров не содержит, но для его решения целесообразно рассматривать это уравнение в связи с некоторым другим, содержащим один или несколько параметров, и из решения этого последнего уравнения находить решение данного.

Введение параметра как числового, так и функционального может оказаться достаточно эффективным при решении уравнений.

Пример 6. *Решить уравнение*

$$x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0.$$

Решение. Будем рассматривать левую часть данного уравнения как функцию

$$f(x, a) = x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a \text{ при } a = \sqrt{2}.$$

Уравнение $f(x, a) = 0$ является квадратным относительно параметра a. Найдем его корни:

$$a_1 = x^2 + x + 1 \text{ и } a_2 = x^2 - x.$$

Следовательно, имеет место разложение

$$f(x, a) = (a - x^2 - x - 1)\,(a - x^2 + x)$$

или при $a = \sqrt{2}$:

$$f(x, \sqrt{2}) = (\sqrt{2} - x^2 - x - 1)(\sqrt{2} - x^2 + x).$$

Поэтому для отыскания корней исходного уравнения достаточно решить два квадратных уравнения:

$$x^2 + x + 1 - \sqrt{2} = 0 \text{ и } x^2 - x - \sqrt{2} = 0.$$

Ответ. $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}$; $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2}$.

Пример 7. *Найти действительные корни уравнения*

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0. \tag{22}$$

Решение. Введем функциональный параметр

$$x^4 - 1 = t \tag{23}$$

и будем рассматривать данное уравнение как квадратное относительно x:

$$x^2 - 2x - t = 0,$$

или

$$(x-x_1)(x-x_2)=0, \tag{24}$$

где $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+t}$. Воспользовавшись подстановкой (23), получим

$$x_1=1+x^2,\quad x_2=1-x^2.$$

Поэтому левую часть уравнения (24) можно разложить на множители следующим образом:

$$(x-1-x^2)(x-1+x^2)=0. \tag{25}$$

Полученное уравнение (25), а значит, и исходное уравнение (22) эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$x^2-x+1=0 \text{ и } x^2+x-1=0.$$

Первое из них действительных корней не имеет, а корнями второго являются числа $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Рассмотрим ***метод Феррари***, позволяющий с помощью параметра свести решение уравнения четвертой степени

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0 \tag{26}$$

с произвольными (действительными или комплексными) коэффициентами к решению некоторого вспомогательного кубического уравнения.

Используя подстановку

$$y=x-\frac{a}{4}, \tag{27}$$

приведем уравнение к виду

$$x^4+px^2+qx+r=0. \tag{28}$$

Вводя вспомогательный параметр t, преобразуем левую часть уравнения (28) следующим образом:

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\frac{p}{2}+t\right)^2+qx+r-\frac{p^2}{4}-t^2-2tx^2-pt,$$

или

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+t\right)^2-\left[2tx^2-qx+\left(t^2+pt-r+\frac{p^2}{4}\right)\right]=0. \tag{29}$$

Выберем теперь параметр t так, чтобы многочлен в квадратных скобках (являющийся квадратным трехчленом относительно x), стал полным квадратом. Необходимым и достаточным условием этого является равенство нулю его дискриминанта:

$$q^2-4\cdot 2t\left(t^2+pt-r+\frac{p^2}{4}\right)=0. \qquad (30)$$

Полученное равенство (30) является кубическим уравнением относительно неизвестного t. Пусть t_0 — один из корней этого уравнения. При этом значении t_0 уравнение (29) принимает вид

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+t_0\right)^2-2t_0\left(x-\frac{q}{4t_0}\right)^2=0$$

и эквивалентно совокупности двух квадратных уравнений:

$$x^2-\sqrt{2t_0}\,x+\left(\frac{p}{2}+t_0+\frac{q}{2\sqrt{2t_0}}\right)=0,$$

$$x^2+\sqrt{2t_0}\,x+\left(\frac{p}{2}+t_0-\frac{q}{2\sqrt{2t_0}}\right)=0.$$

Решив эти квадратные уравнения и воспользовавшись подстановкой (27), найдем корни исходного уравнения (26).

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $|x-2|\cdot|x+3|\cdot|x+6|=|x+1|\cdot|x+4|\cdot|x+9|$.

Ответ. $x_{1,2}=\dfrac{-49\pm\sqrt{385}}{14}$, $x_3=0$, $x_4=-7$, $x_5=-\dfrac{7}{2}$.

2. $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$.

Ответ. $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{1}{2}$, $x_3=2$, $x_{4,5}=-2\pm\sqrt{3}$.

3. $2x^4+2x^2+3=0$.

Ответ. $x_{1,2}=\dfrac{-\sqrt{\sqrt{6}-1}\pm\sqrt{\sqrt{6}-1-4\sqrt{\dfrac{3}{2}}}}{2}$,

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{\sqrt{6}-1}\pm\sqrt{\sqrt{6}-1-4\sqrt{\dfrac{3}{2}}}}{2}.$$

4. $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$. Указание. Положить $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=t$.

Ответ. $x_{1,2}=3\pm\sqrt{21}$, $x_3=6$, $x_4=-2$.

5. $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$.

Ответ. $x_1=\sqrt{2}$, $x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$.

6. $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$.

Ответ. $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

Найти действительные решения уравнений:

7. $x^4+(x-4)^4=82$.

Ответ. $x_1=1$, $x_2=3$.

8. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

Ответ. $x_1=-1$, $x_2=12$.

9. $2x^3+x+\sqrt{2}=0$.

Ответ. $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. Определить все такие целые числа a и b, для которых один из корней уравнения $3x^3+ax^2+bx+12=0$ равен $1+\sqrt{3}$.

Ответ. $a=-12$, $b=6$.

11. При каких a и α многочлен x^3+ax+1 делится на двучлен $x-\alpha$ без остатка и частное от деления положительно при всех x?

Ответ. $-\sqrt[3]{4}<\alpha<0$, $a=-\frac{1+\alpha^3}{\alpha}$.

§ 7. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Многие варианты письменных экзаменационных работ по математике для поступающих на естественные факультеты Московского государственного университета содержат текстовые задачи на составление уравнений (или неравенств).

В данном параграфе рассматриваются примеры решения различных текстовых задач на составление уравнений. Более подробно мы коснемся методики решения задач на линейный пространственно-временной процесс, поскольку задачи этого типа встречаются чаще всего. Однако это не должно ориентировать поступающих на задачи только такого типа.

Ввиду большого многообразия задач, решаемых с помощью уравнений, нельзя дать общего способа решения этих задач. Каждая из них требует индивидуального подхода и часто способ, который применялся для решения одной задачи, оказывается непригодным для решения другой.

Как правило, процесс решения текстовых задач на составление уравнений состоит из четырех частей: *составления уравнений, их решения, проверки и исследования.* Наиболее трудным является составление уравнений, связывающих неизвестные величины, т. е. искомые величины или другие, зная которые, можно определить искомые. При этом большое значение имеет удачный выбор неизвестных величин, обозначаемых буквами, а также выбор независимых соотношений, на основе которых составляются уравнения, так как от этого выбора в первую очередь зависит характер уравнения или системы уравнений, при решении которых находятся неизвестные величины.

<u>При выборе неизвестных величин</u> необходимо иметь в виду следующее:

1. Естественно принять в качестве неизвестных искомые величины. Указанный выбор неизвестных величин широко применяется в школьной практике. Однако во многих задачах получение системы уравнений, связывающих эти величины, сопряжено со значительными трудностями.

2. Система уравнений получается иногда значительно проще, если в качестве неизвестных ввести не искомые величины, а те, зная которые, мы сможем определить искомые.

3. Наконец, процесс составления системы уравнений сильно упрощается, если в качестве неизвестных наряду с искомыми ввести также другие величины, которые не нужно находить по условию задачи. Этот способ выбора неизвестных величин будет в дальнейшем часто использоваться при составлении системы уравнений и получении из нее необходимых соотношений для определения искомых величин.

Всякое решение требует еще и проверки его по смыслу задачи. Поэтому необходимо исследование полученных решений.

Для решения многих текстовых задач оказывается достаточно удобным предлагаемый ниже способ составления системы уравнений. Остановимся на математической постановке задач, связанных с <u>линейным пространственно-временным процессом</u>. При составлении полной системы уравнений, описывающей данный процесс с учетом всех дополнительных условий, используется кинематический подход. Он заключается в том, что для каждого участника процесса и для каждой рассматриваемой в задаче ситуации записывается <u>*уравнение движения*</u>. К полученным уравнениям добавляются *уравнения связи* или другие соотношения, учитывающие дополнительные условия задачи.

Из полученной таким образом системы уравнений достаточно просто выделить необходимые соотношения для определения искомых величин. Непосредственное нахождение этих соотношений с помощью умозаключений часто вызывает у учащихся большие трудности, а иногда приводит к ошибкам.

Указанная методика составления уравнений обладает достаточной общностью и особенно полезна при решении физических задач, где пространственно-временные связи задаются не только линейными, но и более сложными уравнениями (например, квадратными в случае равнопеременного движения).

Изложим сущность предлагаемой методики составления уравнений.

Известно, что линейный по времени процесс можно описать уравнением вида

$$s = vt, \tag{1}$$

где t — длительность процесса, v — его скорость.

Например, если s означает путь, т. е. сумму всех расстояний, пройденных телом вдоль траектории его движения, а v — величину скорости, то уравнение (1) определяет закон пути и называется в кинематике уравнением равномерного движения. Уравнение (1) может также описывать работу s, совершенную за время t. Этим же уравнением характеризуется процесс заполнения резервуара жидкостью; при этом s определяет количество жидкости, вливающейся в резервуар за время t, а v — количество жидкости за единицу времени. Функция s в уравнении (1) может определять и площадь, вспахиваемую трактором за время t, если за единицу времени он вспахивает площадь размером v.

Можно привести еще много других примеров, которые описываются функциональной зависимостью (1).

Для составления уравнений в текстовых задачах на линейный по времени процесс, необходимо записать уравнение (1) для каждого из рассматриваемых в задаче случаев и для каждого участника этого процесса (равномерно движущегося тела; трактора, вспахивающего поле, и т. д.).

К написанным уравнениям необходимо присоединить еще уравнения и неравенства, задающие дополнительные условия задачи. Полученная система уравнений с дополнительными условиями полностью определяет решение исходной задачи.

Как правило, если выразить одни неизвестные через другие, то удается понизить порядок этой системы и решить ее. Полученная при этом система уравнений может быть следствием исходной. Поэтому проверка ее решений является логически необходимой. Найденные решения исходной системы уравнений, удовлетворяющие всем дополнительным условиям, дадут решение рассматриваемой задачи.

При решении текстовых задач <u>на движение</u> оказывается эффективным координатно-параметрический метод (КП–метод).

П р и м е р 1. *Автомобиль прошел расстояние между двумя городами за T часов, причем первую половину пути он двигался со скоростью v_1 км/ч, а вторую — со скоростью v_2 км/ч. Определить расстояние между городами.*

Р е ш е н и е. Пусть s (км) — расстояние между городами, t_1 (ч)—время, за которое автомобиль прошел первую половину пути, t_2 (ч) —время, за которое автомобиль прошел вторую половину пути.

Запишем уравнения движения автомобиля:

$$\frac{s}{2} = v_1 t_1, \tag{2}$$

$$\frac{s}{2} = v_2 t_2 \tag{3}$$

и условие связи:

$$t_1 + t_2 = T. \tag{4}$$

Таким образом, мы имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными s, t_1 и t_2. Для нахождения искомой величины s исключим из полученной системы t_1 и t_2. Для этого выразим t_1 и t_2 из уравнений (2) и (3) и, воспользовавшись уравнением (4), получим

$$\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = T,$$

откуда находим

$$s = \frac{2T}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2 T}{v_1 + v_2}.$$

О т в е т. $\dfrac{2v_1 v_2 T}{v_1 + v_2}$ км.

П р и м е р 2. *Из города А в город В, расстояние между которыми 200 км, мотоциклист ехал 6 ч. Сначала он двигался со скоростью v_1, превышающей 15 км/ч, а потом со скоростью v_2, причем время движения с каждой скоростью пропорционально этой скорости. Через 4 ч после выезда мотоциклист был в 120 км от города А. Определить скорости v_1 и v_2.*

Р е ш е н и е. Пусть время движения мотоциклиста со скоростью v_1 $(v_1 > 15)$ равно t_1 (ч), а со скоростью v_2 равно t_2 (ч). Тогда, согласно условию, запишем следующие уравнения:

$$200 = v_1 t_1 + v_2 t_2, \tag{5}$$

$$t_1 + t_2 = 6, \qquad (6)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2} \ (v_1 > 15). \qquad (7)$$

Для того чтобы записать четвертое уравнение, выражающее тот факт, что через 4 ч после выезда мотоциклист был в 120 км от города A, необходимо рассмотреть два случая: 1) $4 \le t_1 < 6$; 2) $0 < t_1 < 4$. На КП–плоскости tAx изображены две возможные зависимости координаты x от времени t (рис. 103, *а* и *б*).

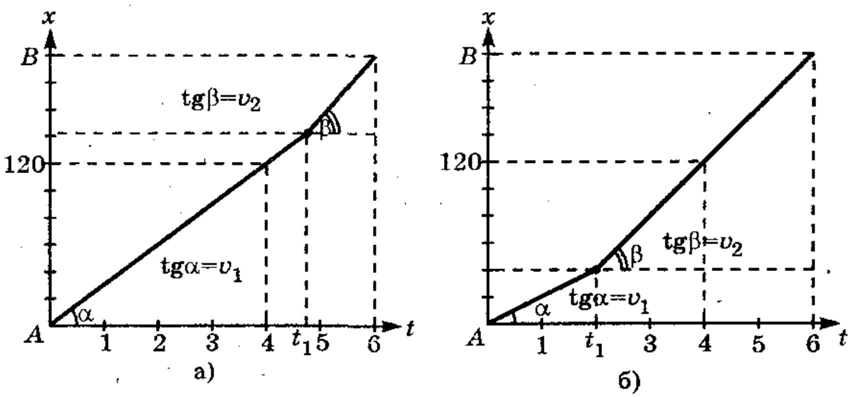


Рис. 103

В первом случае искомое уравнение имеет вид

$$120 = 4v_1, \qquad (8)$$

откуда $v_1 = 30$ (км/ч). Исключив из уравнений (5)–(7) v_2 и t_2, получим для t_1 квадратное уравнение

$$3t_1^2 - 28t_1 + 54 = 0.$$

Корни этого уравнения не удовлетворяют условию $4 \le t_1 < 6$, и, следовательно, первый случай не имеет места.

Во втором случае искомое уравнение имеет вид

$$120 = v_1 t_1 + v_2(4 - t_1), \qquad (9)$$

откуда с учетом уравнений (5) и (6) находим $v_2 = 40$ (км/ч)

Следовательно, $t_1 = 2$ и $v_1 = 20$ (км/ч).

Ответ. $v_1 = 20$ км/ч, $v_2 = 40$ км/ч.

Рассмотрим пример задачи на смеси.

Пример 3. *В двух сосудах имеется вода разной температуры. Из этой воды составляют смеси. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно* 1 : 3, *то температура смеси будет* 49°, *а если это отношение равно* 2 : 5, *то температура смеси будет* 48°. *Найти первоначальную температуру воды в каждом сосуде*(*считая, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры*).

Решение. Пусть: x — температура воды в первом сосуде; y — температура воды во втором сосуде; V_1 — объем воды, взятой из первого сосуда в первом случае; V_2 — объем воды, взятой из второго сосуда в первом случае; V_1' — объем воды,взятой из первого сосуда во втором случае; V_2' — объем воды, взятой из второго сосуда во втором случае.

Запишем *уравнения теплового баланса*:

$$V_1x+V_2y=(V_1+V_2)\cdot 49,\ V_2=3V_1,$$

$$V_1'x+V_2'y=(V_1'+V_2')\cdot 48,\ V_2'=\frac{5}{2}V_1'.$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} x+3y=196, \\ 2x+5y=336, \end{cases}$$

откуда $x=28$, $y=56$.

Ответ. Температера воды в первом сосуде 28°, во втором — 56°.

Приведем примеры задач, где при составлении уравнения используется понятие концентрации.

Пример 4. *В сосуд вместимостью* 6 *л налито* 4 *л* 70%-*ного* (*по объему*) *раствора серной кислоты; во второй сосуд той же вместимости налито* 3 *л* 90%-*ного раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился* r%-*ный раствор серной кислоты? Найти все* r, *при которых задача имеет решение.*

Решение. *Объемной концентрацией* C кислоты в растворе называют отношение объема чистой кислоты ко всему объему раствора (часто это отношение выражают в процентах); по определению $0<C\le 1$ (или в процентах $0<C\le 100\%$).

Пусть из второго сосуда в первый перелито x л раствора. Учитывая то, что в первом сосуде содержится $0{,}7\cdot 4=2{,}8$ (л) чистой кислоты, условия задачи можно записать в виде следующей смешанной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{2{,}8+0{,}9x}{4+x}\cdot 100 = r, & (10)\\ 0 \le x \le 2. & (11) \end{cases}$$

Неравенства (11) этой системы означают, что в первый сосуд можно перелить не более 2 л раствора кислоты из второго сосуда, поскольку вместимость первого сосуда составляет 6 л.

Из уравнения (10) следует, что

$$(90-r)x = 4r-280,$$

откуда ($r<90$, так как концентрация кислоты в первом сосуде меньше концентрации кислоты во втором сосуде) получаем

$$x = \frac{4(r-70)}{90-r}. \qquad (12)$$

Из неравенств (11) находим значения r, при которых задача имеет решение:

$$0 \le \frac{4(r-70)}{90-r} \le 2,$$

т. е.

$$70 \le r \le \frac{230}{3} \qquad (13)$$

($r = 70\%$ означает, что в первый сосуд ничего не переливается, т. е. $x=0$, а $r=\frac{230}{3}\%=76\frac{2}{3}\%$ соответствует полному заполнению сосуда, т. е. $x=2$).

Ответ. $\dfrac{4(r-70)}{90-r}$ л; $70 \le r \le 76\frac{2}{3}$.

Пример 5. *Сосуд содержит p%-ный раствор кислоты. Из него отлили a л и добавили то же количество q%-ного раствора кислоты ($q<p$). Затем после перемешивания эту операцию повторили еще раз, после чего получился раствор крепостью r%. Найти объем сосуда.*

Решение. Обозначим объем сосуда через V. Пусть α — процентное содержание кислоты в сосуде после первого перемешивания. Тогда, согласно условию, имеем систему уравнений

$$\frac{(V-a)p+aq}{V}=\alpha,\ \frac{(V-a)\alpha+aq}{V}=r.$$

Введя неизвестное $x=\dfrac{a}{V}$, перепишем эту систему следующим образом:

$$(1-x)p+xq=\alpha,\ (1-x)\alpha+xq=r.$$

Подставив выражение для α из первого уравнения во второе, получим

$$(1-x)[(1-x)p+xq]+xq=r,$$

или

$$(1-x)[(1-x)p-(1-x)q+q]+xq=r,$$

или

$$(1-x)^2 p-(1-x)^2 q+(1-x)q+xq=r,$$

или

$$(1-x)^2(p-q)=r-q,$$

откуда

$$(1-x)^2=\frac{r-q}{p-q},\ 1-x=\sqrt{\frac{r-q}{p-q}},\ x=1-\sqrt{\frac{r-q}{p-q}}.$$

Ответ. $V=\dfrac{a}{1-\sqrt{\dfrac{r-q}{p-q}}}$ л.

Рассмотрим пример задачи на проценты.

Пример 6. *Продают три куска ткани. Из первого продали половину, из второго* $\frac{2}{3}$, *а третий кусок, в котором была треть всей ткани, продали полностью. Сколько процентов ткани продано, если всего осталось вдвое меньше, чем было во втором куске?*

Решение. Примем за 1 все количество ткани. Пусть x_1, x_2 и x_3 — части общего количества ткани, содержащиеся соответственно в первом, втором и третьем куске $\left(\text{причем } x_3=\frac{1}{3}\right)$.

По условию продано $\left(1-\frac{1}{2}x_2\right)$ м ткани. Искомое процентное содержание равно отношению количества проданной ткани к общему количеству ткани, выраженному в процентах, т. е.

$$x=\frac{1-\frac{1}{2}x_2}{1}\cdot 100\%.$$

Для определения x_2 из условий задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+\frac{1}{3}=1, \\ \frac{1}{2}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x_2=1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1+x_2=\frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}x_1+\frac{7}{6}x_2=\frac{2}{3}, \end{cases}$$

откуда находим $x_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$x = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot 100\% = 75\%.$$

Ответ. 75%.

Рассмотрим примеры задач, где неизвестные величины определяются при решении неравенств.

Пример 7. *Три пункта A, B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$; к отрезку дороги BC — квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку дороги AC — прямоугольный участок леса длиной, равной AC, и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км² больше суммы площадей квадратных полей. Найти площади леса и полей.*

Решение. Пусть $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$. Из условий задачи и из геометрических соображений следует:

$$4z = \frac{1}{4}x^2 + y^2 + 20, \tag{14}$$

$$x + y \geq z, \tag{15}$$

откуда

$$4x + 4y \geq \frac{1}{4}x^2 + y^2 + 20,$$

или

$$\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2 + (y-2)^2 \leq 0.$$

Следовательно, $x = 8$, $y = 2$. Из уравнения (14) находим $z = 10$. При этих значениях x, y и z условие (15) выполнено: $x + y = z$.

Остается найти искомые площади; площадь леса $4z = 40$ км² и площади полей: $\frac{1}{4}x^2 = 16$ км², $y^2 = 4$ км².

Ответ. 40 км², 16 км², 4км².

Пример 8. *Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, то такая же покупка стоила бы 80 р. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то за такую же покупку школьник уплатил бы*

120 *р. Сколько стоит покупка и за что было уплачено больше: за портфель или за авторучку?*

Решение. Пусть x, y и z — стоимости портфеля, авторучки и книги соответственно. Тогда стоимость покупки есть $x+y+z$ и условия задачи приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y+\frac{2}{5}z=80, \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{3}z=120. \end{cases}$$

Эта неопределенная система, и ее решение (относительно x, y) таково:

$$x=200-\frac{1}{3}z,\ \ y=80-\frac{2}{3}z,$$

где z произвольно. Таким образом, стоимости портфеля, авторучки и книги в отдельности условиями задачи не определяются. Однако стоимость всей покупки определяется однозначно:

$$x+y+z=\left(200-\frac{1}{3}z\right)+\left(80-\frac{2}{3}z\right)+z=280.$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, достаточно определить знак разности

$$x-y=\left(200-\frac{1}{3}z\right)-\left(80-\frac{2}{3}z\right)=120+\frac{1}{3}z.$$

Поскольку число z положительно, заключаем, что $x>y$. Таким образом, портфель дороже авторучки.

Ответ. 280 р.; за портфель уплачено больше.

Пример 9. *Из города A в город B, находящийся на расстоянии* 105 *км от A, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через* 30 *мин вслед за ним из A со скоростью* 40 *км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v, при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B.*

Решение. Пусть t_1 (ч) — время движения автомобиля до встречи с автобусом; s (км) — расстояние от города A до места встречи ($s<105$); Δt (ч) — разность между временем возвращения в A автомобиля и временем прихода автобуса в B (по условию $\Delta t>0$).

Изобразим на КП– плоскости tAx графики зависимостей от времени координат автобуса и автомобиля (рис. 104).

Уравнения движения автомобиля и автобуса, записанные для момента встречи автомобиля с автобусом, имеют вид

$$s = 40t_1,\ s = v\left(t_1 + \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда находим

$$t_1 = \frac{v}{2(40-v)},\ s = \frac{20v}{40-v}.$$

Решив систему неравенств

$$\begin{cases} s < 105, \\ \Delta t = \left(\dfrac{1}{2} + 2t_1\right) - \dfrac{105}{v} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{20v}{40-v} < 105, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{v}{40-v} - \dfrac{105}{v} > 0, \end{cases}$$

получим множество искомых значений v.

Ответ. $30 < v < 33{,}6$ (км/ч).

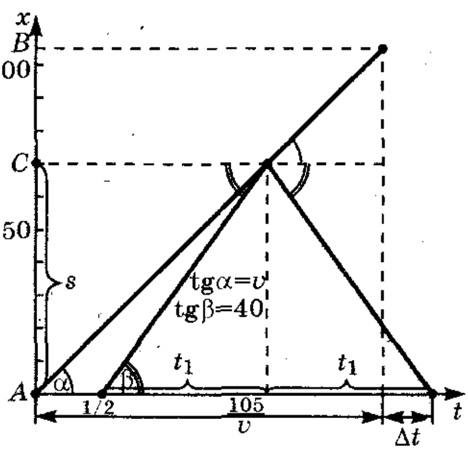


Рис. 104

Рассмотрим пример задачи, приводящей к решению уравнения в целых числах.

Пример 10. *Несколько автобусов везут детей в спортивный лагерь. В каждом автобусе одинаковое число детей, причем девочек не менее чем на 5 больше, чем мальчиков. Если бы число мальчиков в автобусе было бы прежним, а девочек — в 2 раза больше, то общее число детей во всех автобусах составляло бы 99, причем число девочек в автобусе превосходило бы число мальчиков менее чем на 23. Определить, сколько всего было автобусов и сколько в каждом автобусе было мальчиков и девочек.*

Решение. Обозначим через x число мальчиков в автобусе, через y — число девочек в автобусе, через z — число автобусов. По условию имеем:

$$x > 0,\ y > 0,\ z > 1, \tag{16}$$

$$y \geq x + 5, \tag{17}$$

$$(x + 2y)z = 99, \tag{18}$$

$$2y - x < 23. \tag{19}$$

Требуется найти в натуральных числах решение смешанной системы (16)–(19).

Из уравнения (18) следует, что числа $z\,(z > 1)$ и $x + 2y$ должны быть одним из следующих натуральных делителей числа 99:

$$3,\ 9,\ 11,\ 33.$$

Так как $y > 5$ в силу неравенства (17), то $x + 2y > 11$ (т. е. $x + 2y = 33$, либо $x + 2y = 99$). *Отсюда следует, что* $z = 3$ *или* $z = 1$; *последнее противоречит* неравенствам (16). Значит,

$$x + 2y = 33. \tag{20}$$

Найдем целочисленные решения уравнения (20). Имеем

$$x = 33 - 2y.$$

Полагая $y = 1$, получим целое число $x = 31$. Таким образом, мы нашли частное решение $x_1 = 31$, $y_1 = 1$.

Зная одно частное решение x_1, y_1 уравнения (20), можно найти его общее решение. Действительно, пара x_1, y_1 удовлетворяет уравнению (20):

$$x_1 + 2y_1 = 33. \tag{21}$$

Взяв разность уравнений (20) и (21), получим

$$(x - x_1) = -2(y - y_1).$$

Следовательно, $x - x_1$ делится на -2, т. е.

$$x - x_1 = -2t,$$

или

$$x = x_1 - 2t,$$

где t — целое число. Этому значению x соответствует

$$y = y_1 + t.$$

Проверкой убеждаемся, что

$$x = x_1 - 2t,\ y = y_1 + t \tag{22}$$

при любом целом t есть решение уравнения (20), поэтому выражения (22) дают общее решение этого уравнения в целых числах. А именно,

$$x = 31 - 2t,\quad y = 1 + t. \tag{23}$$

Выберем целое число t так, чтобы значения x и y, получаемые по формулам (23), удовлетворяли также неравенствам (16), (17) и (19), т. е. чтобы

$$\begin{cases} 31-2t>0,\ 1+t>0, \\ 1+t\geq 31-2t+5, \\ 2(1+t)-31+2t<23, \end{cases}$$

откуда $11<t<13$, т. е. $t=12$. Тогда из равенств (23) окончательно находим $x=7,\ y=13$.

Ответ. 3 автобуса; 7 мальчиков и 13 девочек.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Из одного и того же города вышли два поезда, причем первый из них прошел 240 км, а второй — 300 км. Скорость первого поезда на 10 км/ч больше скорости второго, а на свой путь первый потратил на 4 ч меньше, чем второй на свой путь. Определить скорости поездов.

Ответ. 40 км/ч, 30 км/ч.

2. Автомобиль, идущий со скоростью 100 км/ч, выехал из пункта A в пункт B и в пункте C встретился с велосипедистом, выехавшим на 1,5 ч раньше из B в A со скоростью 10 км/ч. Если бы скорость автомобиля была на 20 км/ч больше, а скорость велосипедиста — на 5 км/ч больше, то встреча произошла бы на 10 км ближе к A. Каковы расстояния AC и CB?

Ответ. 150 км и 30 км.

3. Велосипедист проехал 96 км на 2 ч быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем предполагал проезжать за1 ч 15 мин. С какой скоростью он ехал?

Ответ. 16 км/ч.

4. Автомобиль выехал из города A в город B. Проехав часть пути с постоянной скоростью, он увеличил ее на 20 км/ч и прибыл в B, затратив на весь путь на 1,5 ч меньше времени, чем то, которое потребовалось бы ему, если бы он проехал от A до B с первоначальной скоростью. При этом первую и вторую части пути он проехал за одно и то же время. Если бы указанное увеличение скорости он произвел, пройдя точно половину пути от A до B, то выигрыш во времени составил бы лишь 1 ч 15 мин. Найти расстояние AB.

Ответ. 300 км.

5. В сосуд, содержащий 1 л воды, из двух кранов одновременно начинают наливать растворы кислоты: из первого — 10%-ный раствор со скоростью 1 л/ч, а из второго—20%-ный раствор со скоростью v л/ч. Если бы из первого крана подавался 20%-ный раствор, а из второго — 10%-ный раствор, то концентрация кислоты в сосуде достигла бы значения 5% на $3\frac{3}{7}$

мин позже. Найти v, учитывая, что для получения 5%-ной концентрации *кислоты в сосуде потребовалось более 5 мин.*

Ответ. $v = 2$ л/ч.

6. Три поезда выехали одновременно: пассажирский из города A в город B, а скорый и товарный из города B в город A. Пассажирский и скорый поезда встретились через 4 ч. Скорый поезд пришел в город A на 7 ч раньше товарного. Скорость пассажирского поезда в 1,5 раза больше скорости товарного. За какое время товарный поезд прошел путь от города B до города A?

Ответ. За 14 ч.

7. Два насоса, работая совместно, наполняют бассейн за 8 ч. Известно, что производительность второго насоса равна 10 м^3/ч. Если производительность первого насоса увеличить на 5 м^3/ч, то бассейн будет наполняться с помощью первого насоса на 10 ч быстрее, чем с помощью второго. Определить производительность первого насоса.

Ответ, 15м^3/ч.

8. *Поезд метро состоит из нескольких вагонов, причем в каждом вагоне* находится одинаковое число пассажиров. Количество пассажиров в одном вагоне превосходит число вагонов на 9. Когда на станции во второй вагон вошло 10 человек, а из остальных вышло по 10 человек, число пассажиров во втором вагоне оказалось равным числу пассажиров, оставшихся во всех остальных вагонах. Сколько пассажиров было первоначально в каждом вагоне?

Ответ. 15.

9. Гвоздь, три винта и два шурупа весят вместе 24 г, два гвоздя, четыре шурупа и пять винтов — 44 г. Сколько весят вместе гвоздь, четыре винта и два шурупа?

Ответ. 28 г.

10. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 ч утра из города A в город B отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 ч. Доплыв до города A, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город B одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город B к 9 ч вечера того же дня?

Ответ. *Не успели.*

11. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на p%, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

Ответ. $p = 17\%$.

12. Десять теннисистов решили устроить турнир пар (т. е. в каждой партии два игрока играют против двух других). Сколько партий им придется сыграть, чтобы встретились все возможные пары?

Ответ. 630.

13. Расстояние между A и B равно s км. Из A в B вылетел вертолет, а через t ч — самолет. Он догнал вертолет в d км от A, долетел до B, сразу же повернул обратно, в d км от B встретил вертолет и вернулся в A позднее, чем вертолет прибыл в B. На сколько раньше вертолет прибыл в B, чем самолет вернулся в A?

Ответ. На $t = \left[\dfrac{(S-2d)^2}{2d^2}\right]$ ч.

14. Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 м больше его. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту его обгона вторым, за время на $\dfrac{2}{3}$ мин больше, чем первый. Найти скорость первого конькобежца.

Ответ. 600 м/мин.

15. Проценты содержания (по весу) спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 2 : 3 : 4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать их в весовом отношении 3 : 2 : 1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит каждый раствор?

Ответ. Первый — 12 %, второй — 24%, третий — 48 %.

16. Два одинаковых сосуда наполнены спиртом. Из первого сосуда отлили a л спирта и налили в него столько же литров воды. Затем из полученной смеси воды со спиртом отлили a л и налили столько же литров воды. Из второго сосуда отлили $2a$ л спирта и налили в него столько же литров воды. Наконец, из полученной смеси воды со спиртом отлили $2a$ л и налили столько же литров воды. Определить, какую часть объема сосуда составляют a л, если крепость окончательной смеси в первом сосуде в $\dfrac{25}{16}$ раза больше крепости окончательной смеси во втором сосуде. (Крепостью смеси называется отношение объема чистого спирта в смеси ко всему объему смеси. Предполагается, что объем смеси равен сумме объемов ее составных частей.)

Ответ. $\dfrac{1}{6}$.

17. Имеются два слитка сплавов меди и серебра. Первый весит 3 кг и содержит 10% серебра, второй весит 2 кг и содержит 20% серебра. Сколько должен весить кусок первого слитка, который нужно переплавить вместе со всем вторым слитком, чтобы получить сплав, содержащий r% серебра? Найти все r, при которых задача имеет решение.

Ответ. $\dfrac{40-2r}{r-10}$ кг; $14 \le r \le 20$.

18. Две трубы работая вместе, подают в бак 100 л жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 л каждого раствора и 20 л воды, то получится 40 л 20%-ного раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный, то получится 30%-ный раствор кислоты. Какой концентрации (в процентах) получится кислота, если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый? (Считается, что при смешивании воды и кислоты объем не меняется.)

Ответ. 50%.

19. Имеются два разных сплава меди со свинцом. Если взять 1 кг первого сплава и 1 кг второго сплава и переплавить их, то получится сплав с содержанием 65% меди. Известно, что если взять два куска — кусок № 1 и кусок № 2 первого и второго сплавов соответственно, имеющих суммарный вес 7 кг, и переплавить их, то получится сплав с содержанием 60% меди. Сколько весит медь, содержащаяся в сплаве, который получится при совместной переплавке куска первого сплава, равного по весу куску № 2, и куска второго сплава, равного по весу куску № 1?

Ответ. 4,9 кг.

20. К бассейну, объем которого равен 300 м^3, подведены три трубы: через первую и вторую вода поступает, через третью выливается. Если все три трубы включены одновременно, то количество воды в бассейне увеличивается ежеминутно на 20 м^3. Бассейн начали наполнять водой, включив первую и третью трубы. Более чем через 12 мин после начала работы в бассейне оказалось 100 м^3 воды. В этот момент первую и третью трубы закрыли и включили вторую трубу, завершившую наполнение бассейна. В результате бассейн был наполнен за 30 мин. Определить, за какое время наполнился бы бассейн, если бы его с начала до конца наполняла одна вторая труба.

Ответ. За 22,5 мин.

21. От расположенного на реке пункта A вверх по течению отходит первая лодка, а через 2,5 ч из пункта A выходит вторая лодка и догоняет первую в 30 км от пункта A. После этого обе лодки поворачивают и идут обратно, причем первая лодка приходит в пункт A через 3 ч, а вторая через 2,5 ч, считая с того момента, когда вторая лодка догнала первую. Найти скорость течения реки. Время, необходимое для поворота лодок, считается равным нулю.

Ответ. 3 км/ч.

22. Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько пятиэтажных домов и сколько девятиэтажных домов построено?

Ответ. 9 и 8.

23. Три трактора, работая одновременно, вспахивают поле за 6 ч. Первый трактор работает в 1,25 раза быстрее второго. Какое время потребовалось бы третьему трактору, чтобы одному вспахать все поле, если одному второму трактору потребовалось бы на вспашку всего поля на 2, 25 ч больше, чем третьему?

Ответ. 18 ч.

24. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Ответ. 12.

25. Для перевозки некоторого количества кирпича имеются три автопогрузчика грузоподъемностью 100, 200 и 300 кг. За 9 рейсов на одном из автопогрузчиков перевезли четвертую часть всего кирпича. Затем сделали еще 10 рейсов на другом автопогрузчике. После этого осталось перевезти треть первоначального количества кирпича. Когда перевозка всего кирпича была закончена, оказалось, что в процессе всех перевозок третий автопогрузчик сделал в 2 раза больше рейсов, чем второй. При перевозках автопогрузчики. нагружались полностью. Сколько рейсов сделал каждый из автопогрузчиков?

Ответ. Первый рейсов не делал; второй сделал 9 рейсов; третий 18 рейсов.

26. В двух сосудах налита вода. В первом сосуде находится 1 л воды. Температура воды во втором сосуде равна 10°. Если смешать половину воды из второго сосуда со всей водой первого сосуда, то температура смеси составит 40°. Если же смешать всю воду второго сосуда со всей водой первого сосуда, то температура смеси составит 30°. Сколько воды во втором сосуде и какова температура воды в первом сосуде? (Считать, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры).

Ответ. 2 л; 70°.

27. Лаборатории необходимо заказать некоторое количество одинаковых сферических колб общей вместимостью 100 л. Стоимость одной колбы складывается из стоимости труда мастера, пропорциональной квадрату поверхности колбы, и стоимости материала, пропорциональной ее поверхности. При этом колба объемом в 1 л обходится в 125 р., и в этом случае стоимость труда составляет 20% стоимости колбы (толщину стенок колбы считать пренебрежимо малой). Хватит ли на выполнение работы 10 000 р.?

Ответ. Не хватит.

28. В 9 ч утра из пункта A выезжает велосипедист, который едет до пункта B. Через 2 ч после выезда велосипедиста из A в B выезжает автомобилист, который догоняет велосипедиста не позже 12 ч дня. Продолжая движение, автомобилист прибывает в пункт B, мгновенно поворачивает и едет из B в A. На этом пути автомобилист встречает велосипедиста и потом прибывает в пункт A в 17 ч того же дня. Найти время прибытия велосипедиста в пункт B, если известно, что между двумя встречами велосипедиста и автомобилиста прошло не более 3 ч.

Ответ. В 18 ч.

29. Пункты A и B находятся на двух шоссе, пересекающих друг друга под углом $ACB = 120°$. Если идти из A в B сначала по первому шоссе до перекрестка C, а затем по второму, то потребуется 5 ч. Туристы идут из A в B напрямик, без дороги, и проходят путь за 6,5 ч. Если туристы пойдут без дороги напрямик от A до середины D отрезка шоссе CB, то они затратят на путь AD более 5 ч. Сколько времени нужно, чтобы дойти от A по шоссе до перекрестка C, если скорость ходьбы без дороги в 1,5 раза меньше, чем скорость ходьбы по шоссе? (Шоссе считать прямолинейными.)

Ответ. $\frac{8}{3}$ ч.

30. Имеется два квадратных поля $ABCD$ и $AKLM$ общей площадью 0,5 км^2. Чтобы пройти последовательно оба поля по диагоналям CA и AL, нужно 28 мин, а чтобы пройти по стороне BA первого поля от угла до угла, а затем по диагонали AL второго поля в противоположный угол, — менее 24 мин. Найти площадь первого поля, если скорость ходьбы постоянна и равна 3 км/ч.

Ответ. 0,32 км^2.

31. Три гонщика A, B и C, стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находится перед гонщиком A на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины шоссе, а гонщик C перед гонщиком B на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал B в тот момент, когда B закончил свой первый круг, а еще через 10 мин A впервые догнал гонщика C. Гонщик B проходит круг на 2,5 мин быстрее, чем C. Какое время затрачивает на круг гонщик A?

Ответ. 15 мин.

32. Из пункта A кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл, каждый с постоянной скоростью. Автомобиль без остановок дважды проехал по всему шоссе в одном направлении. В момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, последний повернул обратно, увеличил скорость на 16 км/ч и через 22,5 мин после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найти длину всего пути мотоцикла, если этот путь на 5,25 км короче длины всего шоссе.

Ответ. 21 км.

33. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 80 км от A, с постоянной скоростью v км/ч выезжает мотоциклист. Одновременно с ним из B в A с постоянной скоростью w км/ч выезжает автомобиль. Через 1 ч они встречаются и поворачивают обратно, причем после встречи скорость автомобиля увеличилась на 30 км/ч. Определить все те значения v, при которых мотоциклист возвращается в A не позже, чем через 2 ч после возвращения автомобиля в B.

Ответ. $50 \le v \le 80$.

34. От пристани A вниз по реке, скорость течения которой равна v км/ч, отходит плот. Через 2 ч вслед за ним выходит катер, скорость которого в стоячей воде равна 10 км/ч. Догнав плот, катер возвращается обратно. Определить все те значения v, при которых к моменту возвращения катера в A плот проходит более 15 км.

Ответ. $3\frac{1}{3} < v < 10$.

35. В киоске были проданы одинаковые комплекты, состоящие только из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей более чем на 3 превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в 3 раза, а красных — в 2 раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных не более чем на 16, а общее число всех проданных карандашей было бы равно 81. Определить, сколько было продано комплектов и сколько в каждом комплекте было синих и красных карандашей.

Ответ. 3 комплекта; в комплекте 7 синих и 3 красных карандаша.

36. Произведено два типа деталей. Первая деталь изготовлялась из сплава металлов M_1 и M_2, вторая деталь — из сплава металлов M_3 и M_4. Если бы все детали первого типа были сделаны из металла M_1, то их общий вес составлял бы 1,6 кг, а из металла M_2 — 5,2 кг. Если бы все детали второго типа были сделаны из металла M_3, то их общий вес составлял бы 3кг, а из металла M_4 — 4,5 кг. Стоимость одной детали первого типа равна 300 р., ее вес 0,31 кг. Стоимость одной детали второго типа равна 500 р., ее вес 0,34 кг. Сколько было изготовлено деталей каждого типа, если их общая стоимость равна 6800 р.?

Ответ. 6 деталей первого типа и 10 деталей второго типа.

37. Промышленное предприятие получило задание увеличить объем продукции вдвое на протяжении двух лет. Каким (в процентах) должен быть ежегодный прирост продукции в предположении, что он одинаков для каждого года?

Ответ. $\left(\sqrt{2}-1\right)100\%$.

38. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4» и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причем троек было больше, чем пятерок и меньше, чем четверок. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

Ответ. Число оценок «2», «3», «4» и «5» равно соответственно 11, 7, 10 и 2.

39. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 и 20 к., причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты за билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника первоначально?

Ответ. Две монеты по 15 к, и шесть монет по 20 к.

40. Для нумерации некоторого числа страниц потребовалось в n раз больше цифр, чем было страниц (n — целое положительное число). Сколько было страниц?

Ответ. $\underbrace{111\ldots1}_{n+1\text{ раз}}-(n-1)$.

41. Рассматриваются всевозможные пятибуквенные последовательности, не содержащие других букв, кроме *А, Б, В* (например: *БАААБ, ВВВВВ, ВБАБА* и т. д.). Сколько среди этих последовательностей таких, в которых буква *А* встречается не более двух раз, буква *Б* — не более одного раза, а буква *В* — не более трех раз?

Ответ. 10,20,30.

42. Каким числом способов можно распределить трех экзаменаторов между n экзаменующимися, если каждый экзаменующийся должен быть спрошен хотя бы одним экзаменатором? Один экзаменатор может проверять нескольких экзаменующихся (пусть даже всех экзаменующихся). Кроме того, не обязательно, чтобы каждый экзаменатор экзаменовал хотя бы одного человека.

Ответ. 7^n.

43. Квадрат целого положительного простого числа N делится (с остатком) на 3, полученное неполное частное делится (без остатка) на 3, следующее частное снова (с остатком) делится на 3, и, наконец, полученное неполное частное опять (с остатком) делится на 3 и равно 16. Найти N.

Ответ. $N = 37$.

44. Сумма квадратов четырех целых положительных чисел больше, чем половина квадрата их произведения, а сумма первых степеней этих чисел равна 42. Найти все такие числа.

Ответ. 39, 1, 1, 1.

45. Имеются два картофельных поля. Сначала первое поле было убрано бригадой *А*, а затем второе поле было убрано вместе бригадами *А* и *В*. После того как была убрана $\frac{1}{3}$ всей площади, оказалось, что время, необходимое для окончания уборки, в $\frac{21}{13}$ раз меньше времени, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада *А*. Известно также, что если бы второе поле убирала только бригада *В*, то ей для этого потребовалось бы время, вдвое большее того, за которое могла бы убрать оба поля одна бригада *А*. Во сколько раз производительность бригады *А* больше производительности бригады *В*?

Ответ. В 6 раз.

46. Вода из цилиндрического бассейна глубины h вытекает по двум трубам разной пропускной способности, первая из которых расположена в дне бассейна, а вторая на боковой стенке. Если при наполненном целиком бассейне открыть только вторую трубу, то вода будет протекать через нее в течение времени, которое в $\frac{4}{3}$ раза меньше того, которое потребуется для слива всей воды из бассейна только через одну первую трубу. При действии обеих труб продолжительность слива всей воды из бассейна, наполненного целиком, в $\frac{4}{3}$ раза больше, чем наполненного на $\frac{2}{3}$. Пропускная способность труб не зависит от уровня воды над трубой. На какой высоте расположена вторая труба?

Ответ. $\frac{1}{2}h$.

47. Три пешехода одновременно выходят из пункта A и одновременно прибывают в пункт D, пройдя по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, AD ($ABCD$ — параллелограмм). На каждом из этих отрезков скорости всех пешеходов постоянны и составляют: у первого 3, 6, 5 и 8 км/ч соответственно, у второго — 4, 5, 6 и 7 км/ч соответственно. Скорость третьего пешехода на отрезке AD равна 8 км/ч, а на остальных отрезках совпадает либо со скоростью первого, либо со скоростью второго, однако ни с той, ни с другой скоростью он не проходит весь маршрут целиком. Установить, является ли угол ABC острым или тупым.

Ответ. Острым.

ГЛАВА III

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

В этой главе рассматриваются простейшие алгебраические рациональные и иррациональные неравенства. При их решении применяются те же самые способы, что и при решении соответствующих уравнений (см.гл II).

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕРАВЕНСТВАХ

Прежде чем приступить к решению неравенств, приведем основные определения и сформулируем некоторые теоремы об эквивалентности неравенств.

1. Числовые неравенства и их свойства

Для любых действительных чисел a и b понятие «a больше b» $(a > b)$ означает, что разность $a - b$ есть число положительное.

Утверждения $a > b$ и $a - b > 0$ эквивалентны: если верно одно из них, то верно и другое:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$$

Аналогично,

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

Сформулируем основные свойства числовых неравенств:

1) $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$;

2) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ (c — любое действительное число);

3) $a > 0,\ b > 0 \Rightarrow ab > 0$;

4) $a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$;

5) $a > b,\ c < 0 \Rightarrow ac < bc$;

6) $a > b \Leftrightarrow b < a$;

7) $a > 0,\ b > 0 \Rightarrow a + b > 0$;

8) $a > b,\ c > d \Rightarrow a + c > b + d$;

9) $a > b,\ b > 0,\ c > d,\ d > 0 \Rightarrow ac > bd$;

10) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ (n — натуральное число);

11) $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

2. Неравенства, содержащие неизвестные

По отношению к неравенствам, содержащим буквенные величины, ставится одна из следующих задач: 1) *решить неравенство*, содержащее неизвестное, т. е. найти все числовые значения неизвестного, для которых это неравенство превращается в верное числовое; 2) *доказать справедливость неравенства* для всех указанных значений входящих в него величин.

При решении этих задач используются определения и основные свойства неравенств.

Областью определения неравенства называется множество всех значений неизвестного, при которых функции, входящие в состав неравенств, имеют смысл, т. е. определены. (Следовательно, область определения неравенства есть пересечение областей определения функций, входящих в это неравенство.)

Решением неравенства называется значение неизвестного, при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство.

Два неравенства называются ***эквивалентными*** (или ***равносильными***) на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одинаковые решения, т. е. все решения первого неравенства являются решениями второго и, наоборот, все решения второго являются решениями первого.

Неэквивалентность неравенств может возникнуть при использовании тех же преобразований, которые приводили к неэквивалентности уравнений (см. гл. II, § 1, пп. 3 и 4). Например, при расширении области определения неравенства возможно появление «лишних» решений неравенства, при сужении области определения — «потеря» решений.

3. Теоремы об эквивалентности неравенств

Теорема 1. *Если к обеим частям неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ прибавить или вычесть любую функцию $\varphi(x)$, определенную всюду в области определения неравенства, то получится новое неравенство, эквивалентное данному.*

Из этой теоремы следует важный вывод: *любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком*. Полученное при этом неравенство будет эквивалентно исходному.

Теорема 2. *Если обе части неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ умножить на любую функцию $\varphi(x)$, определенную для всех значений аргумента x, при-*

надлежащих области определения исходного неравенства, сохраняющую постоянный знак и отличную от нуля, то при $\varphi(x) > 0$ получится неравенство, эквивалентное данному, а при $\varphi(x) < 0$ эквивалентным будет неравенство противоположного смысла.

Доказательство этих двух теорем во многом аналогично доказательству соответствующих теорем для уравнений (см. гл II, § 1, п. 2).

Теорема 3. *Неравенства*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0$$

и

$$f_1(x) \cdot f_2(x) > 0$$

эквивалентны.

Справедливость данной теоремы сразу вытекает из того, что как частное, так и произведение двух чисел одинакового знака положительно. На основании этой теоремы можно производить освобождение неравенств от знаменателей.

Теорема 4. *Неравенство $|x-a| < l$ эквивалентно системе неравенств $-l < x-a < l$ (или $a-l < x < a+l$).*

Доказательство теоремы непосредственно следует из определения абсолютной величины (см. гл I, § 1, п. 6).

4. Метод замены неизвестного (метод подстановки)

Изложим этот метод в общем виде. Рассмотрим неравенство

$$f(x) > 0, \tag{1}$$

областью определения которого является множество X $(x \in X)$. При решении неравенства (1) иногда удобно вместо x ввести новое неизвестное t, сделав подстановку

$$x = \varphi(t). \tag{2}$$

Если функция $\varphi(t)$ имеет однозначную обратную функцию, то соотношение (2) можно записать следующим образом:

$$t = \psi(x), \tag{3}$$

где $\psi(x)$ — функция обратная $\varphi(t)$.

Множество значений функции $t = \psi(x)$ для всех x из области определения исходного неравенства X $(x \in X)$ задает область определения T нового неравенства

$$F(t) > 0, \tag{4}$$

где $F(t) = f(\varphi(t))$, $t \in T$. Найдя решения неравенства (4) и воспользовавшись подстановкой (2), получим решение исходного неравенства (1).

Пусть, например, область определения неравенства (4) представляет собой сегмент

$$a \le x \le b. \tag{5}$$

Введем вместо x новое неизвестное t, сделав подстановку $x = \varphi(t)$. Отсюда $t = \psi(x)$, причем множеством значений этой функции (обратной по отношению к $\varphi(t)$) для всех x из сегмента (5) также является сегмент $\alpha \le t \le \beta$, где $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$.

5. Геометрическая интерпретация решения неравенств

Геометрически решение неравенства $f(x) > 0$ можно интерпретировать как нахождение множества значений x, для которых ординаты графика функции $f(x)$ положительны.

Например, решением неравенства $f(x) > 0$ на отрезке $[a, k]$, где график функции $f(x)$ изображен на рис. 105, есть множество значений x из интервалов $a < x < b$, $c < x < d$, $e < x < k$.

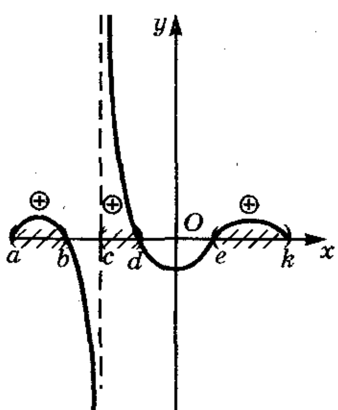


Рис. 105

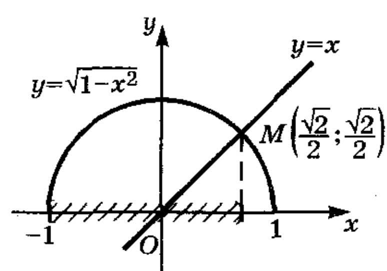


Рис. 106

Пример 1. *Дать геометрическую интерпретацию решения неравенства*

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (a > 0,\ D = b^2 - 4ac > 0).$$

Решение. Графиком функции, стоящей в левой части неравенства, является парабола, пересекающая ось абсцисс в точках с координатами $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, где $x_1 < x_2$. Следовательно, решением неравенства служат множества значений $x < x_1$ и $x > x_2$.

Геометрически решение неравенства

$$f_1(x) > f_2(x)$$

можно трактовать как нахождение всех значений аргумента x, для которых точки графика функции $y_1 = f_1(x)$ расположены выше точек графика функции $y_2 = f_2(x)$.

Аналогично можно дать геометрическую интерпретацию решения неравенств

$$f(x) \geq 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \leq 0$$

и т. д.

Геометрическая интерпретация решения неравенств очень удобна, если известны график функции $f(x)$ и корни уравнения $f(x) = 0$.

Пример 2. *Дать геометрическую интерпретацию решения неравенства* $\sqrt{1-x^2} > x$.

Решение. График функции $y = \sqrt{1-x^2}$ есть часть окружности $x^2 + y^2 = 1$, расположенная в верхней полуплоскости (рис. 106). Графиком функции $y = x$ является биссектриса первого и третьего координатных углов. Точка M пересечения графиков имеет координаты $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значения аргумента x, для которых точки полуокружности $y = \sqrt{1-x^2}$ расположены выше точек прямой $y = x$, дают решение исходного неравенства:

$$-1 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 3. *Геометрически интерпретировать решение системы неравенств*

$$\frac{1}{3} \leq 1 + x - x^2 < 1.$$

Решение. Решением данной системы неравенств является множество значений x, для которых парабола $y = 1 + x - x^2$ расположена между прямыми $y = \frac{1}{3}$ и $y = 1$, т. е. $x_1 \leq x < x_1^*$ и $x_2^* < x \leq x_2$ (рис. 107). Значения

x_1, x_2 и x_1^*, x_2^* находятся как точки пересечения этой параболы с прямыми $y=\frac{1}{3}$ и $y=1$ соответственно, т. е. определяются из уравнений

$$3x^2-3x-2=0,\ x^2-x=0.$$

Следовательно, решением рассматриваемой системы неравенств является множество значений x, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{3-\sqrt{33}}{6}\le x<0,\quad 1<x\le\frac{3+\sqrt{33}}{6}.$$

Пример 4. *Геометрически интерпретировать решение системы неравенств*

$$0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1. \tag{6}$$

Решение. Решением системы неравенств является множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют данной системе. Это множество представляет собой часть координатной плоскости,заштрихованную на рис. 108. Нетрудно заметить, что множество решений системы неравенств

$$0\le y\le 1,\ 0\le x\le\sqrt{y} \tag{7}$$

состоит из точек той же самой заштрихованной области.

Следовательно, множества решений систем неравенств (6) и (7) совпадают, т. е. эти системы эквивалентны.

Несложно дать аналитическое доказательство эквивалентности этих систем, для чего достаточно показать, что всякое решение системы (6) будет также решением системы (7), и, наоборот, всякое решение системы (7) будет также решением системы (6).

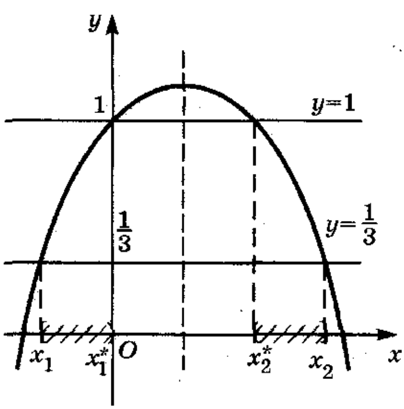


Рис. 107

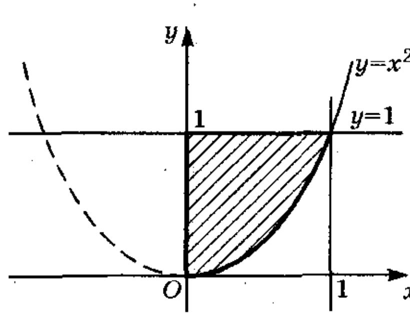


Рис. 108

Действительно, пусть (x_0, y_0) — какое-либо решение системы (7), т.е.

$$0 \le y_0 \le 1, \quad 0 \le x_0 \le \sqrt{y_0}.$$

Тогда, возведя обе части неравенства $x_0 \le \sqrt{y_0}$ в квадрат ($x_0 \ge 0$, $\sqrt{y_0} \ge 0$), получим эквивалентное ему неравенство $x_0^2 \le y_0$ (см. упр. 1 к данному параграфу). Значит, $x_0^2 \le y_0 \le 1$ и $0 \le x_0 \le 1$, т. е. (x_0, y_0) является также решением системы (6).

Пусть теперь (x_0, y_0) — решение системы (6), т. е.

$$0 \le x_0 \le 1, \; x_0^2 \le y_0 \le 1.$$

Тогда $0 \le y_0 \le 1$. Неравенства $x_0^2 \le y_0$ и $x_0 \le \sqrt{y_0}$ эквивалентны при $x_0 \ge 0$. Поэтому $0 \le x_0 \le \sqrt{y_0}$, т. е. (x_0, y_0) является также решением системы (7).

Пример 5. *Построить на плоскости множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют системе неравентв*

$$\begin{cases} |x| \le 2\,(1-y^2), & (8)\\ |x|+|y| \ge 1. & (9)\end{cases}$$

Решение. Геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству (8), симметрично относительно оси Oy, так как x содержится под знаком модуля. При $x \ge 0$ неравенство (8) примет вид

$$x \le 2(1-y^2)$$

и представляет собой множество точек полуплоскости $x \ge 0$, которые расположены в области, ограниченной параболой $x = 2(1 - y^2)$ и осью Oy (рис. 109).

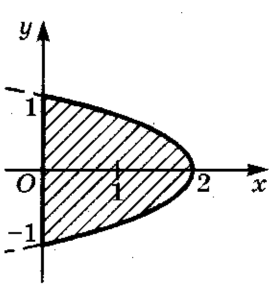


Рис. 109

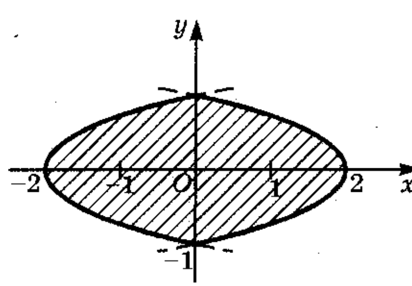


Рис. 110

Воспользовавшись указанной симметрией, получаем множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству (8) (рис. 110).

Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству (9), состоит из всех точек координатной плоскости xOy, за исключением точек, лежащих внутри квадрата $ABCD$ (рис. 111).

Следовательно, множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют исходной системе неравенств (8), (9), образует область, заштрихованную на рис. 112.

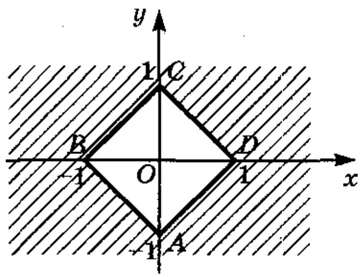


Рис. 111

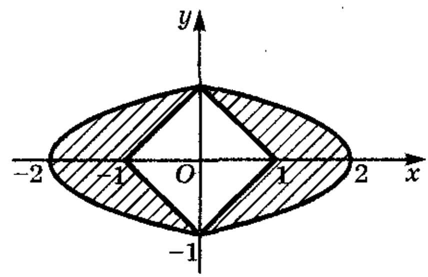


Рис. 112

Ответ. Искомое множество точек на рис. 112 заштриховано.

Пример 6. *На координатной плоскости xOy построить множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют системе неравенств*

$$|x| \le 1, \quad |y| \le 1, \; |x-1| + |y-1| \le 1. \tag{10}$$

Решение. Построим сначала множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$|x| \le 1, \; |y| \le 1. \tag{11}$$

Этим множеством является квадрат $ABCD$ со стороной, равной единице (рис. 113).

Множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству

$$|x| + |y| \le 1, \tag{12}$$

симметрично относительно обеих осей координат. Поэтому достаточно рассмотреть, например, случай, когда $x \ge 0$, $y \ge 0$.

По определению абсолютной величины действительного числа a имеем

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

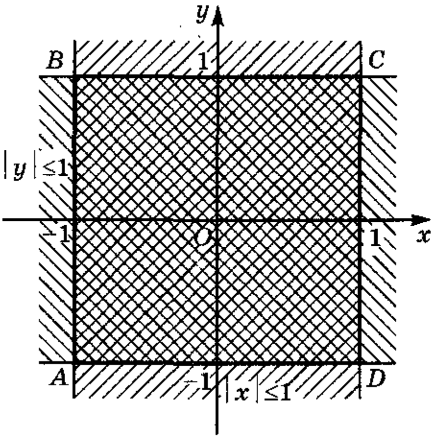


Рис. 113

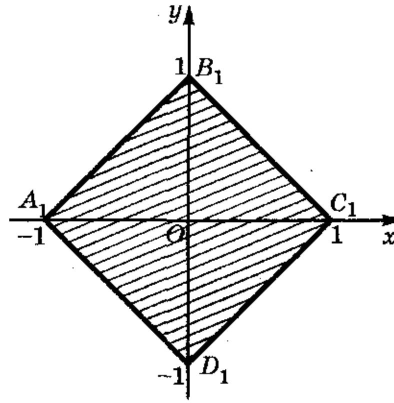


Рис. 114

Следовательно, в рассматриваемом случае $|x| = x$, $|y| = y$, а неравенство (12) примет вид

$$x + y \le 1,$$

или

$$0 \le y \le 1 - x.$$

Геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют полученной системе неравенств, или, что то же самое соотношениям

$$0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1 - x,$$

представляет собой треугольник OB_1C_1 (рис. 114).

Воспользовавшись указанной выше симметрией, получим, что множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству (12), есть квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (включая границу; см. рис 114).

Построим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$|x - 1| + |y - 1| \le 1. \tag{13}$$

В общем случае кривая, заданная уравнением

$$f(x - x_0, \; y - y_0) = 0,$$

получается параллельным переносом кривой $f(x, y) = 0$ на $|x_0|$ единиц масштаба вправо, если $x_0 > 0$, влево — если $x_0 < 0$, и на $|y_0|$ единиц масштаба вверх, если $y_0 > 0$, вниз — если $y_0 < 0$.

Поэтому множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенству (13), представляет собой квадрат $A_1B_1C_1D_1$, смещенный на единицу вправо и на единицу вверх (рис. 115).

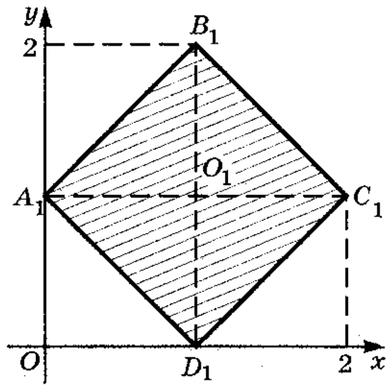


Рис. 115

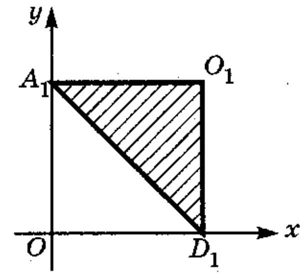


Рис. 116

Искомое множество точек, координаты которых удовлетворяют системе (10), есть треугольник $A_1O_1D_1$ (рис. 116), состоящий из точек, принадлежащих как квадрату $ABCD$ (см. рис. 113), так и квадрату $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 115).

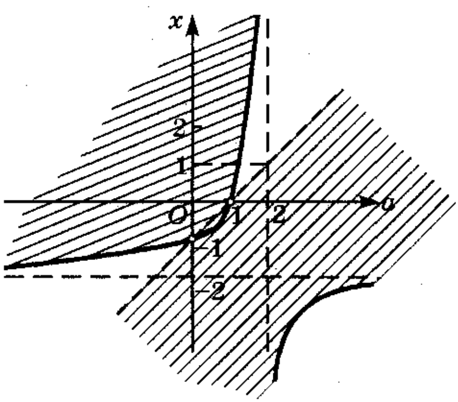


Рис. 117

Ответ. На рис. 116 искомое множество точек заштриховано.

Рассмотрим пример геометрической интерпретации решения неравенства, содержащего параметр. Такую интерпретацию удобно проводить на координатно-параметрической плоскости, откладывая значения параметра по оси абсцисс, а значения неизвестного — по оси ординат.

Пример 7. *Дать геометрическую интерпретацию решения неравенства*

$$\frac{ax}{x-a+1} \leq 2$$

на координатно-параметрической плоскости aOx.

Решение. Перепишем исходное неравенство следующим образом:

$$\frac{(a-2)x+2(a-1)}{x-(a-1)} \leq 0.$$

На КП–плоскости aOx построим графики функций $x = a - 1$ и $x = \dfrac{-2(a-1)}{a-2}$ (гипербола). Заштрихованная на рис. 117 область представляет собой решение неравенства. Зафиксировав a, т. е. проведя прямую, параллельную оси Ox через точку $(a, 0)$, решение неравенства можно записать с помощью следующих соотношений:

1) если $-\infty < a \le 0$, то $-\infty < x < a-1$, $\dfrac{-2(a-1)}{a-2} < x < +\infty$;

2) если $0 < a < 1$, то $-\infty < x \le \dfrac{-2(a-1)}{a-2}$, $a-1 < x < +\infty$;

3) если $1 \le a < 2$, то $-\infty < x < a-1$, $\dfrac{-2(a-1)}{a-2} < x < +\infty$;

4) если $a = 2$, то $-\infty < x < 1$;

5) если $2 < a < +\infty$, то $\dfrac{-2(a-1)}{a-2} \le x < a-1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если $f_1(x) \ge 0$ и $f_2(x) \ge 0$ на некотором множестве значений x, то неравенства

$$f_1(x) > f_2(x) \text{ и } [f_1(x)]^2 > [f_2(x)]^2$$

эквивалентны на этом множестве.

Указать множества всех значений x, на которых эквивалентны следующие пары неравенств:

2. $x^3 \ge 1$ и $x > 1$.

Ответ. Эквивалентны для любых значений x.

3. $\dfrac{x^2+x+1}{x-1} \ge 0$ и $x^3 - 1 \ge 0$.

Ответ. Эквивалентны на множестве значений $x \ne 1$.

4. $\sqrt{x-1} > 1 - x$ и $x - 1 > (1-x)^2$.

Ответ. Эквивалентны на множестве $1 \le x < 2$.

Установить, эквивалентны ли неравенства всюду в общей части их областей определения:

5. $\dfrac{x-1}{x^2+x+1} \ge 0$ и $x^3 - 1 \ge 0$.

Ответ. Эквивалентны на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$.

6. $\sqrt{x-1} \geq x$ и $x-1 \geq x^2$.

Ответ. Эквивалентны на множестве $x \geq 1$.

7. $\sqrt{x-1} < 1-x$ и $x-1 < (1-x)^2$.

Ответ. Эквивалентны на множестве $1 \leq x \leq 2$.
Решить графически системы неравенств:

8. $|x| < \dfrac{1}{x^2} \leq 4$.

Ответ. $\dfrac{1}{2} \leq |x| < 1$.

9. $0 < x(1-x) \leq \dfrac{1}{2} - x$.

Ответ. $0 < x \leq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

10. Определить графически, при каких a уравнение

$$\sqrt{x(1-x)} = a - x$$

имеет одно или несколько решений.

Ответ. При $0 \leq a < 1$ и при $a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — одно решение; при $1 \leq a < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — два решения; при всех других a — решений нет.

11. Доказать, что системы неравенств

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \end{cases}$$

эквивалентны. Изобразить на координатной плоскости множество их решений.

12. Доказать, что система неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -x^2 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

эквивалентна совокупности двух систем неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ \sqrt{y} \leq x \leq 1; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} -1 \leq y < 0, \\ -\sqrt{-y} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Изобразить на координатной плоскости множество их решений.

13. Доказать, что неравенство

$$x^2 + y^2 < a^2,$$

где $a > 0$, эквивалентно системе неравенств

$$-a < x < a, \ -\sqrt{a^2 - x^2} < y < \sqrt{a^2 - x^2}.$$

14. Доказать, что система неравенств

$$f_1(x) > 0, \ f_2(x) > 0$$

эквивалентна системе

$$f_1(x) + f_2(x) > 0, \ f_1(x) \cdot f_2(x) > 0.$$

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. Неравенства первой степени с одним неизвестным

Всякое неравенство первой степени с одним неизвестным можно привести к виду

$$ax > b \text{ (или } ax < b).$$

При его решении возможны три случая:

1) если $a > 0$, то $x > \dfrac{b}{a}$;

2) если $a < 0$, то $x < \dfrac{b}{a}$;

3) если $a = 0$, $b < 0$, то неравенство удовлетворяется при любом x; если $a = 0$, $b \geq 0$, то оно не имеет решений.

2. Системы неравенств первой степени с одним неизвестным

При решении систем двух неравенств первой степени с одним неизвестным возможны следующие случаи (для определенности во всех случаях будем считать, что $a < b$):

1) $\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$ или $\begin{cases} x < a, \\ x < b. \end{cases}$

Решением первой системы являются значения $x > b$, второй — значения $x < a$. Для интерпретации решений удобно использовать числовую ось.

2) $\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$

Решениями системы являются значения x, которые расположены в интервале $a < x < b$. Числа $x > a$ изображаются на числовой оси точками, расположенными справа от точки a, а числа $x < b$ — слева от точки b. Точки, принадлежащие одновременно обеим областям, находятся в промежутке от a до b.

3) $\begin{cases} x < a, \\ x > b. \end{cases}$

Эта система не имеет решений, т. е. нет чисел, удовлетворяющих обоим неравенствам (нет точек, принадлежащих обеим областям).

3. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины

Метод решения таких неравенств — сведение к системе неравенств, эквивалентной данному неравенству. При этом часто используется теорема 4:

$$|x-a| < l \Leftrightarrow -l < x-a < l.$$

Пример 1. *Решить неравенство*

$$|3x+1| < 5.$$

Решение. Данное неравенство эквивалентно системе

$$-5 < 3x+1 < 5.$$

Решениями последней являются значения x, при которых $3x+1 < 5$, т. е. $x < \frac{4}{3}$, и $3x+1 > -5$, т. е. $x > -2$.

Ответ. $-2 < x < \frac{4}{3}$.

Пример 2. *Решить неравенство*

$$|3x-1| > 5.$$

Решение. Данное неравенство распадается на два неравенства:

$$3x-1 > 5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2;$$

$$3x-1 < -5 \Leftrightarrow 3x < -4 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{3}.$$

Ответ. Неравенству удовлетворяют все числа $x > 2$ и все числа $x < -\frac{4}{3}$.

Неравенство

$$|f(x)| < |\varphi(x)|$$

эквивалентно каждому из следующих:

$$|f(x)|^2 < |\varphi(x)|^2,$$

$$f^2(x) < \varphi^2(x),$$

$$[f(x) - \varphi(x)] \cdot [f(x) + \varphi(x)] < 0.$$

Последнее неравенство распадается на две системы:

$$\begin{cases} f(x) - \varphi(x) > 0, \\ f(x) + \varphi(x) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) - \varphi(x) < 0, \\ f(x) + \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Наиболее эффективным методом решения неравенств, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины, является метод «частичных областей».

Пример 3. *Решить неравенство*

$$|x - 2| < \frac{x}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Разобьем числовую ось точкой $x = 2$, в которой выражение под знаком абсолютной величины обращается в нуль, на две частичные области: $x < 2$ (I) и $x \geq 2$ (II). Рассмотрим исходное неравенство в каждой из этих областей.

I. Если $x < 2$, то $|x - 2| = -(x - 2)$. Тогда неравенство (1) примет вид

$$-(x - 2) < \frac{x}{2}, \text{ или } x > \frac{4}{3}$$

и, следовательно, значения x из промежутка

$$\frac{4}{3} < x < 2$$

удовлетворяют исходному неравенству.

II. Если $x \geq 2$, то $|x - 2| = x - 2$. Тогда неравенство (1) примет вид

$$x - 2 < \frac{x}{2}, \text{ или } x < 4$$

и, следовательно, все значения x из промежутка

$$2 \leq x < 4$$

удовлетворяют этому неравенству.

Полученные решения можно объединить в одно множество.

Ответ. $\frac{4}{3} < x < 4$.

Замечание 1. Решение данного неравенства можно провести иначе. Неравенство (1) эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{I.} \begin{cases} x-2<0, \\ -(x-2)<\frac{x}{2}; \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} x-2\ge 0, \\ x-2<\frac{x}{2}, \end{cases}$$

которые имеют соответственно решения $\frac{4}{3} < x < 2$ и $2 \le x < 4$.

Замечание 2. Решение неравенства (1) геометрически можно интерпретировать как отыскание множества значений x, для которых ординаты графика функции $y = |x-2|$ меньше ординат графика функции $y = \frac{x}{2}$ (рис. 118). Искомое множество $\frac{4}{3} < x < 4$ на рис. 118 заштриховано.

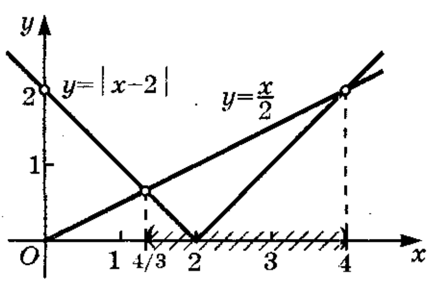


Рис. 118

4. Неравенства второй степени с одним неизвестным

Всякое неравенство второй степени с одним неизвестным можно привести к виду

$$ax^2+bx+c>0 \text{ (или } ax^2+bx+c<0\text{)}, \ a\ne 0.$$

Решение его изложено в школьных учебниках. Геометрическая интерпретация решения такого неравенства (см. § 1, п. 5) достаточно проста. На рис. 119, *а* - *в* изображены все возможные случаи расположения параболы, являющейся графиком квадратного трехчлена в левой части неравенства $(D = b^2-4ac)$.

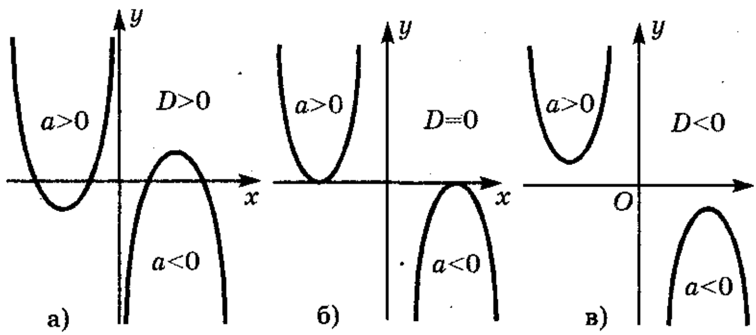


Рис. 119

П р и м е р 4. *Решить неравенство*

$$\left|x^2+3x\right|+x^2-2\geq 0. \qquad (2)$$

Р е ш е н и е. По определению абсолютной величины действительного числа имеем

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geq 0; \\ -a, \text{ если } a<0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left|x^2+3x\right|=\begin{cases} x^2+3x, \text{ если } x^2+3x\geq 0, \text{ т. е. если } x\leq -3 \text{ или } x\geq 0; \\ -(x^2+3x), \text{ если } x^2+3x<0, \text{ т. е. если } -3<x<0. \end{cases}$$

Применим для решения исходного неравенства (2) метод «частичных областей».

Разобьем числовую ось точками $x=-3$ и $x=0$ на три области $x\leq -3$ (I), $-3<x<0$ (II), $x\geq 0$ (III) и рассмотрим решение неравенства в каждой из этих областей отдельно.

I. В области $x\leq -3$ неравенство (2) примет вид

$$(x^2+3x)+x^2-2\geq 0,$$

или

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)\geq 0,$$

и, следовательно, все значения x из этой области удовлетворяют неравенству.

II. В области $-3<x<0$ неравенство (2) эквивалентно неравенству

$$3x+2\leq 0$$

и, значит, имеет решение $-3<x\leq -\frac{2}{3}$.

III. В области $x \geq 0$, так же как и в области $x \leq -3$, неравенство (2) эквивалентно следующему:

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2) \geq 0$$

и, значит, удовлетворяется при всех значениях $x \geq \frac{1}{2}$.

Ответ. $x \leq -\frac{2}{3},\ x \geq \frac{1}{2}$.

5. Неравенства высших степеней

При решении неравенства

$$P_n(x) > 0,$$

где $P_n(x)$ — целая рациональная функция n-й степени, оказывается удобным метод, который называют методом интервалов. Он основан на свойстве целой рациональной функции сохранять знак всюду между ее корнями.

Метод интервалов заключается в следующем:

1) находят область определения рассматриваемого неравенства (для неравенства $P_n(x) > 0$ область определения — вся числовая ось);

2) находят точки, где функция $P_n(x)$ обращается нуль (т. е. корни уравнения $P_n(x) = 0$), и разбивают этими точками область определения неравенства на интервалы;

3) исследуют знак функции $P_n(x)$ на каждом из полученных интервалов, для чего, например, достаточно взять любую точку из этого интервала и вычислить в ней значение функции $P_n(x)$.

Решением неравенства $P_n(x) > 0$ являются те интервалы, где функция $P_n(x)$ принимает положительные значения*.

Неравенство $P_n(x) < 0$ решается аналогично.

Замечание. При установлении знака целой рациональной функции на каждом из интервалов ее знакопостоянства необходимо учитывать кратность корней. *В случае, когда кратность корня — четное число, функция сохраняет знак при переходе через этот корень; в случае, когда кратность корня — нечетное число, функция меняет знак.*

---

* Метод интервалов с незначительными изменениями применим для решения произвольного неравенства $f(x) > 0$ при дополнительных условиях на $f(x)$.

Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 5. *Решить неравенство*

$$P_4(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x > 0.$$

Решение. Разложив на множители левую часть, перепишем неравенство в виде

$$P_4(x) = (x+3)(x+2)x(x-1) > 0$$

и к полученному неравенству применим метод интервалов:

1) область определения неравенства — вся числовая ось;

2) корни функции $P_4(x)$, расположенные в порядке возрастания, — это числа -3, -2, 0, 1; рассмотрим пять интервалов знакопостоянства данной функции;

3) определим знак $P_4(x)$ по числу отрицательных сомножителей. Результат представим в виде таблицы:

Множитель	Интервал				
	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$P_4(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Знак функции $P_4(x)$ на каждом из рассматриваемых интервалов можно также установить, воспользовавшись свойством целой рациональной функции менять знак только при переходе через нуль (нечетной кратности; рис. 120).

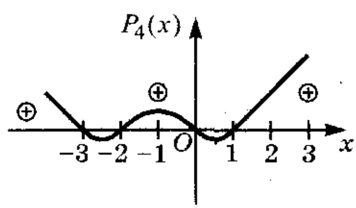


Рис. 120

В самом деле, при переходе в каждый следующий интервал один из сомножителей меняет знак, следовательно, достаточно определить знак $P_4(x)$ в каком-либо одном интервале, после чего знак на других интервалах устанавливается автоматически.

Ответ. $-\infty < x < -3$, $\ -2 < x < 0$, $\ 1 < x < +\infty$.

6. Дробные неравенства

Рассмотрим решение дробного неравенства вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0, \qquad (3)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — целые рациональные функции степеней n и m. Неравенство (3) можно решить, например, сведением к эквивалентному ему целому алгебраическому неравенству $(n+m)$ -й степени, использовав теорему 3:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0 \Leftrightarrow P_n(x)\cdot Q_m(x) > 0,$$

либо сведением к совокупности систем неравенств:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P_n(x) > 0, \\ Q_m(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} P_n(x) < 0, \\ Q_m(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим эти способы на примерах.

Пример 6. *Решить неравенство*

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)(x^2-3x+2)} < 0.$$

Решение. В силу теоремы 3 это неравенство эквивалентно следующему:

$$(x-3)(x^2-3x+2)(x^2+3x+2) < 0.$$

Разложим левую часть на множители и расположим их в порядке возрастания корней:

$$P(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) < 0.$$

Применяя метод интервалов, получим ответ. Геометрическая иллюстрация решения данного неравенства приведена на рис. 121.

Ответ. $-\infty < x < -2,\ -1 < x < 1,\ 2 < x < 3.$

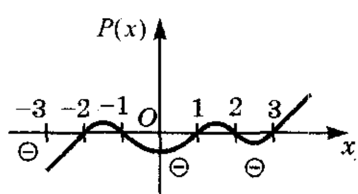


Рис. 121

П р и м е р 7. *Решить неравенство*

$$\frac{x+1}{x-2}>3.$$

Р е ш е н и е. Перенесем 3 в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x+1}{x-2}-3>0 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-2}>0.$$

Дробь положительна, если числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки, т. е. получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \text{I.}\begin{cases}-2x+7>0,\\ x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<3{,}5,\\ x>2;\end{cases} \\ \text{II.}\begin{cases}-2x+7<0,\\ x-2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3{,}5,\\ x<2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Система I имеет решение $2<x<3{,}5$, а система II решений не имеет.

О т в е т: $2<x<3{,}5$.

Полюсами дробно-рациональной функции $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называются корни уравнения $Q_m(x)=0$. Точка $x=a$ называется ***полюсом*** k-го ***порядка***, если она является корнем кратности k этого уравнения.

Метод решения дробного неравенства (3), аналогичный методу интервалов, заключается в следующем:

Находят корни уравнения $P_n(x)=0$ и полюсы дробно-рациональной функции $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ и разбивают этими точками область определения неравенства на интервалы. Исследуют знак дробно-рациональной функции на каждом из полученных интервалов. Те интервалы, где эта функция принимает положительные значения, являются решениями рассматриваемого неравенства.

Пусть какая-либо точка разбиения есть корень кратности k или полюс порядка k. Тогда если k — четное число, то дробно-рациональная функция при переходе через эту точку не меняет знак. Если же число k — нечетное, то дробно-рациональная функция меняет знак на противоположный.

Неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0$ решается аналогично.

Указанный метод можно также применить для решения дробного неравенства $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$. В этом случае решениями данного неравенства являются те промежутки (интервалы, полуинтервалы, сегменты), где дробно-рациональная функция принимает неотрицательные значения.

Следует заметить, что все корни уравнения $P_n(x)=0$ являются решениями данного неравенства, а полюсы дробно-рациональной функции этому неравенству не удовлетворяют.

Возможен случай, когда какие-либо корни и полюсы совпадают.

Неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0$ решается аналогично.

Пример 8. *Решить неравенство*

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3.$$

Решение. Данное неравенство эквивалентно каждому из следующих:

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}+3>0,\quad \frac{4x^2-14x+12}{x^2-4x+3}>0,\quad \frac{2x^2-7x+6}{x^2-4x+3}>0.$$

Для решения полученного дробно-рационального неравенства найдем корни числителя $2x^2-7x+6$ и корни знаменателя x^2-4x+3 и нанесем их на числовую ось Ox (на рис. 122 корни числителя отмечены кружками, корни знаменателя — крестиками). Эти точки разбивают числовую ось на пять интервалов:

$$-\infty<x<1,\ 1<x<1{,}5,\ \ 1{,}5<x<2,\ 2<x<3,\ 3<x<+\infty.$$

Исследуем знак дроби

$$f(x)=\frac{2x^2-7x+6}{x^2-4x+3}$$

в каждом из этих интервалов. Те интервалы, где дробно-рациональная функция положительна, т. е. $x<1$, $\ 1{,}5<x<2$, $x>3$, и дают решения полученного дробно-рационального неравенства, а следовательно, и исходного неравенства (на рис. 122 эти интервалы заштрихованы).

Ответ. $x<1$, $\ 1{,}5<x<2$, $x>3$.

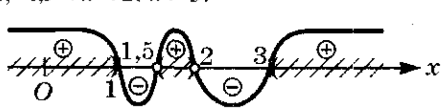


Рис. 122

Замечание. Для исследования знака дроби $f(x)$ достаточно установить ее знак на каком-либо одном из рассматриваемых интервалов. Например, если $x = 0$, то $f(0) = 2 > 0$. Значит, в интервале $x < 1$ имеем $f(x) > 0$. Знак дроби $f(x)$ на остальных интервалах устанавливается автоматически.

Пример 9. *Решить неравенство*

$$\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2} \geq -3x.$$

Решение. По определению абсолютной величины действительного числа имеем

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Значит, исходное неравенство эквивалентно совокупности двух следующих систем неравенств:

$$\text{I. } \begin{cases} x \geq 0, \\ \dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2-x-2} \geq -3x; \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} x < 0, \\ \dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2+x-2} \geq -3x. \end{cases}$$

Решим систему I. Второе неравенство этой системы на множестве $x \geq 0$ эквивалентно каждому из следующих:

$$\frac{(1+x)(2+x)}{(1+x)(x-2)} \geq -3x, \quad \frac{2+x}{x-2} + 3x \geq 0, \quad \frac{3x^2-5x+2}{x-2} \geq 0.$$

Для решения последнего дробно-рационального неравенства найдем корни числителя $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1$ (нули дробно-рациональной функции), корень знаменателя $x_3 = 2$ (полюс дробно-рациональной функции) и изобразим их (рис. 123) на числовой оси $(x \geq 0)$. Исследуем знак дробно-рациональной функции $\dfrac{3x^2-5x+2}{x-2}$ в каждом из полученных четырех промежутков: $0 \leq x < \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$, $1 < x < 2$, $2 < x < +\infty$. Те промежутки, в которых функция неотрицательна, и дают решения рассматриваемого неравенства. Этими промежутками являются: $\frac{2}{3} \le x \le 1,\ 2 < x < +\infty.$

Рассмотрим систему II. Второе неравенство этой системы эквивалентно каждому из следующих:

$$\frac{(1+x)(2+x)}{(x-1)(2+x)} \ge -3x,\ \frac{1+x}{x-1}+3x \ge 0 \quad (x \ne -2),$$

$$\frac{3x^2-2x+1}{x-1} \ge 0 \ (x \ne -2).$$

Так как $3x^2-2x+1>0$ при любом x, то последнее неравенство в области $x<0$ решений не имеет.

Ответ. $\frac{2}{3} \le x \le 1,\ x > 2.$

Замечание. Метод, использованный при решении неравенства

$$f(x)= \frac{3x^2-5x+2}{x-2} \ge 0,$$

основан на свойстве дробно-рациональной функции сохранять знак в каждом из промежутков между нулями и полюсами и менять его при переходе через нуль или полюс нечетной кратности («метод интервалов»).

В случае рассматриваемого неравенства нули $x_1=\frac{2}{3},\ x_2=1$ и полюс $x_3=2$ дробно-рациональной функции однократные. Поэтому для определения знака функции $f(x)$ в каждом из промежутков между нулями и полюсами достаточно установить ее знак в каком-либо одном из этих промежутков. Тогда знак функции $f(x)$ в других промежутках устанавливается автоматически. Например, $f(0)=-1<0.$ Следовательно, если $0 \le x < \frac{2}{3}$, то $f(x)<0$; если $\frac{2}{3} \le x \le 1$, то $f(x) \ge 0$; если $1<x<2$, то $f(x)<0$; наконец, если $2<x<+\infty$, то $f(x)>0$ (см. рис. 123).

Рис. 123

Заметим, что при переходе через нуль или полюс четной кратности дробно-рациональная функция сохраняет знак.

Рассмотрим примеры рациональных неравенств, содержащих параметр.

Пример 10. *Указать все действительные a, при которых не существует ни одного действительного x, одновременно удовлетворяющего неравенствам*

$$ax^2+(a-3)x+\frac{2}{a}-2a\geq 0, \tag{4}$$

$$ax\geq a^2-2. \tag{5}$$

Решение. Найдем корни квадратного трехчлена в левой части неравенства (4):

$$x_1=\frac{1+a}{a} \text{ и } x_2=\frac{2(1-a)}{a}.$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $a>0$, то неравенство (5) можно записать в виде

$$x\geq\frac{a^2-2}{a}, \tag{6}$$

и при любом расположении числа $\frac{a^2-2}{a}$ относительно корней x_1 и x_2 система неравенств (4) и (6) имеет решение. Следовательно, не существует a, удовлетворяющих условию задачи.

2) Если $a<0$, то неравенство (5) можно записать в виде

$$x\leq\frac{a^2-2}{a}. \tag{7}$$

В случае $a<0$ имеем $x_1>x_2$, так как неравенство $\frac{1+a}{a}>\frac{2(1-a)}{a}$ выполняется при $a<0$ и $a>\frac{1}{3}$. Значит, решением неравенства (4) является отрезок $x_2<x<x_1$. Для того чтобы неравенство (4) не имело общих решений с неравенством (7), достаточно, чтобы a удовлетворяло системе

$$\begin{cases} a<0, \\ \dfrac{a^2-2}{a}<\dfrac{2(1-a)}{a}, \end{cases}$$

или, что то же самое, системе

$$\begin{cases} a < 0, \\ a^2 + 2a - 4 > 0, \end{cases}$$

которая имеет решение $a < -1 - \sqrt{5}$.

Ответ. $a < -1 - \sqrt{5}$.

Пример 11. *Найти все действительные значения параметра a, при которых из неравенства* $0 \le x \le 1$ *следует неравенство*

$$f(x, a) = (a^2 + a - 2)x^2 - (a + 5)x - 2 \le 0. \qquad (8)$$

Решение. Требуется найти значения a, при которых $f(x, a) \le 0$ для всех $x \in [0,\ 1]$. Так как

$$a^2 + a - 2 = (a + 2)(a - 1),$$

то исходное неравенство эквивалентно совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -2, \\ -3x - 2 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1, \\ -6x - 2 \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a \ne -2, \\ a \ne 1, \\ (a+2)(a-1)(x - x_1(a))(x - x_2(a)) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -2, \\ x \ge -\dfrac{2}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a = 1, \\ x \ge -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a \ne -2, \\ a \ne 1, \\ [(a-1)x - 2]\cdot[(a+2)x + 1] \le 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad (9)$$

где $x_1(a) = \dfrac{2}{a-1}$ и $x_2(a) = -\dfrac{1}{a+2}$ — корни квадратного трехчлена $f(x, a)$.

Исследуем знак $f(x, a)$ в каждой из частичных областей I–VI (рис. 124). Пусть, например, $x = 0$, $a = -1$. Тогда неравенство (9) выполнено. Пусть $x = -3$, $a = -1$. Тогда неравенство (9) также выполнено. Решением неравенства (9) являются области II и V.

На КП–плоскости aOx решение неравенства (8) есть множество, состоящее из двух лучей и областей II и V, ограниченных ветвями гипербол $x = x_1(a)$ и $x = x_2(a)$. Следовательно, неравенство (8) выполняется для всех $x \in [0,\ 1]$ при $a \in [-3,\ 3]$.

Ответ. $-3 \le a \le 3$.

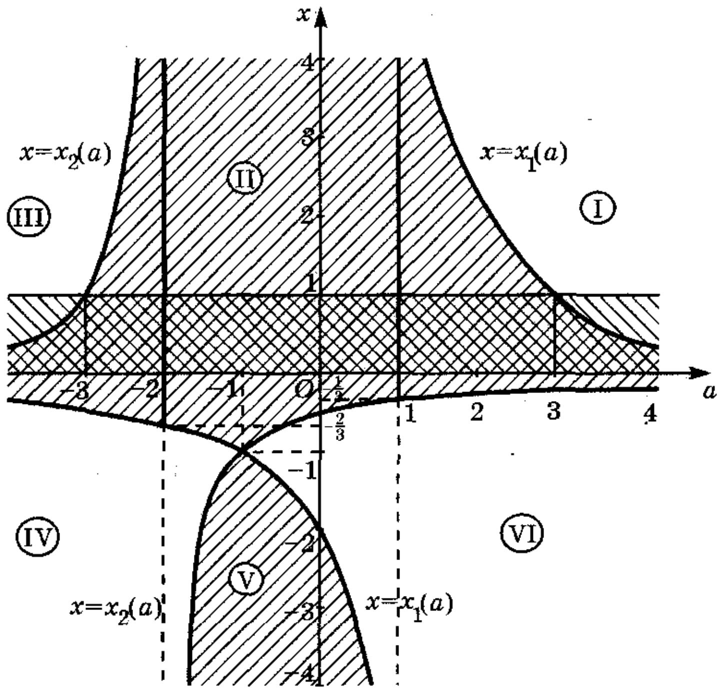


Рис. 124

УПРАЖНЕНИЯ

Решить неравенства:

1. $|x-1|>\frac{x+1}{2}$. Ответ. $x<\frac{1}{3}$, $x>3$.

2. $|1+2x|-|2+x|<2$. Ответ. $-\frac{5}{3}<x<3$.

3. $|2x-5|-|4x+7|\geq 0$. Ответ. $-6\leq x\leq -\frac{1}{3}$.

4. $|2x-4|-|3x+9|-|x-1|>-6$. Ответ. $-9<x<0$.

5. $||x+1|-|x-1||<1$. Ответ. $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

6. $(x^2+1)(x^2+x+1)^3(x+2)^5>0$. Ответ. $x>-2$.

7. $0 < x^2 - 3x \le 4.$ Ответ. $-1 \le x < 0,\ 3 < x \le 4.$

8. $x^4 - 12x^2 + 36 \le 0.$ Ответ. $x = \pm\sqrt{6}.$

9. $x^4 + x^2 - 1 < 0.$ Ответ. $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} < x < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$

10. $x > \frac{1}{x-1}.$ Ответ. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 1,\ x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

11. $2 - x > \frac{1}{1-x}.$ Ответ. $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

12. $2x + 1 > \frac{1}{x+1}.$ Ответ. $-\frac{3}{2} < x < -1,\ x > 0.$

13. $4 - x > \frac{1}{x-1}.$ Ответ. $x < 1,\ \frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$

14. $\frac{4x^2 + 8x - 5}{x+1} < 0.$ Ответ. $x < -\frac{5}{2},\ -1 < x < \frac{1}{2}.$

15. $\frac{x-3}{2x^2 - x - 6} > 0.$ Ответ. $-\frac{3}{2} < x < 2,\ x > 3.$

16. $\frac{x-4}{4x^2 - 4x - 3} < 0.$ Ответ. $x < -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2} < x < 4.$

17. $\frac{2x^2 + x - 15}{x+2} > 0.$ Ответ. $-3 < x < -2,\ x > \frac{5}{2}.$

18. $x + 4 < -\frac{2}{x+1}.$ Ответ. $x < -3,\ -2 < x < -1.$

19. $\frac{4}{1-x} > x + 2.$ Ответ. $x < 1.$

20. $\frac{6}{x+3} < 1 - x.$ Ответ. $x < -3.$

21. $\frac{13}{2-x} > x + 4.$ Ответ. $x < 2.$

22. $\frac{17}{x+4} < 3 - x.$ Ответ. $x < -4.$

23. $\frac{2x+1}{x-2} > \frac{x+4}{2x-5}.$ Ответ. $x < \frac{1}{3},\ 2 < x < \frac{5}{2},\ x > 3.$

24. $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}<-2.$ Ответ. $-1<x<0,\ 0<x<1.$

25. $\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\geq 2.$ Ответ. $2\leq x<\dfrac{11}{4},\ x\geq 4.$

26. $\dfrac{2-x^2}{1-x}\leq x.$ Ответ. $1<x\leq 2.$

27. $x\geq\dfrac{4-x^2}{3-x}.$ Ответ. $\dfrac{4}{3}\leq x<3.$

28. $\dfrac{x-2}{x+2}\geq\dfrac{2x-3}{4x-1}.$ Ответ. $x<-2,\ \dfrac{1}{4}<x\leq 1,\ x\geq 4.$

29. $x^2-5|x|+6<0.$ Ответ. $-3<x<-2,\ 2<x<3.$

30. $|x^2-1|-2x<0.$ Ответ. $-1+\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}.$

31. $-x^2+|6x-5|<0.$

Ответ. $x<-3-\sqrt{14},\ -3+\sqrt{14}<x<1,\ x>5.$

32. $x^2+x-10<2|x-2|.$ Ответ. $-\dfrac{3+\sqrt{65}}{2}<x<3.$

33. $x^2+2|x+3|-10\leq 0.$ Ответ. $1-\sqrt{17}\leq x\leq\sqrt{5}-1.$

34. $x^2-|3x+2|+x\geq 0.$ Ответ. $x\leq -2-\sqrt{2},\ x\geq 1+\sqrt{3}.$

35. $|x^2-3|+2x+1\geq 0.$ Ответ. $x\leq -1-\sqrt{3},\ x\geq 1-\sqrt{5}.$

36. $|x^2-2x-8|>5.$

Ответ. $x<1-\sqrt{14},\ -1<x<3,\ x>1+\sqrt{14}.$

37. $|x^2-2x-3|<3x-3.$ Ответ. $2<x<5.$

38. $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}<5.$ Ответ. $-1<x<2.$

39. $x^2-\dfrac{2}{3x}<\dfrac{13}{9}.$

Ответ. $\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}<x<-\dfrac{2}{3},\ 0<x<\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}.$

40. Доказать, что:

а) $11n^2-14n+3\geq 0$; б) $20n^2-16n+1>0$ при всех целых n.

Найти целочисленные решения неравенств:

41. $(n^2-1)(n^2-11)(n^2-101)(n^2-1001)<0$.

Ответ. $\pm 2, \pm 3, \pm 11, \ldots, \pm 31$.

42. $(n^2-2)(n^2-22)(n^2-52)(n^2-152)<0$.

Ответ. $\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 8, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \pm 12$.

43. $(n^2-3)(n^2-33)(n^2-103)(n^2-203)<0$.

Ответ. $\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 14$.

Считая, что a принимает все действительные значения, решить следующие неравенства:

44. $ax>\dfrac{1}{x}$.

Ответ. Если $a>0$, то $-\dfrac{1}{\sqrt{a}}<x<0$, $x>\dfrac{1}{\sqrt{a}}$; если $a\leq 0$, то $x<0$.

45. $x^2+2x+a>0$.

Ответ. Если $a>1$, то x — любое действительное число; если $a=1$, то x — любое действительное число, кроме $x=-1$; если $a<1$, то $x<-1-\sqrt{1-a}$, $x>-1+\sqrt{1-a}$.

46. $x^2+ax+1>0$.

Ответ. Если $a<-2$, то $x<\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$, $x>\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$; если $a=-2$, то x — любое действительное число, кроме $x=1$; если $-2<a<2$, то x — любое действительное число; если $a=2$, то x — любое действительное число, кроме $x=-1$, если $a>2$, то $x<\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$, $x>\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

47. $ax^2+x+1>0$.

Ответ. Если $a<0$, то $\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}<x<\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$; если $a=0$, то $x>-1$; если $0<a<\frac{1}{4}$, то $x<\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$, $x>\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}$; если $a=\frac{1}{4}$, то x — любое действительное число, кроме $x=-2$; если $a>\frac{1}{4}$, то x — любое действительное число.

48. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}>0.$

Ответ. Если $a<0$, то $0<x<-\frac{a}{2}$, $x>-a$; если $a=0$, то $x>0$; если $a>0$, то $-a<x<-\frac{a}{2}$, $x>0$.

49. $2|x-a|<2ax-x^2-2.$

Ответ. Если $|a|>\sqrt{2}$, то $a+1-\sqrt{a^2-1}<x<\sqrt{a^2-1}+a-1$; если $|a|\le\sqrt{2}$, то решений нет.

Найти все значения a, при которых будут выполняться для всех действительных значений x следующие неравенства:

50. $ax^2+(a-1)x+a-3<0.$ Ответ. $a<\frac{5-2\sqrt{7}}{3}$.

51. $\frac{x^2+ax+1}{x^2+4x+8}<8.$ Ответ. $-10<a<74$.

52. $\left|\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3.$ Ответ. $-5<a<1$.

Указать все действительные значения a, при которых не существует ни одного действительного x, одновременно удовлетворяющего неравенствам:

53. $\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\ge 0,\\ ax\ge 4.\end{cases}$ Ответ. $-2<a\le 0$.

54. $\begin{cases}\frac{a^2x+2a}{ax+a^2-2}\ge 0,\\ ax+a>\frac{5}{4}.\end{cases}$ Ответ. $a\le-\frac{1}{2}$, $a=0$.

55. $\begin{cases} \dfrac{(1-a)x-a}{x-2(1-a)} \geq 0, \\ x-8 \geq ax. \end{cases}$ О т в е т. $1 \leq a \leq 3$.

§ 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Основные способы решения иррациональных уравнений, изложенные в гл. II, могут быть использованы и для решения простейших иррациональных алгебраических неравенств. При этом исходное иррациональное неравенство сводится к эквивалентному ему рациональному. В ряде случаев можно применить метод интервалов (см. § 2).

1. Сведение к системе рациональных неравенств

Распространенным способом решения иррациональных алгебраических неравенств является возведение обеих частей неравенства в степень, равную степени радикала. При этом используется следующее утверждение.

Теорема. *Если на некотором множестве значений x, принадлежащем области определения неравенства*

$$f_1(x) > f_2(x), \tag{1}$$

функции $f_1(x) \geq 0$ ***и*** $f_2(x) \geq 0$, ***то при возведении обеих частей неравенства в целую положительную степень получится неравенство***

$$f_1^n(x) > f_2^n(x), \tag{2}$$

эквивалентное первому на данном множестве.

Д о к а з а т е л ь с т в о (аналогичное доказательству теоремы 3 гл. II, § 1).

1. Пусть неравенство

$$f_1^n(x) > f_2^n(x)$$

выполняется для значений x, принадлежащих некоторому множеству, где функции $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) \geq 0$. Тогда

$$f_1^n(x) - f_2^n(x) > 0$$

или

$$[f_1(x) - f_2(x)] \cdot [f_1^{n-1}(x) + f_1^{n-2}(x) f_2(x) + \ldots + f_2^{n-1}(x)] > 0.$$

Так как на данном множестве

$$f_1^{n-1}(x) + f_1^{n-2}(x) f_2(x) + \ldots + f_2^{n-1}(x) > 0, \tag{3}$$

то $f_1(x) - f_2(x) > 0$, т. е.

$$f_1(x) > f_2(x)$$

для всех x из рассматриваемого множества.

2. Пусть, наоборот, x — решение неравенства

$$f_1(x) > f_2(x)$$

на множестве, где функции $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) \geq 0$. Тогда

$$f_1(x) - f_2(x) > 0.$$

Если обе части этого неравенства умножить на выражение (3), положительное на указанном множестве, то знак неравенства не изменится (см. теорему 2, § 1). Поэтому

$$[f_1(x) - f_2(x)] \cdot [f_1^{n-1}(x) + f_1^{n-2}(x) f_2(x) + \ldots + f_2^{n-1}(x)] > 0,$$

откуда

$$f_1^n(x) > f_2^n(x)$$

для всех x из рассматриваемого множества.

3. Наконец, если $f_1(x) = 0$, а $f_2(x) \geq 0$, то как неравенство (1), так и неравенство (2) решений не имеют.

Итак, на данном множестве все решения неравенства (1) служат решениями неравенства (2) и, наоборот, все решения неравенства (2) служат также решениями неравенства (1).

Доказательство теоремы можно провести также методом от противного.

Таким образом, имеет место следующая эквивалентность:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) > f_2(x), \\ f_1(x) \geq 0, \quad f_2(x) \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f_1^n(x) > f_2^n(x) \\ (n = 2, 3, \ldots). \end{array}$$

Замечание 1. *При возведении обеих частей неравенства* (1) *в нечетную* (*целую положительную*) *степень получится неравенство* (2), *эквивалентное данному всюду в его области определения.*

Действительно, поскольку $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не могут одновременно обращаться в нуль, выражение (3) для нечетного n всегда положительно. В этом случае требование неотрицательности функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не обязательно.

Замечание 2. *Если обе части неравенства* (1) *на некотором множестве неотрицательны, то при возведении их в четную* (*целую положительную*) *степень получится неравенство* (2), *эквивалентное данному на этом множестве.*

Пример 1. *Решить неравенство*

$$\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5+x}.$$

Р е ш е н и е. Область определения неравенства находится из условий

$$1-x \ge 0,\ 5+x \ge 0$$

и представляет собой отрезок $-5 \le x \le 1$. Так как всюду в области определения левая и правая части данного неравенства неотрицательны, то, возводя их в четвертую степень, получим эквивалентную ему систему рациональных алгебраических неравенств:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{1-x}\right)^4 \le \left(\sqrt[4]{5+x}\right)^4, \\ -5 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 \le 5+x, \\ -5 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4 \le 0, \\ -5 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 4, \\ -5 \le x \le 1. \end{cases}$$

О т в е т: $-1 \le x \le 1$.

Проиллюстрируем решение графически (рис. 125).

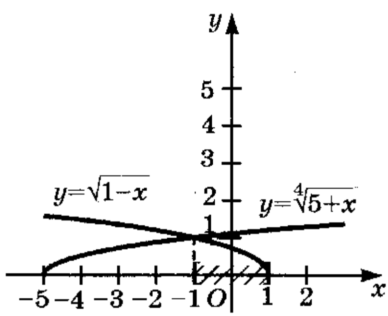


Рис. 125

П р и м е р 2. *Решить неравенство*

$$\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19} > \sqrt{5x-27}.$$

Р е ш е н и е. Область определения неравенства находится из системы

$$\begin{cases} 7x-13 \ge 0, \\ 3x-19 \ge 0, \\ 5x-27 \ge 0 \end{cases}$$

и представляет собой множество

$$x \ge \frac{19}{3}.$$

Перепишем данное неравенство следующим образом:

$$\sqrt{7x-13} > \sqrt{3x-19}+\sqrt{5x-27}. \qquad (4)$$

Так как всюду в области определения левая и правая части неравенства (4) положительны $\left(\text{учитываем неравенство } x \ge \frac{19}{3}\right)$, то, возводя их в квадрат, получим эквивалентную рассматриваемому неравенству систему

$$\begin{cases} 7x-13 > 3x-19+2\sqrt{(3x-19)(5x-27)}+5x-27, \\ x \ge \dfrac{19}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(3x-19)(5x-27)} < 33-x, \\ x \geq \dfrac{19}{3}. \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку левая часть неравенства (5) неотрицательна, правая часть должна быть положительной, т. е. $33-x>0$. Возводя обе части неравенства (5) в квадрат, получим эквивалентную систему неравенств

$$\begin{cases} (2\sqrt{(3x-19)(5x-27)})^2 < (33-x)^2, \\ x \geq \dfrac{19}{3},\ 33-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(3x-19)(5x-27) < x^2-66x+1089, \\ \dfrac{19}{3} \leq x < 33 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 59x^2-638x+963<0, \\ \dfrac{19}{3} \leq x < 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{107}{59} < x < 9, \\ \dfrac{19}{3} \leq x < 33. \end{cases}$$

Ответ. $\dfrac{19}{3} \leq x < 9$.

При решении иррациональных неравенств часто используют следующие важные утверждения:

1^0. *Неравенство*

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \tag{6}$$

эквивалентно системе неравенств

$$\varphi(x)>0,\ 0 \leq f(x) < [\varphi(x)]^2. \tag{7}$$

2^0. *Неравенство*

$$\sqrt{f(x)} > \varphi(x) \tag{8}$$

эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x)<0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} f(x) > [\varphi(x)]^2, \\ \varphi(x) \geq 0, \end{cases} \tag{9}$$

т. е. все решения неравенства (8) принадлежат также множеству решений систем неравенств (9) и, наоборот, все решения систем неравенств (9) удовлетворяют неравенству (8).

Справедливость утверждений 1^0 и 2^0 очевидна, если применить доказанную выше теорему.

Пример 3. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x+2} > x.$$

Решение. Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x+2 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0, \\ x+2 > x^2. \end{cases}$$

Решением первой системы являются все значения x из промежутка $-2 \leq x < 0$. Квадратичное неравенство второй системы выполняется для всех x из промежутка $-1 < x < 2$. Следовательно, решением второй системы неравенств является множество $0 \leq x < 2$.

Два полученных множества решений можно объединить в одно.

Ответ. $-2 \leq x < 2$.

Замечание. Геометрически решение рассмотренного неравенства можно интерпретировать как отыскание множества значений x, для которых ординаты графика функции $y = \sqrt{x+2}$ (часть параболы $y^2 = x+2$, расположенная в верхней полуплоскости) больше ординат графика функции $y = x$ (рис. 126).

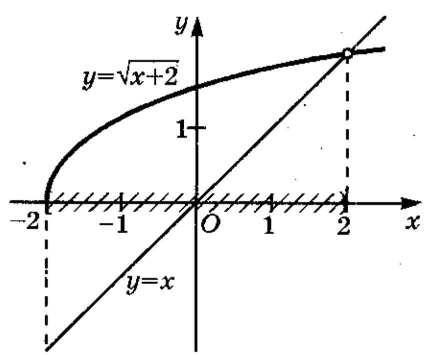


Рис. 126

Пример 4. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1. \qquad (10)$$

Решение. Область определения данного неравенства находится из условий

$$\begin{cases} x^2+3x+2\ge 0, \\ x^2-x+1\ge 0 \end{cases}$$

и представляет собой множества $x\le -2$, $x\ge -1$.

Перепишем неравенство (10) следующим образом:

$$\sqrt{x^2+3x+2}<1+\sqrt{x^2-x+1}. \qquad (11)$$

Обе части неравенства (11) неотрицательны. Поэтому, возводя их в квадрат, получим неравенство

$$\sqrt{x^2-x+1}>2x, \qquad (12)$$

эквивалентное исходному всюду в его области определения. В этой области все отрицательные значения x, т. е. $x\le -2$, $-1\le x<0$, удовлетворяют неравенству (12), а следовательно, и исходному неравенству (10). Если $x\ge 0$, то, возводя обе части неравенства (12) в квадрат, получаем неравенство

$$3x^2+x-1<0, \qquad (13)$$

которое на множестве $x\ge 0$ эквивалентно неравенству (12). Решения неравенства (13) при условии $x\ge 0$ таковы: $0\le x<\frac{\sqrt{13}-1}{6}$. Объединяя множества решений неравенств (12) и (13), получаем ответ.

Ответ. $x\le -2$, $-1\le x<\frac{\sqrt{13}-1}{6}$.

Пример 5. *Решить неравенство*

$$\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1). \qquad (14)$$

Решение. Область определения неравенства находится из условия

$$(x+5)(3x+4)\ge 0$$

и состоит из двух множеств: $x\le -5$ и $x\ge -\frac{4}{3}$.

Рассмотрим неравенство отдельно на каждом из этих двух множеств.

Пусть $x\le -5$. Тогда $4(x-1)<0$ и неравенство (14) удовлетворяется при всех значениях x, принадлежащих этой части области его определения, т. е. при $x\le -5$.

Пусть $x\ge -\frac{4}{3}$. Тогда возможны два случая.

а) $\varphi(x)=4(x-1)<0$, т. е. $x<1$. При всех значениях x, принадлежащих этому множеству, правая часть неравенства (14) есть число отрицательное, а левая — неотрицательное. Поэтому исходное неравенство верно при всяком допустимом значении x, т. е. в этом случае решением является промежуток $-\frac{4}{3} \le x < 1$.

б) $\varphi(x) = 4(x-1) \ge 0$, т. е. $x \ge 1$. Так как на этом множестве левая и правая части неравенства (14) неотрицательны, то, возводя их в квадрат, получим эквивалентную рассматриваемому неравенству систему рациональных неравенств:

$$\begin{cases}[\sqrt{(x+5)(3x+4)}\,]^2 > [4(x-1)]^2 \\ x \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+19x+20 > 16x^2-32x+16, \\ x \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}13\left(x+\frac{1}{13}\right)(x-4) < 0, \\ x \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{13} < x < 4, \\ x \ge 1.\end{cases}$$

В этом случае $1 \le x < 4$.

Объединяя все полученные результаты, находим множество решений исходного неравенства.

Ответ: $x \le -5,\ -\frac{4}{3} \le x < 4$.

Пример 6. *Решить систему неравенств*

$$0 < \sqrt{x+3} - x - 1 \le 1. \tag{15}$$

Решение. Функция $\sqrt{x+3}$ имеет смысл при

$$x \ge -3. \tag{16}$$

Поэтому областью определения системы (15) является множество (16).

Решим сначала неравенство

$$\sqrt{x+3} > x+1. \tag{17}$$

Оно эквивалентно совокупности двух систем рациональных неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases}x+3 \ge 0, \\ x+1 < 0;\end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases}x+3 > (x+1)^2, \\ x+1 \ge 0.\end{cases}$$

Первая система имеет решение $-3 \le x < -1$, а вторая эквивалентна системе

$$\begin{cases}x^2+x-2 < 0, \\ x \ge -1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}-2 < x < 1, \\ x \ge -1\end{cases}$$

и имеет решение $-1 \le x < 1$. Следовательно, неравенство (17) удовлетворяется при

$$-3 \leq x < 1. \tag{18}$$

Решим теперь неравенство

$$\sqrt{x+3} - x - 1 \leq 1,$$

т. е. неравенство

$$\sqrt{x+3} \leq x + 2. \tag{19}$$

Оно эквивалентно системе рациональных неравенств:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ x+3 \leq (x+2)^2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x^2 + 3x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство $x^2 + 3x + 1 \geq 0$ имеет решение

$$x \leq -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ или } x \geq \frac{\sqrt{5}-3}{2}.$$

Первую группу решений следует отбросить, так как $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 2$ и потому решения этой группы не удовлетворяют ограничению $x \geq -2$. С другой стороны, $\frac{\sqrt{5}-3}{2} > -2$, и, значит, множество

$$x \geq \frac{\sqrt{5}-3}{2} \tag{20}$$

является решением неравенства (19).

Решением системы неравенств (15) являются все те же значения x, которые удовлетворяют одновременно неравенствам (18) и (20), а потому искомое решение системы (15) таково: $\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq x < 1$.

Ответ. $\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq x < 1$.

2. Способ подстановки

Иррациональное неравенство можно свести к системе рациональных неравенств, если ввести новое неизвестное (способ подстановки).

При этом рекомендуется применять рационализирующие подстановки (см. гл II, § 5, п. 5).

Пример 7. *Решить неравенство*

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}<\frac{3}{2}.$$

Решение. Область определения неравенства находится из условия

$$\frac{x+1}{x-1}>0$$

и состоит из двух множеств: $x>1$ и $x<-1$.

В этой области с помощью подстановки

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=t \quad (t>0)$$

исходное неравенство сводится к системе рациональных алгебраических неравенств:

$$\begin{cases} t-\dfrac{1}{t}<\dfrac{3}{2}, \\ t>0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{(t-2)\left(t+\dfrac{1}{2}\right)}{t}<0, \\ t>0, \end{cases}$$

откуда $0<t<2$.

Воспользовавшись указанной подстановкой, получим

$$0<\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}<2.$$

Эта система неравенств при $x>1$ выполняется для значений $x>\frac{5}{3}$, а при $x<-1$ — для значений $x<\frac{5}{3}$.

Ответ. $x>\frac{5}{3}$, $x<-1$.

Удобно комбинировать способ возведения в степень с введением новых неизвестных.

Пример 8. *Решить неравенство*

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1.$$

Решение. Область определения неравенства представляет собой множество $x\geq 1$.

Переписав неравенство в виде

$$\sqrt[3]{2-x}>1-\sqrt{x-1}$$

и возведя обе его части в куб, получим неравенство, эквивалентное данному всюду в его области определения:

$$\begin{cases} 2-x>(1-\sqrt{x-1})^3, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-(x-1)>(1-\sqrt{x-1})^3 \\ x\geq 1 \end{cases}$$

Полученное иррациональное неравенство в области $x \geq 1$ с помощью подстановки

$$\sqrt{x-1}=t \ \ (t\geq 0)$$

приводится на множестве $t \geq 0$ к рациональному алгебраическому неравенству, т. е. имеем систему

$$\begin{cases} 1-t^2-(1-t)^3>0, \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t-1)(t-3)>0, \\ t\geq 0. \end{cases}$$

Отсюда $0<t<1$, $t>3$ или, воспользовавшись указанной подстановкой и переходя к первоначальному неизвестному x, имеем

$$0<\sqrt{x-1}<1, \ \sqrt{x-1}>3.$$

Решив эти неравенства, находим $1<x<2$, $x>10$.

Ответ. $1<x<2$, $x>10$.

3. Применение метода интервалов для решения иррациональных неравенств

Применим метод, аналогичный методу интервалов (см. § 2), к решению неравенств, содержащих неизвестное под знаком радикала.

Пример 9. *Решить неравенство*

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}>0.$$

Находим область определения функции $f(x)$ из системы неравенств

$$\begin{cases} 1-x\geq 0, \\ x\geq 0, \end{cases}$$

что дает $0\leq x\leq 1$.

Решаем уравнение $f(x)=0$ и находим его корень $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$.

Разобьем область определения функции на два промежутка:

$$0\leq x<x_1 \ \text{ и } \ x_1<x\leq 1.$$

Исследуем знак функции на каждом из полученных промежутков.

Если $0 \le x < \frac{3-\sqrt{5}}{6}$, например $x = 0$, то $f(0) > 0$; если же $\frac{3-\sqrt{5}}{6} <$ $< x \le 1$, например $x = 1$, то $f(1) < 0$.

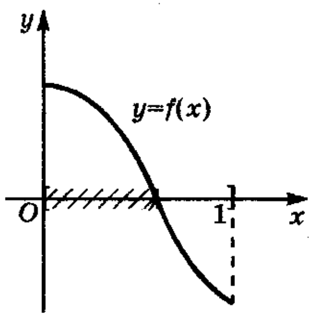


Рис. 127

На рис. 127 дана геометрическая иллюстрация неравенства. Множество значений x из области определения неравенства, для которых $f(x) > 0$, заштриховано.

Ответ. $0 \le x < \frac{3-\sqrt{5}}{6}$.

Замечание. Применяя в процессе решения рассмотренного примера метод, аналогичный методу интервалов, мы использовали (без доказательства) свойство функции $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ сохранять знак в промежутках $0 \le x < x_1$ и $x_1 < x \le 1$.

4. Иррациональные неравенства, содержащие параметр

Пример 10. *Для каждого действительного $a > 0$ решить неравенство*

$$\sqrt{2ax - x^2} \ge a - x.$$

Решение. Здесь допустимыми являются те значения x, для которых $2ax - x^2 \ge 0$, т. е. $0 \le x \le 2a$. При возведении в квадрат обеих частей неравенства следует рассмотреть два случая.

Пусть $a - x \le 0$, т. е. $a \le x \le 2a$. Все значения x из этого множества являются решениями рассматриваемого неравенства, так как арифметическое значение корня всегда неотрицательно, а правая часть неравенства — неположительное число.

Пусть $0 \le x < a$; тогда обе части неравенства неотрицательны и возведение в квадрат приводит к неравенству

$$2ax - x^2 \ge a^2 - 2ax + x^2,$$

эквивалентному данному. Отсюда находим

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}a \le x \le \frac{2+\sqrt{2}}{2}a.$$

Учитывая, что $0 \le x < a$ и что $\frac{2-\sqrt{2}}{2} > 0$, $\frac{2+\sqrt{2}}{2} > 1$, в этом случае имеем

$\frac{2-\sqrt{2}}{2} a \le x < a.$

Объединяя полученные результаты, находим искомое множество решений.

Ответ. $\frac{2-\sqrt{2}}{2} a \le x \le 2a.$

Пример 11. *Для каждого действительного $a > 0$ решить неравенство*

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a.$$

Решение. Находим область определения неравенства: $|x| \le a$. Так как обе части неравенства неотрицательны, то, возведя их в квадрат, получим неравенство, эквивалентное исходному:

$$\begin{cases} (\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})^2 > a^2, \\ |x| \le a, \; a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} > \frac{a}{2}(a-2), \\ |x| \le a, \; a > 0. \end{cases}$$

Согласно утверждению 2^0 из п. 1, полученное иррациональное неравенство эквивалентно совокупности двух систем рациональных неравенств:

$$\begin{cases} |x| \le a, \\ 0 < a < 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a^2 - x^2 > \frac{a^2}{4}(a-2)^2, \\ a \ge 2. \end{cases}$$

Вторая система имеет решение $|x| < \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$ при $2 \le a < 4$.

Ответ. Если $0 < a < 2$, то $|x| \le a$; если $2 \le a < 4$, то $|x| < \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$; если $a \ge 4$, то решений нет.

Пример 12. *Найти все значения a, при каждом из которых среди решений неравенства*

$$\sqrt{(a-x^2)(x^2+a)} + a > x$$

имеются ровно два различных целочисленных решения.

Решение. Применяя схему решения иррационального неравенства вида $\sqrt{f(x)} > \varphi(x)$, получим

$$\sqrt{(a-x^2)(x^2+a)} > x-a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-a<0,\\(a-x^2)(x^2+a)\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-a\ge 0,\\(a-x^2)(x^2+a)>(x-a)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{I.}\begin{cases}x<a,\\x^2\le |a|;\end{cases}\\ \text{II.}\begin{cases}x\ge a,\\x\left(a-\dfrac{x+x^3}{2}\right)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Множество всех точек (x, a) КП–плоскости aOx, для которых значения x и a удовлетворяют полученной совокупности систем неравенств, на рис. 128 заштриховано.

Системе I удовлетворяют значения x и a для точек, расположенных при $-1<a<0$ ниже прямой $x=a$, но выше нижней ветви параболы $a=-x^2$ и на ней, а при $0<a<+\infty$ — ниже прямой $x=a$ и правее параболы $a=x^2$ и на ней.

Системе II удовлетворяют значения x и a для точек, расположенных на прямой $x=a$ и выше ее; при $a<0$ — ниже параметрической оси $x=0$, но выше кубической параболы $a=\dfrac{x+x^3}{2}$, а при $0<a<1$ — ниже этой параболы.

Следовательно, при $-5\le a<-1$ неравенство имеет одно целочисленное решение $x=-1$, при $-15\le a<-5$ — два: $x=-1$ и $x=-2$, при $a<-15$ — три и более решений: $x=-1$, $x=-2$ и $x=-3$ и т. д. При $0<a<1$ неравенство имеет одно целочисленное решение $x=0$, при $a=1$ — два решения $x=0$ и $x=-1$, при $a>1$ — три и более решений.

Ответ. $-15\le a<-5$, $a=1$.

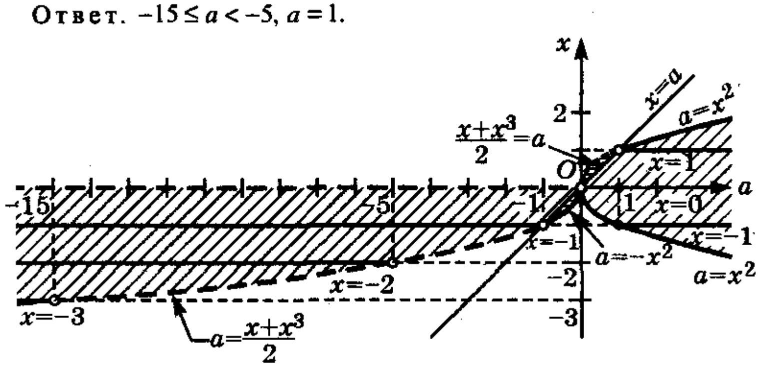


Рис. 128

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \varphi(x)$$

эквивалентно системе неравенств

$$0 \le f(x) < [\varphi(x)]^{2n}, \ \varphi(x) > 0$$

(n — целое положительное число).

2. Доказать, что неравенства

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \varphi(x) \ \text{ и } \ f(x) < [\varphi(x)]^{2n+1}$$

эквивалентны (n — целое положительное число).

3. Доказать, что неравенство

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \varphi(x)$$

эквивалентно совокупности двух систем рациональных неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} f(x) > [\varphi(x)]^{2n}, \\ \varphi(x) \ge 0 \end{cases}$$

(n — целое положительное число).

4. Доказать, что неравенство

$$f(x, \sqrt{\varphi(x)}) > 0$$

эквивалентно смешанной системе

$$f(x, y) > 0, \ y^2 = \varphi(x), \ y \ge 0,$$

т. е. все значения x, для которых справедливо неравенство, удовлетворяют также данной смешанной системе и, наоборот, все значения x, удовлетворяющие смешанной системе, являются также решениями исходного неравенства.

Решить неравенства:

5. $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \ge 0$. Ответ. $0 \le x \le 81, \ x \ge 1296$.

6. $\sqrt{1-x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} > 2$. Ответ. $x < 0, 0 < x < 1$.

7. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$. Ответ. $-6 \le x < 0, 3 < x \le 4$.

8. $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$. Ответ. $-5 \le x < -1, \ x > 1$.

9. $\dfrac{\sqrt{52-x^2}}{2-x} < 1$. Ответ. $-\sqrt{52} \le x < -4, 2 < x \le \sqrt{52}$.

10. $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1.$ Ответ. $-1<x<15.$

11. $\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}}\leq 0.$ Ответ. $-1<x\leq 2.$

12. $\dfrac{4-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\leq 0.$ Ответ. $0<x\leq 15.$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}>\dfrac{1}{x-2}.$ Ответ. $x<2,\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3.$

14. $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}>\dfrac{1}{x+1}.$ Ответ. $x<-1,\ \dfrac{\sqrt{13}-3}{2}<x<2.$

15. $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}>\dfrac{1}{x-1}.$ Ответ. $x<1,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2.$

16. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}>\dfrac{1}{2-x}.$ Ответ. $x>2,\ -1<x<\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}.$

17. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geq 2.$ Ответ. $x\geq 2.$

18. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0.$ Ответ. $\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}<x\leq 1.$

19. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}.$ Ответ. $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}<x\leq 1.$

20. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}>1.$ Ответ. $-5\leq x<\dfrac{-9-\sqrt{61}}{8}.$

21. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}>0.$ Ответ. $5\leq x<\dfrac{5+\sqrt{148}}{3}.$

22. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}.$ Ответ. $-1\leq x\leq 3.$

23. $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}\geq 1.$ Ответ. $\dfrac{14+\sqrt{7}}{2}\leq x\leq 9.$

24. $x-4<\dfrac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2}.$ Ответ. $-1\leq x<8.$

25. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1.$ Ответ. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\le x<0,\ 0<x<\dfrac{1}{3}.$

26. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\sqrt{1+2x}-1.$ Ответ. $0<x<\dfrac{45}{8}.$

27. $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}}\ge x-1.$ Ответ. $-\sqrt{13}<x\le 1,\ 2\le x<\sqrt{13}.$

28. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2.$

Ответ. $1<x<2,\ 2<x<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}.$

29. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}.$ Ответ. $1<x<\dfrac{5}{4},\ x>\dfrac{5}{3}.$

30. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3.$ Ответ. $0\le x\le 5.$

31. $-|y|+x-\sqrt{x^2+y^2-1}\ge 1.$ Ответ. $x=1,\ y=0.$

Для каждого действительного значения параметра a найти решения неравенств:

32. $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0.$

Ответ. Если $a=0$, то решений нет; если $a\ne 0$, то $-\dfrac{|a|}{\sqrt{5}}<x\le |a|.$

33. $\sqrt{\dfrac{3x+a}{x-a}}<a-1.$

Ответ. Если $1<a<1+\sqrt{3}$, то $\dfrac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}<x\le -\dfrac{a}{3}$; если $a=1+\sqrt{3}$, то $-\infty<x\le\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$; если $a>1+\sqrt{3}$, то $-\infty<x\le\dfrac{a}{3}$ и $\dfrac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}<x<+\infty$; если $a\le 1$, то неравенство решений не имеет.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

1. Исследование корней квадратного трехчлена

Корни квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

исследуют с помощью его дискриминанта

$$D = b^2 - 4ac.$$

1^0. Если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то трехчлен не имеет действительных корней.

2^0. Если дискриминант квадратного трехчлена положителен, то трехчлен имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

3^0. Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то трехчлен имеет один действительный корень

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

(Говорят также, что в этом случае трехчлен имеет два равных корня.)

Пример 1. *Для каждого действительного a найти действительные корни уравнения*

$$ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0. \tag{1}$$

Решение. Прежде всего рассмотрим случай $a = 0$ (при этом значении a обычная схема решения квадратного уравнения неприменима). Тогда уравнение (1) примет вид $2x = 0$, откуда $x = 0$.

Пусть теперь $a \neq 0$. Существование и количество корней квадратного уравнения (1) зависят прежде всего от его дискриминанта. Вычислим дискриминант

$$D = 4(a+1)^2 - 8a^2 = -4a^2 + 8a + 4 = 4(-a^2 + 2a + 1). \tag{2}$$

Корнями квадратного трехчлена (2) являются $a_1 = 1-\sqrt{2}$ и $a_2 = 1+\sqrt{2}$ При $D < 0$ уравнение (1) действительных корней не имеет. Это будет в том случае, когда

$$-\infty < a < 1-\sqrt{2} \text{ и } 1+\sqrt{2} < x < +\infty.$$

При $D = 0$, т. е. при $a = 1-\sqrt{2}$ или $a = 1+\sqrt{2}$, уравнение (1) имеет один корень $x = -\frac{a+1}{a}$, а именно:

если $a=1-\sqrt{2}$, то $x=\sqrt{2}$; если $a=1+\sqrt{2}$, то $x=-\sqrt{2}$.

При $D>0$ (и $a\neq 0$) уравнение (1) имеет два корня:

$$x_1=\frac{-(a+1)+\sqrt{D}}{a},\ x_2=\frac{-(a+1)-\sqrt{D}}{a}.$$

Ответ. 1) Если $-\infty<a<1-\sqrt{2}$, то корней нет;

2) если $a=1-\sqrt{2}$, то $x=\sqrt{2}$;

3) если $1-\sqrt{2}<a<0$, то $x=x_1$, $x=x_2$;

4) если $a=0$, то $x=0$;

5) если $0<a<1+\sqrt{2}$, то $x=x_1$, $x=x_2$;

6) если $a=1+\sqrt{2}$, то $x=-\sqrt{2}$;

7) если $1+\sqrt{2}<a<+\infty$, то корней нет.

Пример 2. *Найти все значения a, при которых система*

$$x^2+y^2=a,\ x-y=a \tag{3}$$

имеет единственное решение.

Решение. Выразим y через x из второго уравнения и подставим в первое уравнение системы. Получим квадратное уравнение

$$2x^2-2ax+a^2-a=0. \tag{4}$$

Это уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда его дискриминант

$$D=4a^2-8(a^2-a)=0,$$

т. е. когда $8a-4a^2=0$, откуда $a=0$ или $a=2$.

Итак, если $a=0$ или $a=2$, то квадратное уравнение (4) имеет единственное решение. Ему соответствует единственное решение системы (3).

Ответ. $a=0$, $a=2$.

Замечание. Система уравнений с двумя неизвестными, состоящая из одного уравнения первой степени и одного уравнения второй степени, в общем случае решается способом подстановки. А именно, из линейного уравнения выражают одно из неизвестных через другое и затем подставляют в другое уравнение системы. В результате получают уравнение с одним неизвестным, вообще говоря, квадратное. Решив полученное уравнение, определяют значения этого неизвестного.

При таком способе решения систем проверка найденных решений с помощью подстановки в уравнение необязательна,так как можно доказать, что при исключении одного неизвестного указанным способом «посторонних решений» получиться не может.

Геометрическая интерпретация решения системы (3). Решение системы (3) геометрически интерпретируется как нахождение точки пересечения прямой $x-y=a$ с окружностью $x^2+y^2=a$, $a\neq 0$.

Заметим, что при $a=0$ «окружность» вырождается в точку (начало координат), через которую проходит прямая $x-y=0$. При $a=2$ прямая $x-y=2$ касается окружности $x^2+y^2=(\sqrt{2})^2$ в точке с координатами $x=1$, $y=-1$.

Пример 3. *Найти все значения a, для которых выражение*

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$$

положительно при всех действительных значениях x.

Решение. Если $a^2-1\neq 0$, то данное выражение представляет собой квадратный трехчлен, который будет положительным при всех значениях x, если коэффициент при x^2 положителен, а дискриминант квадратного трехчлена отрицателен:

$$\begin{cases} a^2-1>0, \\ D=4(a-1)^2-8(a^2-1)<0. \end{cases}$$

Эта система эквивалентна следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a^2-1>0, \\ a^2+2a-3>0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} |a|>1, \\ (a-1)(a+3)>0, \end{cases}$$

откуда $a>1$ или $a<-3$.

Если $a^2-1=0$, т.е. либо $a=1$, либо $a=-1$, то в случае $a=1$ исходное выражение равно 2 при всех x, а в случае $a=-1$ это выражение примет вид $-4x+2$ и, значит, не будет положительным при всех x.

Ответ. $a\geq 1$ или $a<-3$.

Пример 4. *Определить, при каких действительных значениях параметра a сумма квадратов действительных корней уравнения $x^2-ax+a-2=0$ будет наименьшей.*

Решение. Данное квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант неотрицателен:

$$D=a^2-4(a-2)=a^2-4a+8\geq 0,$$

что выполняется при любом действительном a. Обозначим эти корни через x_1 и x_2 и представим сумму их квадратов следующим образом:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2. \tag{5}$$

Так как по теореме Виета

$$x_1+x_2=a,\ x_1x_2=a-2,$$

то соотношение (5) можно переписать в виде

$$x_1^2+x_2^2=a^2-2a+4,$$

или

$$x_1^2+x_2^2=(a-1)^2+3. \tag{6}$$

Из равенства (6) следует, что сумма квадратов корней будет наименьшей при $a=1$.

Ответ. При $a=1$.

Замечание. Найдем выражения для сумм одинаковых степеней корней x_1 и x_2 приведенного квадратного трехчлена x^2+px+q через его коэффициенты p и q.

Положим

$$S_1=x_1+x_2,\ S_2=x_1^2+x_2^2,\ S_3=x_1^3+x_2^3,\ldots,S_k=x_1^k+x_2^k,\ldots$$

Имеем $S_1=-p$. *Для вычисления* S_2 *воспользуемся тем*, что числа x_1 и x_2 удовлетворяют квадратному уравнению $x^2+px+q=0$, т. е.

$$x_1^2+px_1+q=0 \tag{7}$$

и

$$x_2^2+px_2+q=0. \tag{8}$$

Сложив почленно равенства (7) и (8), получим

$$S_2-p^2+2q=0. \tag{9}$$

Умножив равенство (7) на x_1, а (8) на x_2 и сложив, получим

$$S_3+pS_2+qS_1=0. \tag{10}$$

Умножив равенства (7) и (8) соответственно на x_1^{k-2} и x_2^{k-2} и сложив, получим

$$S_k+pS_{k-1}+qS_{k-2}=0.$$

Из равенств (9) и (10) находим последовательно

$$S_2=p^2-2q,$$

$$S_3=-pS_2-qS_1=-p^3+3pq,$$

$$S_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2$$

и. т. д.

Если дан неприведенный квадратный трехчлен

$$ax^2 + bx + c \ (a \neq 0),$$

то в записанных формулах достаточно положить $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$.

2. Расположение данного числа относительно корней квадратного трехчлена

Предположим, что квадратный трехчлен

$$y = x^2 + px + q$$

имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$; пусть λ — произвольное число, не равное ни одному из корней x_1 и x_2. Следовательно, λ содержится в одном из трех интервалов $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$ (рис. 128, *а*, *б*, *в* соответственно).

Расположение данного числа λ относительно корней x_1 и x_2 квадратного трехчлена устанавливает следующая теорема.

Теорема. 1^0. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы число λ было меньше обоих корней, является выполнение неравенств*

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0, \ 2\lambda + p < 0.$$

2^0. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы число λ лежало между корнями, является выполнение неравенства*

$$\lambda^2 + p\lambda + q < 0.$$

3^0. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы число λ было больше обоих корней, является выполнение неравенств*

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0, \ 2\lambda + p > 0.$$

Доказательство. Необходимость. 1^0. Пусть λ меньше корней x_1 и x_2 данного трехчлена. Тогда $\lambda - x_1 < 0$, $\lambda - x_2 < 0$ и, значит,

$$(\lambda - x_1)(\lambda - x_2) > 0, \ \lambda - x_1 + \lambda - x_2 < 0,$$

или

$$\lambda^2 - (x_1 + x_2)\lambda + x_1x_2 > 0, \ 2\lambda - (x_1 + x_2) < 0.$$

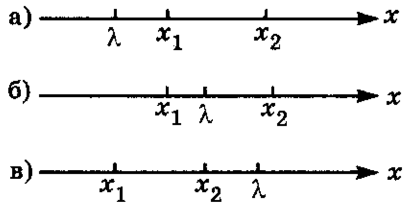


Рис. 128

В силу теоремы Виета имеем

$$-(x_1+x_2)=p, \quad x_1x_2=q.$$

Следовательно,

$$\lambda^2+p\lambda+q>0, \ 2\lambda+p<0.$$

2^0. Пусть λ лежит между корнями x_1 и x_2 данного трехчлена; тогда числа $\lambda-x_1$ и $\lambda-x_2$ имеют разные знаки. Таким образом,

$$(\lambda-x_1)\,(\lambda-x_2)<0\,,$$

или

$$\lambda^2-(x_1+x_2)\lambda+x_1x_2<0\,,$$

или

$$\lambda^2+p\lambda+q<0.$$

3^0. Пусть λ больше обоих корней x_1 и x_2. Тогда $\lambda-x_1>0$, $\lambda-x_2>$ >0 и, значит,

$$(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)>0, \ \lambda-x_1+\lambda-x_2>0\,,$$

или

$$\lambda^2+p\lambda+q>0, \ 2\lambda+p>0.$$

Необходимость всех трех условий доказана.

Достаточность доказывается сразу же методом от противного. В самом деле, предположим, что

$$\lambda^2+p\lambda+q>0 \ \text{ и } \ 2\lambda+p<0,$$

и требуется доказать, что $\lambda<x_1$ и $\lambda<x_2$..

Допустим, что λ лежит между корнями x_1 и x_2; тогда по доказанному в п. 2^0 имеет место неравенство $\lambda^2+p\lambda+q<0$, что противоречит неравенству $\lambda^2+p\lambda+q>0$.

Допустим, что $\lambda > x_1$, $\lambda > x_2$. Тогда в силу доказанного в п. 3^0 имеем

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0 \text{ и } 2\lambda + p > 0,$$

но неравенство $2\lambda + p > 0$ противоречит неравенству $2\lambda + p < 0$.

Аналогично методом от противного доказывается достаточность сформулированных в пп. 2^0 и 3^0 условий..

Сформулируем эту теорему в виде, удобном для геометрической интерпретации.

Пусть квадратный трехчлен

$$f(x) = x^2 + px + q \tag{11}$$

имеет два действительных корня x_1 и x_2 $(x_1 \le x_2)$ и пусть λ — произвольное действительное число, не равное ни одному из этих корней.

Тогда доказанную выше теорему можно сформулировать следующим образом:

1^0. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена* (11) *были действительными и большими, чем число* λ (*т. е. были расположены на числовой оси правее точки* λ), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств*

$$\begin{cases} D = p^2 - 4q \ge 0, \\ x_{\text{в}} = -\dfrac{p}{2} > \lambda, \\ f(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q > 0 \end{cases}$$

(рис. 129).

2^0. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена* (11) *были действительными и один из них был меньше, чем число* λ, *а другой больше, чем число* λ (*т. е. были расположены на числовой оси по разные стороны от точки* λ), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$f(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q < 0$$

(рис. 130).

3^0. *Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена* (11) *были действительными и меньшими, чем число* λ (*т. е. были расположены на числовой оси левее точки* λ), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств*

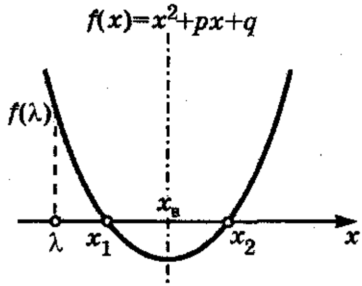


Рис. 129

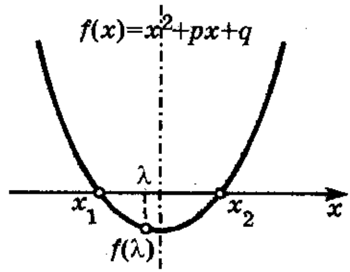


Рис. 130

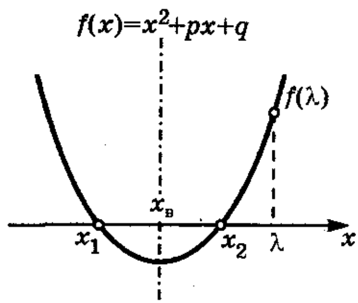


Рис. 131

$$\begin{cases} D = p^2 - 4q \geq 0, \\ x_в = -\dfrac{p}{2} < \lambda, \\ f(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q > 0 \end{cases}$$

(рис. 131).

Эта теорема допускает простую геометрическую интерпретацию.

Например, необходимое условие того, чтобы число λ было меньше обоих действительных корней приведенного квадратного трехчлена, т. е. выполнение неравенств

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0, \ 2\lambda + p < 0,$$

геометрически есть выражение того факта, что ордината параболы $y = x^2 + px + q$ при $x = \lambda$ положительна, а абсцисса вершины параболы $x_в = -\dfrac{p}{2}$ лежит правее числа λ, т. е. $\lambda < -\dfrac{p}{2}$.

В силу доказанной теоремы имеет место также следующее утверждение: *отрезок $a \le x \le b$ лежит строго между корнями квадратного трехчлена с положительным коэффициентом при старшем члене в том и только в том случае, если при $x = a$ и $x = b$ этот трехчлен отрицателен.*

Если допустить совпадение концов a и b отрезка с корнями, то надо потребовать, чтобы трехчлен в соответствующем конце был неположителен. (Все сказанное допускает геометрическую интерпретацию, которую предлагаем выполнить самостоятельно.)

Замечание. Аналогичные условия расположения данного числа λ относительно корней x_1 и x_2 квадратного трехчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \ne 0)$$

можно сформулировать, если известны знаки квадратного трехчлена, его дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ и производной $f'(x) = 2ax + b$ при значении аргумента, равном λ.

А именно, справедливы следующие утверждения:

$$1^0.\ \lambda < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(\lambda) > 0, \\ af'(\lambda) < 0. \end{cases}$$

$$2^0.\ x_1 < \lambda < x_2 \Leftrightarrow af(\lambda) < 0.$$

$$3^0.\ x_1 < x_2 < \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(\lambda) > 0, \\ af'(\lambda) > 0. \end{cases}$$

(Рекомендуем дать геометрическую иллюстрацию этих условий.)

Пример 5. *Найти все значения a, при которых уравнение*

$$(2 - x)(x + 1) = a$$

имеет два различных неотрицательных решения.

Решение. <u>I способ</u>. Данное уравнение эквивалентно следующему:

$$f(x) = x^2 - x + a - 2 = 0, \tag{12}$$

т. е. является приведенным квадратным уравнением. Чтобы уравнение (12) имело два действительных различных корня, достаточно, чтобы его дискриминант был положителен: $D = 1 - 4(a - 2) > 0$, т. е. чтобы $a < \frac{9}{4}$.

Исходная задача эквивалентна следующей: *найти все значения a, при которых число нуль расположено не правее двух различных корней уравнения* (12).

Таким образом, искомые значения a должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(0) \geq 0, \\ 0 < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Последнее условие означает, что абсцисса вершины параболы (12) расположена правее нуля, и выполняется для любых a. Второе условие дает $f(0) = a - 2 \geq 0$, т. е. $a \geq 2$.

Итак, для всех значений a из промежутка $2 \leq a < \dfrac{9}{4}$ число нуль расположено не правее двух различных корней уравнения (12). Указанный промежуток и является решением поставленной задачи.

Рекомендуем дать самостоятельно геометрическую интерпретацию задачи.

<u>II способ</u>. Для того чтобы корни квадратного уравнения (12) были действительными и различными, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого уравнения был положителен:

$$D = 1 - 4(a - 2) > 0,$$

откуда $a < \dfrac{9}{4}$.

Корни x_1 и x_2 неотрицательны в том и только том случае, когда их сумма и произведение неотрицательны, т. е.

$$x_1 + x_2 = 1 > 0, \quad x_1 x_2 = a - 2 \geq 0.$$

Следовательно, $a \geq 2$. Итак, условию задачи удовлетворяют все значения a из промежутка $2 \leq a < \dfrac{9}{4}$.

Ответ. $2 \leq a < \dfrac{9}{4}$.

Замечание. Рекомендуем дать решение задачи КП–методом.

Пример 6. *Для каких значений а один из корней уравнения*

$$(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$$

больше 3, *а другой меньше* 2?

Решение. Очевидно, что $a \neq 2$, так как если $a = 2$, то данное уравнение имеет только один корень.

Вычислим дискриминант:

$$D = 4(a+3)^2 - 4\cdot 4a(a-2) = 4(-3a^2 + 14a + 9).$$

Из условия следует, что корни данного уравнения должны быть действительными и различными, т. е. $D > 0$.

Решив неравенство

$$-3a^2 + 14a + 9 > 0,$$

находим

$$\frac{7-2\sqrt{19}}{3} < a < \frac{7+2\sqrt{19}}{3}, \ a \neq 2. \tag{13}$$

Далее, чтобы воспользоваться теоремой о расположении числа относительно корней, перепишем данное уравнение в виде

$$x^2 - 2\frac{a+3}{a-2}x + \frac{4a}{a-2} = 0.$$

Согласно условию $x_1 < 2$, $x_2 > 3$, т. е. числа 2 и 3 должны лежать между корнями данного уравнения. Поэтому для каждого из этих чисел должно выполняться условие 2^0 теоремы:

$$4 - 4\frac{a+3}{a-2} + \frac{4a}{a-2} < 0, \ 9 - 6\frac{a+3}{a-2} + \frac{4a}{a-2} < 0,$$

или

$$\frac{4a-20}{a-2} < 0, \ \frac{7a-36}{a-2} < 0,$$

т. е.

$$\frac{a-5}{a-2} < 0, \tag{14}$$

$$\frac{a - \frac{36}{7}}{a-2} < 0. \tag{15}$$

Решив дробно-линейные неравенства (14) и (15), получим

$$2 < a < 5. \tag{16}$$

$$2 < a < \frac{36}{7}. \tag{17}$$

Итак, из неравенств (13), (16) и (17) следует, что все значения a, для которых один из корней данного уравнения больше 3, а другой меньше 2, — это все числа из интервала (2, 5).

Ответ. $2 < a < 5$.

Пример 7. *Найти все действительные значения а, при которых оба корня уравнения* $x^2 + x + a = 0$ *действительны и больше а.*

Р е ш е н и е. Как известно, необходимым и достаточным условием того, чтобы число a было меньше действительных корней уравнения $x^2 + x + a = 0$, является выполнение условий

$$\begin{cases} 1-4a \geq 0, \\ a^2 + a + a > 0, \\ 2a+1 < 0. \end{cases}$$

Следовательно, искомые значения a находятся как решения данной системы неравенств. Первое неравенство системы имеет решение $a \leq \frac{1}{4}$; второе $a < -2$, $a > 0$; третье $a < -\frac{1}{2}$. Итак, решением системы является множество значений $a < -2$.

О т в е т. $a < -2$.

З а м е ч а н и е. Рекомендуем дать решение задачи КП–методом.

П р и м е р 8. *Найти все значения параметра а, при которых оба корня квадратного уравнения*

$$x^2 + 4ax + (1-2a+4a^2) = 0$$

действительны и меньше, чем -1.

Р е ш е н и е. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена

$$f(x) = x^2 + 4ax + (1-2a+4a^2)$$

были действительны и меньше, чем число -1 (т. е. были расположены на числовой оси левее точки -1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 4a^2 - 1 + 2a - 4a^2 \geq 0, \\ \qquad\qquad -2a < -1, \\ 1 - 4a + 1 - 2a + 4a^2 > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} a \geq \frac{1}{2}, \\ a > \frac{1}{2}, \\ 2a^2 - 3a + 1 > 0, \end{cases}$$

откуда находим $a > 1$.

О т в е т. $a > 1$.

П р и м е р 9. *Найти все действительные значения параметра а, при которых корни уравнения*

$$(a-3)x^2 - 2ax + 6a = 0 \tag{18}$$

действительны и положительны.

Р е ш е н и е. I способ. Если $a-3=0$, т. е. $a=3$, то уравнение (18) становится линейным и имеет единственный корень $x=3>0$.

Пусть $a\neq 3$. Для того чтобы корни квадратного уравнения (18) с действительными коэффициентами были действительны, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант D этого уравнения был неотрицателен:

$$D=4a^2-24a(a-3)=4a(18-5a)\geq 0,$$

откуда

$$0\leq a\leq 3{,}6. \tag{19}$$

Действительные корни x_1 и x_2 положительны в том и только в том случае, когда их сумма и произведение положительны, т. е.

$$x_1+x_2=\frac{2a}{a-3}>0,\quad x_1x_2=\frac{6a}{a-3}>0. \tag{20}$$

Система неравенств (19) и (20) имеет решение

$$3<a\leq 3{,}6.$$

Итак, корни уравнения (18) действительны и положительны при всех значениях a, удовлетворяющих условию $3\leq a\leq 3{,}6$.

II способ. Воспользуемся теоремой о расположении произвольного действительного числа λ, не равного ни одному из действительных корней x_1 и x_2 квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$, относительно этих корней. Для того чтобы корни уравнения (18) при $a\neq 3$ или, что то же самое, уравнения

$$y(x)=x^2-\frac{2a}{a-3}x+\frac{6a}{a-3}=0$$

были действительны и положительны (иначе говоря, чтобы число $\lambda=0$ было расположено левее действительных корней этого уравнения), параметр a должен удовлетворять одновременно следующим условиям:

1) $D\geq 0$; 2) $y(0)>0$; 3) $0<\dfrac{a}{a-3}$,

т. е.

1) $\left(\dfrac{2a}{a-3}\right)^2-\dfrac{24}{a-3}\geq 0$, т. е. $0\leq a\leq 3{,}6$;

2) $\dfrac{6a}{a-3}>0$, т. е. либо $a<0$, либо $a>3$;

3) $0<\dfrac{a}{a-3}$, т. е. либо $a<0$, либо $a>3$.

Всем трем условиям удовлетворяют значения $3 \le a \le 3{,}6$.

Значение $a = 3$ также удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $3 \le a \le 3{,}6$.

В заключение данного параграфа рассмотрим два примера на применение теоремы Виета, устанавливающей связь между корнями и коэффициентами квадратного трехчлена.

Пример 10. *При каких значениях параметра а отношение корней уравнения*

$$x^2 + \alpha x + \alpha + 2 = 0$$

равно 2?

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного квадратного уравнения и

$$\frac{x_1}{x_2} = 2. \tag{21}$$

Тогда $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{2}$ и, следовательно,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \tag{22}$$

Для тех значений α, при которых выполнено соотношение (21), должно также выполняться соотношение (22).

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\alpha$, $x_1 x_2 = \alpha + 2$. Значит, условие (22) можно записать следующим образом:

$$\frac{\alpha^2 - 2(\alpha + 2)}{\alpha + 2} = \frac{5}{2},$$

или

$$2\alpha^2 - 9\alpha - 18 = 0,$$

откуда $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = -\dfrac{3}{2}$.

Ответ. При $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = -\dfrac{3}{2}$.

Пример 11. *Определить, при каких значениях параметра а уравнения*

$$x^2 + ax + 1 = 0, \tag{23}$$

$$x^2 + x + a = 0 \tag{24}$$

имеют: а) *один общий корень*; б) *два общих корня.*

Р е ш е н и е . а) Пусть x_1 — общий корень уравнений (23) и (24), т. е.

$$x_1^2 + ax_1 + 1 = 0, \tag{25}$$

$$x_1^2 + x_1 + a = 0. \tag{26}$$

Тогда из уравнения (26) находим $a = -x_1^2 - x_1$. Подставив это выражение в уравнение (25), получим

$$x_1^2 - x_1(x_1^2 + x_1) + 1 = 0,$$

или

$$x_1^3 = 1,$$

откуда $x_1 = 1$ и, следовательно, $a = -2$. Проверкой убеждаемся, что при $a = -2$ уравнения (23) и (24) имеют один общий корень $x = 1$.

б) Пусть уравнения (23) и (24) имеют два общих корня. Это имеет место тогда и только тогда, когда коэффициенты уравнений (23) и (24) пропорциональны:

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{1} = \frac{1}{a},$$

т. е. когда $a = 1$.

О т в е т. а) Один общий корень при $a = -2$; б) два общих (комплексных) корня при $a = 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $x^2 - 2|x| - 3 = 0.$ О т в е т. $x_1 = 3,\ x_2 = -3.$

2. $(x+1)(|x|-1) = -\frac{1}{2}.$ О т в е т. $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x_{2,3} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

3. $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5.$ О т в е т. $-3 \le x \le -2,\ 2 \le x \le 3.$

4. $|x^2 - 4x + 2| = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}.$ О т в е т. $x_1 = 5,\ x_2 = 2.$

5. Найти все значения a, при которых система

$$x^2 + ay = 1,\ 3x + 2y = 3$$

имеет единственное решение.

Указание. Данная система эквивалентна каждой из следующих:

$$\begin{cases} x^2+ay=1, \\ y=\dfrac{3}{2}(1-x); \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+\dfrac{3}{2}a(1-x)=1, \\ y=\dfrac{3}{2}(1-x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-3ax+(3a-2)=0, \\ y=\dfrac{3}{2}(1-x). \end{cases} \qquad (*)$$

Следовательно, система имеет единственное решение, когда квадратное уравнение (*) имеет два одинаковых корня, т. е. когда дискриминант этого уравнения $D=9a^2-8(3a-2)=0$.

Ответ. $a=\dfrac{4}{3}$.

6. Выяснить, при каком значении a система

$$x^2+y^2=z, \qquad x+y+z=a$$

имеет единственное действительное решение, и найти это решение.

Ответ. Система имеет единственное действительное решение только при $a=-\dfrac{1}{2}$, а именно: $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$, $z=\dfrac{1}{2}$.

7. Какими должны быть параметры p и q, чтобы корнями уравнения

$$x^2+px+q=0$$

были числа p и q и только они?

Ответ. $p=0,\ q=0$ и $p=1,\ q=-2$.

8. При каких значениях a сумма корней квадратного уравнения

$$x^2+(2-a-a^2)x-a^2=0$$

равна нулю?

Ответ. При $a=1$, $a=-2$.

9. При каких значениях a корни квадратного уравнения

$$x^2-(2a+1)x+2a=0$$

равны между собой?

Ответ. При $a=\dfrac{1}{2}$.

10. При каких значениях a произведение корней квадратного уравнения

$$x^2-2x+(a^2-5a+6)=0$$

равно нулю?

Ответ. При $a=2$, $a=3$.

11. При каких значениях a квадратное уравнение

$$x^2-(a+3)x+a^2=0$$

имеет корень $x=3$?

Ответ. При $a=0$, $a=3$.

12. Не решая уравнения

$$2x^2+x-1=0,$$

определить, в каком интервале относительно его корней находится число 1.

Ответ. Число 1 больше большего корня.

13. Найти все значения a, при которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ больше a.

Ответ. $a<-2$.

14. При каких значениях a один из корней трехчлена

$$(a^2+a+1)x^2+(a-1)x+a^2$$

больше 3, а другой меньше 3?

Ответ. Нет решений.

15. При каких значениях a корни уравнения

$$ax^2+(2a-1)x+1=0$$

различны и находятся в интервале $(-1, 1)$?

Ответ. При $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}<a<2$.

16. Найти все значения параметра c, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2+4cx+(1-2c+4c^2)=0$$

действительны и меньше, чем -1.

Ответ. $c>1$.

17. Найти все значения параметра d, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2-6dx+(2-2d+9d^2)=0$$

действительны и больше, чем 3.

Ответ. $d>\dfrac{11}{9}$.

18. Найти все значения параметра b, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2-2bx-1=0$$

действительны и не превосходят по модулю 2.

Ответ. $|b|\le\frac{3}{4}$.

19. Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2-ax+2=0$$

действительны и находятся между 0 и 3 (исключая крайние значения).

Ответ. $2\sqrt{2}<a<\frac{11}{3}$.

20. Найти все значения m, при которых неравенство

$$mx^2-4x+3m+1>0$$

будет выполнено для всех $x>0$.

Ответ. $m>1$.

21. Найти все значения m, при которых квадратный трехчлен

$$x^2+mx+m^2+6m$$

отрицателен для всех x, удовлетворяющих условию $1<x<2$.

Ответ. $\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}\le m\le -4+2\sqrt{3}$.

22. Найти все значения a, при которых для всех x, по модулю не превосходящих 1, выполняется неравенство

$$\frac{ax-a(1-a)}{a^2-ax-1}>0.$$

Ответ. $a<\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ a>2$.

23. Найти все значения a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству $ax^2+(1-a^2)x-a>0$, по модулю не превосходит 2.

Ответ. $-2\le a\le -\frac{1}{2}$.

24. Найти все значения a, при которых из неравенства $0\le x\le 1$ следует неравенство

$$(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2\le 0.$$

Ответ. $-3\le a\le 3$.

25. Найти все значения a, при которых из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

Ответ. $\frac{1}{2} \le a \le 1$.

26. Найти все значения a, при которых из неравенства

$$x^2 - a(1+a)^2 x + a^4 < 0$$

следует неравенство $x^2 + 4x + 3 < 0$.

Ответ. $a \le -3$, $a \ge -1$.

27. Для каждого действительного a решить уравнение

$$x\,|x+1| + a = 0.$$

Ответ. Если $a < 0$, то $x = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$; если $a = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; если $0 < a < \frac{1}{4}$, то $x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$, $x_3 = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$; если $a = \frac{1}{4}$, то $x_1 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$; если $a > \frac{1}{4}$, то $x = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$.

28. Решить уравнение

$$\left|x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right| = -x^2 - 4x + \beta.$$

При каких β оно имеет единственное решение? Ограничится действительными корнями (β — также действительный параметр).

Ответ. Если $\beta < -\frac{57}{32}$, то корней нет; если $\beta = -\frac{57}{32}$, то $x = -\frac{5}{8}$; если $-\frac{57}{32} < \beta < -\frac{7}{4}$, то $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57+32\beta}}{8}$, если $\beta = -\frac{7}{4}$, то $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{4}$; если $-\frac{7}{4} < \beta < 12$, то $x_1 = \frac{-5-\sqrt{57+32\beta}}{8}$, $x_2 = \frac{2}{11}(\beta - 1)$; если $\beta = 12$, то $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{13}{4}$; если $\beta > 12$, то $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57+32\beta}}{8}$.

Итак, уравнение имеет единственный корень $x=-\frac{5}{8}$ только при $\beta=-\frac{57}{32}$.

29. Найти все значения α, при которых система неравенств

$$x^2+2x+\alpha\le 0,\quad x^2-4x-6\alpha\le 0$$

имеет единственное решение.

Ответ. $\alpha=0$, $\alpha=1$.

30. Найти все значения α, при которых решения системы неравенств

$$x^2+6x+7+\alpha\le 0,\quad x^2+4x+7\le 4\alpha$$

образуют на числовой оси отрезок единичной длины.

Ответ. $\alpha=1$, $\alpha=\frac{7}{4}$.

31. Найти все значения α, при которых система неравенств

$$x^2+4x+3\le\alpha,\quad x^2-2x\le 3-6\alpha$$

имеет единственное решение.

Ответ. $\alpha=-1$, $\alpha=0$.

32. Найти все значения α, при которых решения системы неравенств

$$x^2-2x\le\alpha-1,\quad x^2-4x\le 1-4\alpha$$

образуют на числовой оси отрезок единичной длины.

Ответ. $\alpha=\frac{1}{4}$, $\alpha=1$.

33. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2-(a+b)x+8=0$;

2) $x^2-b(b+1)x+c=0$;

3) $x^4-b(b+1)x^2+c=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c, если $b>3$.

Ответ. $a=2$, $b=4$, $c=64$.

§ 5. ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

Рассмотрим некоторые способы решения простейших задач на максимум и минимум; в переводе с латинского эти слова обозначают наибольшее и наименьшее (значение). Максимум и минимум объединяют одним термином — экстремум. Ограничимся задачами, решение которых проводится средствами элементарной математики.

1. Исследование квадратного трехчлена на экстремум

Пусть дан квадратный трехчлен с действительными коэффициентами

$$y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0).$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \qquad (1)$$

Рассмотрим два случая.

1. Если $a > 0$, то слагаемое $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ неотрицательно и при $x = -\frac{b}{2a}$ равно нулю. Поэтому трехчлен (1) принимает наименьшее значение

$$y_{\min} = c - \frac{b^2}{4a}$$

и не имеет наибольшего значения.

2. Если $a < 0$, то слагаемое $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ неположительно и при $x = -\frac{b}{2a}$ трехчлен (1) принимает наибольшее значение

$$y_{\max} = c - \frac{b^2}{4a}$$

и не имеет наименьшего значения.

Итак, мы доказали следующую **теорему**: *квадратный трехчлен*

$$y = ax^2 + bx + c$$

при $x = -\frac{b}{2a}$ *имеет экстремум, равный* $c - \frac{b^2}{4a}$; *если* $a > 0$ *— это минимум, а если* $a < 0$ *— максимум.*

Эта теорема позволяет находить экстремумы простейших функций от квадратного трехчлена, как, например,

$$[y(x)]^2,\ \sqrt{y(x)},\ \frac{1}{y(x)} \text{ и т. д.}$$

Пример 1. *Ракета должна пройти отрезок, равный H. Она начинает движение с постоянной скоростью v и в любой момент времени может включить дополнительный двигатель, дающий постоянное ускорение a (a > 0) и работающий до конца пути. Расход топлива на участке пути с постоянной скоростью пропорционален времени движения, а при включенном дополнительном двигателе — квадрату времени, причем коэффициенты пропорциональности соответственно равны* k_1 *и* k_2 $(k_1 > 0, k_2 > 0)$. *Какое время ракета должна двигаться с включенным дополнительным двигателем, чтобы общий расход топлива был наименьшим?*

Решение. Пусть τ — время движения ракеты с постоянной скоростью, t — время движения с включенным дополнительным двигателем, A — расход топлива.

Из уравнений

$$H = v\tau + vt + \frac{at^2}{2},\quad A = k_1\tau + k_2t^2$$

находим

$$\tau = \frac{1}{v}\left(H - vt - \frac{at^2}{2}\right);$$

$$A = \left(k_2 - \frac{ak_1}{2v}\right)t^2 - k_1t + \frac{k_1H}{v}. \qquad (2)$$

Заметим, что $0 \le t \le t_0$, где t_0 — положительный корень уравнения

$$H = vt_0 + \frac{at_0^2}{2},\ \text{т. е.}\ t_0 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2aH}}{a}$$

(время полета в том случае, если двигатель включен с самого начала). Нужно найти наименьшее значение функции $A = A(t)$, заданной формулой (2), на отрезке $[0,\ t_0]$.

1. Пусть $k_2 - \dfrac{ak_1}{2v} < 0$; тогда вершина параболы $A = A(t)$ имеет абсциссу

$$t^* = \frac{k_1}{2\left(k_2 - \dfrac{ak_1}{2v}\right)} = \frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1} < 0.$$

Расположение параболы указано на рис.132. Наименьшее значение функции (2) на отрезке $[0, t_0]$ достигается при $t = t_0$.

2. Пусть $k_2 - \frac{ak_1}{2v} = 0$; тогда функция (2) примет вид $A(t) = -k_1 t + \frac{k_1 H}{v}$. Наименьшее значение этой функции на отрезке $[0, t_0]$ достигается при $t = t_0$ (рис. 133).

3. Пусть $k_2 - \frac{ak_1}{2v} > 0$; тогда вершина параболы (2) имеет абсциссу

$$t^* = \frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1} > 0.$$

В случае, когда $t^* \le t_0$, наименьшее значение функции (2) на отрезке $[0, t_0]$ достигается при $t = t^*$ (рис. 134), а в случае, когда $t^* \ge t_0$, — при $t = t_0$ (рис. 135).

Ответ. Если $2vk_2 - ak_1 > 0$ и $\frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1} \le \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2aH}}{a}$, то $t = \frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1}$; если $2vk_2 - ak_1 \le 0$ или $2vk_2 - ak_1 > 0$ и $\frac{vk_1}{2vk_2 - ak_1} > \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2aH}}{a}$, то $t = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2aH}}{a}$.

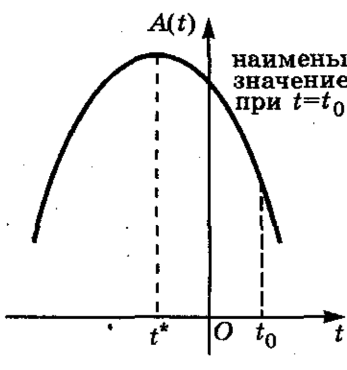


Рис. 132

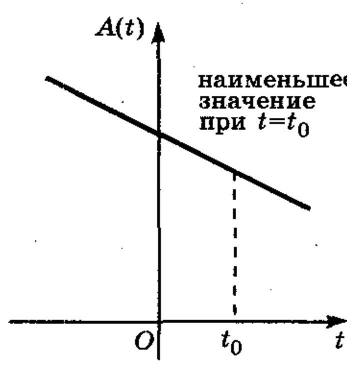


Рис. 133

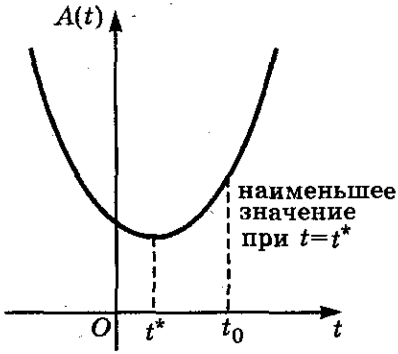


Рис. 134

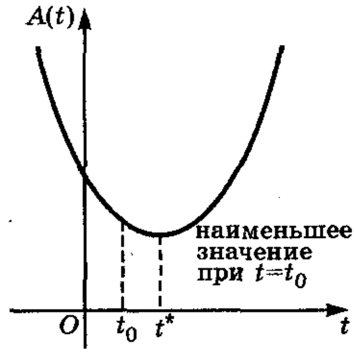


Рис. 135

2. Исследование биквадратного трехчлена на экстремум

Рассмотрим биквадратный трехчлен

$$y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0),$$

причем будем считать, что $a > 0$ (при $a < 0$ исследование аналогично).

Выделяя полный квадрат, получим

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (3)$$

Так как функция (3) — четная (следовательно, ее график симметричен относительно оси ординат), то достаточно исследовать ее на полусегменте $x \geq 0$.

Возможны три случая.

1. Пусть $b > 0$. Тогда величина $x^2 + \dfrac{b}{2a}$ положительна и на полусегменте $0 \leq x < +\infty$ возрастает от $\dfrac{b}{2a}$ (при $x = 0$) до $+\infty$ и, значит, функция (3) возрастает от c до $+\infty$. На полусегменте $-\infty < x \leq 0$ функция (3) убывает от $+\infty$ до c. Таким образом, трехчлен достигает минимума при $x = 0$ и это минимальное значение равно c.

2. Пусть $b < 0$. В этом случае имеем

$$y = a\left(x^2 - \frac{|b|}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (4)$$

Поэтому необходимо рассмотреть два промежутка: $0 \le x \le \sqrt{\frac{|b|}{2a}}$ и $\sqrt{\frac{|b|}{2a}} \le x < +\infty$. В первом промежутке слагаемое $\left(x^2 - \frac{|b|}{2a}\right)^2$ убывает от $\frac{|b|^2}{4a^2}$ до 0, а, следовательно, функция (4) также убывает от c до $\frac{4ac-b^2}{4a}$. Во втором промежутке это слагаемое возрастает от 0 до $+\infty$, а потому функция (4) также возрастает от $\frac{4ac-b^2}{4a}$ до $+\infty$. Вследствие четности функции (4) в промежутках $-\infty < x \le -\sqrt{\frac{|b|}{2a}}$ и $-\sqrt{\frac{|b|}{2a}} \le x \le 0$ она соответственно убывает от $+\infty$ до $\frac{4ac-b^2}{4a}$ и возрастает от $\frac{4ac-b^2}{4a}$ до c. В точках $x = \pm\sqrt{\frac{|b|}{2a}}$ она принимает наименьшее значение, равное $\frac{4ac-b^2}{4a}$, а в точке $x = 0$ — локальный максимум, равный c.

3. Пусть $b = 0$. В этом случае $y = ax^4 + c$. При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение, равное c.

Рекомендуем самостоятельно нарисовать эскизы графиков функции для всех рассмотренных случаев и провести аналогичное исследование при $a < 0$.

Пример 2. *Дождевая капля, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести, испаряясь так, что убыль массы пропорциональна квадрату времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через какое время после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? (Сопротивлением воздуха пренебречь.)*

Решение. Под действием силы тяжести капля движется равноускоренно. В момент времени t масса капли $m(t) = m_0 - kt^2$ (по смыслу задачи $m \ge 0$, $k > 0$), ее скорость

$$v(t) = gt,$$

а кинетическая энергия

$$E(t) = \frac{m(t)v^2(t)}{2} = \frac{1}{2}(m_0 - kt^2)g^2t^2.$$

Таким образом, задача состоит в отыскании наибольшего значения функции

$$E(t) = -\frac{g^2}{2}(kt^4 - m_0 t^2)$$

на отрезке $0 \le t \le t_0$, где t_0 определяется из уравнения $m(t_0) = m_0 - kt_0^2 = 0$ и равно $\sqrt{\frac{m_0}{k}}$. Это, в свою очередь, равносильно отысканию наименьшего значения функции

$$y(t) = \frac{g^2}{2}(kt^4 - m_0 t^2).$$

Как следует из сказанного выше, эта функция на отрезке $0 \le t \le t_0$ принимает наименьшее значение при $t = \sqrt{\frac{m_0}{2k}}$.

Итак, наибольшее значение кинетической энергии капли достигается в момент времени $t = \sqrt{\frac{m_0}{2k}}$ и равно $E_{\max} = E\left(\sqrt{\frac{m_0}{2k}}\right) = \frac{g^2 m_0^2}{8k}$.

3. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции с помощью исследования множества ее значений

Если множество всех значений функции $y = f(x)$ известно, то наибольшее и наименьшее значения (если они существуют) находят непосредственно.

Существует достаточно эффективный способ нахождения множества значений функции $y = f(x)$. Так как x определяется из уравнения

$$f(x) - y = 0,$$

то данный способ нахождения множества значений функции эквивалентен нахождению множества всех значений параметра y, при которых это уравнение имеет действительные решения.

Например, нахождение множества значений функции

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} \quad (a^2 + a_1^2 \ne 0, \ -\infty < x < +\infty)$$

сводится к нахождению множества всех значений параметра y, при которых квадратное уравнение

$$(a_1y-a)x^2+(b_1y-b)x+(c_1y-c)=0 \ \ (a_1y-a\neq 0)$$

имеет действительные корни. Это множество находится из условия неотрицательности дискриминанта, для чего нужно решить квадратичное неравенство

$$D=(b_1y-b)^2-4(a_1y-a)(c_1y-c)\geq 0.$$

Пример 3. *Найти множество всех значений функции*

$$y=\frac{x}{1+x^2}. \tag{5}$$

Решение. Имеем

$$(1+x^2)y=x\text{, или } yx^2-x+y=0.$$

Значение $y=0$ функция принимает при $x=0$.

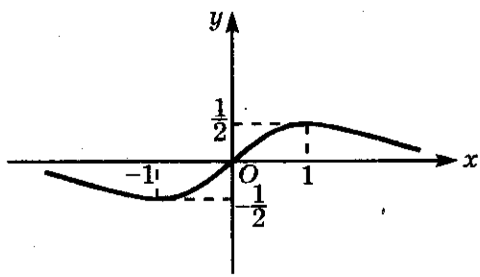


Рис. 136

Если $y\neq 0$, то задача сводится к исследованию квадратного уравнения с действительным параметром y. Это уравнение имеет действительные решения при условии

$$D(y)=1-4y^2\geq 0,\ y\neq 0. \tag{6}$$

Множество значений функции (5) есть множество всех решений квадратичного неравенства (6) включая $y=0$, и представляет собой сегмент $-\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}$.

График данной функции изображен на рис. 136.

Ответ. $-\frac{1}{2}\leq y\leq \frac{1}{2}$.

Пример 4. *Найти наибольшее значение дроби*

$$\frac{3x-2}{4x-x^2-6},$$

если x может принимать любые действительные значения.

Р е ш е н и е. Данная дробь определена на всей числовой оси. Исследуем множество значений функции

$$y=\frac{3x-2}{4x-x^2-6}.$$

Для этого рассмотрим уравнение

$$\frac{3x-2}{4x-x^2-6}-y=0,$$

или эквивалентное ему уравнение относительно x:

$$yx^2+(3-4y)x+(6y-2)=0.$$

При $y\neq 0$ оно имеет действительные решения тогда и только тогда, когда

$$D(y)=(3-4y)^2-4y(6y-2)\geq 0,$$

т. е. когда $-8y^2-16y+9\geq 0$. Последнее неравенство выполняется при

$$\frac{-4-\sqrt{34}}{4}\leq y\leq\frac{-4+\sqrt{34}}{4}.$$

Значение $y=0$ дробь принимает при $x=\frac{2}{3}$. Следовательно, наибольшее значение дроби есть $y_{\max}=\frac{\sqrt{34}-4}{4}$.

О т в е т. $\frac{\sqrt{34}-4}{4}$.

П р и м е р 5. *На странице книги печатный текст должен занимать S см². Верхнее и нижнее поля должны быть по а см, правое и левое — по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?*

Р е ш е н и е. Пусть размеры страницы равны x и y (рис. 137). Тогда площадь страницы $F=xy$, откуда $y=\frac{F}{x}$. С другой стороны, та же площадь представляет собой сумму площадей пяти прямоугольников, т. е.

$$F=S+2ax+2(y-2a)b. \tag{7}$$

Следовательно,

$$F=S+2ax+2\left(\frac{F}{x}-2a\right)b, \tag{8}$$

или

$$F=\frac{2ax^2+(S-4ab)x}{x-2b}. \qquad (9)$$

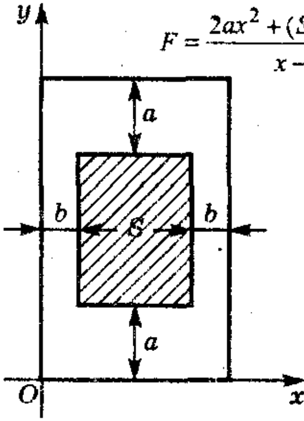


Рис. 137

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции (9), удовлетворяющей условию $F>S$ (площадь страницы больше площади печатного текста), т. е. к исследованию квадратного уравнения

$$2ax^2+(S-4ab-F)x+2bF=0$$

с действительным параметром F. Это уравнение имеет действительные корни, если

$$D=(S-4ab-F)^2-16abF\geq 0.$$

Множество значений функции F есть множество всех решений квадратного неравенства

$$F^2-2(S+4ab)F+(S-4ab)^2\geq 0,$$

или

$$[F-(S+4ab-4\sqrt{Sab})]\cdot[F-(S+4ab+4\sqrt{Sab})]\geq 0,$$

удовлетворяющих условию $F>S$, и представляет собой полупрямую

$$S+4ab+4\sqrt{Sab}\leq F<+\infty.$$

Следовательно, наименьшее значение функции есть

$$F_{\min}=S+4ab+4\sqrt{Sab}.$$

Из равенства (9) найдем соответствующее значение

$$x=2b+\frac{1}{a}\sqrt{Sab},$$

а из равенства (8) — соответствующее значение

$$y=2a+\frac{1}{b}\sqrt{Sab}.$$

Ответ. $2b+\frac{1}{a}\sqrt{Sab}$ и $2a+\frac{1}{b}\sqrt{Sab}$.

4. Решение задач на экстремум с помощью неравенств

Иногда для нахождения экстремальных значений функции используют неравенства. Особенно часто используется ***теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом (неравенство Коши).***

Сформулируем и докажем справедливость неравенства Коши для двух и трех чисел.

1^0. *Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел:*

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}.$$

Равенство имеет место при условии $a_1 = a_2$.

Доказательство. Для любых действительных чисел x_1 и x_2 выполняется неравенство

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \ge 0,$$

откуда

$$x_1^2 + x_2^2 \ge 2x_1 x_2.$$

Положив $x_1 = \sqrt{a_1}$ и $x_2 = \sqrt{a_2}$, получим $a_1 + a_2 \ge 2\sqrt{a_1 a_2}$, что и требовалось доказать. Равенство возможно лишь при условии $x_1 - x_2 = 0$, т. е. $x_1 = x_2$, а следовательно, $a_1 = a_2$.

2^0. *Среднее арифметическое трех неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел:*

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \ge \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3},$$

причем равенство имеет место при условии $a_1 = a_2 = a_3$.

Доказательство. Для любых неотрицательных чисел x_1, x_2 и x_3 выполняются неравенства

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2 \ge 0,$$

$$(x_2 + x_3)(x_2 - x_3)^2 \ge 0,$$

$$(x_1 + x_3)(x_1 - x_3)^2 \ge 0$$

(равенства имеют место, если $x_1 = x_2 = x_3$). Раскрыв скобки и перенеся некоторые члены в правую часть, получим

$$x_1^3 + x_2^3 \ge x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2,$$

$$x_2^3 + x_3^3 \ge x_2 x_3^2 + x_3 x_2^2,$$

$$x_1^3 + x_3^3 \ge x_1 x_3^2 + x_3 x_1^2.$$

Сложив эти неравенства почленно, имеем

$$(x_1^3+x_2^3)+(x_2^3+x_3^3)+(x_1^3+x_3^3)\ge$$

$$\ge(x_1x_2^2+x_2x_1^2)+(x_2x_3^2+x_3x_2^2)+(x_1x_3^2+x_3x_1^2)$$

(равенство достигается, если $x_1=x_2=x_3$). Приведем подобные члены:

$$2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)\ge x_3(x_1^2+x_2^2)+x_1(x_2^2+x_3^2)+x_2(x_1^2+x_3^2). \qquad (10)$$

Для любых двух неотрицательных чисел, как было доказано ранее, справедливы неравенства

$$x_1^2+x_2^2\ge 2x_1x_2,\quad x_2^2+x_3^2\ge 2x_2x_3,\ x_1^2+x_3^2\ge 2x_1x_3$$

(равенства имеют место при $x_1=x_2=x_3$).

Пользуясь этими неравенствами, можно усилить неравенство (10):

$$2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)\ge 6x_1x_2x_3$$

(равенство достигается при $x_1=x_2=x_3$). Положив в последнем соотношении $x_1^3=a_1$, $x_2^3=a_2$, $x_3^3=a_3$, окончательно получим

$$a_1+a_2+a_3\ge 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3}.$$

Используя ту же идею доказательства, что и для случая трех чисел, и применяя метод полной математической индукции, можно доказать неравенство Коши для n неотрицательных чисел: *среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел*:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Рассмотрим два важных следствия из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

1. *Произведение положительных множителей, сумма которых постоянна, принимает наибольшее значение при равенстве множителей (если множители могут иметь равные значения).*

Доказательство. Пусть $a_1+a_2+\ldots+a_n=A=\text{const}$. Тогда по теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем

$$a_1a_2\ldots a_n\le\left(\frac{A}{n}\right)^n.$$

Никакой выбор слагаемых не приводит к произведению, большему, чем $\left(\frac{A}{n}\right)^n$. С другой стороны, при

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{A}{n},$$

очевидно, получается произведение $\left(\frac{A}{n}\right)^n$. Следовательно, чтобы произведение оказалось наибольшим, слагаемые должны быть равны друг другу.

2. *Сумма положительных слагаемых, произведение которых постоянно, принимает наименьшее значение при равенстве слагаемых.*

Доказательство. Пусть $a_1 a_2 \ldots a_n = P = \text{const}$. Тогда по теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{P}.$$

Значит, никакой выбор слагаемых не приводит к сумме, меньшей, чем $n\sqrt[n]{P}$, а так как при

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \sqrt[n]{P}$$

получается сумма, равная $n\sqrt[n]{P}$, то сумма окажется наименьшей при равенстве слагаемых.

Рассмотрим примеры, при решении которых используются доказанные утверждения.

Пример 6. *В данный конус вписать цилиндр наибольшего объема.*

Решение. Обозначим через R и H соответственно радиус основания и высоту конуса, а через r и h — радиус и высоту искомого цилиндра. Тогда выражение интересующего нас объема имеет вид

$$V = \pi r^2 h.$$

Из подобия треугольников OAB и $O_1A_1B_1$ (рис. 138) следует пропорция

$$\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R},$$

откуда

$$h = \frac{H}{R}(R - r).$$

Таким образом,

$$V = \pi \frac{H}{R} r^2 (R - r). \qquad (11)$$

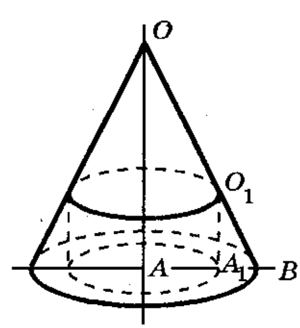


Рис. 138

Наибольшее значение функции (11) достигается при том же r, что и наибольшее значение функции

$$z=\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot(R-r),$$

являющейся произведением трех сомножителей, сумма которых постоянна. Значит, z_{max} достигается при

$$\frac{r}{2}=\frac{r}{2}=R-r,$$

т.е. $r=\frac{2}{3}R$.

Ответ. Объем цилиндра будет наибольшим, если радиус цилиндра составляет $\frac{2}{3}$ радиуса основания конуса.

Пример 7. *Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с площадью, равной 2 $м^2$, а высота призмы равна гипотенузе основания. Какими должны быть стороны основания, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?*

Решение. Обозначим катеты прямоугольного треугольника в основании призмы через x и y. По условию, $\frac{1}{2}xy=2$, а высота призмы равна $h=\sqrt{x^2+y^2}$. Тогда боковая поверхность призмы есть

$$S=\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}.$$

Подставляя в это выражение $y=\frac{4}{x}$, получим

$$S=\left(x+\frac{4}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{16}{x^2}}+\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right). \qquad (12)$$

Функция (12) достигает минимума при таком положительном значении x, при котором функции $x+\frac{4}{x}$ и $x^2+\frac{16}{x^2}$ принимают наименьшие значения.

Функция $x+\frac{4}{x}$ при $x>0$ представляет собой сумму положительных слагаемых, произведение которых постоянно и равно 4; следовательно, она принимает наименьшее значение при равенстве слагаемых: $x=\frac{4}{x}$, т. е. при $x=2$. То же самое относится и к функции $x^2+\frac{16}{x^2}$.

Итак, функция S принимает наименьшее значение при $x = 2$; тогда $y = 2$. Призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 2 м, существует и удовлетворяет всем условиям поставленной задачи.

Ответ. Боковая поверхность призмы будет наименьшей, когда основанием ее будет равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными 2 м.

5. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции с помощью исследования ее на монотонность

При исследовании функции на монотонность может оказаться, что в некоторых точках возрастание функции сменяется убыванием (или наоборот). Эти точки принято называть ***экстремальными точками***. Значения функции в экстремальных точках называют ***экстремальными*** (т. е. крайними) ***значениями***. При этом если возрастание функции $f(x)$ сменяется в точке x_0 на убывание, то говорят, что функция имеет в точке x_0 ***локальный*** (т. е. местный) ***максимум***; наоборот, если убывание функции сменяется в некоторой точке возрастанием, то говорят, что в этой точке функция имеет ***локальный минимум***.

Итак, функция $f(x)$ имеет при $x = x_0$ локальный максимум (или минимум), если в некоторой окрестности точки x_0 при $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ (соответственно $f(x_0) < f(x)$). Например, функция, изображенная на рис. 139, имеет в точке x_0 локальный максимум, а в точке x_1 — локальный минимум.

Локальный максимум и локальный минимум объединяют одним общим термином — ***локальный экстремум***. Отметим, что само определение локального экстремума предполагает, что функция задана слева и справа от точки x_0 в некоторой ее окрестности. Так, например, если функция задана на отрезке $[a, b]$, то локальный экстремум определяется только для внутренних точек этого отрезка. Отметим также, что мы дали определение строгого локального экстремума.

Знание локальных экстремумов позволяет найти наибольшее и наименьшее значения функции, заданной на некотором промежутке.

Пусть, например, на отрезке $a \leq x \leq b$ задана функция $f(x)$, определенная и непрерывная во всех точках этого отрезка. Большой практический интерес представляет вопрос о том, при каком значении аргумента x функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение. Интересно также, конечно, знать само это наибольшее (или наименьшее) значение.

Наибольшее (или наименьшее) значение функции $f(x)$ может достигаться либо во внутренней точке отрезка $[a, b]$ (тогда оно совпадает с одним из локальных максимумов или минимумов функции), либо на одном из концов отрезка $[a, b]$. Например, функция, изображенная на рис. 139, достигает наибольшего значения на правом конце отрезка $[a, b]$, а локальный максимум в точке x_0 не является наибольшим значением функции всюду на $[a, b]$, так как в окрестности точки x_0 при $x \neq x_0$ функция принимает значения, большие, чем $f(x_0)$.

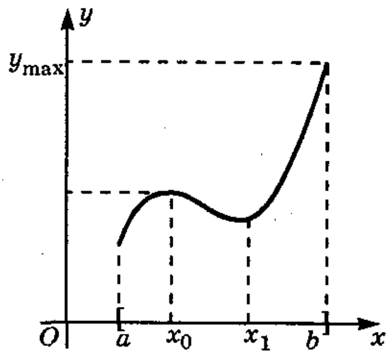


Рис. 139

Отсюда вытекает следующее <u>правило отыскания наибольшего (или наименьшего) значения непрерывной функции на отрезке $[a, b]$</u>:

1) находят все локальные максимумы (или минимумы) функции внутри отрезка;

2) наряду со значениями функции в точках локального максимума (или минимума) рассматривают ее значения на концах данного отрезка и из всех этих значений выбирают наибольшее (или наименьшее).

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ лишь одну точку строгого локального максимума (или лишь одну точку строгого локального минимума) и не имеет нестрогих экстремумов, то можно утверждать, что это значение является наибольшим (или наименьшим) значением на отрезке $[a, b]$ (рис. 140).

Для нахождения локального экстремума функции ее исследуют непосредственно в данном промежутке на монотонность. А именно, чтобы доказать, что в данном промежутке функция $f(x)$ возрастает (или убывает), следует установить справедливость неравенства $f(x_1) < f(x_2)$ (или $f(x_1) > f(x_2)$), либо, что то же самое, $f(x_1) - f(x_2) < 0$ (соответственно $f(x_1) - f(x_2) > 0$) для произвольных двух значений $x_1 < x_2$, взятых в данном промежутке. Если в промежутке $[a, x_0]$ функция возрастает (или убывает), а в промежутке $[x_0, b]$ убывает (или возрастает), то $f(x_0)$ является наибольшим (или наименьшим) значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 140).

Пример 8. *Исследовать на монотонность функцию* $y = \dfrac{1}{1-x^2}$, *а также найти ее наименьшее и наибольшее значения на отрезке* $\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Решение. Функция четная, поэтому достаточно исследовать ее при $x \geq 0$. Составим разность

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1-x_2^2}-\frac{1}{1-x_1^2}=\frac{x_2^2-x_1^2}{(1-x_2^2)(1-x_1^2)}=$$

$$=(x_2-x_1)\left[\frac{x_2+x_1}{(1-x_2^2)(1-x_1^2)}\right].$$

Отсюда следует:

1) если $0 \leq x_1 < x_2 < 1$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$, значит, функция на этом промежутке возрастает;

2) если $1 < x_1 < x_2 < +\infty$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$ и функция также возрастает.

На рис. 141 изображен график этой функции. Область ее определения — вся числовая ось, кроме точек $x=-1$ и $x=1$. График симметричен относи-

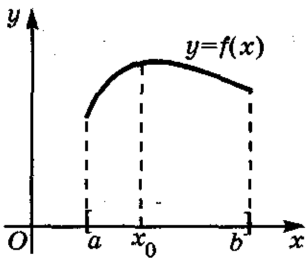


Рис. 140

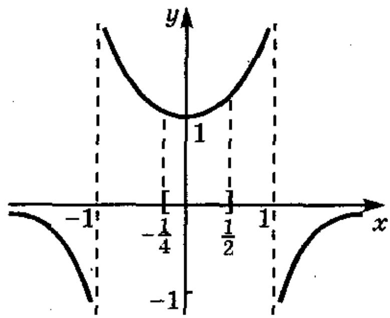


Рис. 141

тельно оси ординат. На интервале $-1 < x < 1$ функция принимает положительные значения, а при $-\infty < x < -1$ и при $1 < x < +\infty$ — отрицательные. Она имеет две вертикальные асимптоты $x=-1$ и $x=1$ и одну горизонтальную $y=0$. На отрезке $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ рассматриваемая функция принимает наименьшее значение $y=1$ при $x=0$ и наибольшее значение $y=\frac{4}{3}$ при $x=\frac{1}{2}$.

Пример 9. *Мотоциклист выезжает из пункта A и движется с постоянным ускорением 12 км/ч² (начальная скорость равна нулю). Достиг-*

нув скорости v км/ч, он едет с этой скоростью 25 км, а затем переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 24 км/ч, и движется так до полной остановки. Затем он сразу же поворачивает обратно и едет до пункта A с постоянной скоростью v км/ч. При какой скорости v мотоциклист быстрее всего проедет обратный путь от остановки до пункта A?

Решение. Имеем:

$s_1 = \dfrac{v^2}{2a} = \dfrac{v^2}{2 \cdot 12}$ (км) — путь до достижения скорости v;

$s_2 = 25$ км — путь со скоростью v;

$s_3 = \dfrac{v^2}{2 \cdot 24}$ (км) — путь торможения до остановки;

$s = s_1 + s_2 + s_3$ (км) — обратный путь от остановки до пункта A.

Тогда время, за которое мотоциклист проедет обратный путь s от остановки до пункта A, равно

$$T = \frac{s}{v} = \frac{v}{24} + \frac{25}{v} + \frac{v}{48} = \frac{25}{v} + \frac{v}{16},\ v > 0.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию значений $v > 0$, при которых функция

$$T(v) = \frac{25}{v} + \frac{v}{16} \tag{13}$$

достигает минимума.

Один из возможных способов исследования функции (13) на минимум состоит в выделении полного квадрата:

$$T(v) = \left(\frac{5}{\sqrt{v}} - \frac{\sqrt{v}}{4} \right)^2 + \frac{5}{2},$$

откуда следует, что значение $T_{\min}$ достигается при условии

$$\frac{5}{\sqrt{v}} - \frac{\sqrt{v}}{4} = 0,$$

т. е. при $v = 20$.

Ответ. $v = 20$ км/ч.

Замечание. Укажем еще способы исследования функции

$$y = \frac{a}{x} + \frac{x}{b} \tag{14}$$

при $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$ на минимум.

I способ. Этот способ основан на следующем утверждении: *сумма положительных слагаемых, произведение которых постоянно, принимает наименьшее значение при равенстве слагаемых.*

Применим это утверждение к функции (14). Так как

$$\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{b}=\frac{a}{b}=\text{const},$$

то значение $y_{\min}$ достигается при условии $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$, т. е. при $x=\sqrt{ab}$.

Следовательно, функция (13) из примера 9, т. е.

$$T(v)=\frac{25}{v}+\frac{v}{16}\ (v>0),$$

достигает минимума при $v=\sqrt{25\cdot16}=20$.

II способ. Основой этого способа является тот факт, что если множество всех значений функции $y=f(x)$ известно, то ее наибольшее и наименьшее значения (в случае, когда они существуют) находятся непосредственно.

Применим этот способ для нахождения минимума функции (14). Найдем все значения y, для которых уравнение

$$\frac{a}{x}+\frac{x}{b}-y=0,$$

или, что то же самое, квадратное уравнение

$$x^2-byx+ab=0 \tag{15}$$

имеет действительные решения. Условие неотрицательности дискриминанта уравнения (15) дает

$$D(y)=(by)^2-4ab\ge0,$$

откуда получим

$$y\ge2\sqrt{\frac{a}{b}},$$

т. е.

$$y_{\min}=2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

При этом значении y дискриминант равен нулю и квадратное уравнение (15) имеет единственный корень $x=\sqrt{ab}$. Итак значение $y_{\min}$ достигается при $x=\sqrt{ab}$.

III способ. Исследуем функцию (14) (при $x>0,\ a>0,\ b>0$) на монотонность. Составим разность

$$y(x_2)-y(x_1)=\left(\frac{a}{x_2}+\frac{x_2}{b}\right)-\left(\frac{a}{x_1}+\frac{x_1}{b}\right)=\frac{1}{b}(x_2-x_1)\left(1-\frac{ab}{x_1x_2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$y(x_2)-y(x_1)<0, \text{ если } 0<x_1<x_2\le\sqrt{ab};$$
$$y(x_2)-y(x_1)>0, \text{ если } \sqrt{ab}\le x_1<x_2.$$

Значит, функция y убывает при $0<x<\sqrt{ab}$ и возрастает при $\sqrt{ab}\le x<+\infty$. Минимум достигается функцией при $x=\sqrt{ab}$ (рис. 142).

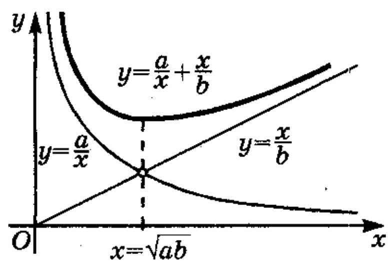


Рис. 142

Пример 10. *Найти минимум функции*

$$y=\frac{1}{x(1-x)}, \text{ если } 0<x<1. \tag{16}$$

Решение. <u>I способ</u>. Функция $y(x)$ достигает минимума, когда выражение $x\,(1-x)$ максимально. Это имеет место при $x=\frac{1}{2}$. При этом значение выражения $x\,(1-x)$ равно $\frac{1}{4}$, а значение данной функции равно 4.

<u>II способ</u>. Произведение $x\,(1-x)$ двух положительных множителей, сумма которых постоянна: $x+(1-x)=1$, максимально при равенстве этих множителей, т. е. когда $x=1-x$. Отсюда получаем, что при $x=\frac{1}{2}$ произведение $x\,(1-x)$ максимально и равно $\frac{1}{4}$. Следовательно, $y_{\min}=4$.

III способ. Найдем наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{x(1-x)} \ (0 < x < 1,\ y > 0)$$

с помощью исследования множества ее значений.

Так как x и y связаны уравнением

$$x(1-x)y = 1,$$

или, что то же самое, квадратным уравнением

$$yx^2 - yx + 1 = 0 \ (y > 0), \tag{17}$$

то нахождение множества значений функции (16) эквивалентно нахождению множества всех значений параметра y, при которых уравнение (17) *имеет действительные корни*.

Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного уравнения (17) неотрицателен:

$$D(y) = y^2 - 4y \geq 0,$$

откуда $y \geq 4$. Следовательно, $y_{\min} = 4$.

Существуют и другие способы нахождения минимума функции (16), например с помощью исследования ее на монотонность.

6. Условный экстремум

Пусть некоторая величина u зависит от двух переменных величин x и y:

$$u = f(x, y), \tag{18}$$

причем переменные x и y не являются независимыми между собой, а связаны дополнительным условием связи

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{19}$$

Требуется исследовать величину $u(x, y)$ на максимум или минимум при условии (19), т. е. найти такие значения x_0 и y_0, удовлетворяющие этому условию, при которых $u(x, y)$ принимает наибольшее или наименьшее значение.

Экстремумы такого рода называют ***условными***.

Аналогично ставится задача об отыскании наибольшего или наименьшего значения величины $u = f(x, y, z)$, зависящей от трех переменных x, y, z, связанных двумя дополнительными условиями:

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\psi(x, y, z) = 0.$$

Решение рассматриваемых задач в общем виде средствами элементарной математики затруднительно, поэтому ограничимся простейшими примерами, когда отыскание наибольшего или наименьшего значения некоторой величины, зависящей от нескольких переменных, удовлетворяющих дополнительным условиям связи, удается свести к исследованию функции одной переменной.

Так, отыскание наибольшего (наименьшего) значения величины

$$u = Axy + B(x+y) + C$$

при условии

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R \neq 0)$$

сводится к исследованию квадратного трехчлена

$$u = az^2 + bz + c,$$

где

$$z = x + y,\ a = \frac{A}{2},\ b = B,\ c = C - \frac{AR^2}{2}.$$

Определив значение $z = z_0$, при котором функция $u(z)$ принимает максимальное (или минимальное) значение, находим соответствующие значения x_0 и y_0, для чего нужно решить систему уравнений

$$x + y = z_0,\ x^2 + y^2 = R^2.$$

Геометрически решения этой системы находятся как точки пересечения прямой $x + y = z_0$ с окружностью $x^2 + y^2 = R^2$.

Пример 11. *Пусть x_1 и x_2 — действительные корни уравнения $x^2 - ax + a = 0$, где a — действительное число. Найти такое значение a, чтобы величина выражения $x_1^2 + x_2^2$ была наименьшей.*

Решение. Уравнение $x^2 - ax + a = 0$ имеет действительные корни при условии неотрицательности его дискриминанта:

$$D(a) = a^2 - 4a \geq 0,$$

т. е. при

$$a \leq 0 \ \text{ и } \ a \geq 4. \tag{20}$$

По условию, требуется найти минимум неотрицательного выражения (представляющего собой симметрический многочлен)

$$\Phi = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

которое в силу теоремы Виета можно записать в виде

$$\Phi = a^2 - 2a. \tag{21}$$

Таким образом, исходная задача заключается в нахождении минимума квадратного двучлена (21) в области (20) при условии $\Phi(a) \geq 0$. Нетрудно доказать (рис. 143), что квадратный двучлен (21) достигает указанного минимума на границе области (20), а именно при $a = 0$.

Ответ. $a = 0$.

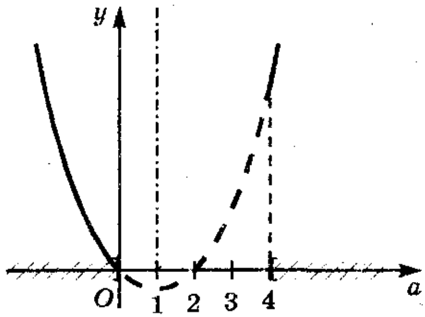


Рис. 143

Пример 12. *Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной 1 см². Сумма длин всех ребер параллелепипеда должна быть равна 20 см. При каких размерах коробки площадь ее поверхности будет наибольшей?*

Решение. Пусть x, y, z — размеры коробки (длина, ширина и высота соответственно). Требуется определить, при каких x, y, z достигает максимума выражение

$$S = 2xy + 2xz + 2yz \tag{22}$$

при условиях

$$xy = 1,\ 4(x + y + z) = 20. \tag{23}$$

Воспользуемся условиями связи (23) и представим S как функцию только одной переменной z:

$$S = 2 + 2z(x + y) = 2 + 2z(5 - z) = -2z^2 + 10z + 2.$$

Задача сводится к исследованию на экстремум квадратного трехчлена $-2z^2 + 10z + 2$. Этот трехчлен достигает максимума при $z = \frac{5}{2}$. Следовательно, при $z = \frac{5}{2}$ будет наибольшей и величина S. Соответствующие значения x и y находим из системы уравнений

$$xy = 1,\ x + y = \frac{5}{2},$$

откуда $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$.

Прямоугольный параллелепипед с высотой $\frac{5}{2}$ см и со сторонами основания 2 и $\frac{1}{2}$ см существует и удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ. Площадь поверхности коробки будет наибольшей, если ее высота равна $\frac{5}{2}$ см, а длина и ширина равны 2 и $\frac{1}{2}$ см или $\frac{1}{2}$ и 2 см.

Пример 13. *Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равна диагонали основания, а площадь основания должна быть равна 4 $м^2$. При каком отношении сторон основания площадь поверхности постамента будет наименьшей?*

Решение. Пусть x и y — стороны основания, z — высота, S — площадь поверхности постамента. Тогда задача заключается в определении наименьшего значения выражения

$$S = 2(xy + yz + xz) \tag{24}$$

при условиях

$$xy = 4,\ x^2 + y^2 = z^2. \tag{25}$$

Используя условия связи (25), представим S как функцию только одной переменной z $(z > 0)$:

$$S = 8 + 2z(x + y) = 8 + 2z\sqrt{(x+y)^2} =$$

$$= 8 + 2z\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = 8 + 2z\sqrt{z^2 + 8}.$$

Отсюда видно, что S достигает наименьшего значения при наименьшем возможном значении z. Так как

$$z^2 = x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (x - y)^2 + 8,$$

то z принимает наименьшее значение при $x = y$. Прямоугольный параллелепипед, основанием которого служит квадрат со стороной 2 м, а высота равна $\sqrt{8}$ м, существует и удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ. Площадь поверхности постамента будет наименьшей, когда стороны основания равны.

Пример 14. *В квадратном листе фанеры со стороной, равной* 10 *ед. длины, вырезано отверстие в форме прямоугольника, диагональ которого равна 5 ед. длины. Это отверстие по краю окантовано тонкой проволочной рамкой. Единица площади фанеры весит 2 г, а единица длины проволоки весит 7 г. Какими должны быть стороны отверстия, чтобы вес получившегося листа был наибольшим? (Единица площади есть площадь квадрата со стороной, равной единице длины.)*

Р е ш е н и е. Обозначим размеры отверстия через x и y. Тогда вес полученного листа выражается формулой

$$P = 200 - 2xy + 14x + 14y, \tag{26}$$

причем

$$x^2 + y^2 = 25. \tag{27}$$

Таким образом, задача состоит в нахождении значений x и y, для которых величина P максимальна при условии (27). В рассматриваемом случае задача сводится к исследованию на экстремум квадратного трехчлена. В самом деле, из соотношения (27) имеем

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 25,$$

откуда $2xy = (x+y)^2 - 25$. Подставляя это выражение в равенство (26) и обозначая $x + y = z$, получим

$$P = 225 + 14z - z^2. \tag{28}$$

Квадратный трехчлен (28) достигает максимума при $z = 7$. Следовательно, искомые значения x и y находятся из системы уравнений

$$x + y = 7,\ x^2 + y^2 = 25.$$

Ее решениями являются пары чисел (3, 4) и (4, 3).

О т в е т. Размеры отверстия должны быть равны 3 и 4 ед. длины.

7. Максимум и минимум двух функций

Рассмотрим две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Исходя из соотношений

$$\max(a,\, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2},\ \min(a,\, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

(см. гл. I, § 1, п. 6), получим

$$\max\{f(x),\, \varphi(x)\} = \frac{f(x) + \varphi(x) + |f(x) - \varphi(x)|}{2}, \tag{29}$$

$$\min\{f(x),\, \varphi(x)\} = \frac{f(x) + \varphi(x) - |f(x) - \varphi(x)|}{2}. \tag{30}$$

Нетрудно получить соотношения, аналогичные (29) и (30), для трех, четырех и т. д. функций.

П р и м е р 15. *Найти все такие значения x, что*

$$\min\left\{1 - x^2,\, \frac{1 - x}{2}\right\} > \frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е. *I способ*. *Задача эквивалентна решению системы неравенств*

$$1-x^2>\frac{1}{2},\ \frac{1-x}{2}>\frac{1}{2}.$$

Отсюда находим $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0.$

<u>II способ</u>. В силу соотношения (30) задача эквивалентна решению неравенства

$$1-x-2x^2>\left|1+x-2x^2\right| \tag{31}$$

для случая $f(x)=1-x^2$, $\varphi(x)=\frac{1-x}{2}.$

Решив неравенство (31), получим $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0.$

<u>III способ</u>. Воспользуемся методом «частичных областей».

При $x=-\frac{1}{2}$ и $x=1$ значения функций $1-x^2$ и $\frac{1-x}{2}$ равны друг другу. При $x<-\frac{1}{2}$ и $x>1$ имеет место неравенство $1-x^2<\frac{1-x}{2}$, а при $-\frac{1}{2}<x<1$ — неравенство $\frac{1-x}{2}<1-x^2.$

Будем решать задачу в каждой из трех «частичных областей» (I): $x<-\frac{1}{2}$; (II): $-\frac{1}{2}\le x\le 1$ и (III): $x>1.$

При $x<-\frac{1}{2}$ имеем: $\min\left\{1-x^2, \frac{1-x}{2}\right\}=1-x^2>\frac{1}{2}$, если $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<-\frac{1}{2}.$

При $-\frac{1}{2}\le x\le 1$ имеем: $\min\left\{1-x^2, \frac{1-x}{2}\right\}=\frac{1-x}{2}>\frac{1}{2}$, если $-\frac{1}{2}\le x<0.$

При $x>1$ задача решений не имеет.

Ответ. $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0.$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2-a)x-(3+a)=0$ была наименьшей.

Ответ. $a=1$.

2. При каком действительном x выражение $\frac{2x-1}{2x-x^2-4}$ принимает наименьшее значение?

Ответ. При $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

3. Найти наименьшее значение дроби $\frac{2x+3}{x^2+x+1}$, если x может принимать любые действительные значения.

Ответ. $\frac{4-2\sqrt{7}}{3}$.

4. Каково наименьшее значение дроби $\frac{2x}{1+x^2}$, где x — любое действительное число?

Ответ. -1.

5. При каких положительных x выражение $2x+\frac{3\frac{1}{8}}{x+1}$ принимает наименьшее значение?

Ответ. При $x=\frac{1}{4}$.

6. При каком действительном x величина

$$t=\frac{\sqrt{x^2+16}}{3}-\frac{x}{5}$$

принимает наименьшее значение?

Ответ. При $x=3$.

Указание. Пусть $y=15t$, тогда $16x^2-6yx+400-y^2=0$, $y>0$, $D(y)=100y^2-25600\geq 0$. Отсюда $y_{\min}=16$, т. е. $t_{\min}=\frac{16}{15}$, а это будет при $x=3$.

7. Найти наибольшее y такое, что существует действительное число x, удовлетворяющее равенству

$$2x^2+5y^2+2xy-x-2y-3=0.$$

Ответ. $y_{\max}=\dfrac{1+\sqrt{26}}{6}$.

Указание. Здесь $D(y)=-36y^2+12y+25\geq 0$, т. е.

$$\frac{1-\sqrt{26}}{6}\leq y\leq\frac{1+\sqrt{26}}{6}.$$

8. Найти наибольшее значение функции $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}$.

Ответ. $y_{\max}=2$ при $x=-1$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

9. $y=\dfrac{-2x+3}{x^2+6x+10}$.

Ответ. $y_{\min}=\dfrac{9-\sqrt{85}}{2}$, $y_{\max}=\dfrac{9+\sqrt{85}}{2}$.

10. $y=\sqrt[4]{\left[\dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}\right]^3}$ $(a\neq 0)$.

Ответ. $y_{\min}=0$, $y_{\max}=\sqrt[4]{(6+\sqrt{36+a^2})^3}$.

11. Исследовать на монотонность функцию $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Ответ. При $x<-1$ убывает; при $-1\leq x\leq 1$ возрастает, при $x>1$ убывает.

12. Найти все такие значения x, что

$$\max\left\{x^2-2x,\ \frac{x}{2}-1\right\}<-\frac{1}{2}.$$

Ответ. $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<1$.

13. Разложить данное положительное число A на два слагаемых так, чтобы их произведение оказалось наибольшим.

Ответ. $A=\dfrac{A}{2}+\dfrac{A}{2}$.

14. Данное положительное число p разложить на два положительных сомножителя так, чтобы их сумма оказалась наименьшей.

Ответ. $p=\sqrt{p}\cdot\sqrt{p}$.

Найти наименьшие значения данных функций при условии, что x принимает положительные значения:

15. $y=x+\frac{1}{x}$.

Ответ. $y_{\min}=2$ при $x=1$.

16. $y=\frac{(a+x)(b+x)}{x}$.

Ответ. $y_{\min}=a+b+2\sqrt{ab}$ при $x=\sqrt{ab}$.

17. $y=x^3+\frac{1}{x^3}$.

Ответ. $y_{\min}=2$ при $x=1$.

18. $y=\frac{a+bx^2}{x}$.

Ответ. $y_{\min}=2\sqrt{ab}$ при $x=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

19. $y=x+\frac{1}{x-a}$.

Ответ. $y_{\min}=a+2$ при $x=a+1$.

20. $y=(x+a)\left(\frac{b}{x}+c\right)$.

Ответ. $y_{\min}=b+ac+2\sqrt{abc}$ при $x=\sqrt{\frac{ab}{c}}$.

21. Зная, что $4x^2+5y+7z^2=420$, найти наибольшее значение произведения x^2yz^2.

Ответ. $35\cdot 28\cdot 20=1960$.

Найти наибольшие значения функций:

22. $y=x^2(a-2x)$.

Ответ. $y_{\max}=\frac{a^3}{27}$ при $x=\frac{a}{3}$.

23. $y = x^3(a - x)$.

Ответ. $y_{\max} = \dfrac{3a^4}{256}$ при $x = \dfrac{a}{4}$.

24. Стоимость x деталей, изготовленных рабочим сверхурочно, выражается формулой $2 + 0{,}5x + 0{,}125x^2$. Определить количество деталей, при которых стоимость одной детали была бы наименьшей.

Ответ. $x = 4$.

25. Расходы, отнесенные к единице времени, необходимые на продвижение парового судна, пропорциональны кубу его скорости. Найти скорость, с которой судно должно двигаться против течения реки, чтобы пройти определенное расстояние с возможно меньшей затратой средств, если скорость течения равна c км/ч (судно идет против течения).

Ответ. $\dfrac{3c}{2}$.

26. Считая, что энергия, отдаваемая электрическим элементом, выражается формулой $P = \dfrac{E^2 R}{(R+r)^2}$, где E — постоянная электродвижущая сила, r — постоянное внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление, показать, что P принимает наибольшее значение при $R = r$.

27. Нужно сделать воздушный змей в форме прямой призмы, имеющей основанием прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 50 см. Боковая поверхность этой призмы имеет площадь 0,96 м^2. Какими должны быть стороны треугольника основания, чтобы сумма длин всех ребер призмы была наименьшей?

Ответ. Катеты треугольника основания равны 30 и 40 см.

28. Два тела начинают одновременно двигаться равномерно по прямым Ox и Oy, пересекающимся под прямым углом. Первое тело движется со скоростью v_1 по прямой Ox от точки A к точке O, находящейся на расстоянии a от точки A. Второе тело движется со скоростью v_2 по прямой Oy от точки B к точке O, находящейся на расстоянии b от точки B. Найти наименьшее расстояние между этими телами во время движения.

Ответ. $d_{\min} = \dfrac{|bv_1 - av_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

29. Если скорость поезда, движущегося по узкоколейке, равна 20 км/ч, то издержки по перевозке груза окупаются вполне, но прибыли нет. Если же скорость более 20 км/ч, то приращение оплаты за перевозку груза пропорционально приращению скорости, а увеличение себестоимости перевозки пропорционально квадрату скорости. При скорости в 40 км/ч издержки окупаются, но прибыли нет. Найти скорость, при которой прибыль наибольшая.

Ответ. $v = 30$ км/ч.

30. Прямоугольная цветочная клумба должна занимать площадь в 216 м^2. Вдоль длинных сторон клумбы должны быть дорожки шириной по 2 м, а вдоль узких — по 3 м. Каковы должны быть размеры прямоугольного участка (клумбы вместе с дорожками), чтобы площадь дорожек была наименьшей?

Ответ. 12 и 18 м.

31. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного равносторонним треугольником. Определить отношение высоты прямоугольной части окна к стороне треугольной части так, чтобы при данном периметре окна оно пропускало бы наибольшее количество света.

Ответ. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$.

32. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Какие должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света при заданном периметре окна p?

Ответ. Ширина $\frac{2p}{4+\pi}$, высота $\frac{p}{4+\pi}$.

33. Из прямоугольника, большая сторона которого равна l, вырезают два полукруга, диаметром которых служат меньшие стороны прямоугольника. При каком значении длины меньшей стороны прямоугольника площадь оставшейся части будет максимальной?

Ответ. $\frac{2l}{\pi}$.

34. Большая сторона прямоугольника равна d. Проводят окружность с центром в одной из вершин прямоугольника и радиусом, равным его меньшей стороне. Из прямоугольника удаляют его общую с полученным кругом часть. При каком значении длины меньшей стороны площадь оставшейся части будет максимальной?

Ответ. $\frac{2d}{\pi}$.

35. Большая сторона прямоугольника равна c. От прямоугольника отрезают квадрат, одна из сторон которого совпадает с меньшей стороной прямоугольника. При какой длине меньшей стороны площадь оставшейся части будет максимальной?

Ответ. $\frac{c}{2}$.

36. В прямоугольнике $ABCD$ большие стороны AD и BC имеют заданную длину l. Точка E лежит на стороне BC, причем длины AB и BE равны.

Определить, при какой длине меньшей стороны прямоугольника площадь треугольника AEC будет максимальной.

Ответ. $\frac{l}{2}$.

37. Дан квадрат $ABCD$. От его вершин отложены равные отрезки Aa, Bb, Cc, Dd и точки a, b, c, d соединены отрезками. При каком значении Aa площадь квадрата $abcd$ окажется наименьшей?

Ответ. Когда значение Aa равно половине стороны основного квадрата, т. е. когда точки a, b, c и d совпадают с серединами сторон квадрата $ABCD$.

38. Среди всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине найти тот, периметр которого наибольший.

Ответ. Равнобедренный треугольник.

39. Из круговых секторов данного периметра p найти сектор наибольшей площади.

Ответ. $S=\frac{p^2}{4}$ при $2r=l$, где r — радиус сектора, l — длина дуги.

40. В прямоугольнике проведены два отрезка, параллельные и равные одной из его сторон. Сумма периметра прямоугольника и этих двух отрезков равна $2p$. Найти длины сторон, при которых площадь прямоугольника имеет наибольшее значение.

Ответ. $\frac{p}{2}$ и $\frac{p}{4}$.

41. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь большая диагональ этой трапеции?

Ответ. $\sqrt{2}$; равнобочная трапеция.

42. Плоская фигура состоит из прямоугольника и равностороннего треугольника, построенного на верхнем основании прямоугольника. Определить ее размеры так, чтобы при данном периметре p площадь была наибольшей (в периметр не входит общая сторона прямоугольника и треугольника).

Ответ. $x=\frac{p}{6-\sqrt{3}}$, $y=\frac{x}{2}(3-\sqrt{3})$, где x — сторона треугольника, y — сторона прямоугольника.

43. Даны две пересекающиеся окружности радиусов r и R. Их общая хорда равна $2a$. Найти длину наибольшей секущей, проходящей через точку пересечения окружностей.

Ответ. $2(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2})$.

44. На основании треугольника найти точку, произведение расстояний которой до двух других сторон треугольника было бы наибольшим.

Ответ. Искомая точка — середина основания.

45. Отрезок a разделить на две части так, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на отрезках, была наименьшей.

Ответ. Каждый из квадратов должен иметь сторону, равную $\frac{a}{2}$.

46. Даны плоскость α и точки A и B по разные стороны от этой плоскости. Найти на плоскости точку C так, чтобы разность $AC - BC$ была наибольшей.

Ответ. Искомой является точка пересечения плоскости α и прямой, проходящей через точку B и точку A', симметричную точке A относительно плоскости α.

47. Поместить внутри квадрата со стороной a правильный шестиугольник возможно больших размеров. Найти сторону шестиугольника.

Ответ. $\frac{a}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

48. Поместить квадрат со стороной a в равносторонний треугольник возможно меньших размеров. Найти сторону этого треугольника.

Ответ. $\frac{a}{3}(3+2\sqrt{3})$.

49. Поместить внутри квадрата со стороной a равносторонний треугольник возможно больших размеров. Найти сторону этого треугольника.

Ответ. $2a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

50. Поместить внутри правильного шестиугольника со стороной a квадрат возможно больших размеров. Найти сторону этого квадрата.

Ответ. $a(3-\sqrt{3})$.

51. По одну сторону от прямой MN расположены две точки A и B. Найти на прямой MN точку C так, чтобы сумма AC^2+BC^2 имела наименьшее значение.

Ответ. Точка C должна быть серединой отрезка, концы которого — проекции точек A и B на прямую MN.

52. Из всех треугольников данного периметра $2p$ найти треугольник наибольшей площади

Указание. Воспользоваться формулой $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Ответ. При $a=b=c$.

53. На окружности радиуса R даны две точки A и B, расстояние между которыми равно 1. Какое наибольшее значение может принимать сумма AC^2+BC^2, если точка C также лежит на этой окружности?

Ответ. $4R\sqrt{4R^2 - l^2}$.

54. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке A пополам.

55. Автомобиль едет от пункта A до пункта B с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте B он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на a км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением a км/ч^2. Каково должно быть значение a, чтобы через 3 ч после возобновления движения автомобиль находился ближе всего к пункту B?

Ответ. $a = 14$ км/ч.

56. В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 м^3 воды в час. Вторая труба наливает в час на $2d$ м^3 меньше, чем первая ($0 < d < 15$), а третья труба наливает в час на $11d$ м^3 больше, чем первая. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают $\frac{2}{11}$ бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся $\frac{9}{11}$ бассейна. При каком значении d бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

Ответ. $d = 10$.

57. Автомобиль выезжает из пункта A и едет с постоянной скоростью v км/ч до пункта B, отстоящего от A на расстояние 24,5 км. В пункте B он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 54 км/ч, и движется так до полной остановки. Затем он сразу же поворачивает обратно и возвращается в A с постоянной скоростью v км/ч. Какова должна быть скорость v, чтобы автомобиль быстрее всего проехал путь от A до остановки и обратно до пункта A указанным выше способом?

Ответ. $v = 42$ км/ч.

58. Три бригады должны выполнить работу. Первая бригада изготавливает в день 200 деталей. Вторая бригада изготавливает в день на a деталей меньше, чем первая ($0 < a < 200$), а третья бригада — на $5a$ деталей больше, чем первая. Сначала первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют $\frac{1}{5}$ часть всей работы, а затем все три бригады, работая вместе, выполняют оставшиеся $\frac{4}{5}$ работы. На сколько деталей в день должна изготавливать вторая бригада меньше, чем первая, чтобы вся работа была выполнена указанным способом как можно скорее?

Ответ. На 125 деталей.

59. Автомобиль едет из пункта A в пункт C. От пункта A до пункта B, расположенного между A и C, он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте B он уменьшает свою скорость на a км/ч ($0 < a < 48$) и с этой скоростью едет $\frac{1}{3}$ часть пути от B до C. Оставшуюся часть пути от B до C он едет со скоростью, которая на $2a$ км/ч превышает первоначальную скорость 48 км/ч. При каком значении a автомобиль быстрее всего проделает путь от B до C?

Ответ. $a = 12$ км/ч.

60. Найти все значения a, при которых минимум функции

$$f(x) = ax + \left|x^2 - 4x + 3\right|$$

больше 1.

Ответ. $1 < a < 4 + \sqrt{8}$.

61. Найти все значения a, при которых минимум функции

$$f(x) = x^2 + (a+1)^2 + 2|x + a - 1|$$

меньше 3.

Ответ. $-1 < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Найти максимальный член последовательностей:

62. $a_n = -n^2 + 14n - 45 + \frac{4}{(2n-17)^2 + 2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Ответ. $a_7 = 4\frac{4}{11}$.

63. $a_n = -2n^2 + 20n - 48 + \frac{25}{(5n-31)^2 + 10}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Ответ. $a_5 = 2\frac{25}{46}$.

Найти минимальный член последовательностей:

64. $a_n = 2n^2 - 24n + 69 - \frac{9}{(3n-22)^2 + 3}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Ответ. $a_6 = -3\frac{9}{19}$.

65. $a_n = n^2 - 8n + 15 - \dfrac{9}{(3n-16)^2 + 6}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Ответ. $a_4 = -1\dfrac{9}{22}$.

66. Через плоское горизонтальное поле требуется прорыть канал определенной длины с плоским горизонтальным дном и плоскими параллельными друг другу вертикальными боковыми стенками. Канал должен иметь поперечное сечение площадью в 18 $м^2$. Его дно и стенки нужно будет покрыть водонепроницаемой пленкой. Каковы должны быть ширина и глубина канала, чтобы расход пленки был минимальным?

Ответ. Глубина 3 м, ширина — 6 м.

ГЛАВА IV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

В данной главе рассматриваются уравнения и неравенства, связанные с тригонометрическими функциями.

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

1. Основные свойства тригонометрических функций

Функция $y = \sin x$. Область определения — вся числовая ось: $-\infty < x < +\infty$. Функция нечетная, периодическая с периодом $T = 2\pi$ и ограниченная: синус по модулю не превосходит единицы, т. е. $|\sin x| \le 1$. Графиком функции является кривая, называемая ***синусоидой*** (рис. 144).

Функция $y = \cos x$. Область определения: $-\infty < x < +\infty$. Функция четная, периодическая с периодом $T = 2\pi$ и ограниченная: $|\cos x| \le 1$. Ее графиком служит кривая, называемая ***косинусоидой*** (рис. 145).

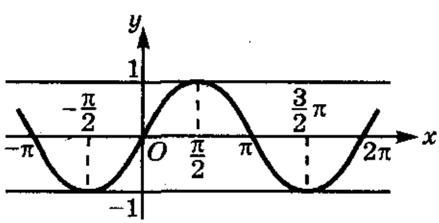


Рис. 144

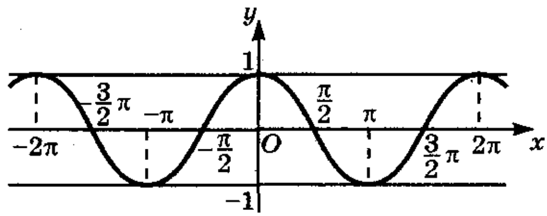


Рис. 145

Функция $y = \mathrm{tg}\, x$. Функция определена всюду, кроме точек $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, является нечетной и периодической с периодом $T = \pi$. Ее графиком служит кривая, называемая ***тангенсоидой*** (рис. 146).

Функция $y = \mathrm{ctg}\, x$. Она определена всюду, кроме точек $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ является нечетной и периодической с периодом $T = \pi$. Ее графиком служит кривая, называемая ***котангенсоидой*** (рис. 147).

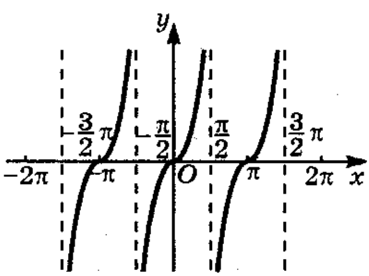


Рис. 146

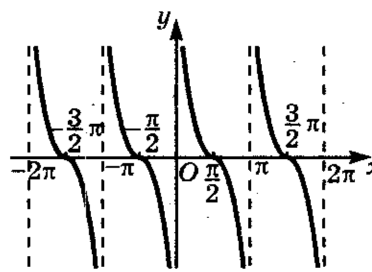


Рис. 147

Кроме перечисленных выше, существуют также тригонометрические функции

$$y = \mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{и} \quad y = \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Тригонометрические функции связаны друг с другом соотношениями:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \mathrm{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x,\ \mathrm{ctg}^2 x + 1 = \mathrm{cosec}^2 x,$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \mathrm{ctg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \sin x \cdot \mathrm{cosec}\, x = 1,$$

$$\cos x \cdot \sec x = 1,\ \mathrm{tg} x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1,$$

которые имеют место лишь в той области значений x, где все входящие в эти соотношения функции определены.

Тригонометрические функции от аргументов $-x$, $\dfrac{\pi}{2} \pm x$, $\pi \pm x$, $\dfrac{3\pi}{2} \pm x$, $2\pi \pm x$ можно выразить через функции от аргумента x с помощью формул, называемых ***формулами приведения***:

Аргумент	Функция			
	sin	cos	tg	ctg
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{\pi}{2}+x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$
$\frac{\pi}{2}-x$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$
$\pi+x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\pi-x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{3\pi}{2}+x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$
$\frac{3\pi}{2}-x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$
$2\pi+x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$2\pi-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$

Пример 1. *Упростить выражение*

$$\sqrt{(1-\cos\alpha\cos\beta)^2-\sin^2\alpha\sin^2\beta},$$

рассмотрев случаи:

$$\text{а) } \cos\alpha>\cos\beta;\ \text{б) } \cos\alpha\le\cos\beta.$$

Решение. Воспользовавшись формулой $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, выделим под знаком радикала полный квадрат:

$$1-2\cos\alpha\,\cos\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=$$

$$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=$$

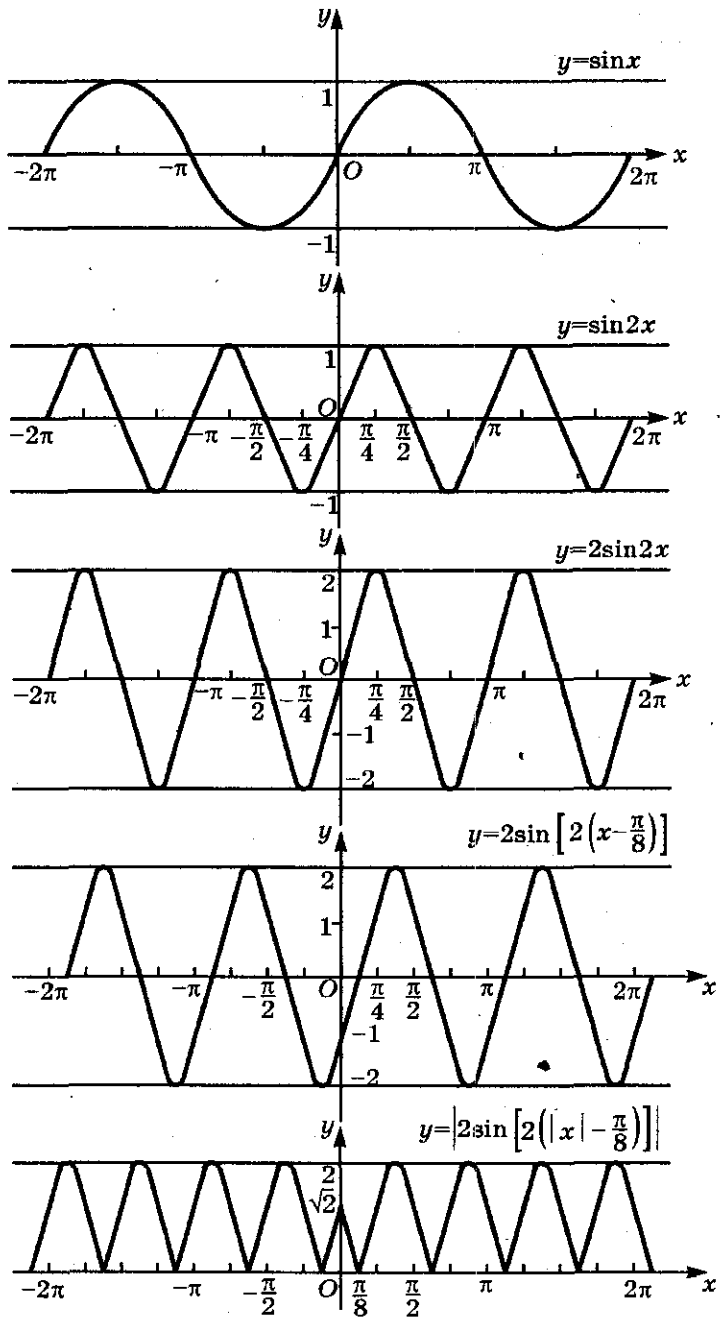
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)=$$

$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=$$

$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=(\cos\alpha-\cos\beta)^2.$$

По определению абсолютной величины действительного числа и арифметического корня имеем

$$\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2}=|\cos\alpha-\cos\beta|=\begin{cases}\cos\alpha-\cos\beta, & \text{если } \cos\alpha>\cos\beta;\\ \cos\beta-\cos\alpha, & \text{если } \cos\alpha\le\cos\beta.\end{cases}$$



$y=\sin x$
$y=\sin 2x$
$y=2\sin 2x$
$y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right]$
$y=\left|2\sin\left[2\left(|x|-\frac{\pi}{8}\right)\right]\right|$

Рис. 148

Ответ. $\cos\alpha - \cos\beta$, если $\cos\alpha > \cos\beta$;

$\cos\beta - \cos\alpha$, если $\cos\alpha \le \cos\beta$.

При построении графиков тригонометрических функций следует изучить свойства этих функций и воспользоваться основными приемами, изложенными в § 3 гл. I.

Пример 2. *Построить график функции*

$$y = \left|2\sin\left(2|x| - \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Решение. На рис. 148 приводится последовательное построение эскиза графика рассматриваемой функции.

Пример 3. *Указать все корни уравнения*

$$x^2 + 1 = \cos x.$$

Решение. Уравнение имеет единственный корень $x = 0$ (рис. 149). В самом деле, значение $x = 0$ удовлетворяет этому уравнению. При $x \ne 0$ левая часть уравнения $x^2 + 1 > 1$, а правая часть $|\cos x| \le 1$. Следовательно, при $x \ne 0$ данное уравнение корней не имеет.

Ответ. $x = 0$.

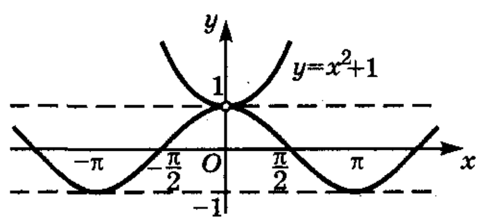


Рис. 149

Пример 4. *Найти* $\operatorname{tg} x$, *если*

$$\begin{cases} y\sin x + \cos x = 2, \\ -4\sin x + 2y\cos x = -y. \end{cases}$$

Решение. Рассматривая данную систему уравнений как линейную относительно синуса и косинуса, получим

$$\sin x = \frac{5y}{2y^2 + 4}, \quad \cos x = \frac{8 - y^2}{2y^2 + 4},$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{5y}{8 - y^2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, возводя в квадрат первое уравнение системы, имеем

$$(y^2-4)\operatorname{tg}^2 x+2y\operatorname{tg} x-3=0. \tag{2}$$

Исключим $\operatorname{tg} x$ из уравнений (1) и (2) и сделаем замену, положив $y^2=z>0$ $(y\neq 0)$. Для нахождения z получим квадратное алгебраическое уравнение $3z^2+7z-48=0$, положительным корнем которого является $z=3$, откуда $y_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ и в силу (1) имеем $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$.

Ответ. $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$.

Рассмотрим ряд примеров, результаты которых будут нами использованы в дальнейшем.

Пример 5. *Доказать, что*

$$|\sin x\cos x|\leq\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Доказательство. Исходя из очевидного неравенства

$$0\leq(\sin x-\cos x)^2,$$

имеем

$$0\leq\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x,$$

или

$$\sin x\cos x\leq\frac{1}{2}.$$

Аналогично доказывается, что $-\frac{1}{2}\leq\sin x\cos x$. Следовательно,

$$|\sin x\cos x|\leq\frac{1}{2}.$$

Замечание. Неравенство (3) непосредственно вытекает также из формулы $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Пример 6. *Доказать, что*

$$|\sin x+\cos x|\leq\sqrt{2}. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем

$$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x.$$

Так как абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых, то

$$|1+2\sin x\cos x|\leq 1+|2\sin x\cos x|.$$

Но в силу неравенства (3) имеем

$$|2\sin x\cos x| = 2|\sin x\cos x| \le 1.$$

Следовательно,

$$(\sin x + \cos x)^2 \le 2,$$

откуда $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Доказательство неравенства (4) можно провести проще, если воспользоваться соотношением

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Пример 7. *Доказать неравенство*

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \ge 2$$

для всех значений x, при которых тангенс и котангенс определены.

Доказательство. Полагая $\operatorname{tg}^2 x = a$, $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{a}$ и воспользовавшись неравенством

$$a + \frac{1}{a} \ge 2 \quad (a > 0),$$

связывающим среднее арифметическое чисел a и $\frac{1}{a}$ со средним геометрическим тех же чисел, получим доказываемое неравенство.

Свойства симметрических многочленов (см. гл. II, § 4, п. 5) широко используются в различных преобразованиях тригонометрических выражений.

Пример 8. ***Найти наибольшее и наименьшее значения функции***

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

Решение. Функция $f(x)$ представляет собой симметрический многочлен третьей степени относительно $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ и, следовательно, может быть выражена через основные симметрические функции

$$u = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ и } t = \sin^2 x\cos^2 x \left(0 \le t \le \frac{1}{4}\right).$$

Действительно, так как

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x =$$

$$= \sin^6 x + \cos^6 x + 3(\sin^2 x + \cos^2 x)\sin^2 x\cos^2 x =$$

$$= \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x,$$

то

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x,$$

или $f=1-3t$, где $0\le t\le\frac{1}{4}$. Отсюда

$$f_{\min}=1-3\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4},\ f_{\max}=1-3\cdot 0=1.$$

Ответ. $f_{\min}=\frac{1}{4}$, $f_{\max}=1$.

2. Обратные тригонометрические функции

Для решения простейших задач на вычисление, а также уравнений и неравенств, связанных с обратными тригонометрическими функциями, необходимо четкое знание определений этих функций и соотношений между тригонометрическими функциями.

Напомним эти определения:

1) $y=\arcsin x$, если $x=\sin y$ и $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$;

2) $y=\arccos x$, если $x=\cos y$ и $0\le y\le\pi$;

3) $y=\operatorname{arctg} x$, если $x=\operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$;

4) $y=\operatorname{arcctg} x$, если $x=\operatorname{ctg} y$ и $0<y<\pi$.

Областью определения функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ является множество чисел из сегмента $-1\le x\le 1$, а функций $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$ — множество всех действительных чисел. Можно доказать, что $y=\arcsin x$ и $y=\operatorname{arctg} x$ — возрастающие функции, а $y=\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ — убывающие.

Пример 9. *Доказать тождества*

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ -1\le x\le 1, \tag{5}$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем, например, тождество (5). Так как $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x\le\frac{\pi}{2}$, то $0\le\frac{\pi}{2}-\arcsin x\le\pi$. Следовательно,

$$\cos(\arccos x) = x,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin(\arcsin x) = x.$$

Итак, числа $\arccos\ x$ и $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ лежат на сегменте $[0,\ \pi]$ и имеют равные косинусы; значит, эти числа равны:

$$\arccos\ x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

откуда и следует доказываемое тождество.

Тождество (6) доказывается аналогично.

П р и м е р 10. *Доказать спроаведливость формул:*

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ -1 \le x \le 1, \tag{7}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ -1 \le x \le 1, \tag{8}$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \tag{9}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, например, формулу (7). Запишем ее в виде

$$-\arcsin(-x) = \arcsin x.$$

Пусть $\arcsin(-x) = y$, тогда, по определению,

$$\sin y = -x \text{ и } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что $\sin(-y) = -\sin y = x$ и $\frac{\pi}{2} \ge -y \ge -\frac{\pi}{2}$, а это означает, что $-y = \arcsin x$. Формула (7) доказана.

Доказательства остальных формул проводятся аналогично.

П р и м е р 11. *Вычислить* $\operatorname{ctg}\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

Р е ш е н и е. Пусть $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha$. Следовательно, по определению,

$$\sin\alpha = -\frac{1}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}.$$

Так как синус отрицателен, то угол α принадлежит сегменту $\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$ и равен $-\frac{\pi}{6}$, откуда

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}.$$

Ответ. $-\sqrt{3}$.

Пример 12. *Построить график функции*

$$y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x).$$

Решение. В силу определения арктангенса имеем

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x, \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = x + k\pi, \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

График функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ изображен на рис. 150.

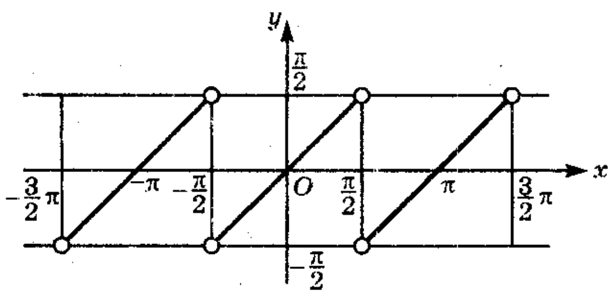


Рис. 150

УПРАЖНЕНИЯ

Построить графики функций:

1. $y = 2\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1.$

2. $y = |\cos|x||.$

3. $y = \dfrac{1}{\cos x}.$

4. $y = x + \sin x.$

5. $y = x \cdot \cos x.$

6. $y = \dfrac{\sin x}{x}.$

7. $y = \sin(\arccos x).$

8. $y = \arcsin(\sin x),\ \pi \le x \le 2\pi.$

9. $y = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{если } x < 0; \\ 1, & \text{если } 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}; \\ |\sin x|, & \text{если } x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

10. $y = \sin x^3.$

11. $y=\sin\frac{1}{x}$. **12.** $y=\sin(\cos x)$.

13. Показать, что уравнение

$$2\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{6}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

не имеет решений.

14. Найти корни уравнения

$$x^2+(x+1)\sin\frac{\pi x}{6}=\frac{3+x}{2},$$

расположенные на отрезке $-2\le x\le 2$.

Ответ. $x=1$, $x=-1$.

Изобразить на плоскости геометрическое место точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют условиям:

15. $|y|=\sin x$. **17.** $\sin\pi(x^2+y^2)<0$.

16. $\sin(x+y)>0$. **18.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}>1$.

Вычислить:

19. $\sin^4 x+\cos^4 x$, если $\sin x+\cos x=a$.

Ответ. $\frac{1}{2}(2a^2-a^4+1)$.

20. $\sin^4 x+\cos^4 x$, если $\sin x\cdot\cos x=-\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

21. $\sin^3 x-\cos^3 x$, если $\sin x-\cos x=a$.

Ответ. $\frac{a(3-a^2)}{2}$.

22. $\sin^5 x+\cos^5 x$, если $\sin x+\cos x=a$.

Ответ. $\frac{a}{4}(5-a^4)$.

23. Исключив x из системы уравнений

$$\sin x+\cos x=a,\ \sin^3 x+\cos^3 x=b,$$

найти соотношение, связывающее величины a и b.

Ответ. $a^3-3a+2b=0$.

24. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = -\cos^2 x - 5\sin x + 7.$$

Ответ. $y_{\min} = 2,\ y_{\max} = 12.$

Доказать неравенства:

25. $0 \le \sin^2 x \cos^2 x \le \frac{1}{4};$

26. $\cos x + x\sin x > 1$, если $0 < x \le \frac{\pi}{2}.$

Вычислить:

27. $\arccos\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right].$

Ответ. $\frac{9\pi}{14}.$

28. $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right).$

Ответ. $-\frac{\pi}{10}.$

29. $\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right].$

Ответ. $-\frac{\sqrt{2}}{4}.$

30. $\arcsin(\sin 10).$

Ответ. $3\pi - 10.$

Доказать формулы:

31. $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ -1 \le x \le 1,\ x \ne 0.$

32. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1.$

33. $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

34. $\arcsin(\cos\arcsin x) + \arccos(\sin\arccos x) = \frac{\pi}{2}.$

35. Доказать, что $y=\frac{\sin x+\operatorname{tg}x}{\cos x+\operatorname{ctg}x}$ принимает положительные значения при всех допустимых значениях x.

Доказать тождества:

36. $\operatorname{tg}^2\alpha+\sec^2\beta=\operatorname{tg}^2\beta+\sec^2\alpha.$

37. $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha.$

38. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0.$

39. $\frac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha,$ если $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

40. Выразить $\cos\alpha$ и $\sin\beta$ через A и B при условии, что

$$\sin\alpha=A\sin\beta,\ \operatorname{tg}\alpha=B\operatorname{tg}\beta.$$

Ответ. $\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-A^2}{1-B^2}},\ \sin\beta=\pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{A^2-B^2}{1-B^2}}.$

Доказать равенства:

41. $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sec^2\alpha-1}+\frac{1-\sin^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2+\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=3-\operatorname{tg}^2\alpha.$

42. $\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+$

$+\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos 2\pi}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=2\operatorname{tg}\alpha.$

43. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}=-(\sin\alpha+\cos\alpha),\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}.$

44. $\frac{1}{\sin x}[(2\cos x-\sin x)\operatorname{ctg}x+2\sin x+\cos x]\times$

$\times\left[1+\left(\frac{\sqrt{3}\sin x}{2\cos x-\sin x}\right)^{-2}\right]^{-1}-$

$$-\frac{\cos 2x[2(1-\sin x\cos x)+(\sin x+\cos x)^2]}{6(\sin x+\cos x)^2(1-\sin x\cos x)}=\frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}.$$

45. Не пользуясь таблицами, расположить в порядке возрастания числа $\sin 4$, $\cos 2$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{ctg} 6$.

Ответ. $\operatorname{ctg}6<\sin 4<\cos 2<\operatorname{tg}3$.

Решить неравенства:

46. $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geq 0$.

Ответ. $x=0$, $y=1$.

47. $y-|\sec x|-\sqrt{1-y-x^2}\geq 0$.

Ответ. $x=0$, $y=1$.

Найти $\operatorname{tg} x$, если:

48. $\begin{cases} y\sin x+\cos x=y, \\ 7\sin x-2y\cos x=2. \end{cases}$

Ответ. $\pm\frac{4}{3}$.

49. $\begin{cases} 2y\sin x+5\cos x=2y, \\ -5\sin x+y\cos x=1. \end{cases}$

Ответ. $\pm\frac{3}{4}$.

50. $\begin{cases} 2\sin x+2y\cos x=y, \\ y\sin x-2\cos x=2. \end{cases}$

Ответ. $0, \pm 1$.

51. Исключив ϑ и φ из соотношений

$$m^2\operatorname{tg}^2\vartheta+n^2\operatorname{tg}^2\varphi=1,\ m^2\cos^2\vartheta+n^2\sin^2\varphi=1,\ m\sin\vartheta=n\cos\varphi,$$

найти зависимость между m и n.

Ответ. $m\neq 0$, $n\neq 0$, $0\leq\frac{m^2+n^2-1}{2n^2}\leq 1$, $0\leq\frac{m^2-n^2+1}{2m^2}\leq 1$,

$$\frac{2m^4}{m^2-n^2+1}+\frac{2n^4}{m^2+n^2-1}=m^2+n^2+1.$$

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

С тригонометрическими функциями связаны уравнения, называемые в элементарной математике ***тригонометрическими***. Поскольку не существует общих методов их решения и исследования, в школьном курсе математики рассматриваются лишь специальные приемы решения некоторых частных видов тригонометрических уравнений.

Остановимся на тех приемах, которые предполагают знание учащимися алгебраических соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, формул приведения и обратных тригонометрических функций.

Всякое тригонометрическое уравнение, рассматриваемое в школьном курсе математики, можно привести к виду

$$P(\sin\alpha x,\ \cos\alpha x)=0, \tag{1}$$

где $P(u,\ v)$ — многочлен от двух переменных, α — постоянное, а x — неизвестное, подлежащее определению.

Рассмотрим, например, уравнение

$$R(\sin\alpha x,\ \cos\alpha x)=0, \tag{2}$$

левая часть которого — рациональная функция, т. е. представима в виде отношения двух многочленов:

$$R(u,\ v)=\frac{P(u,\ v)}{P^*(u,\ v)}.$$

Решение такого уравнения состоит из решений уравнения (1), за исключением тех корней, при которых

$$P^*(\sin\alpha x,\ \cos\alpha x)=0.$$

(Эти значения x не входят в область определения уравнения (2).)

Очень часто в практике решения тригонометрических уравнений имеет место случай, когда левая часть уравнения (1) представляет собой периодическую функцию. В этом случае достаточно найти его решения на каком-либо полусегменте, длина которого равна периоду этой функции, и воспользоваться ее периодичностью.

Так, например, если функция $P(\sin\alpha x,\ \cos\alpha x)$ имеет период T и нам удалось найти корни уравнения (1) на полусегменте $0\le x<T$:

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_N,$$

то множество всех решений этого уравнения состоит из найденных значений x, а также из всех x, отличающихся от найденных на любое целое число периодов, т. е. имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + kT, \\ x_2 + mT, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ x_N + nT, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} (3_1) \\ (3_2) \\ \dots\dots \\ (3_N) \end{array}$$

где *k*, *m*, *n* — любые целые числа.

Каждое из множеств $(3_1), (3_2), \dots, (3_N)$, содержащих целочисленный параметр (*k*, *m*, ..., *n*) будем называть ***серией решений*** уравнения (1). Серия решений, очевидно, может быть множеством всех решений тригонометрического уравнения или только частью этого множества. Поэтому общее решение уравнения (т. е. множество всех его решений) может состоять или из одной серии, или из нескольких.

Основная идея большинства приемов решения тригонометрических уравнений — сведение к простейшим. При этом часто используется метод подстановки (см. гл. II, § 1, п. 5).

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ (*a* — действительное число) называются ***простейшими тригонометрическими уравнениями.*** Приведем их решения:

Вид уравнения	Значение параметра				
	$\lvert a\rvert > 1$	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	$-1 < a < 1$
$\sin x = a$	корней нет	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$x = k\pi$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$
$\cos x = a$	корней нет	$x = 2k\pi + \pi$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = 2k\pi$	$x = 2k\pi \pm \arccos a$

Вид уравнения	Значение параметра			
	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	*a* — любое
$\operatorname{tg} x = a$	$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$	$x = k\pi$	$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$	$x = k\pi + \operatorname{arctg} a$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$	$x = k\pi + \operatorname{arcctg} a$

Наряду с простейшими часто встречаются следующие уравнения:

Вид уравнения	Значение параметра	Корни
$\sin^2 x = a$	$0 \le a \le 1$	$x = k\pi \pm \arcsin\sqrt{a}$
$\cos^2 x = a$	$0 \le a \le 1$	$x = k\pi \pm \arccos\sqrt{a}$
$\mathrm{tg}^2\, x = a$	$a \ge 0$	$x = k\pi \pm \mathrm{arctg}\sqrt{a}$

Во всех формулах k принимает любое целое значение, т. е. $k = 0, \pm 1, \ldots$.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$2\sin x + \mathrm{tg}\, x = 0.$$

Решение. Функции, входящие в уравнение, определены всюду, где $\cos x \ne 0$. На этом множестве исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$2\sin x \cos x + \sin x = 0,$$

или следующему:

$$\sin x(2\cos x + 1) = 0.$$

Последнее распадается на два уравнения

$$\sin x = 0 \text{ и } 2\cos x + 1 = 0,$$

эквивалентных в совокупности на рассматриваемом множестве исходному уравнению. Решениями их являются серии

$$x_1 = k\pi \text{ и } x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. $x_1 = k\pi$; $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 2. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

Решение. Так как $\cos x = -2\sin x \sin y$, то исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y(-2\sin x \sin y) = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

Тогда, учитывая, что $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, получаем систему

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 - 2\sin x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы имеем

$$\sin x=\frac{1}{2},$$

откуда

$$\cos x=-\sin y,\ \cos^2 x=\sin^2 y=\frac{3}{4},\ \cos^2 y=\frac{1}{4}.$$

Если $\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\sin y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и, следовательно,

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ (k=0,\pm 1,\ldots);\ \ y=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+n\pi\ (n=0,\pm 1,\ldots). \tag{4}$$

Если $\sin x=\frac{1}{2}$, $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и, значит,

$$x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ (k=0,\pm 1,\ldots);\ \ y=(-1)^{n}\frac{\pi}{3}+n\pi\ (n=0,\pm 1,\ldots). \tag{5}$$

Ответ. Формулы (4) и (5) дают все решения исходной системы

Пример 3. *Найти все пары значений* (x, y), *являющихся решениями системы*

$$\begin{cases}\sin x+\dfrac{1}{\cos y}=2\sqrt[3]{14},\\ \sin x\dfrac{1}{\cos y}=\sqrt[3]{196}-2\end{cases}$$

и удовлетворяющих условиям

$$0<x<\pi,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Решение. Положим

$$\sin x=u,\ \ \frac{1}{\cos y}=v,$$

где

$$|u|\le 1,\ |v|\ge 1. \tag{7}$$

Тогда исходная система примет вид

$$u+v=2\sqrt[3]{14},\ \ uv=\sqrt[3]{196}-2,$$

т. е. u и v являются корнями квадратного уравнения

$$t^2-2\sqrt[3]{14}t+\sqrt[3]{196}-2=0,$$

удовлетворяющими условиям (7). Отсюда

$$u=\sqrt[3]{14}-\sqrt{2},\quad v=\sqrt[3]{14}+\sqrt{2},$$

т. е.

$$\sin x=\sqrt[3]{14}-\sqrt{2},\quad \cos y=\frac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}.$$

Ответ. Решениями исходной системы, удовлетворяющими условиям (6), являются пары значений (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_1, y_2); (x_2, y_1), где

$$x_1=\arcsin\left(\sqrt[3]{14}-\sqrt{2}\right),\ x_2=\pi-\arcsin\left(\sqrt[3]{14}-\sqrt{2}\right),$$

$$y_{1,2}=\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{14}+\sqrt{2}}\right).$$

2. Метод подстановки

Часто при решении уравнения, содержащего неизвестное под знаком тригонометрической функции, оказывается удобным взять эту функцию в качестве нового неизвестного и решать относительно его полученное уравнение. При этом необходимо также учитывать и те дополнительные условия, которым должно удовлетворять новое неизвестное. Эта идея лежит в основе метода подстановки, который мы проиллюстрируем на ряде конкретных уравнений, содержащих тригонометрические функции.

1^0. Рассмотрим уравнение вида

$$f(\sin x)=0. \tag{8}$$

Воспользуемся подстановкой $\sin x=t$, *причем* $|t|\le 1$. *Тогда рассматриваемое уравнение сводится* (см. гл. II, § 1, п. 5) к следующей смешанной системе:

$$f(t)=0,\quad |t|\le 1.$$

Если существуют действительные решения этой системы $t=t_i$, то из простейших уравнений $\sin x=t_i$ получим

$$x=(-1)^k\arcsin t_i+k\pi\ (k=0,\pm 1,\ldots).$$

Если же смешанная система решений не имеет, то и уравнение (8) также не имеет решений.

2^0. Аналогично, решение уравнения $f(\cos x)=0$ подстановкой $\cos x=t$, где $|t|\le 1$, сводится к решению смешанной системы

$$f(t)=0,\ |t|\le 1.$$

Если полученная система имеет действительные решения $t=t_i$, то из простейших уравнений $\cos x=t_i$ находим

$$x = 2k\pi \pm \arccos t_i \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

3^0. Решение уравнения

$$f(\operatorname{tg} x) = 0 \tag{9}$$

подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ сводится к решению уравнения $f(t) = 0$ без дополнительных неравенств, так как $\operatorname{tg} x = t$ может принимать произвольные действительные значения. Если $t = t_i$ — действительные корни уравнения $f(t) = 0$, то множество решений уравнения (9) определяется формулой

$$x = \operatorname{arctg} t_i + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

4^0. Аналогично, решение уравнения $f(\operatorname{ctg} x) = 0$ подстановкой $\operatorname{ctg} x = t$ сводится к решению уравнения $f(t) = 0$. Пусть $t = t_i$ — его действительные корни. Тогда решая простейшие уравнения $\operatorname{ctg} x = t_i$, получим

$$x = \operatorname{arcctg} t_i + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Одним из приемов решения тригонометрических уравнений является *приведение к одной функции одного и того же аргумента*.

Рассмотрим уравнение

$$F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0, \tag{10}$$

содержащее несколько тригонометрических функций от неизвестного x, где F — рациональная функция четырех аргументов.

Выражая все тригонометрические функции через одну из них, исходное уравнение (10) можно привести к уравнениям, рассмотренным выше. При этом формулы, выражающие одни тригонометрические функции через другие (см. § 1), могут содержать радикалы. При освобождении от радикалов возможно появление «посторонних» решений. Поэтому такие «решения» должны быть устранены проверкой.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2 x.$$

Решение. Воспользовавшись формулой приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

а также формулой

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

перепишем уравнение следующим образом:

$$2\sin^2 x+3\sin x-2=0.$$

С помощью подстановки

$$\sin x=t\ (|t|\le 1)$$

оно приводится к смешанной системе

$$2t^2+3t-1=0,\ |t|\le 1,$$

или

$$2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+2)=0,\ |t|\le 1,$$

которая имеет решение $t=\frac{1}{2}$. (Заметим, что второй корень квадратного уравнения $t=-2$ не удовлетворяет неравенству $|t|\le 1$ и, значит, решением смешанной системы не является.)

Воспользовавшись указанной подстановкой, получим простейшее тригонометрическое уравнение

$$\sin x=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k=0,\pm 1,...).$$

Ответ. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k=0,\pm 1,...)$.

Пример 5. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+a=0$$

(*a — действительное число*).

Решение. Данное уравнение подстановкой $\operatorname{tg} x=t$ приводится к алгебраическому $t^2-3t+a=0$, которое имеет действительные корни $t_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-a}$ при условии $a\le\frac{9}{4}$.

Ответ. Если $a\le\frac{9}{4}$, то $x_{1,2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-a}\right)+k\pi\ (k=0,\pm 1,...)$; если $a>\frac{9}{4}$, то решений нет.

П р и м е р 6. *Решить уравнение*

$$\cos^3 x+\sqrt{2}\sin^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x+2(1-\sqrt{2})=0.$$

Р е ш е н и е. Так как $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, то данное уравнение перепишем в виде

$$\cos^3 x-\sqrt{2}\cos^2 x+(1-\sqrt{2})\cos x+2-\sqrt{2}=0.$$

Подстановкой $t=\cos x$ $(|t|\le 1)$ полученное уравнение сводится к смешанной системе

$$t^3-\sqrt{2}t^2+(1-\sqrt{2})t+2-\sqrt{2}=0,\ |t|\le 1.$$

Запишем уравнение системы следующим образом:

$$2-(t^2+t+1)\sqrt{2}+t^3+t=0.$$

Это уравнение можно рассматривать как квадратное относительно параметра *a*:

$$a^2-(t^2+t+1)a+t^3+t=0 \qquad (11)$$

при $a=\sqrt{2}$ (см. гл II, § 6, п. 5). Найдем корни уравнения (11):

$$a_{1,2}=\frac{(t^2+t+1)\pm(t^2-t+1)}{2},\ \text{т.е.}\ a_1=t,\ a_2=t^2+1.$$

Следовательно, левую часть уравнения (11) можно разложить на множители:

$$(a-t)\ (a-t^2-1)=0.$$

Итак, смешанная система примет вид

$$(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}-t^2-1)=0,\ |t|\le 1.$$

Определив ее решения $t_{1,2}=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$ и воспользовавшись подстановкой $t=\cos x$, найдем

$$\cos x=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1},$$

откуда $x=\pm\arccos\sqrt{\sqrt{2}-1}+k\pi$ $(k=0,\pm 1,\ldots)$.

О т в е т. $x=\pm\arccos\sqrt{\sqrt{2}-1}+k\pi$ $(k=0,\pm 1,\ldots)$.

Иногда *целесообразно все тригонометрические функции, входящие в уравнение* (10), *выразить через две функции и использовать связь между ними*. Часто в качестве этих двух функций берут $\sin x$ и $\cos x$, которые, как известно, связаны соотношением $\cos^2 x+\sin^2 x=1$. Получаемое при этом уравнение

$$f(\cos x, \sin x) = 0 \qquad (12)$$

подстановкой

$$X = \cos x,\ Y = \sin x, \qquad (13)$$

приводится к системе

$$f(X, Y) = 0,\ X^2 + Y^2 = 1. \qquad (14)$$

Определив действительные решения этой системы и воспользовавшись соотношениями (13), найдем корни уравнения (12). На координатной плоскости XOY точка с абсциссой $X = \cos x$ и ординатой $Y = \sin x$ (рис. 151) принадлежит единичной окружности $X^2 + Y^2 = 1$. Геометрически решение системы уравнений (14) можно трактовать как отыскание точки $X = \cos x$, $Y = \sin x$ пересечения линии $f(X, Y) = 0$ с единичной окружностью $X^2 + Y^2 = 1$ (рис. 151).

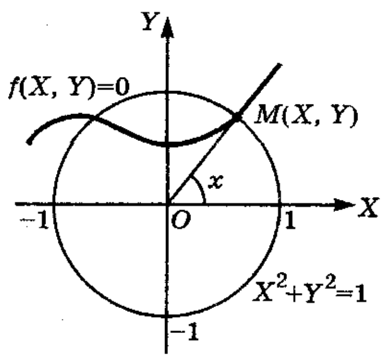


Рис. 151

Рассмотрим линейное относительно синуса и косинуса уравнение

$$a\cos x + b\sin x = c\,(|a| + |b| \neq 0). \qquad (15)$$

Существуют различные способы его решения. Остановимся на одном из них. А именно, сделаем подстановку

$$X = \cos x,\ Y = \sin x.$$

Тогда исходное уравнение (15) приводится к системе

$$\begin{cases} aX + bY = c, \\ X^2 + Y^2 = 1, \end{cases}$$

рассмотренной нами ранее (см. гл II, § 4, п.4).

При условии $a^2 + b^2 \geq c^2$ эта система имеет действительные решения, которые определяются по формулам

$$X=\frac{ac\pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\quad Y=\frac{bc\pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}$$

(перед радикалами берутся либо оба верхних, либо оба нижних знака).

По найденным значениям косинуса и синуса определяем корни исходного уравнения (15).

Геометрическая интерпретация решения уравнения (15). Решение уравнения $a\cos x+b\sin x=c$ сводится к отысканию точек пересечения прямой $aX+bY=c$ с окружностью $X^2+Y^2=1$.

Пример 7. *Решить уравнение* $4\cos x+3\sin x=5$.

Решение. Подстановкой $X=\cos x,\ Y=\sin x$ исходное уравнение приводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases}4X+3Y=5,\\ X^2+Y^2=1.\end{cases}$$

Для определения X имеем уравнение

$$X^2+\left(\frac{5-4X}{3}\right)^2=1,$$

откуда $X=\cos x=\frac{4}{5}$. Так как $Y=\sin x=\frac{3}{5}$, то $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, т. е. $x=\arccos\frac{4}{5}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\ldots)$.

Ответ. $x=\arccos\frac{4}{5}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\ldots)$.

Пример 8. *Используя геометрическую интерпретацию, записать решение уравнения* $\cos x-\sin x=1$.

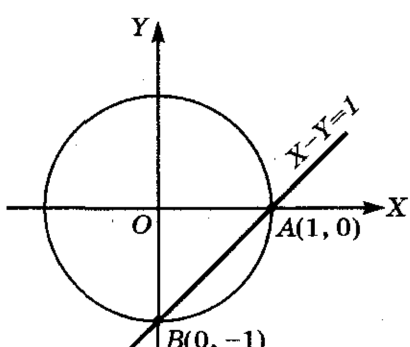


Рис. 152

Р е ш е н и е. Для решения данного уравнения достаточно найти точки пересечения прямой $X - Y = 1$ с окружностью $X^2 + Y^2 = 1$.

Искомыми точками являются $A(1, 0)$ и $B(0, -1)$ (рис. 152).

О т в е т. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (k — любое целое число).

3. Метод рационализации

Рассмотрим уравнения, левая часть которых представляет собой функции, рационально зависящие от $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$. Так как все перечисленные тригонометрические функции рационально выражаются через $\sin x$ и $\cos x$, то речь, следовательно, будет идти о решении уравнений вида

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \tag{16}$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция двух аргументов.

Примерами уравнений, левая часть которых представляет собой функцию, рациональную относительно синуса и косинуса, могут служить:

$$2\sin x \cos x = 0, \quad \frac{1}{a\sin x + b\cos x} = 0, \quad \frac{\cos x - \sin x}{4\cos^2 x + 5\sin x + 1} = 0.$$

Метод, основанный на применении подстановки

$$t = \varphi(x), \tag{17}$$

приводящей рассматриваемое тригонометрическое уравнение (16) к рациональному алгебраическому относительно t уравнению

$$R^*(t) = 0,$$

назовем ***методом рационализации.*** Подстановку (17), которая приводит выражение

$$R(\sin x, \cos x) \tag{18}$$

к рациональному виду $R^*(t)$, будем называть ***рационализирующей.***

Подстановка

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \tag{19}$$

называется ***универсальной рационализирующей,*** так как она во всех случаях приводит к рационализации выражения (18).

Действительно, поскольку

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

имеем

$$R(\sin x,\,\cos x)=R\left(\frac{2t}{1+t^2},\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)=R^*(t).$$

Замечание 1. Здесь мы воспользовались формулами

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Замечание 2. Чтобы не потерять решений при использовании универсальной подстановки (19), необходимо проверить, не являются ли корнями исходного уравнения те значения x, при которых $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не определен.

Следует отметить, что практическое выполнение универсальной подстановки в ряде случаев бывает затруднительным и может быть заменено другими более простыми подстановками:

$$t=\sin x,\ t=\cos x\ \text{ или }\ t=\operatorname{tg} x.$$

Рассмотрим некоторые из таких случаев.

1^0. Если $R(\sin x,\,\cos x)=R(\sin x,-\cos x)$, то к рационализации выражения (18) приводит подстановка $\sin x=t$. Действительно, в этом случае функция $R(\sin x,\cos x)$ при замене $\cos x$ на $-\cos x$ не изменяется и, следовательно, как доказывается в высшей алгебре, является рациональной функцией от $\cos^2 x$; но $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, так что функция (18) рационально зависит от $\sin x=t$. Поэтому

$$R(\sin x,\,\cos x)=R^*(t),$$

где $R^*(t)$ — некоторая рациональная функция от t.

Замечание. Если $R(\sin x,\,\cos x)=-R(\sin x,-\cos x)$, т. е. функция $R(\sin x,\cos x)$ меняет только знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, то выражение (18) можно представить как произведение рациональной функции от $t=\sin x$ на функцию $\cos x$.

2^0. Аналогично можно показать, что в случае, когда

$$R(\sin x,\,\cos x)=R(-\sin x,\cos x),$$

к рационализации выражения (18) приводит подстановка $\cos x=t$.

З а м е ч а н и е . Если $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$, то выражение (18) можно представить в виде произведения $\sin x$ на рациональную функцию от $t = \cos x$.

3^0. Наконец, если $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$, то выражение (18) можно рационализовать подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ всюду в области определения функции $\operatorname{tg} x$. Действительно, если мы в выражении $R(\sin x, \cos x)$, заменим в этой области $\sin x$ на $\cos x \operatorname{tg} x$, то получим некоторую рациональную функцию $R_1(\operatorname{tg} x, \cos x)$ от $\operatorname{tg} x$ и $\cos x$, так что

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x, \cos x)$$

и, следовательно,

$$R(-\sin x, -\cos x) = R_1(\operatorname{tg} x, -\cos x).$$

Так как левые части этих двух тождеств совпадают между собой, то

$$R_1(\operatorname{tg} x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x, -\cos x),$$

т. е. функция R_1 не меняется при замене $\cos x$ на $-\cos x$ и, значит, является рациональной функцией от $\cos^2 x$:

$$R_1(\operatorname{tg} x, \cos x) = R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x).$$

Полагая $\operatorname{tg} x = t$, имеем $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, а потому

$$R(\sin x, \cos x) = R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right) = R^*(t),$$

т. е. выражение (18) действительно рационализировано.

З а м е ч а н и е . При решении уравнения $R(\sin x, \cos x) = 0$ с помощью подстановки $\operatorname{tg} x = t$ <u>необходимо проверить, не являются ли корнями исходного уравнения те значения t, которые не принадлежат области определения функции $\operatorname{tg} x$.</u>

П р и м е р 9. *Решить уравнение*

$$\sin^3 x - 2\sin^2 x - \cos^2 x \sin x - \sin x + 2\cos^2 x + 2 = 0.$$

Р е ш е н и е . Левая часть уравнения представляет собой многочлен $P(\sin x, \cos x)$ относительно синуса и косинуса При этом

$$P(\sin x, \cos x) = P(\sin x, -\cos x).$$

Поэтому подстановкой $\sin x = t$ $(|t| \le 1)$ исходное уравнение сводится к смешанной системе

$$\begin{cases} t^3-2t^2-t+2=0, \\ |t|\le 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (t-1)(t+1)(t-2)=0, \\ |t|\le 1. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются $t_1=1,\ t_2=-1$. Им соответствуют значения

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ и } x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k=0,\ \pm 1,\ldots).$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ (k=0,\ \pm 1,\ldots)$.

Пример 10. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}-\frac{1}{\sec^2 x}-\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}=-3.$$

Решение. Левая часть данного уравнения представляет собой четную относительно $\sin x$ и $\cos x$ рациональную функцию, т. е.

$$R(\sin x,\ \cos x)=R(-\sin x,\ -\cos x).$$

Поэтому применим рационализирующую подстановку $t=\operatorname{tg} x$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2=1$ или $\operatorname{tg}^2 x=1$. Следовательно,

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \ (k=0,\ \pm 1,\ldots).$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \ (k=0,\ \pm 1,\ldots)$.

Пример 11. *Решить уравнение*

$$\sin^2 x(\operatorname{tg} x+1)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3.$$

Решение. Рационализирующей подстановкой $t=\operatorname{tg} x$ исходное уравнение приводится к виду

$$t^2(t+1)=3(t+1) \text{ или } (t^2-3)(t+1)=0.$$

Отсюда находим $t_{1,2}=\pm\sqrt{3},\ t_3=-1$.

Ответ. $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{3}+n\pi,\ x_3=-\frac{\pi}{3}+m\pi;\ k,\ n,\ m$ — произвольные целые числа.

4^0. Рассмотрим тригонометрические уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$. Будем называть уравнение ***однородным***, если сумма показателей при $\sin x$ и $\cos x$ (степень однородности) во всех членах уравнения одинакова.

Например, уравнение

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

является однородным первой степени однородности; уравнение

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

— второй степени однородности; уравнение

$$a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$$

— третьей степени однородности и т. п.

Если $a \neq 0$, то делением на $\cos^k x$, где k — степень однородности, однородное уравнение сводится к алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 12. *Решить уравнение*

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0, \ a \neq 0.$$

Решение. Разделив на $\cos^2 x$, получим квадратное относительно $\operatorname{tg} x$ уравнение

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

При условии $a \neq 0$ это уравнение эквивалентно исходному, причем второе уравнение имеет решение, когда дискриминант

$$D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Метод приведения к однородным уравнениям проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 13. *Решить уравнение*

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d, \ a \neq d.$$

Решение. Данное уравнение приводится к однородному умножением правой части на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Действительно,

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

или

$$(a-d)\sin^2 x + b \sin x \cos x + (c-d)\cos^2 x = 0.$$

Полученное однородное уравнение второй степени однородности решаем обычным способом. Разделив на $\cos^2 x$, имеем

$$(a-d)\operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + (c-d) = 0.$$

При $a \neq d$ последнее и исходное уравнения эквивалентны.

4. Использование свойств симметрических многочленов

Пусть в уравнении

$$P(u, v) = 0 \tag{20}$$

левая часть есть симметрический многочлен от каких-либо тригонометрических функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, т. е.

$$P(u, v) = P(v, u).$$

Известно, что всякий симметрический многочлен $P(u, v)$ можно представить в виде многочлена от основных симметрических функций $z = u + v$ и $t = uv$. Следовательно, решение уравнения (20) можно свести методом подстановки к решению алгебраического уравнения (или смешанной системы) относительно $z = u + v$ или $t = uv$, если z и t связаны друг с другом некоторым тригонометрическим тождеством.

Рассмотрим уравнение

$$P(\sin x, \cos x) = 0, \tag{21}$$

где $P(\sin x, \cos x) = P(\cos x, \sin x)$. Многочлен, симметрический относительно тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$, можно представить в виде многочлена от основных симметрических функций

$$z = \sin x + \cos x \ \ (|z| \le \sqrt{2}), \ \ t = \sin x \cos x \ \left(|t| \le \frac{1}{2}\right)$$

или только одной из них, так как эти функции связаны соотношением

$$z^2 = 1 + 2t.$$

Поэтому достаточно эффективным способом решения уравнения (21) является сведение этого уравнения подстановкой $z = \sin x + \cos x$ к смешанной системе

$$P^*(z) = 0, |z| \le \sqrt{2},$$

где $P^*(z)$ — получаемый при данной подстановке алгебраический многочлен.

Иногда целесообразно в качестве новой переменной взять основную симметрическую функцию $t = \sin x \cos x$. Тогда исходное уравнение (21) приводится к смешанной системе

$$P^*(t) = 0, |t| \le \frac{1}{2},$$

где $P^*(t)$ — алгебраический многочлен, получаемый при этой подстановке.

Пример 14. *Решить уравнение*

$$1 + \sin^3 x + \cos^3 x = 3 \sin x \cos x.$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$1+\sin^3 x+\cos^3 x-\frac{3}{2}\cdot 2\sin x\cos x=0.$$

Левая часть полученного уравнения представляет собой симметрический многочлен относительно $\sin x$ и $\cos x$. Подстановкой $\sin x+\cos x=z$ данное уравнение приводится к смешанной системе

$$z^3+3z^2-3z-5=0,\ |z|\le\sqrt{2}.$$

Для решения этого кубического уравнения разложим его левую часть на множители:

$$z^3+3z^2-3z-5=z^3+1+3(z^2-z-2)=$$

$$=(z+1)(z^2-z+1)+3(z+1)(z-2)=(z+1)(z^2+2z-5).$$

Следовательно, его корнями являются значения

$$z_1=-1,\ z_2=-1-\sqrt{6},\ z_3=-1+\sqrt{6}.$$

Решением смешанной системы служит только значение $z=-1$, так как

$$-1-\sqrt{6}<-\sqrt{2},\ \text{а}\ -1+\sqrt{6}>\sqrt{2}.$$

Остается решить уравнение

$$\sin x+\cos x=-1,$$

которое имеет две серии решений:

$$x_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \text{и}\ x_2=\pi+2n\pi.$$

Ответ. $x_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x_2=\pi+2n\pi$ (k, n — любые целые числа).

Пример 15. *Решить уравнение*

$$1-(\sin^3 x+\cos^3 x)=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Решение. Воспользовавшись формулой синуса удвоенного аргумента, перепишем уравнение следующим образом:

$$1-(\sin^3 x+\cos^3 x)-\sin x\cos x=0. \qquad (22)$$

Левая часть уравнения полученного уравнения является симметрическим многочленом относительно функций $u=\sin x$ и $v=\cos x$ (т. е. не меняется при замене синуса на косинус, а косинуса на синус).

Поэтому в качестве новых неизвестных введем функции

$$\sin x+\cos x=z\ \ (|z|\le\sqrt{2})$$

и

$$\sin x\cos x=t\ \ \left(|t|\le\frac{1}{2}\right)$$

Воспользовавшись формулой суммы кубов, получим

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=$$
$$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x),$$

Тогда уравнение (22) относительно новых неизвестных примет вид

$$1-z(1-t)-t=0,$$

или

$$(1-z)(1-t)=0.$$

Следовательно, неизвестные z и t определяются из смешанных систем

$$\begin{cases}1-z=0,\\ |z|\le\sqrt{2},\end{cases}\quad \begin{cases}1-t=0,\\ |t|\le\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Решение первой системы есть $z=1$, вторая система решений не имеет.

Возвращаясь к первоначальному неизвестному, получим уравнение

$$\sin x+\cos x=1, \qquad (23)$$

которое эквивалентно исходному. Оно имеет две серии корней:

$$x_1=2k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi.$$

Ответ. $x_1=2k\pi,\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ (k, n — любые целые числа).

Замечание 1. Рассмотренное уравнение можно решить без введения новых неизвестных — основных симметрических функций, для чего следует воспользоваться способом разложения на множители. При этом исходное уравнение преобразуется к виду

$$\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)[1-(\sin x+\cos x)]=0.$$

Замечание 2. Геометрически решение уравнения (23) равносильно отысканию точек пересечения прямой $X+Y=1$ с единичной окружностью $X^2+Y^2=1$, где $\cos x=X,\ \sin x=Y$.

Пример 16. *Решить уравнение*

$$1+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)^2=0.$$

Решение. Левая часть исходного уравнения

$$P(\sin x,\cos x)=1+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)^2$$

представляет собой симметрический многочлен относительно $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $P(\sin x,\cos x)=P(\cos x,\sin x)$. *Известно, что всякий симметрический* многочлен $P(u, v)$ можно представить в виде многочлена от основных симметрических функций $u+v$ и uv.

Так как

$$\sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2},$$

то в рассматриваемом случае целесообразно в качестве нового неизвестного взять основную симметрическую функцию $\sin x + \cos x = z$. Учитывая, что

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x, \ (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x,$$

имеем

$$(\sin x - \cos x)^2 = 2 - (\sin x + \cos x)^2.$$

Тогда исходное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 = 0.$$

Полагая

$$\sin x + \cos x = z \ (|z| \le \sqrt{2}),$$

приходим к смешанной системе

$$2\sqrt{2}z + z^2 = 0, \ |z| \le \sqrt{2},$$

которая имеет единственное решение $z = 0$. Для определения x получаем уравнение

$$\sin x + \cos x = 0,$$

эквивалентное исходному тригонометрическому уравнению. Итак,

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. $x = k\pi - \dfrac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Аналогично решается уравнение (20), когда его левая часть представляет собой симметрический многочлен относительно функций $u(x) = \sin x$ и $v(x) = -\cos x$. При этом используются подстановки

$$z = \sin x - \cos x \ \ (|z| \le \sqrt{2})$$

или

$$t = -\sin x \cos x \ \ \left(|t| \le \frac{1}{2}\right)$$

П р и м е р 17. *Решить уравнение*

$$\sin x \cos x - 6(\sin x - \cos x) + 6 = 0.$$

Р е ш е н и е. Подстановкой $\sin x - \cos x = z$ исходное уравнение приводится к смешанной системе

$$1 - z^2 - 12z + 12 = 0, \ |z| \le \sqrt{2},$$

или

$$z^2 + 12z - 13 = 0, \ |z| \le \sqrt{2}.$$

Ее решением является значение $z = 1$. Следовательно,

$$\sin x - \cos x = 1,$$

откуда

$$x_1 = \pi + 2k\pi \ \text{ и } \ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

О т в е т. $x_1 = \pi + 2k\pi$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ (k, n — целые).

Если в уравнении (20) многочлен $P(u, v)$ является симметрическим относительно $u = \cos^2 x$ и $v = -\sin^2 x$, то целесообразно в качестве новой переменной взять основную симметрическую функцию

$$z = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \ (|z| \le 1),$$

при этом

$$t = uv = \frac{1}{4}(z^2 - 1).$$

П р и м е р 18. *Решить уравнение*

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Р е ш е н и е. Левая часть уравнения

$$\sin^4 x + \cos^4 x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

представляет собой симметрический многочлен относительно функций $\cos^2 x$ и $-\sin^2 x$. Следовательно, подстановкой $z = \cos^2 x - \sin^2 x$ рассматриваемое уравнение сводится к смешанной системе

$$z^2 - 2z + 1 = 0, \ |z| \le 1,$$

которая имеет решение $z = 1$. Тогда получим

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = 1, \ x = k\pi.$$

О т в е т. $x = k\pi$ (k — любое целое число).

Если левая часть уравнения (20) симметрична относительно функций $u=\sin^2 x$ и $v=\cos^2 x$, то применяется подстановка

$$t=\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x\left(|t|\le\frac{1}{4}\right);$$

при этом $z=\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Пример 19. *Решить уравнение* $\cos^6 x+\sin^6 x=16\sin^2 x\cos^2 x$.

Решение. Подстановкой $t=\sin^2 x\cos^2 x$ данное уравнение приводится к системе

$$1-3t=16t,\ |t|\le\frac{1}{4}.$$

Отсюда $t=\frac{1}{19}$, т. е. $\sin^2 2x=\frac{4}{19}$, а, следовательно,

$$x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{19}}+\frac{k\pi}{2}.$$

Ответ. $x=\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{19}}+\frac{k\pi}{2}$ (k — любое целое число).

Рассмотрим примеры уравнений, где имеет место симметрия относительно каких-либо других тригонометрических функций.

Пример 20. *Решить уравнение*

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)=\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x-2.$$

Решение. Левая часть уравнения

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)-(\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x-2)=0$$

представляет собой симметрический многочлен относительно функций $u=\operatorname{tg}x$ и $v=-\operatorname{ctg}x$. При этом

$$t=uv=-1 \text{ и } (u+v)^2=u^2+v^2-2.$$

Подстановкой $z=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$ рассматриваемое уравнение приводится к алгебраическому уравнению

$$\frac{2}{\sqrt{3}}z-z^2=0.$$

Решая последнее, получим

$$z=0 \text{ и } z=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=0 \text{ и } \operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x=1 \text{ и } \operatorname{tg}^2 x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} x-1=0.$$

Отсюда находим

$$x_1=k\pi\pm\frac{\pi}{4},\ x_2=n\pi+\frac{\pi}{3},\ x_3=m\pi-\frac{\pi}{6}.$$

Две серии решений x_2 и x_3 можно объединить в одну: $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$.

Ответ. $x_1=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$, k — любое целое число.

Пример 21. *Решить уравнение*

$$\sec^2 x+3\sec x\operatorname{cosec} x+\operatorname{cosec}^2 x=4.$$

Решение. Левая часть данного уравнения представляет собой симметрический многочлен относительно функций $u=\sec x$ и $v=\operatorname{cosec} x$, который можно выразить через основные симметрические функции $z=\sec x+\operatorname{cosec} x$ и $t=\sec x\operatorname{cosec} x$. А именно,

$$\sec^2 x+3\sec x\operatorname{cosec} x+\operatorname{cosec}^2 x=z^2-2t+3t=z^2+t=4.$$

При этом z и t связаны друг с другом соотношением

$$z^2=t^2+2t.$$

Из этих уравнений имеем

$$t^2+3t-4=0,$$

откуда

$$t_1=-4,\ t_2=1.$$

В результате получаем:

1) $\sec x+\operatorname{cosec} x=-4$, или $\frac{1}{\cos x\sin x}=-4$, или $\sin x\cos x=-\frac{1}{4}$, т. е. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$.

2) $\sec x+\operatorname{cosec} x=1$, или $\sin x\cos x=1$. Это уравнение корней не имеет.

Ответ. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$, n — любое целое число.

Иногда целесообразно свести решение «симметрического» тригонометрического уравнения к симметрической системе алгебраических уравнений (см. гл. II, § 4).

Так, например, уравнение $P(\sin x, \cos x)=0$, левая часть которого представляет собой многочлен, симметрический относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, подстановкой

$$X=\cos x,\ Y=\sin x$$

можно свести к симметрической системе алгебраических уравнений

$$P(Y, X)=0,\ X^2+Y^2=1.$$

Пример 22. *Решить уравнение* $\sin^3 x+\cos^3 x=1$.

Решение. Полагая $\sin x=Y$, $\cos x=X$, имеем симметрическую систему

$$X^3+Y^3=1,\ X^2+Y^2=1.$$

Взяв в качестве новых неизвестных основные симметрические функции $u=X+Y$ и $v=XY$, получим следующую вспомогательную систему:

$$u^3-3uv=1,\ u^2-2v=1.$$

Для нахождения u получаем кубическое уравнение

$$u^3-3u+2=0.$$

Его корни: $u_1=1, u_2=1, u_3=-2$. Следовательно, вспомогательная система имеет три решения:

$$u_1=1,\ v_1=0;\ u_2=1,\ v_2=0;\ u_3=-2,\ v_3=\frac{3}{2}.$$

Отсюда находим два решения симметрической системы:

$$X_1=1,\ Y_1=0 \text{ и } X_2=0,\ Y_2=1.$$

Таким образом, решение исходного уравнения сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases}\cos x=1,\\ \sin x=0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\cos x=0,\\ \sin x=1.\end{cases}$$

Ответ. $x_1=2k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k=0, \pm1,\ldots)$.

Замечание. Решение данного уравнения можно найти проще, если использовать неравенство $\sin^3 x+\cos^3 x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

5. Метод, основанный на равенстве одноименных функций

Рассматриваемый метод решения тригонометрических уравнений основан на соотношениях между значениями аргументов, при которых одноименные тригонометрические функции принимают одинаковые значения.

1^0. Уравнение

$$\sin f_1(x) = \sin f_2(x), \qquad (24)$$

выражающее равенство синусов двух функций, эквивалентно уравнению с целочисленным параметром

$$f_1(x) = (-1)^k f_2(x) + k\pi, \qquad (25)$$

где $k = 0,\ \pm 1, \ldots$

2^0. Уравнение

$$\cos f_1(x) = \cos f_2(x) \qquad (26)$$

эквивалентно уравнению

$$f_1(x) = \pm f_2(x) + 2k\pi, \qquad (27)$$

где $k = 0,\ \pm 1, \ldots$

3^0. Решение уравнения

$$\operatorname{tg} f_1(x) = \operatorname{tg} f_2(x) \qquad (28)$$

эквивалентно нахождению корней уравнения с целочисленным параметром

$$f_1(x) = f_2(x) + k\pi \qquad (29)$$

($k = 0,\ \pm 1, \ldots$), удовлетворяющих условию

$$f_1(x) \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \left(\text{или} \quad f_2(x) \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

(m, n — целые числа).

4^0. Решение уравнения

$$\operatorname{ctg} f_1(x) = \operatorname{ctg} f_2(x)$$

эквивалентно нахождению корней уравнения

$$f_1(x) = f_2(x) + k\pi$$

($k = 0, \pm 1, \ldots$), удовлетворяющих условию

$$f_1(x) \neq m\pi \quad (\text{или} \quad f_2(x) \neq n\pi)$$

(m, n — целые числа).

Доказательство утверждения 1^0.

1. Пусть x_p — корни уравнения (25), т. е.

$$f_1(x_p) = (-1)^k f_2(x_p) + k\pi,$$

откуда в зависимости от четности или нечетности k получаем

$$f_1(x_p)=\begin{cases} f_2(x_p)+2n\pi \ (k=2n), \\ \pi-f_2(x_p)+2n\pi \ (k=2n+1). \end{cases}$$

Тогда в обоих случаях имеем

$$\sin f_1(x_p)=\sin f_2(x_p),$$

т. е. корни x_p удовлетворяют также уравнению (24).

2. Пусть x_p — корни уравнения (24), т. е.

$$\sin f_1(x_p)=\sin f_2(x_p)=a.$$

Тогда

$$f_1(x_p)=(-1)^{k_1}\arcsin a+k_1\pi,$$

$$f_2(x_p)=(-1)^{k_2}\arcsin a+k_2\pi,$$

где k_1 и k_2 — любые целые числа.

Если k_1 и k_2 — числа одинаковой четности (оба четные или оба нечетные), то, почленно вычитая записанные равенства, имеем

$$f_1(x_p)-f_2(x_p)=(k_1-k_2)\pi=2n\pi,$$

где k_1-k_2 есть некоторое четное число $2n$.

Если k_1 и k_2 — числа различной четности, то, сложив почленно указанные равенства, получим

$$f_1(x_p)+f_2(x_p)=(k_1+k_2)\pi=(2n+1)\pi.$$

Итак, *из равенства синусов двух углов следует, что либо разность их есть четное кратное* π, *либо сумма есть нечетное кратное* π.

Следовательно,

$$f_1(x_p)=(-1)^k f_2(x_p)+k\pi,$$

т. е. x_p являются также решениями уравнения (25).

Таким образом, все корни уравнения (24) будут корнями уравнения (25) и, наоборот, все корни уравнения (25) будут также корнями уравнения (24), т. е. уравнения (24) и (25) эквивалентны.

Доказательство утверждения 2^0.

1. Пусть x_p — корни уравнения (27), т. е.

$$f_1(x_p)=\pm f_2(x_p)+2k\pi.$$

Тогда

$$\cos f_1(x_p) = \cos[\pm f_2(x_p)] = \cos f_2(x_p).$$

Следовательно, x_p удовлетворяют также и уравнению (26).

2. Пусть x_p — корни уравнения (26), т. е.

$$\cos f_1(x_p) = \cos f_2(x_p) = a.$$

Тогда

$$f_1(x_p) = \pm \arccos a + 2k_1\pi,$$

$$f_2(x_p) = \pm \arccos a + 2k_2\pi.$$

Складывая или вычитая (в зависимости от знаков при $\arccos a$) почленно эти равенства, получим

$$f_1(x_p) \pm f_2(x_p) = 2(k_1 \pm k_2)\pi = 2k\pi,$$

где $k = k_1 \pm k_2$ — целое число, т. е. *из равенства косинусов двух углов следует, что их сумма или разность есть четное кратное* π.

Таким образом, $f_1(x_p) = \pm f_2(x_p) + 2k\pi$, т. е. x_p удовлетворяют также и уравнению (27), а следовательно, уравнения (26) и (27) эквивалентны.

Доказательство утверждения 3^0.

Если x_p удовлетворяют уравнению (29), т. е.

$$f_1(x_p) = f_2(x_p) + k\pi,$$

и, кроме того, условию

$$f_1(x_p) \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \ldots),$$

или, что то же самое, условию

$$f_2(x_p) \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \ldots),$$

то

$$\operatorname{tg} f_1(x_p) = \operatorname{tg} f_2(x_p).$$

Следовательно, x_p удовлетворяют также и уравнению (28).

Обратно, если x_p удовлетворяют уравнению (28), т. е.

$$\operatorname{tg} f_1(x_p) = \operatorname{tg} f_2(x_p) = a,$$

то

$$f_1(x_p) = \operatorname{arctg} a + k_1\pi, \quad f_2(x_p) = \operatorname{arctg} a + k_2\pi.$$

Отсюда следует, что

$$f_1(x_p) - f_2(x_p) = (k_1 - k_2)\pi = k\pi,$$

где $k = k_1 - k_2$ — целое число.

Отметим, что уравнение (28) не всегда эквивалентно уравнению (29). Действительно, всякое решение уравнения (28) будет решением уравнения (29), но не всякое решение уравнения (29) удовлетворяет уравнению (28). А именно, «посторонними» для (28) будут те корни уравнения (29), при которых $\operatorname{tg} f_1(x)$ и $\operatorname{tg} f_2(x)$ не определены. Это происходит тогда, когда имеет место равенство

$$f_1(x) = \frac{\pi}{2} + m\pi \ (m = 0, \pm 1, \ldots)$$

или эквивалентное ему равенство

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Доказательство утверждения 4^0 ничем не отличается от предыдущего.

Замечание. Доказанные утверждения остаются в силе, если аргументы тригонометрических функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ зависят не от одного переменного x, а от нескольких.

Пример 23. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) - \operatorname{ctg}(\pi \sin x) = 0.$$

Решение. Применим метод, основанный на равенстве одноименных функций. Для этого перепишем уравнение следующим образом:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x\right).$$

Его решениями будут все решения уравнения с целочисленным параметром

$$\frac{\pi}{2}\cos x = \frac{\pi}{2} - \pi\sin x + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots), \qquad (30)$$

удовлетворяющие условию

$$\frac{\pi}{2}\cos x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \ (m = 0, \pm 1, \ldots),$$

т. е. условию

$$x \neq n\pi \ (n = 0, \pm 1, \ldots). \qquad (31)$$

Найдем эти решения.

Уравнение (30) (типа $a\cos x + b\sin x = c$) имеет решение при условии $\frac{1}{4}+1 \ge \left(k+\frac{1}{2}\right)^2$, т. е. только при $k=0$ и $k=-1$.

При $k=0$ уравнение (30) примет вид

$$\cos x + 2\sin x = 1,$$

а при $k=-1$ — вид

$$\cos x + 2\sin x = -1.$$

Решения этих уравнений, для которых выполняется условие (31), таковы:

$$x = k\pi - \arccos\frac{3}{5}\ (k=0, \pm 1, \ldots).$$

Геометрическая интерпретация решения рассматриваемого уравнения приведена на рис. 153.

Ответ. $x = k\pi - \arccos\frac{3}{5}$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

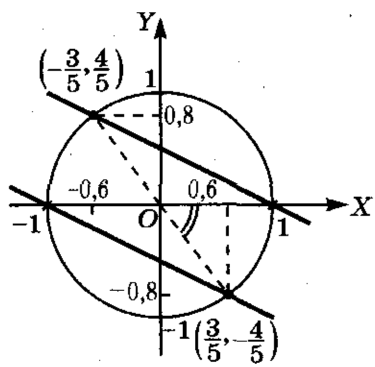


Рис. 153

Пример 24. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x). \tag{32}$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right),$$

откуда

$$\operatorname{tg}\ x = \frac{1}{2} - \operatorname{ctg}\ x + k, \tag{33}$$

где k — произвольное целое число.

Значения x, при которых $\operatorname{tg} x = 0$, не удовлетворяют уравнению (33). Умножив обе части (33) на $\operatorname{tg} x$, получим эквивалентное уравнение, квадратное относительно $\operatorname{tg} x$:

$$2\operatorname{tg}^2 x - (2k+1)\operatorname{tg}\, x + 2 = 0.$$

Решив это уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, получим

$$\operatorname{tg}\, x = \frac{1}{4}\left(2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 16}\right). \qquad (34)$$

При $k = 0, \pm 1, -2$ уравнение (30) не имеет решений, так как

$$(2k+1)^2 - 16 < 0.$$

При переходе от уравнения (32) к уравнению (33) возможно появление «посторонних решений». Это такие решения уравнения (33), при которых $\operatorname{tg}\,(\pi \operatorname{tg}\, x)$ не определен, т. е. при которых

$$\operatorname{tg}\, x = m + \frac{1}{2},$$

где m — целое число. Найдем из формулы (34) всевозможные рациональные значения $\operatorname{tg}\, x$, среди которых содержатся (в частности) и значения вида

$m + \frac{1}{2}$.

Значение $\operatorname{tg}\, x$ рационально тогда и только тогда, когда подкоренное выражение в формуле (34) есть квадрат целого числа:

$$(2k+1)^2 - 16 = z^2, \text{ или } (2k+1)^2 - z^2 = 16, \qquad (35)$$

или

$$[(2k+1)+z]\,[(2k+1)-z] = 16.$$

Из уравнения (35) следует, что z — нечетное число, а потому множители (заключенные в квадратные скобки), на которые разложено число 16, должны быть четными числами. Разложение числа 16 на произведение четных чисел возможно четырьмя способами: $2\cdot 8$; $4\cdot 4$; $(-2)\cdot(-8)$; $(-4)\cdot(-4)$; в соответствии с этим возможны такие случаи:

$$\text{(I)} \begin{cases} (2k+1)+z = 2, \\ (2k+1)-z = 8; \end{cases} \qquad \text{(IV)} \begin{cases} (2k+1)+z = -2, \\ (2k+1)-z = -8; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} (2k+1)+z = 8, \\ (2k+1)-z = 2; \end{cases} \qquad \text{(V)} \begin{cases} (2k+1)+z = -8, \\ (2k+1)-z = -2; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} (2k+1)+z = 4, \\ (2k+1)-z = 4; \end{cases} \qquad \text{(VI)} \begin{cases} (2k+1)+z = -4, \\ (2k+1)-z = -4. \end{cases}$$

Из этих систем найдем следующие возможные значения для k:

$$2k_1+1=5,\ k_1=2 \text{ и } 2k_2+1=-5,\ k_2=-3.$$

При $k=2$ соответствующими значениями $\operatorname{tg} x$ являются

$$\operatorname{tg} x=2 \text{ и } \operatorname{tg} x=\frac{1}{2},$$

из которых второе дает посторонние решения.

При $k=-3$ соответствующими значениями $\operatorname{tg} x$ являются

$$\operatorname{tg} x=-2 \text{ и } \operatorname{tg} x=-\frac{1}{2},$$

из которых второе дает посторонние решения.

Ответ. $x_1=\operatorname{arctg}\dfrac{2k+1\pm\sqrt{4k^2+4k-15}}{4}+n\pi,\ x_2=\pm\operatorname{arctg}2+n\pi$ (n — любое целое число; k — любое целое число, отличное от $0, \pm1, \pm2, -3$).

6. Некоторые специальные приемы решения тригонометрических уравнений

Если левую часть тригонометрического уравнения $f(x)=0$ можно представить в виде произведения, т. е.

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)\dots f_k(x), \tag{36}$$

то корнями данного уравнения будут все корни уравнений

$$f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\dots,f_k(x)=0, \tag{37}$$

принадлежащие его области определения (т. е. общей части областей определения функций $f_1(x), f_2(x),\dots,f_k(x)$). При этом корни уравнений (37), не принадлежащие области определения уравнения (36), будут для него «посторонними».

Пример 25. *Решить уравнение*

$$\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}.$$

Решение. Область определения уравнения находится из условий $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq -1$, т. е. $x\neq n\pi$ $(n=0, \pm1,\dots)$. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=0, \text{ или } \frac{\cos^3 x+\cos^2 x-\sin^3 x-\sin^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}=0,$$

откуда

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x+\cos^2 x+\sin^2 x+\sin x\cos x)=0.$$

Приравнивая нулю каждый из множителей в левой части уравнения, получим:

1) $\cos x - \sin x = 0$, т. е. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$;

2) $1 + \sin x \cos x + \sin x \cos x = 0$.

Левая часть этого уравнения есть симметрический многочлен относительно $\sin x$ и $\cos x$. Подстановкой

$$z = \sin x + \cos x \quad (|z| \le \sqrt{2})$$

оно приводится к смешанной системе

$$z^2 + 2z + 1 = 0, |z| \le \sqrt{2}.$$

Отсюда $z = -1$, т. е. $\sin x + \cos x = -1$. Это уравнение имеет корни $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $x_3 = (2k+1)\pi$. Значения $x_3 = (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$ не являются корнями исходного уравнения, поскольку не принадлежат его области определения.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$.

Пример 26. *Решить уравнение*

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \cos^2\left[\left(\frac{5\pi}{3}\cos \pi x\right) - \frac{17}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos \pi x\right) - 2\pi - \arcsin(\sin 5)\right] = 0.$$

Решение. По формуле приведения имеем $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$.

Вычислим также выражение $2\pi + \arcsin(\sin 5)$. По определению, $y = \arcsin x$, если $x = \sin y$ и $-\frac{\pi}{2} \le y \frac{\pi}{2}$. Значит, равенство $y = \arcsin(\sin 5)$ эквивалентно выполнению двух условий:

$$1)\ \sin y = \sin 5; \qquad 2)\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Из равенства синусов следует, что

$$y = (-1)^l \cdot 5 + l\pi \quad (l = 0, \pm 1, ...).$$

Второе же условие выполняется только при значении $l=-2$, т. е. $y=5-2\pi$, откуда находим, что

$$2\pi+\arcsin(\sin 5)=5.$$

Поэтому исходное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}2x\cdot\left[\cos^2\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)-\frac{17}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)-5\right]=0. \qquad (38)$$

Левая часть уравнения (38) представляет собой произведение трех сомножителей. Следовательно, всюду в области определения этого уравнения, т. е. при

$$\cos x\neq 0,\ x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi\ (m=0,\ \pm1,\ldots)$$

и

$$\cos 2x\neq 0,\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\ (n=0,\ \pm1,\ldots),$$

оно эквивалентно совокупности трех уравнений:

$$\operatorname{tg} x=0, \qquad (39)$$

$$\operatorname{tg} 2x=0, \qquad (40)$$

$$\cos^2\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)-\frac{17}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)-5=0. \qquad (41)$$

Уравнение (39) имеет решение

$$x=n\pi\ (n=0,\ \pm1,\ldots). \qquad (42)$$

Уравнение (40) кроме указанной серии решений (42) также удовлетворяется при значениях

$$x=\frac{\pi}{2}+m\pi\ (m=0,\ \pm1,\ldots),$$

которые не принадлежат области определения уравнения (38), а, значит, его решениями не являются.

Для решения уравнения (41) применим метод подстановки. А именно, сделаем подстановку

$$\frac{5\pi}{3}\cos\pi x=\alpha\ \left(|\alpha|\leq\frac{5\pi}{3}\right), \qquad (43)$$

с помощью которой это уравнение приводится к смешанной системе

$$\cos^2\alpha-\frac{17}{2}\sin\alpha-5=0, \qquad (44)$$

$$|\alpha| \le \frac{5\pi}{3}. \qquad (45)$$

Применив формулу $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, перепишем уравнение (44) следующим образом:

$$\sin^2\alpha + \frac{17}{2}\sin\alpha + 4 = 0.$$

Из этого уравнения находим $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, откуда $\alpha = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$).

Неравенство (45) выполняется лишь при $k = 0, \pm 1$, т. е. $\alpha_1 = -\frac{\pi}{6}$; $\alpha_2 = -\frac{5\pi}{6}$; $\alpha_3 = \frac{7\pi}{6}$.

Воспользовавшись подстановкой (43), имеем

$$\frac{5\pi}{3}\cos\pi x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k = 0, \pm 1),$$

или

$$\cos\pi x = \frac{(-1)^{k+1}}{10} + \frac{3k}{5} \ (k = 0, \pm 1).$$

Отсюда

$$\pi x = 2m\pi \pm \arccos\left[\frac{(-1)^{k+1}}{10} + \frac{3k}{5}\right].$$

Следовательно, решение уравнения (41) имеет вид

$$x = 2m \pm \frac{1}{\pi}\arccos\left[\frac{(-1)^{k+1}}{10} + \frac{3k}{5}\right] \ (k = 0, \pm 1;\ m = 0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. $x_1 = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$); $x_2 = 2m \pm \frac{1}{\pi}\arccos\left[\frac{(-1)^{k+1}}{10} + \frac{3k}{5}\right]$ ($k = 0; \pm 1;\ m = 0, \pm 1, \ldots$).

Иногда при решении тригонометрических уравнений некоторую комбинацию тригонометрических функций принимают за новое неизвестное.

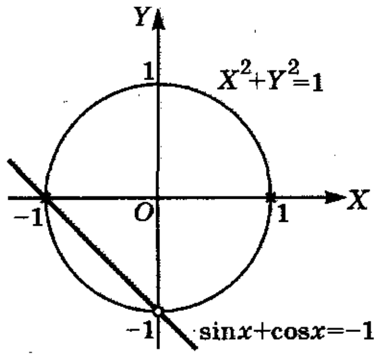


Рис. 154

Пример 27. *Решить уравнение*

$$\frac{1+\frac{1}{2}\cos x}{1+\cos x}+\operatorname{cosec} x=0.$$

Решение. Область определения уравнения задается условиями $\sin x \neq 0,\ 1+\cos x \neq 0$ и представляет собой множество значений

$$x \neq n\pi\ (n=0,\ \pm 1,\ldots).$$

(рис. 154). Исходное уравнение всюду в области его определения можно записать следующим образом:

$$\frac{\sin x+\cos x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+1}{(1+\cos x)\sin x}=0, \tag{46}$$

откуда

$$\sin x+\cos x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+1=0. \tag{47}$$

Вводя новое неизвестное с помощью подстановки (см. п. 4)

$$z=\sin x+\cos x\ (|z| \leq \sqrt{2}), \tag{48}$$

получим смешанную систему

$$z^2+4z+3=0,\ |z| \leq \sqrt{2}.$$

Ее решение $z=-1$. Воспользовавшись подстановкой (48), имеем

$$\sin x+\cos x=-1. \tag{49}$$

Уравнение (49), а следовательно, и уравнение (47) имеют две серии корней (см. рис. 154):

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ и } x_2 = (2k+1)\pi \ (k = 0, \pm 1, ...).$$

Вторая серия $x_2 = (2k+1)\pi$ не является решением исходного уравнения, так как не принадлежит его области определения.

Замечание. «Посторонние корни» появились потому, что при переходе от уравнения (46) к уравнению (47) произошло расширение его области определения.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, ...)$.

Рассмотрение уравнения как квадратного алгебраического относительно какой-либо тригонометрической функции позволяет во многих случаях разложить левую часть уравнения на множители. В сочетании с использованием неравенств указанный прием можно эффективно применять при решении некоторых видов тригонометрических уравнений.

Пример 28. *Решить уравнение*

$$\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$$

Решение. Рассматривая уравнение как квадратное относительно $t = \sin x$, получим

$$t^2 - \sin^2 3x \cdot t + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0,$$

откуда

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}\sin^2 3x \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sin^4 3x - \sin^2 3x}. \tag{50}$$

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным, т. е.

$$\sin^2 3x(\sin^2 3x - 1) \geq 0. \tag{51}$$

Поскольку $\sin^2 3x \geq 0$, а $\sin^2 3x - 1 \leq 0$, условие (51) будет выполнено тогда и только тогда, когда либо $\sin^2 3x = 0$, либо $\sin^2 3x = 1$. В первом случае соотношение (50) дает $\sin x = 0$, т. е. $x = k\pi \ (k = 0, \pm 1, ...)$ во втором $\sin x = \frac{1}{2}$, т. е. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, ...)$.

Ответ. $x_1 = k\pi, x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, ...)$.

Замечание. Данное уравнение можно решить также с использованием неравенств.

Иногда при решении одного уравнения могут сразу применяться несколько приемов (метод подстановки, использование тождеств и т. д.).

П р и м е р 29. *Решить уравнение*

$$\cos^4(\operatorname{arcctg} x)+\sin^4(\operatorname{arcctg} x)=\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arcctg} x).$$

Р е ш е н и е. Подстановкой $\operatorname{arcctg} x = t$ $(0<t<\pi)$ исходное уравнение сводится к смешанной системе

$$\cos^4 t+\sin^4 t=\operatorname{cosec}^2 t,\ 0<t<\pi,$$

или

$$1-2\cos^2 t\sin^2 t=\frac{1}{\sin^2 t},\quad 0<t<\pi,$$

или

$$\cos^2 t\left(2\sin^2 t+\frac{1}{\sin^2 t}\right)=0,\quad 0<t<\pi.$$

Так как тригонометрическое уравнение

$$2\sin^2 t+\frac{1}{\sin^2 t}=0$$

действительных корней не имеет, то смешанная система эквивалентна следующей:

$$\cos^2 t=0,\ \ 0<t<\pi.$$

Отсюда $t=\dfrac{\pi}{2}$, а, значит, $x=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}=0$.

О т в е т. $x=0$.

З а м е ч а н и е. Смешанную систему можно решить также с использованием неравенств. Так как $\cos^4 t+\sin^4 t\le 1$, $\operatorname{cosec}^2 t\ge 1$, то $\operatorname{cosec}^2 t=1$ и $\cos^2 t=0$.

Приведенные примеры отнюдь не исчерпывают всего многообразия искусственных приемов, применяемых при решении тригонометрических уравнений. Существует много других частных приемов (например, использование пропорций, операции выделения полного квадрата, преобразований понижения степени и т. д.). Предусмотреть все многообразие общей теорией просто не представляется возможным. Одно и то же уравнение может быть решено различными способами. Выбор наиболее целесообразного из этих способов достигается только практикой.

7. Уравнения, связанные с обратными тригонометрическими функциями

1^0. Простейшие уравнения. Так называют уравнения $\arcsin x = a$, $\arccos x = a$, $\operatorname{arctg} x = a$, $\operatorname{arcctg} x = a$, в которых требуется найти неизвестное по заданному значению одной из аркфункций. Рассмотрим, например, уравнение

$$\arcsin x = a.$$

Так как по определению арксинуса $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, то это уравнение имеет единственное (в силу монотонности арксинуса) решение лишь при условии $|a| \le \frac{\pi}{2}$:

$$x = \sin a.$$

Аналогично, уравнение $\arccos x = a$ имеет единственное решение $x = \cos a$ при условии $0 \le a \le \pi$ и не имеет решений, если a не принадлежит указанному промежутку.

Уравнение $\operatorname{arctg} x = a$ имеет единственное решение $x = \operatorname{tg} a$ при условии $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$. Уравнение $\operatorname{arcctg} x = a$ имеет единственное решение $x = \operatorname{ctg} a$, если $0 < a < \pi$.

Пример 30. *Решить уравнение*

$$\sin(5\operatorname{arctg} 3x) = 1.$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Полученное уравнение имеет решение при условии

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \text{ или } -\frac{3}{2} < k < 1,$$

т. е. при $k = 0$ и $k = -1$. Следовательно, корнями уравнения являются $x_1 = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$, $x_2 = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$, $x_2 = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}$.

2^0. Решение с помощью подстановки позволяет в ряде случаев свести уравнение, содержащее неизвестное под знаком аркфункции, к смешанной системе с последующим решением простейших уравнений.

Например, уравнение

$$f(\arcsin x) = 0$$

подстановкой

$$t = \arcsin x \ \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$$

приводится к смешанной системе

$$f(t) = 0,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Зная решения t_i этой системы и решив простейшие уравнения

$$\arcsin x = t_i,$$

получим

$$x = \sin t_i.$$

Аналогично с помощью подстановок решаются уравнения

$$f(\arccos x) = 0,\ f(\operatorname{arctg} x) = 0,\ f(\operatorname{arcctg} x) = 0.$$

Пример 31. *Решить уравнение*

$$4\operatorname{arctg}^3 x - 8\operatorname{arctg}^2 x - 9\operatorname{arctg} x + 18 = 0.$$

Решение. Исходное уравнение подстановкой

$$\operatorname{arctg} x = t \ \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

сводится к алгебраической смешанной системе

$$4t^3 - 8t^2 - 9t + 18 = 0,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

или

$$\left(t^2 - \frac{9}{4}\right)(t-2) = 0,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Смешанная система имеет решения $t_1 = \frac{3}{2}$ и $t_2 = -\frac{3}{2}$. Следовательно, корнями исходного уравнения являются $x_1 = \operatorname{tg}\frac{3}{2}$ и $x_2 = -\operatorname{tg}\frac{3}{2}$.

Ответ. $x_1 = \operatorname{tg}\frac{3}{2},\ x_2 = -\operatorname{tg}\frac{3}{2}$.

3^0. Использование тождеств часто применяется при решении уравнений, содержащих неизвестное под знаками обратных тригонометрических функций.

Так, например, решение уравнений

$$F(\arcsin x, \arccos x) = 0, \ F(\operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x) = 0$$

в силу тождеств

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

сводится к рассмотренному выше случаю.

Замечание. Такие преобразования, как $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$ и т. д., расширяют множество допустимых значений неизвестного x. Поэтому, например, при переходе от уравнения

$$\arcsin f_1(x) = \arcsin f_2(x) \qquad (52)$$

к уравнению

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad (53)$$

возможно появление «решений», посторонних для уравнения (52), а именно тех, при которых не будут выполнены условия

$$|f_1(x)| \le 1 \ \text{и} \ |f_2(x)| \le 1.$$

Пример 32. *Решить уравнение*

$$\arcsin\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Решение. Применяя тождество, связывающее арксинус и арккосинус, получим

$$\arcsin\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

откуда

$$\arcsin\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \ \text{и} \ x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $x = 0$ и $x = -1$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Пример 33. *Решить систему*

$$\arcsin x \cdot \arcsin y = \frac{\pi^2}{12}, \ \arccos x \cdot \arccos y = \frac{\pi^2}{24}.$$

Решение. Воспользовавшись тождеством $\arccos a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a$, выразим левую часть второго уравнения через арксинусы:

$$\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin y\right)=\frac{\pi^2}{24}.$$

Выполнив подстановку $u=\arcsin x$, $v=\arcsin y$, после тождественных преобразований получим систему

$$uv=\frac{\pi^2}{12},\ uv-(u+v)\frac{\pi}{2}+\frac{5}{24}\pi^2=0.$$

Вычислив $u+v$ и uv, составим квадратное уравнение, корнями которого являются u и v:

$$12z^2-7\pi z+\pi^2=0.$$

Отсюда

$$u_1=\frac{\pi}{3},\ v_1=\frac{\pi}{4};\ u_2=\frac{\pi}{4},\ v_2=\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases}\arcsin x=\dfrac{\pi}{3},\\ \arcsin y=\dfrac{\pi}{4}\end{cases} \text{ и } \begin{cases}\arcsin x=\dfrac{\pi}{4},\\ \arcsin y=\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Данная система имеет два решения:

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ y_1=\frac{\sqrt{2}}{2};\ x_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4^0. Выполнение какой-либо тригонометрической операции над обеими частями уравнения, содержащего аркфункцию, является одним наиболее распространенных приемов решения рассматриваемых уравнений. Этот способ решения приводит (в общем случае) к уравнению, не эквивалентному данному.

Рассмотрим, например, уравнения

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{54}$$

$$\sin f_1(x)=\sin f_2(x). \tag{55}$$

Уравнение (55) есть следствие (54), но не наоборот. Действительно, уравнение (55) эквивалентно уравнению

$$f_1(x)=(-1)^k f_2(x)+k\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ldots) \tag{56}$$

с целочисленным параметром (см. п. 5), и всякое решение уравнения (56) при $k \neq 0$ будет посторонним для уравнения (54). Для устранения «посторонних решений» необходима их проверка подстановкой в уравнение (56).

Пример 34. *Решить уравнение*

$$\arccos|x| = \arcsin 2x.$$

Решение. Рассмотрим последовательность уравнений, каждое из которых есть следствие предыдущего:

$$\arccos|x| = \arcsin 2x, \tag{57}$$

$$\cos(\arccos|x|) = \cos(\arcsin 2x), \tag{58}$$

$$|x| = \sqrt{1-4x^2}, \tag{59}$$

$$x^2 = 1-4x^2, \tag{60}$$

$$5x^2 = 1, \tag{61}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{62}$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\cos(\arcsin 2x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin 2x)} = \sqrt{1-(2x)^2}, \quad -1 \le 2x \le 1.$$

Так как в последовательности уравнений (57)–(62) каждое уравнение есть следствие предыдущего, то среди найденных значений x содержатся все корни данного уравнения; однако среди найденных значений x одно, или даже два могут и не быть корнями другого уравнения; поэтому нужна проверка.

Так как

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}},$$

но

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} \neq \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

то $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ не является корнем. Данное уравнение имеет только один корень $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$; отметим, что «посторонний корень» появился в результате перехода от уравнений (57) к уравнению (58), но при возведении в квадрат обеих частей уравнения (59) «посторонних корней» не появилось.

Ответ. $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Пример 35. *Решить уравнение*

$$\arccos x = \operatorname{arctg} x.$$

Решение. Взяв косинус от обеих частей, получим

$$x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

откуда

$$x^2(x^2+1) = 1, \text{ или } x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \text{ и } x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

из которых данному уравнению удовлетворяет первый.

Ответ. $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

В заключение приведем пример решения системы тригонометрических уравнений, содержащих параметры.

Пример 36. *Решить систему*

$$\sin x \cdot \cos y = a, \ \cos x \cdot \cos y = b.$$

Решение. I случай. Предположим, что $b \neq 0$ и $a \neq 0$. Заметив, что значения x и y, при которых $\cos x = 0$ или $\cos y = 0$, не могут служить решениями системы, разделим почленно первое уравнение на второе:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}, \text{ откуда } x = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} + k\pi. \qquad (63)$$

Подставив выражение $\sin x$ в первое уравнение, получим

$$(-1)^k \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos y = 1 \text{ при } b > 0$$

или

$$(-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos y = 1 \text{ при } b < 0.$$

Получилось простейшее уравнение относительно y, которое имеет решения при $\sqrt{a^2+b^2} \leq 1$ (считаем, например, что $b > 0$):

$$y = \pm \arccos (-1)^k \sqrt{a^2+b^2} + n\pi. \qquad (64)$$

Формулы (63) и (64) дают общее решение системы. Если $\sqrt{a^2+b^2}>1$, то система не имеет решений.

Замечание. При указанном способе решения система

$$f=a,\ \varphi=b$$

заменяется системой

$$\frac{f}{\varphi}=\frac{a}{b},\ f=a.$$

При $a\neq 0$ и $b\neq 0$ эти системы эквивалентны, что нетрудно установить (в общем виде) непосредственно.

II случай. Одно из чисел a или b равно нулю. Пусть, например, $b=0$, но $a\neq 0$, тогда из второго уравнения найдем

$$\cos x=0 \text{ и } x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k=0, \pm 1, \ldots)$$

(если $\cos y=0$, то первое уравнение не удовлетворяется). Подставив значение $\sin x=(-1)^k$ в первое уравнение, получим простейшее уравнение $(-1)^k\cos y=a$, откуда при $|a|\leq 1$ находим

$$y=\pm\arccos\ (-1)^k a+2m\pi\ (m=0, \pm 1\ldots)$$

Если $|a|>1$, то система не имеет решений.

III случай. Пусть $a=b=0$. Тогда две серии решений системы определяются следующим образом:

1) $\cos y=0,\ y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x$ — произвольное число;

2) $\sin x=0, \cos y=0,\ x=k\pi,\ y=\frac{\pi}{2}+l\pi\ \ (k=0, \pm 1,\ldots; l=0, \pm 1,\ldots)$.

Но решения второй серии соделжатся в первой, а потому вторую серию можно не учитывать.

УПРАЖНЕНИЯ

Применяя метод подстановки, решить следующие уравнения:

1. $\operatorname{tg}^2 x-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} x+1=0.$

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{3}+k\pi.$

2. $3+2\sin^2(5x+6)=4\sqrt{2}\sin(5x+6)$.

Ответ. $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{20}-\dfrac{6}{5}+\dfrac{\pi k}{5}$.

3. $4\sin^3x+4\sin^2x-3\sin x=3$.

Ответ. $x_1=2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ x_2=k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.

4. $\operatorname{ctg}x+3\operatorname{tg}x-5\operatorname{cosec}x=0$.

Ответ. $x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.

5. $4\sin^2x+9\operatorname{tg}^2x=4$.

Ответ. $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$.

6. $2\sin^2x+\dfrac{1}{\cos^2x}=3$.

Ответ. $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$.

7. $3\operatorname{tg}^2x+7=\dfrac{2}{\sin^2x}$.

Ответ. $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$.

8. $3\operatorname{tg}^2x-4\cos^2x=8$.

Ответ. $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.

9. $\cos^2 3x-\operatorname{tg}^2 3x-\sin^2x+1=0$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{12}(2k+1)$.

10. $3-7\cos^2x\sin x-3\sin^3x=0$.

Ответ. $x_1=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ x_2=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.

11. $2+\cos^2x-\sin^2x=2\operatorname{tg}x$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$

12. $\operatorname{ctg}x-\frac{4\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}=1.$

Ответ. $x_1=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ x_2=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)+k\pi,\ x_3=-\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})+k\pi.$

13. $(\arccos x)^2-6\arccos x+8=0.$

Ответ. $x=\cos 2.$

14. $5(\sin x+\cos x)^2-12(\sin x+\cos x)+7=0.$

Ответ. $x_1=2k\pi,\ x_2=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ x_3=2k\pi+2\operatorname{arctg}\frac{1}{2},$

$x_4=2k\pi+2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$

15. $\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi-\pi x}{1+x}\right)-\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi-\pi x}{1+x}\right)=6\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi-\pi x}{1+x}\right).$

Ответ. $x_1=\frac{1-2k}{2k+3},\ x_2=\frac{7-6k}{6k+5},\ x_3=-\frac{(k-1)\pi+\operatorname{arcctg}2\sqrt{3}}{(k+1)\pi+\operatorname{arcctg}2\sqrt{3}}.$

16. $\cos x(2\cos^2x-1)=\frac{1}{4}.$

Ответ. $x_1=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ x_2=2k\pi\pm\frac{\pi}{5},\ x_3=2k\pi\pm\frac{3\pi}{5}.$

Указание. Сделать подстановку $t=2\cos x$ $(|t|\le 2)$.

Решить однородные и приводящиеся к однородным уравнения:

17. $3\cos^2x-\sin^2x-2\sin x\cos x=0.$

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x_2=-\operatorname{arctg}3+k\pi.$

18. $2\sin^3x-\sin^2x\cos x+2\sin x\cos^2x-\cos^3x=0.$

Ответ. $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi.$

19. $4\sin 2x\cos 2x-3\sin^2 2x=1.$

Ответ. $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{k\pi}{2}.$

20. $6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 1.$

Ответ. $x_1 = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $x_2 = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{2}{5}$.

21. $\sec x = 4\sin x + 6\cos x.$

Ответ. $x_1 = \operatorname{arctg} 5 + k\pi$, $x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4}$.

Применяя свойства симметрических многочленов, решить уравнения:

22. $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 1.$

Ответ. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

23. $1 + 2\sin x\cos x + 2(\sin x + \cos x) = 0.$

Ответ. $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$.

24. $2\sin x\cos x + \frac{3}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) + 2 = 0.$

Ответ. $x_1 = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$, $x_2 = k\pi - (-1)^k\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$.

25. $\sin x\cos x - 6(\sin x - \cos x) + 6 = 0.$

Ответ. $x_1 = \pi + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

26. $\sin^2 x + \sin^3 x = \cos^2 x + \cos^3 x.$

Ответ. $x_1 = (2k+1)\pi$, $x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $x_3 = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

27. $\sin^3 x + \cos^3 x = 3\sin x\cos x(\sin x + \cos x).$

Ответ. $x_1 = (4k-1)\frac{\pi}{4}$, $x_2 = [6k + (-1)^k]\frac{\pi}{12}$.

28. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x.$

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

29. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$

Ответ. $x = \frac{k\pi}{2}$.

30. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}$.

Ответ. $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}$.

31. $\sin^6 2x+\cos^6 2x=\frac{7}{16}$.

Ответ. $x=\frac{k\pi}{4}\pm\frac{\pi}{12}$.

32. $\cos^4 x+\sin^4 x-4\sin x\cos x+3\sin^2 x\cos^2 x=0$.

Ответ. $x=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin(4-2\sqrt{3})+\frac{k\pi}{2}$.

33. $\sin x\cos x-(2\sqrt{\sin x+\cos x}-3)(\sin x+\cos x)-2\sqrt{\sin x+\cos x}+1=0$.

Ответ. $x_1=2k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

34. $\sec x+\operatorname{cosec} x+\sec x\operatorname{cosec} x=5$.

Ответ. $x_1=\arcsin\frac{3}{5}+2k\pi,\ \ x_2=\arcsin\frac{4}{5}+2k\pi$.

35. $3\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x+3\operatorname{ctg}^2 x+2=0$.

Ответ. $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$.

36. $\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{ctg}^2 2x+2\operatorname{tg}2x+2\operatorname{ctg}2x=6$.

Ответ. $x_1=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}-2)+\frac{k\pi}{2},\ x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}-2)+\frac{k\pi}{2},$

$x_3=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$.

Используя способ разложения на множители, решить следующие уравнения:

37. $2\cos x-\operatorname{ctg} x=0$.

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$.

38. $\sin^2 x-3\cos^2 x+4\sin x\cos x=1$.

Ответ. $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ x_2=k\pi+\frac{\pi}{4}$.

39. $\sin x(1+\cos x)=1+\cos x+\cos^2 x.$

Ответ. $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}.$

40. $\sin x+\cos x=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{2\sin x\cos x-1}.$

Ответ. $x_1=k\pi-\frac{\pi}{4},\ x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x_3=(2m+1)\pi.$

41. $\operatorname{tg} x+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2.$

Ответ. $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}.$

42. $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=\cos^2 x-\sin^2 x.$

Ответ. $x=k\pi-\frac{\pi}{4}.$

43. $\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a}\ (ab\neq 0).$

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$

44. $2\sin^2 x-\sin x-\cos x-1=0.$

Ответ. $x_1=k\pi-\frac{\pi}{4},\ x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x_3=(2k+1)\pi.$

45. Найти все решения уравнения

$$2\sin x\cos x+\cos x+2\sin x=-1,$$

удовлетворяющие условию $0<x<5.$

Ответ. $x_1=\pi,\ x_2=\frac{7\pi}{6}.$

Решить уравнения:

46. $4\cos x-2\cos^3 x=5\sin x\cos x.$

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi.$

47. $6\arcsin(x^2-6x+8{,}5)=\pi.$

Ответ. $x_1=2,\ x_2=4.$

48. $4\,\mathrm{arctg}(x^2-3x+3)=\pi.$

Ответ. $x_1=1,\ x_2=2.$

49. $\sin(\pi\,\mathrm{arctg}\,x)=\cos(\pi\,\mathrm{arctg}\,x).$

Ответ. $x_1=-\mathrm{tg}\dfrac{3}{4},\ x_2=\mathrm{tg}\dfrac{1}{4},\ x_3=\mathrm{tg}\dfrac{5}{4}.$

50. $\sin 2x\cos^2 2x\sin^2 6x\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{ctg}\,3x=0.$

Ответ. $x_1=(2k+1)\dfrac{\pi}{4},\ x_2=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}.$

51. $4\sin^4 2x+16\cos^4 2x=5.$

Ответ. $x=\dfrac{k\pi}{2}\pm\dfrac{\pi}{8}.$

52. $\sin^5 x-\cos^5 x=\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}.$

Ответ. $x_1=\dfrac{\pi}{4}+k\pi.$

53. $\mathrm{tg}^2 x=\dfrac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}.$

Ответ. $x_1=2\pi m$, m — любое целое число, $x_2=\pm\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)$, n — любое целое положительное число или нуль.

Найти все решения систем уравнений:

54. $\begin{cases}\cos 2x+\sin y=2\cos^2 30^\circ,\\ 2\cos 2x-\sin y=\sin 540^\circ.\end{cases}$

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ y=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi.$

55. $\begin{cases}3\,\mathrm{tg}3y+2\cos x=2\,\mathrm{tg}\,60^\circ,\\ 2\,\mathrm{tg}3y-3\cos x=-\dfrac{5}{3}\cos 30^\circ.\end{cases}$

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ y=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{n\pi}{3}.$

56. Найти все пары значений (x, y), являющихся решением системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos y} = 2\sqrt[3]{34}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{\cos y} = \sqrt[3]{34^2} - 5 \end{cases}$$

и удовлетворяющих условиям $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Ответ. (x_1, y_1); (x_1, y_2); (x_2, y_3); (x_2, y_4), где

$$x_{1,2} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{34} \pm \sqrt{5}\right);$$

$$y_{1,2} = \pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{34} - \sqrt{5}}\right);$$

$$y_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{34} + \sqrt{5}}\right).$$

57. Найти все пары значений (x, y), являющихся решением системы

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\sin y} = 2\sqrt[3]{41}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{\sin y} = \sqrt[3]{41^2} - 6 \end{cases}$$

и удовлетворяющих условиям $0 < x < 2\pi$, $0 < y < \pi$.

Ответ. (x_1, y_1); (x_1, y_2); (x_2, y_1); (x_2, y_2), где

$$x_1 = \operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{41} - \sqrt{6}\right); \quad x_2 = \pi + x_1;$$

$$y_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{41} + \sqrt{6}}\right); \quad y_2 = \pi - y_1.$$

58. Найти все пары значений (x, y), являющихся решением системы

$$\begin{cases} \cos x + \dfrac{1}{\sin y} = 2\sqrt[3]{20}, \\ \cos x \cdot \dfrac{1}{\sin y} = \sqrt[3]{20^2} - 3 \end{cases}$$

и удовлетворяющих условиям $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \pi$.

Ответ. (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_1, y_2); (x_2, y_1), где

$$x_{1,2} = \pm\arccos\left(\sqrt[3]{20} - \sqrt{3}\right);$$

$$y_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{20} + 3}\right);\ y_2 = \pi - y_1.$$

59. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x \sin y + \sin x = 0, \\ \frac{1}{2} - 2\sin y \cos y \cos x = \sin x \cos y + \cos x. \end{cases}$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi m\right)$;

$\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2\pi m\right)$.

Используя метод, основанный на равенстве одноименных функций, решить уравнения:

60. $\sin(\pi\cos x) - \cos(\pi\sin x) = 0$.

Ответ. $x = 2k\pi \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} \pm \frac{\pi}{4}$.

61. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\pi\ \operatorname{tg} x) = 0$.

Ответ. $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - 2k \pm \sqrt{(1-2k)^2 - 16}}{4}\right) + \pi n$

$(n = 0, \pm 1, \ldots;\ k \geq 3,\ k \leq -2)$.

62. $\operatorname{tg}(\pi\cos x) = \operatorname{ctg}[\pi\ (2\cos^2 x - 1)]$.

Ответ. $x_1 = \pm\arccos\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}\right) + 2n\pi$,

$$x_2 = \pm\arccos\left(\frac{-1 + \sqrt{8k + 5}}{4}\right) + 2n\pi,\ k = 0, 1, 2;\ n = 0, \pm 1, \ldots$$

63. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$.

Ответ. $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$.

64. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg} x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg} x\right)$.

Ответ. $x_1=\operatorname{arctg}\left(\frac{-1+4k\pm\sqrt{(1-4k)^2+4}}{2}\right)+n\pi$ $(k=0,\ \pm1,\dots;\ n=0,$ $\pm1,\dots)$; $x_2=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+4m\pm\sqrt{(1+4m)^2-4}}{2}\right)+l\pi$ $(m=\pm1,\pm2,\dots;\ l=0,\ \pm1,\ \dots)$.

Решить уравнения:

65. $\left(\operatorname{tg} x-\frac{6}{\sqrt{\cos x}}+16\right)^2-2\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x-\frac{6}{\sqrt{\cos x}}+16\right)-1=0.$

Ответ. $x=2k\pi\pm\arccos\frac{1}{4}$.

66. $12\sin^2 x-4\cos x-16\sqrt{3}\sin x+17=0.$

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$

Указание. Выполнить замену неизвестных: $X=\cos x,\ Y=\sin x$.

Используя неравенства, решить следующие уравнения:

67. $\sin^{17}x+\cos^{17}x=1.$

Ответ. $x_1=2k\pi,\ x_2=2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

68. $\sin x\sin 3x\sin 7x=1.$

Ответ. $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

69. $4\sin^2 3x\sin^2 x=5+\sin 3x.$

Ответ. $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

70. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = 2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} y + \dfrac{1}{\operatorname{tg} y} = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Ответ. $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ y = -\frac{3}{4}\pi + 2n\pi.$

71. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi.$

Ответ. $(0,\ 0);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right);\ (0,\ \pi);\ (\pi,\ 0);\ (\pi,\ \pi).$

Решить системы уравнений:

72. $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = m, \\ x + y = n\pi \ \ (n \text{ — целое число}). \end{cases}$

Ответ. $x = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{m}{2},\ \ y = (n-k)\pi - \operatorname{arctg}\frac{m}{2}.$

73. $\begin{cases} \sin x = 2\sin y \cos y, \\ \cos x = \sin y, \\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi. \end{cases}$

Ответ. $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{6}\right).$

74. $\begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{2}\sin y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2}\cos y. \end{cases}$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{4} + 2l\pi\right);\ \left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi,\ \frac{\pi}{4} + (2l+1)\pi\right);$

$\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{4} + 2l\pi\right);\ \left(\frac{3\pi}{4} + (2k+1)\pi,\ \frac{3\pi}{4} + (2l+1)\pi\right);$

($k,\ l$ — целые числа).

75. $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \sin x = \cos^2 y - \sin^2 y. \end{cases}$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + 2m\pi,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + n\pi\right)\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \right.$

$\left. + 2m\pi, -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + n\pi\right)$ где m и n — любые целые числа.

76. Определить все действительные значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x - (a+3) = 0$$

имеет решения, и найти все эти решения

Ответ. $-3 \le a \le -2$; $x = \pm\arccos\sqrt{a+3} + k\pi$.

77. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = a$$

имеет решения? Найти эти решения.

Ответ. Если $-\frac{\sqrt{10}+1}{2} \le a \le \frac{\sqrt{10}-1}{2}$, то $x_{1,2} = \operatorname{arctg} t_{1,2} + k\pi$, где $t_{1,2}$ — корни квадратного уравнения $(1-a)t^2 - t - (a+2) = 0$.

Если $a = 1$, то $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = -\operatorname{arctg}3 + k\pi$.

78. Определить, в каких пределах можно изменять параметр λ, чтобы уравнение $\sec x + \operatorname{cosec} x = \lambda$ имело корень x, удовлетворяющий неравенству $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\lambda \ge 2\sqrt{2}$.

79. Решить уравнение $\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(1+a) = 0$.

Ответ. Если $-\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}$, то $x_1 = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(1 - \sqrt{2a+3}) + \frac{1}{2}k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Если $a < -\frac{3}{2}$, или $a > \frac{1}{2}$, то уравнение корней не имеет.

80. Определить все значения a, при которых уравнение

$$\sin^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0$$

имеет решения. Найти эти решения.

Ответ. Если $|a| \le \sqrt{2}$, то $x = k\pi \pm \arcsin\sqrt{\sqrt{3-a^2} - 1}$ $(k = 0, \pm 1, ...)$.

Решить уравнения, содержащие параметры:

81. $\operatorname{tg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = a.$

Ответ. Если $-\operatorname{tg} 1 \le a < \operatorname{tg} 1$, то $x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{arctg} a}{1-\operatorname{arctg} a}}.$

Если $|a| > \operatorname{tg} 1$ или $a = \operatorname{tg} 1$, то уравнение решений не имеет.

82. $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x = 2.$

Ответ. Если $a \ne 0$, $b \ne 0$ и $ab \le 1$, то $x = \operatorname{arctg}\dfrac{1 \pm \sqrt{1-ab}}{a} + k\pi.$

Если $a \ne 0$, $b = 0$, то $x = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{a} + k\pi.$

Если $a = 0$, $b \ne 0$, то $x = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{b} + k\pi.$

Если $a = b = 0$ или $ab > 1$, то уравнение не имеет решений.

83. Найти все положительные числа a, для которых все различные неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\cos[(8a-3)x] = \cos[(14a+5)x]$$

и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

Ответ. $\dfrac{1}{30}, \dfrac{2}{19}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{11}{2}.$

84. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\sin 3x + \frac{a}{2} = 0$$

имеет ровно три корня, расположенных на отрезке $\dfrac{2}{3}\pi \le x \le \pi$?

Ответ. $a = 1$.

85. При каких значениях a уравнение

$$\cos^2 4x + (a-3)\cos 4x = 0$$

имеет ровно четыре корня, расположенных на отрезке $\frac{\pi}{8} \le x \le \frac{5\pi}{8}$?

Ответ. $a = 2$, $a = 4$.

86. Найти все числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$2\sin^7 x = (1+\sin \pi a)\sin x + a\sin^3 x$$

является корнем уравнения

$$(a-1)(1+\cos^2 x) + 2\sin^6 x = 2\sin^2 x + 2(a-1)^3$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ. $a = 1$, $a = 2$.

87. Найти все числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$(2a+1)\cos^3 x + (16a^3 - 4a + 1)\cos x - 2\cos^7 x = 0$$

является корнем уравнения

$$\cos^6 x = (1+a)\cos^2 x + 8a^3 - 2a$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ. $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$.

88. Исключить x и y (т. е. найти соотношение между a и b) из системы уравнений

$$\begin{cases} a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1, \\ a\cos^2 y + b\sin^2 y = 1, \\ a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y, \end{cases}$$

предполагая, что система разрешима и $a \ne b$.

Ответ. $a + b = 2ab$.

89. Для каждого действительного a решить уравнение

$$\left|\cos^2 x - \sin^2 x\right| = \left|\sin^2 x - a\right| \quad (0 \le x \le 2\pi).$$

Ответ. Если $0 \le a \le 1$, то $x_1 = \arcsin\sqrt{\frac{1+a}{3}}$; $x_2 = \pi - x_1$;

$$x_3 = \pi + x_1; \qquad x_4 = 2\pi - x_1;$$
$$x_5 = \arcsin\sqrt{1-a}; \qquad x_6 = \pi - x_5;$$
$$x_7 = \pi + x_5; \qquad x_8 = 2\pi - x_5$$

(в частности, при $a = \frac{1}{2}$: $x_5 = x_1$, $x_6 = x_2$, $x_7 = x_3$, $x_8 = x_4$). Если $-1 \le a < 0$ и $1 < a \le 2$, то выписанные выше решения x_1, x_2, x_3, x_4 (в частности, при $a = -1$: $x_3 = x_2$). При остальных a решений нет.

90. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1, \\ \cos x \sin 2y = a \end{cases}$$

имеет решения, и решить эту систему.

Ответ. Система разрешима лишь при $a = 0$ и имеет две следующие серии решений:

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi,\ n\pi\right); \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + l\pi\right).$$

91. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos(x - 2y) = a\cos^3 y, \\ \sin(x - 2y) = a\cos^3 y. \end{cases}$$

При каких значениях a система разрешима?

Ответ. Если $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $x = \pm 2\arccos\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}} + (4m + k)\pi + \frac{\pi}{4}$; $y = \pm\arccos\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}} + 2m\pi$, где k — четное, и $x = \pm\arccos\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}}\right) + (4m + k)\pi + \frac{\pi}{4}$, $y = \pm\arccos\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}}\right) + 2m\pi$, где k — нечетное (k, m — целые числа).

92. Решить уравнение

$$1 + p\sin x = p^2 - \sin^2 x.$$

Ответ. Если $-2 \le p < -1$, то $x = (-1)^n \arcsin\frac{-p - \sqrt{5p^2 - 4}}{2} + n\pi$.

Если $-1 \le p \le -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}} \le p \le 1$, то $x = (-1)^k \arcsin\frac{-p \pm \sqrt{5p^2 - 4}}{2} + k\pi$.

Если $1 < p \le 2$, то $x = (-1)^m \arcsin \frac{-p+\sqrt{5p^2-4}}{2} + m\pi$, где n, k, m — любые целые числа.

93. При каких a уравнение

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

имеет единственное решение?

Ответ. Если a — любое иррациональное число.

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим некоторые простые типы неравенств, содержащих неизвестную величину только под знаком тригонометрической функции. Такие неравенства называют ***тригонометрическими***. Методы их решения аналогичны методам решения тригонометрических уравнений (см. § 2).

При решении неравенства $f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$), где $f(x)$ — тригонометрическая функция: 1) находят период функции $f(x)$; 2) решают неравенство на любом отрезке, длина которого равна периоду этой функции, для чего можно применить, например, метод интервалов; 3) записывают решение исходного неравенства, которое состоит из всех найденных значений x, а также всех x, отличающихся от найденных на любое целое число периодов.

1. Простейшие тригонометрические неравенства

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$$\sin x > a,\ \cos x > a,\ \operatorname{tg} x > a,\ \operatorname{ctg} x > a$$

или

$$\sin x < a,\ \cos x < a,\ \operatorname{tg} x < a,\ \operatorname{ctg} x < a,$$

где a — данное число.

Решение этих неравенств можно провести по вышеизложенной схеме.

Рассмотрим, например, решение простейшего тригонометрического неравенства

$$\sin x > a, \text{ где } -1 \le a < 1.$$

1. Период функции $f(x) = \sin x - a$ равен 2π.

2. Применяя метод интервалов, найдем решение неравенства $\sin x - a > 0$, например, на отрезке $-\frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}$, длина которого 2π. На

этом отрезке функция $f(x)-a$ обращается в нуль при $x_1=\arcsin a$ и $x_2=$ $=\pi-\arcsin a$, а в интервале $x_1<x<x_2$ принимает положительные значения. Следовательно, решением неравенства $\sin x>a$ на отрезке $-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{3\pi}{2}$ является множество значений x, принадлежащих этому интервалу, т. е.

$$\arcsin a<x<\pi-\arcsin a.$$

3. Учитывая период функции $f(x)$, получаем, что решением рассматриваемого неравенства служат все значения x, удовлетворяющие условию

$$2k\pi+\arcsin a<x<(2k+1)\pi-\arcsin a,$$

где k — любое целое число.

Геометрически решение неравенства $\sin x>a$ при $-1\le a<1$ можно трактовать как отыскание абсцисс x, для которых ординаты графика функции $y_1=\sin x$ лежат выше ординат графика функции $y_2=a$.

Решение остальных простейших неравенств проводится аналогично.

Пример 1. *Решить неравенство*

$$20\sin^2 x+9\cos x<21.$$

Решение. 1. Функция $f(x)=20\sin^2 x+9\cos x-21$ периодическая с периодом 2π.

2. Решим неравенство $f(x)<0$ на отрезке $0\le x<2\pi$, для чего применим метод интервалов.

а) Область определения неравенства — множество значений $0\le x<2\pi$.

б) Решаем уравнение

$$20\sin^2 x+9\cos x-21=0, \qquad (1)$$

или

$$20(1-\cos^2 x)+9\cos x-21=0,$$

или

$$20\cos^2 x-9\cos x+1=0.$$

Находим

$$\cos x=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{40}=\frac{9\pm 1}{40}.$$

Отсюда

$$\cos x=\frac{1}{5} \text{ или } \cos x=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, на отрезке $0 \le x < 2\pi$ уравнение (1) имеет следующие корни, расположенные в порядке их возрастания:

$$x_1 = \arccos\frac{1}{4},\ x_2 = \arccos\frac{1}{5},\ x_3 = 2\pi - \arccos\frac{1}{5},\ x_4 = 2\pi - \arccos\frac{1}{4}.$$

Разобьем отрезок $0 \le x < 2\pi$ на следующие промежутки: $[0, x_1)$, (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), $(x_4, 2\pi)$.

в) Чтобы решить неравенство

$$f(x) = -20\cos^2 x + 9\cos x - 1 < 0, \tag{2}$$

исследуем знак функции $f(x)$ на каждом из этих промежутков. Для этого представим ее в виде

$$f(x) = -(4\cos x - 1)(5\cos x - 1)$$

и исследуем знак функции в зависимости от знака каждого из множителей.

Если $0 \le x < x_1$, то

$$4\cos x - 1 > 0,\ 5\cos x - 1 > 0,$$

следовательно, при всех x из полуинтервала $(0, x_1)$ функция $f(x)$ отрицательна, т. е. неравенство (2) выполнено.

Если $x_1 \le x \le x_2$, то

$$4\cos x - 1 \le 0,\ 5\cos x - 1 \ge 0$$

и, значит, для всех x из сегмента $[x_1, x_2]$ функция $f(x) \ge 0$, т. е. неравенство (2) не будет выполнено.

Если $x_2 < x < x_3$, то.

$$4\cos x - 1 < 0,\ 5\cos x - 1 < 0.$$

Функция $f(x) < 0$, следовательно, неравенство (2) выполнено для всех x из интервала (x_2, x_3).

Если $x_3 \le x \le x_4$, то

$$4\cos x - 1 \le 0,\ 5\cos x - 1 \ge 0,$$

значит, функция $f(x) \ge 0$, т. е. для всех x из сегмента $[x_3, x_4]$ неравенство (2) не будет выполнено.

Если $x_4 < x < 2\pi$, то

$$4\cos x - 1 > 0,\ 5\cos x - 1 > 0,$$

поэтому функция $f(x)$ отрицательна, т. е. для всех x из интервала $(x_4, 2\pi)$ неравенство (2) будет выполнено.

Следует заметить, что результат можно получить быстрее, воспользовавшись, например, тем свойством элементарной функции, что *если она оп-*

ределена на некотором сегменте (или интервале) *и не имеет на этом сегменте* (или интервале) *корней, то она сохраняет знак на этом сегменте* (или интервале). (Доказательство этого утверждения дается в курсе математического анализа.)

Функция

$$f(x) = 20\sin^2 x + 9\cos x - 21 = -20\cos^2 x + 9\cos x - 1$$

при переходе от одного промежутка к следующему менет знак на противоположный. Так как в первом полуинтервале $0 \le x < x_1$ выполняется неравенство $f(x) < 0$ (например, $f(0) = -12 < 0$), то она имеет тот же знак в интервалах $x_2 < x < x_3$ и $x_4 < x < 2\pi$. Значения x, принадлежащие этим трем промежуткам, являются решениями неравенства (2) на отрезке $0 \le x < \; < 2\pi$.

3. Запишем все решения данного неравенства:

$$2k\pi \le x < 2k\pi + \arccos\frac{1}{4},\ 2k\pi + \arccos\frac{1}{5} < x < 2(k+1)\pi - \arccos\frac{1}{5},$$

$$2(k+1)\pi - \arccos\frac{1}{4} < x \le 2(k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

П р и м е р 2. *Решить неравенство*

$$|\operatorname{tg} x| < \frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е. 1. Период функции $y = |\operatorname{tg} x|$ равен π.

2. Решением неравенства на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ служит множество значений x, принадлежащих интервалу

$$-x_0 < x < x_0 \quad \left(\text{где } x_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right);$$

для этих значений ординаты графика функции $y = |\operatorname{tg} x|$ лежат ниже ординат графика функции $y_2 = \frac{1}{2}$ (рис. 155).

3. Ответом является множество значений x, определяемое неравенствами

$$-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi < x < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

П р и м е р 3. *При каких значениях a квадратное уравнение*

$$8x^2 + 8x\cos a + 1 = 0$$

не имеет действительных корней?

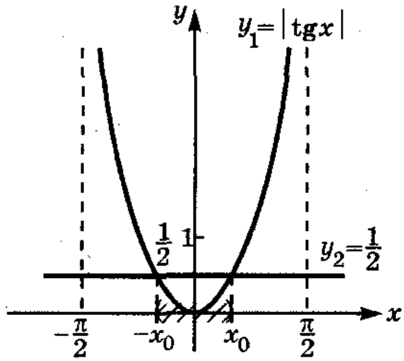


Рис. 155

Решение. Найдем дискриминант данного квадратного уравнения:

$$D = (8\cos a)^2 - 4\cdot 8 = 64\cos^2 a - 32 = 32(2\cos^2 a - 1).$$

Если он отрицателен, т. е. если

$$2\cos^2 a - 1 < 0,$$

то рассматриваемое квадратное уравнение не имеет действительных корней. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $\cos 2a < 0$, решив которое получим ответ.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + k\pi < a < \frac{3\pi}{4} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 4. *Решить неравенство*

$$\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2} \geq 1.$$

Решение. Подстановкой

$$\frac{1}{1+x^2} = \alpha \ (0 < \alpha \leq 1)$$

исходное неравенство сводится к системе

$$\operatorname{tg}\alpha \geq 1,\ 0 < \alpha \leq 1,$$

решением которой является множество значений α из промежутка $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq 1$. Следовательно,

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1,$$

откуда $0 \le x^2 \le \frac{4}{\pi} - 1$ или $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \le x \le \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$.

Ответ. $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \le x \le \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$.

Пример 5. *Найти все x из отрезка* $0 \le x \le \pi$, *удовлетворяющие неравенству*

$$\sin 2x + \sin x - \sqrt{2}\cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то данное неравенство эквивалентно каждому из следующих:

$$\sqrt{2}\sin x \cdot 2\cos x + \sqrt{2}\sin x - 2\cos x - 1 < 0,$$

$$\sqrt{2}\sin x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) < 0,$$

$$(\sqrt{2}\sin x - 1)(2\cos x + 1) < 0.$$

Последнее неравенство на множестве $0 \le x \le \pi$ имеет место, когда либо

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x - 1 > 0, \\ 2\cos x + 1 < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x < -\frac{1}{2}, \text{ откуда } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}, \end{cases}$$

либо

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x - 1 < 0, \\ 2\cos x + 1 > 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x > -\frac{1}{2}, \text{ откуда } 0 \le x < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Ответ. $0 \le x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}$.

Замечание. При решении мы воспользовались следующим утверждением: неравенство

$$A(x)\cdot B(x)<0$$

эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{(I)}\ \begin{cases}A(x)>0,\\ B(x)<0;\end{cases}\qquad \text{(II)}\ \begin{cases}A(x)<0,\\ B(x)>0.\end{cases}$$

Доказательство этого утверждения основано на том факте, что произведение чисел, имеющих разные знаки, отрицательно.

2. Метод подстановки

Метод подстановки часто применяется при решении тригонометрических неравенств.

Так, например, неравенство

$$f(\sin x)>0$$

подстановкой

$$t=\sin x\ \ (|t|\le 1)$$

приводится к системе неравенств

$$f(t)>0,\ -1\le t\le 1.$$

Решив эту систему относительно вспомогательного неизвестного t, сведем задачу к решению простейших тригонометрических неравенств.

Аналогично решаются неравенства

$$f(\cos x)>0,\ f(\operatorname{tg} x)>0,\ f(\operatorname{ctg} x)>0.$$

Пример 6. *Решить неравенство*

$$2\cos^2 x-(2+\sqrt{2})\cos x+\sqrt{2}>0.$$

Решение. Подстановкой $t=\cos x\ (|t|\le 1)$ данное тригонометрическое неравенство приводится к системе алгебраических неравенств

$$2t^2-(2+\sqrt{2})t+\sqrt{2}>0,\ -1\le t\le 1.$$

Ее решением является множество $-1\le t\le \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно,

$$-1\le \cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{3}$$

т. е.

$$\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Неравенство (3) выполняется для значений x, удовлетворяющих условию

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

На рис. 156 дана геометрическая интерпретация решения неравенства (3) (множество его решений заштриховано).

Ответ. $2k\pi + \dfrac{\pi}{4} < x < 2(k+1)\pi - \dfrac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\left|4\cos^2 x - 1\right| + \left|4\cos^2 x - 3\right| = 2.$$

Решение. С помощью замены неизвестного

$$t = 4\cos^2 x \ (0 \le t \le 4) \tag{4}$$

исходное уравнение приводится к смешанной системе

$$\begin{cases} |t-1| + |t-3| = 2, & (5) \\ 0 \le t \le 4. & (6) \end{cases}$$

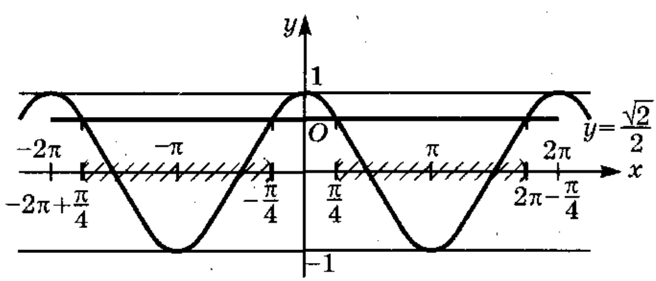


Рис. 156

Будем искать решения этой смешанной системы в каждой из следующих трех частичных областей:

$$0 \le t < 1,\ 1 \le t \le 3,\ 3 < t \le 4.$$

Если $0 \le t < 1$, то уравнение (5) примет вид

$$-t + 1 - t + 3 = 2,$$

откуда

$$t = 1,$$

и, значит, оно не имеет решений таких, что $0 \le t < 1$.

Если $1 \le t \le 3$, то уравнение (5) примет вид

$$t-1-t+3=2,$$

т. е. оно удовлетворяется тождественно.

Если, наконец, $3 < t \le 4$, то уравнение (5) примет вид

$$t-1+t-3=2,$$

или

$$t=3$$

и, значит, оно не имеет решений таких, что $3 < t \le 4$.

Итак, решением смешанной системы (5), (6) является множество

$$1 \le t \le 3.$$

Воспользовавшись подстановкой (4), получим систему неравенств

$$1 \le 4\cos^2 x \le 3,$$

эквивалентную исходному уравнению.

Ответ. $\frac{\pi}{6}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{3}+k\pi,\ -\frac{\pi}{3}+k\pi \le x \le -\frac{\pi}{6}+k\pi,$

или

$$\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\ (k=0, \pm 1, \ldots).$$

Замечание. Используя геометрический смысл абсолютной величины, решение уравнения (5) можно интерпретировать как отыскание множества точек t числовой оси Ot, для которых сумма расстояний от точек $t = 1$ и $t = 3$ равна 2. Очевидно, указанным свойством обладает множество всех точек отрезка $1 \le t \le 3$ (рекомендуем дать геометрическую иллюстрацию), причем это множество включено в множество (6) и, следовательно, является решением смешанной системы (5), (6).

Пример 8. *Решить неравенство*

$$\sqrt{5-2\sin x} \ge 6\sin x - 1.$$

Решение. Рассмотрим неравенство в области его определения. С помощью подстановки

$$t = 2\sin x \quad (|t| \le 2,\ \text{так как}\ |\sin x| \le 1) \tag{7}$$

оно приводится к системе алгебраических неравенств

$$\sqrt{5-t} \ge 3t-1,\ |t| \le 2. \tag{8}$$

Полученная система эквивалентна совокупности двух систем рациональных неравенств:

$$\text{(I)}\ \begin{cases}(\sqrt{5-t})^2 \ge (3t-1)^2,\\ 3t-1\ge 0,\\ |t|\le 2;\end{cases} \qquad \text{(II)}\ \begin{cases}5-t\ge 0,\\ 3t-1<0,\\ |t|\le 2.\end{cases}$$

Первый случай соответствует неотрицательной правой части первого из неравенств (8), когда возведение обеих частей этого неравенства в квадрат не нарушает эквивалентности неравенства.

Второй случай соответствует отрицательной правой части первого из неравенств (8), когда его решениями будут все значения t, входящие в область определения этого неравенства, т. е. удовлетворяющие условию $5-t\ge 0$.

Для решения системы неравенств (I) перейдем к следующим системам, ей эквивалентным:

$$\begin{cases}9t^2-5t-4\le 0,\\ 3t-1\ge 0,\\ -2\le t\le 2,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}-\dfrac{4}{9}\le t\le 1,\\ t\ge \dfrac{1}{3},\\ -2\le t\le 2.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что решение системы (I) есть множество

$$\frac{1}{3}\le t\le 1.$$

Решение системы неравенств (II) является множество значений t из промежутка $-2\le t\le \dfrac{1}{3}$.

Таким образом, система (8) имеет решение $-2\le t\le 1$.

Воспользовавшись подстановкой (7), имеем

$$-2\le 2\sin x\le 1,$$

или

$$-1\le \sin x\le \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$2k\pi+\frac{5\pi}{6}\le x\le \frac{\pi}{6}+2(k+1)\pi \ (k=0, \pm 1,\ldots).$$

На рис. 157 множество решений неравенств (9) заштриховано.

Ответ. $2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\le x\le \dfrac{\pi}{6}+2(k+1)\pi \ (k=0, \pm 1,\ldots)$.

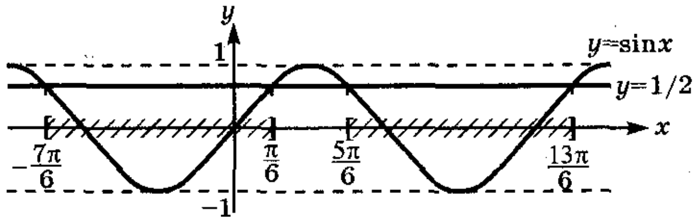


Рис. 157

Замечание. Ответ можно записать также следующим образом:

$$2k\pi - \frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Пример 9. *Решить неравенство*

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > 2\sin x.$$

Решение. С помощью подстановки

$$t = \sin x \ \ (|t| \le 1) \qquad (10)$$

данное неравенство сводится к системе

$$\sqrt{t + \frac{1}{2}} > 2t, \ -1 \le t \le 1, \qquad (11)$$

которая эквивалентна совокупности двух следующих систем неравенств:

$$\text{(I)} \begin{cases} 2t < 0, \\ t + \frac{1}{2} \ge 0, \\ -1 \le t \le 1; \end{cases} \qquad \text{(III)} \begin{cases} 2t \ge 0, \\ t + \frac{1}{2} > (2t)^2, \\ -1 \le t \le 1. \end{cases}$$

Решением системы (I) является множество

$$-\frac{1}{2} \le t < 0,$$

а решением системы (II) — множество

$$0 \le t < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, решением системы неравенств (11) являются все значения t из промежутка

$$-\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}.$$

Отсюда, воспользовавшись подстановкой (10), имеем систему неравенств

$$-\frac{1}{2} \le \sin x < \frac{1}{2},$$

эквивалентную исходному неравенству. Решив ее, получим ответ.

Ответ. $2k\pi - \frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

$$(2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} < x \le (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Пример 10. *Решить неравенство*

$$\cos^2 x (\operatorname{tg} x + 1) > 1.$$

Решение. Область определения неравенства находится из условия $\cos x \ne 0$. В это области исходное неравенство с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$ сводится к квадратному алгебраическому неравенству

$$t > t^2.$$

Его решением является множество

$$0 < t < 1.$$

Следовательно, исходное неравенство эквивалентно системе

$$0 < \operatorname{tg} x < 1,$$

откуда

$$k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. $k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$

3. Метод рационализации

Если левая часть неравенства представляет собой рациональное выражение относительно нескольких тригонометрических функций

$$R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) > 0,$$

то, применяя одну из рационализирующих подстановок (см. § 2, п. 3), получаем неравенство, рациональное относительно одной функции.

Пример 11. *Решить неравенство*

$$\frac{2 + \sqrt{2} - 4\cos^2 x}{2\sin^2 x + \sin x - 1} \ge 2.$$

Решение. Подстановкой

$$t = \sin x \left(-1 < t \le 1, \ t \ne \frac{1}{2} \right) \tag{12}$$

исходное неравенство сводится к смешанной системе

$$\frac{2+\sqrt{2}-4(1-t^2)}{2t^2+t-1} \geq 2, \; -1 < t \leq 1, \; t \neq \frac{1}{2},$$

или

$$\frac{\sqrt{2}-2t}{2t^2+t-1} \geq 0, \; -1 < t \leq 1, \; t \neq \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Для решения полученного дробно-рационального неравенства (13) применим метод, аналогичный методу интервалов. А именно, найдем корень числителя $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и корни знаменателя (полюсы дробно-рациональной функции в левой части неравенства):

$$t_1 = -1, \; t_2 = \frac{1}{2}.$$

Этими точками область определения неравенства, т. е. множество $-1 < t \leq 1, \; t \neq \dfrac{1}{2}$, разобьем на три промежутка:

$$-1 < t < \frac{1}{2}, \; \frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}, \; \frac{\sqrt{2}}{2} < t \leq 1.$$

Исследуем знак дробно-рациональной функции на каждом из полученных промежутков и в результате получим, что промежуток

$$\frac{1}{2} < t \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где эта функция принимает неотрицательные значения, является решением дробно-рационального неравенства (13).

Отсюда, воспользовавшись подстановкой (12), имеем

$$\frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{14}$$

Решением системы неравенств (14), а следовательно, и исходного неравенства является множество значений x, удовлетворяющих неравенствам

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \; 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \leq x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\; (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Геометрическая иллюстрация решения системы неравенств (14) дана на рис. 158.

Ответ. $2k\pi + \dfrac{\pi}{6} < x \leq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \; 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4} \leq x < \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\; (k = 0, \pm 1, \ldots).$

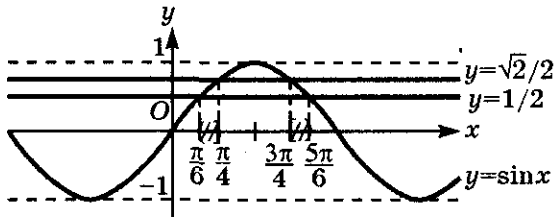


Рис. 158

Пример 12. *Решить неравенство*

$$(1+\sqrt{3})\sin x\cos x+(1-\sqrt{3})\cos^2 x\geq 1.$$

Решение. Переписав неравенство в виде

$$(1+\sqrt{3})\sin x\cos x+(1-\sqrt{3})\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x\geq 0,$$

заметим, что $\cos^2 x>0$, причем левая часть неравенства представляет собой функцию, однородную относительно $\sin x$ и $\cos x$. С помощью рационализирующей подстановки $t=\operatorname{tg} x$ данное неравенство приводится к алгебраическому:

$$t^2-(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}\leq 0.$$

Последнее имеет решение $1\leq t\leq\sqrt{3}$. Следовательно,

$$1\leq\operatorname{tg} x\leq\sqrt{3}.$$

Решив систему простейших тригонометрических неравенств, получим ответ.

Ответ. $k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}+k\pi\ \ (k=0,\pm1,\ldots).$

Пример 13. *Решить неравенство*

$$2(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin x\cos x>\operatorname{tg} x.$$

Решение. Применим рационализирующую подстановку $t=\operatorname{tg} x$. Тогда

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ \ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \sin x\cos x=\operatorname{tg} x\cos^2 x=\frac{t}{1+t^2}.$$

Следовательно, имеем неравенство

$$2\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}>t\,,$$

или ему эквивалентное

$$t^3+2t^2-t-2<0.$$

Отсюда $-1<t<1$ и $t<-2$, т. е.

$$-1<\operatorname{tg} x<1 \text{ и } \operatorname{tg} x<-2.$$

Решив простейшие тригонометрические неравенства, получаем ответ.

Ответ. $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi-\operatorname{arctg} 2\ (k=0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 14. *Решить неравенство*

$$\operatorname{tg}^2 x \leq \left|1-2\operatorname{ctg}^2 x\right|.$$

Решение. Подстановкой $t=\operatorname{tg}^2 x\ (t>0)$ исходное тригонометрическое неравенство сводится к алгебраической системе неравенств

$$0<t \leq\left|1-\frac{2}{t}\right|.$$

Для ее решения достаточно рассмотреть следующие две системы неравенств:

$$\text{(I)}\ \ 0<t \leq 1-\frac{2}{t} \quad \text{и} \quad \text{(II)}\ \begin{cases} 0<t \leq \dfrac{2}{t}-1, \\ 1-\dfrac{2}{t}<0. \end{cases}$$

Система (I) не имеет решений. Решениями (II) являются значения t из промежутка $0<t \leq 1$. На рис. 159 приведена графическая иллюстрация решения рассматриваемой системы алгебраических неравенств.

Таким образом, для определения x имеем систему простейших тригонометрических неравенств

$$0<\operatorname{tg}^2 x \leq 1,$$

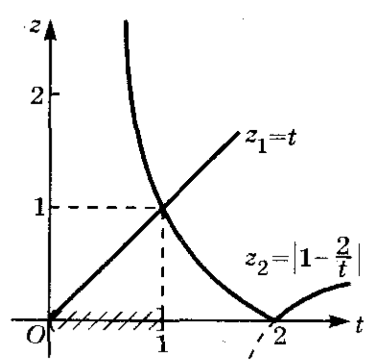


Рис. 159

решив которую получаем ответ.

Ответ. $k\pi-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x\ne k\pi\ (k=0,\pm1,\ldots)$.

4. Решение неравенств вида $f(\cos x,\ \sin x)>0$ с использованием координатной интерпретации

Неравенство $f(\cos x, \sin x)>0$ подстановкой $X=\cos x$, $Y=\sin x$ приводится к смешанной системе (в области действительных чисел)

$$f(X, Y)>0,\ X^2+Y^2=1.$$

Геометрически решение такой системы, а следовательно, и тригонометрического неравенства можно трактовать как отыскание дуг единичной окружности, принадлежащих области $f(X, Y)>0$ (рис. 160).

Применение упомянутой выше координатной интерпретации во многих случаях оказывается весьма эффективным.

Пример 15. *Решить неравенство*

$$\cos x-\sin x-\cos^2 x+\sin^2 x>0.$$

Решение. Перепишем неравенство следующим образом:

$$(\cos x-\sin x)[1-(\cos x+\sin x)]>0.$$

Полученное неравенство подстановкой

$$X=\cos x,\ Y=\sin x \qquad (15)$$

приводится к смешанной алгебраической системе

$$(X-Y)[1-(X+Y)]>0,\ X^2+Y^2=1. \qquad (16)$$

Решив эту систему и воспользовавшись подстановкой (15), находим решение исходного тригонометрического неравенства.

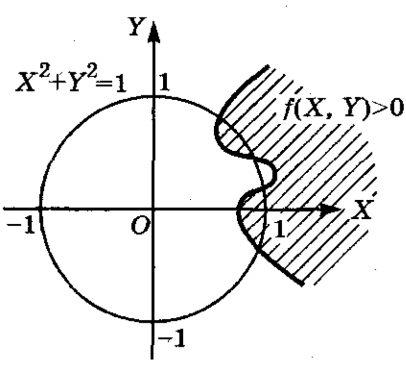


Рис. 160

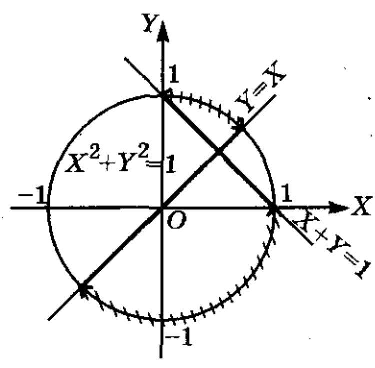


Рис. 161

На рис. 161 дана координатная интерпретация решения смешанной системы (16), а следовательно, и решения рассматриваемого тригонометрического неравенства.

Ответ. $2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}<x<2\pi+2k\pi\ (k=0,\pm1,...)$.

Пример 16. *Решить неравенство*

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1.$$

Решение. Подстановкой $X=\cos x$, $Y=\sin x$ исходное неравенство приводится к смешанной системе

$$\sqrt{Y}+\sqrt{X}>1,\ X^2+Y^2=1.$$

Эта система, как нетрудно показать, эквивалентна следующей:

$$1<X+Y\le\sqrt{2},\ X^2+Y^2=1,$$

решение которой не вызывает затруднений (рис. 162).

Укажем еще один способ решения данного тригонометрического неравенства. Область определения неравенства — это множество

$$2k\pi\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k=0,\ \pm1,...).$$

Граничные точки этой области не удовлетворяют неравенству. Если же

$$2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k=0,\ \pm1,...).$$

то

$$\sqrt{\sin x}>\sin^2 x,\ \sqrt{\cos x}>\cos^2 x.$$

Складывая последние неравенства, получим

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Поэтому решением рассматриваемого неравенства является множество значений x, удовлетворяющих условию $2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

Ответ. $2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k=0,\ \pm1,...)$.

Пример 17. *Решить неравенство*

$$\sqrt{2-\sqrt{3}\cos x+\sin x}>1.$$

Решение. Всюду в области определения неравенства обе части его положительны. Следовательно, возводя их в квадрат, получим неравенство

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x<1,$$

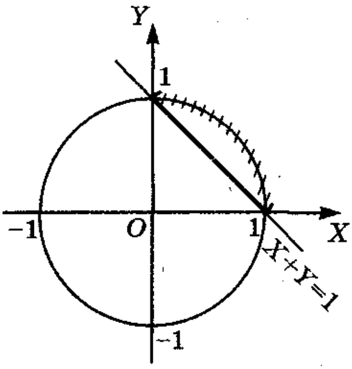


Рис. 162

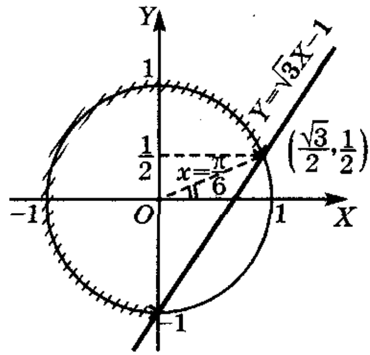


Рис. 163

эквивалентное исходному. С помощью подстановки $X = \cos x$, $Y = \sin x$ последнее неравенство приводится к алгебраической смешанной системе

$$\sqrt{3}X - Y < 1, \quad X^2 + Y^2 = 1.$$

Дуге единичной окружности, лежащей выше прямой $Y = \sqrt{3}X - 1$ (рис. 163), соответствует множество значений x, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

Поэтому решение исходного неравенства имеет вид

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \ (k = 0, \pm 1, \ldots)$.

5. Использование свойств симметрических многочленов

Как и в случае тригонометрических уравнений, при решении неравенств иногда некоторую комбинацию тригонометрических функций принимают за новое неизвестное. При этом если левая часть неравенства

$$P(u, v) > 0$$

представляет собой симметрический многочлен относительно каких-либо тригонометрических функций, то в качестве новых неизвестных удобно брать основные симметрические функции.

Пример 18. *Решить неравенство*

$$6 \sin x \cos x > \sin x + \cos x + 1.$$

Решение. Подстановкой $z = \sin x + \cos x$ ($|z| \le \sqrt{2}$) данное неравенство сводится к смешанной алгебраической системе неравенств

$$3(z^2 - 1) > z + 1, \ |z| \le \sqrt{2},$$

или

$$3z^2 - z - 4 > 0, \ |z| \le \sqrt{2},$$

откуда $-\sqrt{2} \le z < -1$ и $\frac{4}{3} < z \le \sqrt{2}$. Следовательно,

$$-\sqrt{2} \le \cos x + \sin x < -1 \ \text{и} \ \frac{4}{3} < \cos x + \sin x \le \sqrt{2}.$$

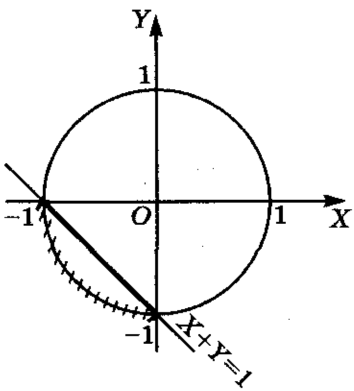


Рис. 164

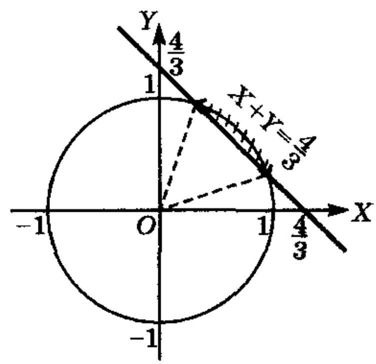


Рис. 165

Две последние системы тригонометрических неравенств с помощью подстановки

$$X = \cos x, \ Y = \sin x$$

сведем к смешанным алгебраическим системам

$$\begin{cases} -\sqrt{2} \le X + Y < -1, \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \ \text{и} \ \begin{cases} \frac{4}{3} < X + Y \le \sqrt{2}, \\ X^2 + Y^2 = 1, \end{cases}$$

решая которые и воспользовавшись последней подстановкой, получим ответ. На рис. 164 и 165 дана координатная интерпретация решения смешанных алгебраических систем.

О т в е т. $\pi+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ 2k\pi+\arccos\left(\frac{2}{3}+\sqrt{2}\right)<x<2k\pi+$

$$+\arccos\left(\frac{2}{3}-\sqrt{2}\right)\ (k=0,\ \pm1,\ldots).$$

6. Неравенства, связанные с обратными тригонометрическими функциями

Простейшие неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, *решаются непосредственно: достаточно воспользоваться свойством* монотонности и принять во внимание область определения и множества значений данной функции. Так, в частности, неравенство

$$\arcsin x<a$$

при $a>\frac{\pi}{2}$ удовлетворяется во всей области определения арксинуса, т. е. на сегменте $-1\le x\le 1$; при $-\frac{\pi}{2}<a\le\frac{\pi}{2}$ имеем: $\arcsin x<\arcsin(\sin a)$, откуда $-1\le x<\sin a$; при $a\le-\frac{\pi}{2}$ неравенство не имеет решений, так как $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x$.

П р и м е р 19. *Решить неравенство*

$$\sqrt{\arccos x}+\sqrt{\arcsin x}>\sqrt{\frac{7\pi}{12}}.$$

Р е ш е н и е. Обе части данного неравенства положительны, поэтому, возводя их в квадрат, получаем неравенство

$$\arccos x+\arcsin x+2\sqrt{\arccos x\arcsin x}>\frac{7\pi}{12}, \tag{17}$$

эквивалентное исходному. Воспользовавшись тождеством

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

перепишем неравенство (17) в виде

$$\sqrt{\arcsin x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)}>\frac{\pi}{24}$$

или

$$\arcsin x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)>\frac{\pi^2}{576} \tag{18}$$

С помощью подстановки

$$t=\arcsin x\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$$

неравенство (18)приводится к алгебраической системе

$$t\left(\frac{\pi}{2}-t\right)>\frac{\pi^2}{576},\quad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt{35}}{6}\right)<t<\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\sqrt{35}}{6}\right),$$

т. е.

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt{35}}{6}\right)<\arcsin x<\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\sqrt{35}}{6}\right).$$

Ответ. $\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\right]<x<\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\sqrt{35}}{6}\right)\right].$

В заключение рассмотрим пример тригонометрического неравенства с двумя неизвестными.

Пример 20. *На координатной плоскости xOy изобразить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенству*

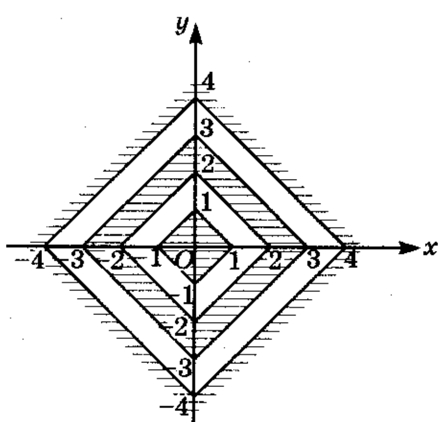


Рис. 166

$$\sin[\pi(|x|+|y|)] \geq 0.$$

Р е ш е н и е. Синус неотрицателен, когда

$$2k\pi \leq \pi(|x|+|y|) \leq (2k+1)\pi,$$

где $k=0, 1, 2, \ldots$, так как $\pi(|x|+|y|) \geq 0$. Следовательно,

$$2k \leq |x|+|y|) \leq 2k+1 \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

(рис. 166). Множество точек, удовлетворяющих условию задачи, на рис. 166 заштриховано.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить неравенства:

1. $2(\cos^2 4x - \sin^2 4x) \geq 3 + 4\sin 4x.$

О т в е т. $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{4}.$

2. $(\cos^2 3x - \sin^2 3x) - \dfrac{5}{2} < 2\sqrt{3}\sin 3x.$

О т в е т. $x \neq (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k\pi}{3}.$

3. $\cos^2 x < \dfrac{1}{2}.$

О т в е т. $k\pi + \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4} + k\pi.$

4. $\dfrac{\sin^2 x - \dfrac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0.$

У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}.$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{6} + k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + k\pi.$

5. $2\sin^2 2x + 3\cos 2x < 0.$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{2\pi}{3} + k\pi.$

6. $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x < \dfrac{10}{3}.$

Ответ. $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$.

7. $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x>\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$.

8. $5(1-\cos 2x)+2\sin^2 2x>8\cos 2x$.

Ответ. $\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+k\pi$.

9. $\sin x>\cos^2 x$.

Ответ. $2k\pi+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi$.

10. $\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{tg}x-3\geq 0$.

Ответ. $k\pi-\frac{\pi}{2}<x\leq \operatorname{arctg}(-2)+k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi$.

11. $\operatorname{tg}x>\cos x\ \left(0\leq x<\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

12. $\sin^2 x-2\sin x-1<0\ (0\leq x\leq 2\pi)$.

Ответ. $0\leq x<\pi-\arcsin(1-\sqrt{2}),\ 2\pi+\arcsin(1-\sqrt{2})<x\leq 2\pi$.

13. $\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|<1\ (0\leq x\leq 2\pi)$.

Ответ. $0\leq x<\frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}<x\leq 2\pi$.

14. $\left|\cos^2 x-\cos x-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}\ (0\leq x\leq \pi)$.

Ответ. $0<x<\frac{\pi}{2},\ \arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x\leq\pi$.

15. $|\sin x| > \operatorname{ctg} x \quad (0 \le x \le 2\pi)$.

Ответ. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \pi,\ \pi + \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 2\pi.$

16. $|\sin x| > |\cos x| \ (0 \le x \le 2\pi)$.

Ответ. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}.$

17. **Найти все значения x, для которых выражение**

$$\sin x(2\cos^2 x - 1)(4\sin x + 2\cos x + 5)$$

отрицательно.

Ответ. $2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ 2k\pi + \pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,$

$$2k\pi + \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi + 2k\pi.$$

18. **Найти все решения неравенства**

$$\sqrt{6\sin x\cos x} < \sin x + \cos x,$$

удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

Ответ. $0 \le x < \frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12} < x \le \frac{\pi}{2}.$

19. **Найти все решения неравенства**

$$\sqrt{2\sin x\cos x} < \cos x - \sin x,$$

удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

Ответ. $0 \le x < \frac{\pi}{12},\ -\frac{7\pi}{12} < x \le -\frac{\pi}{2}.$

Решить неравенства:

20. $\frac{4\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} < 3\operatorname{tg} x.$

Указание. Показать, что рассматриваемое неравенство эквивалентно совокупности следующих неравенств: $\operatorname{tg} x > 1,\ -1 < \operatorname{tg} x \le 0.$

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x \le k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\pi < x \le \frac{\pi}{2} + k\pi.$

21. $\frac{2 + \sqrt{2} - 4\cos^2 x}{\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x} \ge 2.$

Ответ. $\frac{\pi}{6}+2k\pi < x \le \frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi \le x < \frac{5\pi}{6}+2k\pi.$

22. $\frac{1-4\sin^2 x}{\cos^2 x+\cos x-\sin^2 x} \le 2.$

Ответ. $-\frac{\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3}+2k\pi, x \ne \pi+2k\pi.$

23. $\sqrt{2}\sin^2 x \ge 2\sin x\left(1+\left|1-\sqrt{2}\sin x\right|\right)$

Ответ. $(2k-1)\pi \le x \le 2k\pi,\ \frac{\pi}{4}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4}+2k\pi.$

24. $2\cos^2 x \ge \cos x\left(1+\left|1-2\cos x\right|\right)$

Ответ. $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ 2k\pi-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}+2k\pi.$

25. $\frac{1}{\sin^2 x}-1 \ge \frac{\left|\operatorname{ctg} x-1\right|+1}{\operatorname{tg} x}.$

Ответ. $\frac{\pi}{2}+k\pi < x < (k+1)\pi,\ k\pi < x \le \frac{\pi}{4}+k\pi.$

26. $\frac{1}{\cos^2 x}-1 \ge \frac{\left|\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\right|+\sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}.$

Ответ. $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < k\pi,\ \frac{\pi}{3}+k\pi \le x < \frac{\pi}{2}+k\pi.$

27. $5+2(\cos^2 x-\sin^2 x) \le 3\left|2\sin x-1\right|.$

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ -\frac{5\pi}{6}+2k\pi \le x \le -\frac{\pi}{6}+2k\pi.$

28. $\sqrt{2+4\cos x} \ge \frac{1}{2}+3\cos x.$

Ответ. $\frac{\pi}{3}+k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3}+k\pi.$

29. $\sqrt{3+2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x} \ge \frac{1+3\operatorname{tg} x}{2}.$

Ответ. $-\frac{\pi}{4}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{4}+k\pi.$

30. $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{\cos x}>\sqrt{\frac{17}{7}-\cos x}\quad (0\le x\le 2\pi).$

Ответ. $0\le x<\arccos\frac{1}{7},\ 2\pi-\arccos\frac{1}{7}<x\le 2\pi.$

31. $\left[\frac{3(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sin x-\cos x}\right]^{\frac{1}{2}}>1.$

Ответ. $2k\pi-\frac{3\pi}{4}+\arcsin\frac{3}{4}<x<\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{3}{4}+2k\pi.$

32. $\sin(4\cos x)>0.$

Ответ. $(2k+1)\pi-\arccos\frac{\pi}{4}<x<(2k+1)\pi+\arccos\frac{\pi}{4},$

$$\arccos\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<(4k+1)\frac{\pi}{2},\ (4k-1)\frac{\pi}{2}<x<2k\pi-\arccos\frac{\pi}{4}.$$

33. $\sin^2 x\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}>\sin^2 x.$

Ответ. $0\ne|x|<\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$

34. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4(x+1)}>1.$

Ответ. Если $k\ne 0$, то $-\frac{1+4k}{4k}<x<-\frac{2+4k}{4k+1}.$

Если $k=0$, то $-\infty<x<-2$ (k — любое целое число).

Решить неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции:

35. $\arcsin(x^2+1)<2.$

Ответ. $x=0.$

36. $\operatorname{arctg}^2 x-4\operatorname{arctg} x+3>0.$

Ответ. $-\infty<x<\operatorname{tg}1.$

37. $\arccos x>\arccos x^2.$

Ответ. $-1\le x<0.$

38. $\arcsin x < \arccos x$.

Ответ. $-1 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

39. $\arcsin x < \arcsin(1-x)$.

Ответ. $0 \le x < \frac{1}{2}$.

40. $\arcsin(x^2 - 2x - 2) > \frac{\pi}{4}$.

Ответ. $-1 \le x < 1 - \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}}; 1 + \sqrt{3 + \frac{1}{\sqrt{2}}} < x \le 3$.

41. $\arccos x > \operatorname{arctg} x$.

Ответ. $-1 \le x < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

42. Доказать неравенство

$$\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \ge \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}.$$

При каких значениях x достигается равенство?

Ответ. Неравенство выполняется при всех x. Равенство достигается

$$\text{при } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

43. Доказать, что при $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$\cos \sin x > \sin \cos x.$$

Указание. Воспользоваться неравенством $|\sin x| \le |x|$.

44. Доказать, что при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ справедливо неравенство

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8.$$

Указание. Положить $\operatorname{tg} x = t$ и показать, что выполняется система неравенств

$$\frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{1}{t(t-1)} > 8, \ 0 < t < 1.$$

45. Решить неравенство $\sin(\sin x) + \sin x \cdot \cos(\sin x) > 0$.

Ответ. $2k\pi < x < (2k+1)\pi$.

Указание. Знак $\sin(\sin x)$ совпадает со знаком $\sin x$; $\cos(\sin x) > 0$. Показать, что неравенство эквивалентно неравенству $\sin x > 0$.

46. Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство

$$\operatorname{tg}^2(\sin\sqrt{9\pi^2 - x^2}) - 2a\operatorname{tg}(\sin\sqrt{9\pi^2 - x^2}) + a + 2 \le 0$$

имеет конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Ответ. $a = \dfrac{2+\operatorname{tg}^2 1}{2\operatorname{tg} 1 - 1}$; $x = \pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}\pi$; $x = \pm\dfrac{\sqrt{35}}{2}\pi$;

$$a = -1;\ x = \pm\sqrt{9\pi^2 - \left(\pi + \arcsin\frac{\pi}{4}\right)^2};\ x = \pm\sqrt{9\pi^2 - \left(2\pi - \arcsin\frac{\pi}{4}\right)^2}.$$

§ 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении тригонометрических уравнений и систем уравнений могут быть использованы неравенства.

1. Рассмотрим неравенство, которое выражает тот факт, что квадрат любого действительного числа неотрицателен. Чтобы эффективно использовать это утверждение, применим его к разности $a - b$, где a и b — действительные числа. Тогда неравенство

$$(a-b)^2 \ge 0$$

приведет к утверждению

$$a^2 + b^2 \ge 2ab. \tag{1}$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$. Это — простейший вид неравенства, связывающего среднее арифметическое и среднее геометрическое (см. гл. III, § 5, п. 4).

Часто применяется следующее, легко доказываемое неравенство:

$$a + \frac{1}{a} \ge 2 \ \text{ при } \ a > 0, \tag{2}$$

причем знак равенства имеет место только при $a = 1$.

П р и м е р 1. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Оценим левую и правую части первого уравнения системы.

Применяя неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, получим

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geq 2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x$$

т. е. при

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Правая часть уравнения

$$2\sin^2 y \leq 2,$$

причем равенство имеет место только при условии

$$\sin^2 y = 1,$$

т. е. когда

$$y = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Таким образом, первое уравнение выполняется только тогда, когда

$$\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x, \ \sin^2 y = 1.$$

При этом из второго уравнения системы имеем

$$\cos^2 z = 1 - \sin^2 y = 0,$$

т. е.

$$z = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \ldots).$$

О т в е т. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $z = \frac{\pi}{2} + m\pi$, где k, n, m принимают все целые значения.

П р и м е р 2. *Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению*

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y).$$

Р е ш е н и е. Воспользовавшись неравенством (1), имеем

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y \geq 2\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y+2\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y=$$

$$=2[(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y)^2+(\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y)^2] \geq 4,$$

причем равенство выполняется лишь при

$$\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y \text{ и } \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y.$$

Далее очевидно, что $3+\sin^2(x+y) \leq 4$, причем равенство выполняется лишь при

$$\sin^2(x+y)=1.$$

Значит, исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y,\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y\\ \sin^2(x+y)=1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y=1,\\ \sin^2(x+y)=1\end{cases}$$

которую можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases}|\operatorname{tg} x|=|\operatorname{tg} y|=1,\\ |\sin(x+y)|=1.\end{cases}$$

Решения полученной системы дают ответ.

О т в е т. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $y_1=\frac{\pi}{4}+m\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+n\pi$, $y_2=-\frac{\pi}{4}+l\pi$ (k, m, n, l — любые целые числа).

2. Рассмотрим уравнение с несколькими неизвестными:

$$f_1(x, y, ..., z)+f_2(x, y, ..., z)+...+f_N(x, y, ..., z)=0. \quad (3)$$

Пусть каждое из слагаемых в левой части уравнения неотрицательно. Тогда, поскольку сумма нескольких неотрицательных слагаемых равна нулю, это возможно в том и только в том случае, когда каждое из слагаемых равно нулю.

Следовательно, если функции $f_1(x, y, ..., z)$, $f_2(x, y, ..., z)$, ..., $f_N(x, y, ..., z)$ на некотором множестве $\{x, y, ..., z\}$, принадлежащем области определения уравнения (3), т. е. общей части (пересечению множеств) областей определения этих функций, удовлетворяют неравенствам

$$f_1(x, y, ..., z) \geq 0, f_2(x, y, ..., z) \geq 0, ..., f_N(x, y, ..., z) \geq 0, \quad (4)$$

то рассматриваемое уравнение эквивалентно на этом множестве системе

$$\begin{cases} f_1(x, y, ..., z) = 0, \\ f_2(x, y, ..., z) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_N(x, y, ..., z) = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Указанный выше метод решения уравнения (3) сведением к эквивалентной ему системе уравнений можно также использовать и при решении одного уравнения с одним неизвестным.

В частности, уравнение

$$f_1(x) + f_2(x) = 0$$

при условии

$$f_1(x) \geq 0 \text{ и } f_2(x) \geq 0$$

эквивалентно системе двух уравнений с одним неизвестным:

$$f_1(x) = 0, \ f_2(x) = 0.$$

Например, уравнение

$$[\varphi_1(x)]^2 + [\varphi_2(x)]^2 = 0$$

эквивалентно следующей системе:

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0.$$

Пример 3. *Решить уравнение*

$$1 + \cos(x + 3\operatorname{tg} x) + (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)^2 = 0.$$

Решение. Так как всюду в области определения уравнения

$$f_1(x) = 1 + \cos(x + 3\operatorname{tg} x) \geq 0 \text{ и } f_2(x) = (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)^2 \geq 0,$$

то рассматриваемое уравнение в этой области эквивалентно системе уравнений

$$1 + \cos(x + 3\operatorname{tg} x) = 0, \ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 0.$$

От этой системы переходим к совокупности систем

$$\begin{cases} x + 3\operatorname{tg} x = \pi + 2k\pi, \\ x = n\pi \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + 3\operatorname{tg} x = \pi + 2k\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x = (2k + 1)\pi$. Из второй системы получим

$$\pi = \frac{12}{8k - 4n + 3},$$

что невозможно ни при каких целых k и n, так как число π иррационально.

Ответ. $x = (2k + 1)\pi \ (k = 0, \pm 1, ...)$.

П р и м е р 4. *Решить уравнение*

$$(x+y)(x+y+2\cos x)+2=2\sin^2 x.$$

Р е ш е н и е. Так как

$$(x+y)(x+y+2\cos x)+2-2\sin^2 x=$$

$$=(x+y)^2+2(x+y)\cos x+2(1-\sin^2 x)=$$

$$=(x+y)^2+2(x+y)\cos x+\cos^2 x+\cos^2 x=$$

$$=[(x+y)+\cos x]^2+\cos^2 x,$$

то исходное уравнение можно записать следующим образом:

$$[(x+y)+\cos x]^2+\cos^2 x=0.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе

$$x+y+\cos x=0,\ \cos x=0,$$

или

$$x+y=0,\ \cos x=0.$$

Отсюда $x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \ y=-\frac{\pi}{2}(2k+1)\ (k=0,\pm 1,...)$.

О т в е т. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \ y=-\frac{\pi}{2}(2k+1)\ (k=0,\pm 1,...)$.

3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на некотором множестве значений x, принадлежащем области определения уравнения

$$f_1(x)=f_2(x), \tag{6}$$

удовлетворяют неравенствам

$$|f_1(x)|\le a \text{ и } |f_2(x)|\ge a\ (a\ge 0) \tag{7}$$

$$(\text{или } |f_1(x)|\ge a \text{ и } |f_2(x)|\le a),$$

то все корни уравнения (6) можно найти как решения следующих двух систем уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x)=a, \\ f_2(x)=a \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f_1(x)=-a, \\ f_2(x)=-a \end{cases} \tag{8}$$

и, наоборот, все решения систем (8) являются корнями уравнения (6). В дальнейшем будем говорить, что уравнение (6) эквивалентно на рассматриваемом множестве совокупности систем уравнений (8).

В частности, если в уравнении (6) левая часть неположительна, а правая неотрицательна, то оно удовлетворяется в том и только в том случае, когда

$$f_1(x)=0 \text{ и } f_2(x)=0.$$

П р и м е р 5. *Решить уравнение*

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x. \qquad (9)$$

Р е ш е н и е. Оценим левую и правую части данного уравнения. Так как

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \text{ и } |\sin\alpha|\le 1,$$

то $|\sin x+\cos x|\le\sqrt{2}$ и, следовательно,

$$\left|(\sin x+\cos x)\sqrt{2}\right|\le 2. \qquad (10)$$

Далее, так как

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x},$$

то

$$|\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x|\ge 2. \qquad (11)$$

В силу неравенств (10) и (11) равенство (9) выполняется лишь, когда

$$\text{либо } \begin{cases}(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=2,\\ \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2,\end{cases} \text{ либо } \begin{cases}(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=-2,\\ \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=-2.\end{cases}$$

Первая система имеет решение

$$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ldots).$$

Вторая система решений не имеет. Итак, корнями уравнения (9) являются числа $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$.

О т в е т. $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ldots)$.

П р и м е р 6. *Решить уравнение*

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin 3x+5.$$

Р е ш е н и е. Так как $|\cos\alpha|\le 1$, $\sin\alpha\ge -1$, то

$$|\cos 4x-\cos 2x|\le|\cos 4x|+|\cos 2x|\le 2,\ \sin 3x+5\ge 4.$$

Итак, левая часть уравнения не превосходит 4, правая часть не меньше 4, следовательно,

$$|\cos 4x-\cos 2x|=2$$

(и тогда либо $\cos 4x=-1$ и $\cos 2x=1$, либо $\cos 4x=1$ и $\cos 2x=-1$) и $\sin 3x=-1$. Рассмотрим возможные случаи:

а) $\cos 4x=-1,\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n\pi}{2};$

$\cos 2x=1,\ x=k\pi;$

$\sin 3x=-1,\ \ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}l.$

Общих корней нет.

б) $\cos 4x=1,\ x=\dfrac{\pi n}{2};$

$\cos 2x=-1,\ \ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;$

$\sin 3x=-1,\ \ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\pi l.$

Общими корнями уравнений являются числа

$$x=\frac{\pi}{2}+2m\pi \quad (m=0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{2}+2m\pi \quad (m=0, \pm 1, \ldots).$

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\cos^2\left[\frac{\pi}{4}(\sin x+\sqrt{2}\cos^2 x)\right]-\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2 x\right)=1.$$

Решение. Положим

$$\frac{\pi}{4}(\sin x+\sqrt{2}\cos^2 x)=\alpha \ \left(|\alpha|<\frac{\pi}{2}\right),\ x+\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2 x=\beta.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$\cos^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=1,$$

или

$$\cos^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\beta.$$

Так как $\cos^2\alpha\le 1$, а $1+\operatorname{tg}^2\beta\ge 1$, то последнее уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\cos^2\alpha=1\ \left(|\alpha|<\frac{\pi}{2}\right),\ \operatorname{tg}^2\beta=0.$$

Отсюда

$$\alpha=0,\ \beta=m\pi\ \ (m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

т. е.

$$\frac{\pi}{4}(\sin x+\sqrt{2}\cos^2 x)=0,\ x+\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2 x=m\pi.$$

Из первого уравнения имеем $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, а из второго уравнения находим

$$x=m\pi-\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2 x=m\pi-\frac{\pi}{4},$$

где $m=0,\ \pm 2,\ \pm 4,\dots,$ так как $\sin x$ отрицателен.

Ответ. $x=2n\pi-\frac{\pi}{4}$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots)$.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\cos^2 3x+\frac{1}{4}\cos^2 x=\cos 3x\cos^4 x. \tag{12}$$

Решение. Прежде всего заметим, что корни системы

$$\cos 3x=0,\ \cos x=0$$

являются корнями уравнения (12). Таким образом, значения

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ (k=0,\ \pm 1,\dots)$$

представляют собой решения исходного уравнения (12).

Пусть теперь

$$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ \text{ и }\ x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};$$

тогда обе части уравнения (12) можно разделить на произведение $\cos 3x\cdot\cos x$. При этом получаем следующее уравнение:

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{1}{4}\frac{\cos x}{\cos 3x}=\cos^3 x. \tag{13}$$

Докажем, что левая часть этого уравнения не меньше единицы, а правая — не больше единицы.

Пусть $\frac{\cos 3x}{\cos x}=a$, тогда левая часть уравнения (13) равна $a+\frac{1}{4a}$.

Докажем, что $\left|a+\frac{1}{4a}\right|\geq 1$. Рассмотрим два случая.

1) Если $a>0$, то имеем очевидное неравенство

$$\frac{(2a-1)^2}{4a}\geq 0,\ \text{ или }\ \frac{4a^2-4a+1}{4a}\geq 0,\ \text{ или }\ \frac{4a^2+1}{4a}\geq\frac{4a}{4a},\ \text{ или }\ a+\frac{1}{4a}\geq 1,$$

причем равенство выполняется при $a=\frac{1}{2}$;

2) Если $a<0$, то аналогично предыдущему из очевидного неравенства $\frac{(2a+1)^2}{4a} \le 0$ получим $a+\frac{1}{4a} \le -1$, причем равенство выполняется при $a=-\frac{1}{2}$.

Таким образом,

$$\left|\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{1}{4}\frac{\cos x}{\cos 3x}\right| \ge 1,\ \left|\cos^3 x\right| \le 1.$$

При этом равенство возможно, когда левая и правая части уравнения (13) по абсолютной величине равны единице.

а) $\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{1}{4}\frac{\cos x}{\cos 3x}=\cos^3 x=1$, т. е. $\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{1}{2}$ и $\cos^3 x=1$.

Значит, решением уравнения (12) является решение системы

$$\cos 3x=\frac{1}{2},\ \cos x=1.$$

Нетрудно показать, что эта система решений не имеет.

б) $\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{1}{4}\frac{\cos x}{\cos 3x}=\cos^3 x=-1$, т. е. $\frac{\cos 3x}{\cos x}=-\frac{1}{2}$ и $\cos^3 x=-1$.

Поэтому решением уравнения (12) будет решение системы

$$\cos 3x=\frac{1}{2},\ \cos x=-1.$$

Полученная система также решений не имеет.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

Замечание. Уравнение (12) можно также решить, рассматривая его как квадратное относительно функции $y=\cos 3x$ (где $|y|\le 1$). Тогда получим

$$y=\frac{\cos^4 x \pm \sqrt{\cos^8 x-\cos^2 x}}{2}. \qquad (14)$$

В силу неотрицательности дискриминанта имеем неравенство

$$\cos^8 x-\cos^2 x=\cos^2 x(\cos^2 x-1)(\cos^4 x+\cos^2 x+1) \ge 0.$$

Отсюда $\cos x=0$, либо $\cos x=1$, либо $\cos x=-1$. Значение $\cos 3x$ находим из формулы (14).

4. Если функции, входящие в левую часть уравнения

$$f_1(x, y, \ldots, z)+f_2(x, y, \ldots, z)+\ldots+f_N(x, y, \ldots, z)=a\,(a \ge 0),$$

удовлетворяют неравенствам

$$|f_1(x, y,..., z)| \le a_1, |f_2(x, y,..., z)| \le a_2,..., |f_N(x, y, ..., z)| \le a_N,$$

где $a_1, a_2, ..., a_N$ неотрицательны и

$$a_1 + a_2 + ... + a_N = a,$$

то из данного уравнения следует система уравнений

$$\begin{cases} |f_1(x, y,..., z)| = a_1, \\ |f_2(x, y,..., z)| = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |f_N(x, y,..., z)| = a_N. \end{cases}$$

Аналогично, если функции, входящие в левую часть уравнения

$$f_1(x) \cdot f_2(x) ... f_N(x) = 1,$$

удовлетворяют неравенствам

$$|f_k(x)| \le 1 \quad (k = 1, 2, ..., N)$$

то уравнение

$$|f_k(x)| = 1$$

есть следствие исходного.

П р и м е р 9. *Решить уравнение*

$$\sin x (\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - 1) = 0.$$

Р е ш е н и е. Заданное уравнение распадается на два:

$$\sin x = 0, \tag{15}$$

откуда $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$, и

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1. \tag{16}$$

Если уравнение (16) имеет хотя бы одно решение, то в силу того, что $|\cos nx| \le 1$, все его решения должны удовлетворять уравнению $|\cos x| = 1$, т. е. уравнению (15). Следовательно уравнение (16) не дает новых решений, отличных от решений уравнения (15).

О т в е т. $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что уравнение

$$\sin x = x^2 + x + 1$$

не имеет корней.

Решить уравнения:

2. $\sin^4 x + \cos^{10} x = 1.$

О т в е т. $x=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1,...)$.

У к а з а н и е. Учесть, что $\sin^4 x+\cos^{10} x \le \sin^2 x+\cos^2 x=1$.

3. $\sin x \cdot \cos 4x = 1$.

О т в е т. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, ...)$.

У к а з а н и е. Уравнение сводится к совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos 4x = -1. \end{cases}$$

4. $\cos 4x + \cos 6x + \cos 10x = 3$.

Ответ. $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, ...)$.

У к а з а н и е. Уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\cos 4x = 1, \quad \cos 6x = 1, \quad \cos 10x = 1.$$

5. $\cos^2 x + 3\cos^3(\sqrt{2}x) = 4$.

О т в е т. $x=0$.

6. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin 2x}$.

О т в е т. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1,...)$.

7. $\sin^4 x + \operatorname{cosec}^4 x = 2\sin^6 x \cos 4x$.

О т в е т. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, ...)$.

У к а з а н и е. Так как

$$\sin^4 x + \operatorname{cosec}^4 x = 2\frac{\sin^4 x + \operatorname{cosec}^4 x}{2} \ge 2\sqrt{\sin^4 x \operatorname{cosec}^4 x} = 2$$

и

$$2\sin^6 x \cos 4x \le 2,$$

то данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin^4 x + \operatorname{cosec}^4 x = 2, \\ 2\sin^6 x \cos 4x = 2. \end{cases}$$

8. $3(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) - 8(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 10 = 0$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, ...)$.

Найти все действительные значения x и y, удовлетворяющие уравнениям:

9. $x^2-2x\sin(xy)+1=0$.

Ответ. $x=\pm 1$, $y=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, ...)$.

Указание. Воспользоваться тем, что при $x>0$ справедливо неравенство $f(x)=x^2-2x\sin(xy)\geq(x-1)^2\geq 0$ и что $f(-x)=f(x)$.

10. $x^2+4x\cos(xy)+4=0$.

Ответ. $x_1=2$, $y_1=\frac{\pi}{2}(2m+1)$;

$x_2=-2$, $y_2=\pi n$ $(m=0,\pm 1,...;\ m=0,\pm 1,...)$.

11. $\sin 2x+\cos(x+y)=2$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $y=2n\pi-k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k=0,\pm 1,...;\ n=0,\pm 1,...)$.

12. $\sin^2 x+\sin^2 y=\sin x\sin y+\sin x+\sin y-1$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $y=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ $(k=0, \pm 1,...;n=0, \pm 1,...)$.

13. $x^2(1+\sin^2 y)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y=0$.

Ответ. Решений нет.

14. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{tg}^2 y=2+\cos^2(x-y)$.

Ответ. $x=\left(k+\frac{n}{2}\right)\pi+\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ $(k=0, \pm 1,...;n=0, \pm 1,...)$.

Указание. Так как

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{tg}^2 y=3\frac{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{tg}^2 y}{3}\geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{tg}^2 y}=3$$

и

$$2+\cos^2(x-y)\leq 3,$$

то данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 3, \\ 2 + \cos^2(x - y) = 3. \end{cases}$$

15. $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x(\sin y + \cos y) + 2 = 0.$

Ответ. $x_1 = \operatorname{arctg}(-\sqrt{2}) + k\pi,\ y_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi;$

$$x_2 = \operatorname{arctg}\sqrt{2} + k\pi,\ y_2 = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$$

$(k = 0, \pm 1, \ldots; n = 0, \pm 1, \ldots).$

16. $\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \dfrac{1}{2}\sin y.$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\ (k = 0, \pm 1, \ldots; n = 0, \pm 1, \ldots).$

Решить уравнения:

17. $\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x$.

Ответ. $x_1 = k\pi,\ x_2 = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi\ (k = 0, \pm 1, \ldots).$

18. $5\cos^5 x - 3\sin^3 x = 5.$

Ответ. $x = 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \ldots).$

Указание. Воспользоваться тем, что

$$5\cos^5 x - 3\sin^3 x \le 3 + 2\cos^2 x.$$

Доказать, что следующие уравнения не имеют корней:

19. $\cos(\sin x) = \dfrac{1}{2}.$

Указание. Учесть, что $\cos(\sin x) > \dfrac{1}{2}.$

20. $\sin(\sin x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Указание. Учесть, что $|\sin(\sin x)| \le |\sin 1| < \left|\sin\dfrac{\pi}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

21. $\sin(\cos x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

22. $\sin x \sin 2x \sin 3x = 1$.

Указание. Преобразовать уравнение к виду

$$\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x = 1$$

и показать, что левая часть полученного уравнения по абсолютной величине не превосходит $\dfrac{3}{4}$.

23. $\sin 3x \sin 5x = 1$.

24. $\sin x(1+2\cos x)^2 = 3(\sin x - 1)$ $\left(\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Указание. Данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin x(1+2\cos x)^2 = 0, \\ \sin x - 1 = 0, \end{cases}$$

которая не имеет решений.

25. $2\sin^2\dfrac{x}{2}\sin^2\dfrac{x}{6} = \dfrac{1}{x^2} + x^2$.

Указание. Левая часть уравнения не больше 2, правая — не меньше 2. Поэтому достаточно показать, что система уравнений

$$\begin{cases} 2\sin^2\dfrac{x}{2}\sin^2\dfrac{x}{6} = 2, \\ \dfrac{1}{x^2} + x^2 = 2 \end{cases}$$

не имеет решений.

26. $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$ $(0 \le x \le \pi)$.

27. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\cos ax - 3\,\mathrm{tg}^2 x - 2 = 0$$

имеет единственный корень?

Ответ. Если a — любое иррациональное число.

Указание. Данное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \cos ax - 1 = 0, \\ \mathrm{tg}\, x = 0. \end{cases}$$

Решить уравнения:

28. $\sin x \sin 3x \sin 7x = 1$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$.

Указание. Так как $|\sin\alpha| \leq 1$, то равенство возможно тогда и только тогда, когда $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$, т. е. когда $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Проверкой убедиться, что первая серия решений дает ответ.

29. $\cos x(\sin x \sin 2x \sin 3x - 1) = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$.

30. $4(\sin^2 3x \sin^2 x - 1) = 1 + \sin 3x$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$.

§ 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Теоремы сложения являются основным аппаратом тригонометрии. Они позволяют тригонометрические функции от суммы (или разности) нескольких слагаемых выразить *алгебраически* через значения тригонометрических функций этих слагаемых.

Формулы, выражающие теоремы сложения, позволяют в свою очередь получить ряд важных следствий, которые наряду с этими теоремами находят большое применение, в частности в тригонометрических преобразованиях, а также при решении тригонометрических уравнений и неравенств.

1. Теоремы сложения

Для произвольных значений α и β справедливы следующие формулы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad (3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \quad (4)$$

Для всех значений α и β, при которых существуют $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 0$, т. е. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$ и $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, где n, m и k — произвольные целые числа, имеет место формула

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (5)$$

Если существуют $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 0$, т. е.

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+m\pi \text{ и } \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

где n, m и k — произвольные целые числа, то справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (6)$$

Замечание. Формулы (2), (4) и (6) получаются из формул (1), (3) и (5) заменой β н $a-\beta$.

Приведем формулы, выражающие обобщение теорем сложения (1), (3) и (5) для тригонометрических функций от трех слагаемых.

Применим последовательно формулы (3), (1) и (5):

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

или

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma]. \qquad (3')$$

Аналогично находим

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$$

$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

или

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma[1-(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)]. \qquad (1')$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}. \qquad (5')$$

Формулы (3′), (1′) и (5′) справедливы лишь для допустимых значений аргументов α, β и γ.

Замечание. Применяя метод математической индукции, можно получить формулы для синуса и косинуса суммы n слагаемых.

2. Тригонометрические функции кратных углов

Формулы сложения дают возможность выразить тригонометрические функции кратных углов $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ через функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ (при этом $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ можно преобразовать в однородные многочлены степени n относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$).

Например, если в формулах сложения (3), (1) и (5) положить $\beta=\alpha$, *то получим формулы, выражающие тригонометрические функции двойного аргумента* 2α через тригонометрические функции аргумента α:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{7}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{8}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{9}$$

Область допустимых значений аргумента α тригонометрического выражения в правой части формулы (9) является более узкой, чем область допустимых значений аргумента левой части этой формулы. В самом деле, левая часть формулы (9) не имеет смысла для значений α, при которых $\operatorname{tg} 2\alpha$ не существует, т. е. при $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm1,\ldots)$, а правая часть не определена, когда либо $\operatorname{tg}\alpha$ не существует, либо $1-\operatorname{tg}^2\alpha=0$, т. е. когда $\alpha=\frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n=0, \pm1,\ldots)$ или $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}$ $(m=0, \pm1,\ldots)$.

Последовательным применением теорем сложения можно вывести формулы для тригонометрических функций углов 3α, 4α и т. д.

В частности,

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$$

$$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Тот же результат мы получим, если в формуле (3′) положим $\gamma=\beta=\alpha$.

Другие формулы доказываются аналогично.

Запишем эти формулы:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha,$$

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha, \tag{10}$$

$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha\cos^4\alpha - 10\sin^3\alpha\cos^2\alpha + \sin^5\alpha,$$

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\sin^2\alpha\cos^3\alpha + 5\sin^4\alpha\cos\alpha$$

и т. д.

Замечание 1. В общем случае аналогичные формулы можно вывести с помощью формул бинома Ньютона и Муавра. В результате получим

$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots,$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots,$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}.$$

Правые части этих формул являются однородными многочленами относительно синуса и косинуса.

Замечание 2. Соотношения (10), выражающие тригонометрические функции n-кратного аргумента, дают возможность доказать следующие утверждения.

1^0. *Косинус аргумента* $n\alpha$ *можно представить в виде многочлена* n*-й степени относительно* $\cos\alpha$:

$$\cos n\alpha = T_n(\cos\alpha). \tag{11}$$

Многочлен $T_n(x)$ называется ***n-м многочленом Чебышева первого рода****.

Например,

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) =$$

$$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

или

$$\cos 3\alpha = T_3(\cos\alpha), \text{ где } T_3(\cos\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha =$$

* Отметим, что $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$. В частности,

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x,\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \ldots$$

$$= \cos^4\alpha - 6(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha + (1-\cos^2\alpha)^2 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1,$$

или

$$\cos 4\alpha = T_4(\cos\alpha), \text{ где } T_4(\cos\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

2^0. *Синус аргумента $n\alpha$ можно представить в виде произведения* $\sin\alpha$ *на многочлен ($n-1$)-й степени относительно* $\cos\alpha$:

$$\sin n\alpha = \sin\alpha \cdot U_{n-1}(\cos\alpha). \qquad (12)$$

Многочлен $U_n(x)$ называется ***n-м многочленом Чебышева второго рода*** *.

Например,

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1),$$

или

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha \cdot U_2(\cos\alpha), \text{ где } U_2(\cos\alpha) = 4\cos^2\alpha - 1;$$

$$\sin 4\alpha = \sin\alpha(4\cos^3\alpha - 4\sin^2\alpha\cos\alpha) = \sin\alpha(8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha),$$

или

$$\sin 4\alpha = \sin\alpha \cdot U_3(\cos\alpha), \text{ где } U_3(\cos\alpha) = 8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha.$$

3^0. *Косинус аргумента четной кратности можно представить в виде многочлена той же кратности относительно синуса:*

$$\cos 2k\alpha = (-1)^k T_{2k}(\sin\alpha). \qquad (13)$$

Например,

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha =$$

$$= (1-\sin^2\alpha)^2 - 6\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin^4\alpha = 8\sin^4\alpha - 8\sin^2\alpha + 1,$$

или

$$\cos 4\alpha = T_4(\sin\alpha), \text{ где } T_4(\sin\alpha) = 8\sin^4\alpha - 8\sin^2\alpha + 1.$$

4^0. *Синус аргумента четной кратности можно представить в виде произведения косинуса на многочлен кратности на единицу меньшей относительно синуса:*

$$\sin 2k\alpha = (-1)^{k+1}\cos\alpha \cdot U_{2k-1}(\sin\alpha). \qquad (14)$$

---

*Отметим, что $U_n(x) = \dfrac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin x}$. В частности,

$U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x,\ U_2(x)=4x^2-1,\ U_3(x)=8x^3-4x,\ U_4(x)=16x^4-12x^2+1, \ldots$

Например,

$$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha =$$

$$= \cos\alpha[4\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - 4\sin^3\alpha] = -\cos\alpha(8\sin^3\alpha - 4\sin\alpha),$$

или

$$\sin 4\alpha = -\cos\alpha \cdot U_3(\sin\alpha), \text{ где } U_3(\sin\alpha) = 8\sin^3\alpha - 4\sin\alpha.$$

5^0. ***Косинус аргумента нечетной кратности можно представить в виде произведения косинуса на многочлен кратности на единицу меньшей относительно синуса:***

$$\cos(2k+1)\alpha = (-1)^k \cos\alpha \cdot U_{2k}(\sin\alpha). \tag{15}$$

Например,

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha =$$

$$= \cos\alpha[(1-\sin^2\alpha) - 3\sin^2\alpha] = -\cos\alpha(4\sin^2\alpha - 1),$$

или

$$\cos 3\alpha = -\cos\alpha \cdot U_2(\sin\alpha), \text{ где } U_2(\sin\alpha) = 4\sin^2\alpha - 1.$$

6^0. ***Синус аргумента нечетной кратности можно представить в виде многочлена той же кратности относительно синуса.***

$$\sin(2k+1)\alpha = (-1)^k T_{2k+1}(\sin\alpha). \tag{16}$$

Например,

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha =$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

или

$$\sin 3\alpha = -T_3(\sin\alpha), \text{ где } T_3(\sin\alpha) = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha.$$

3. Соотношения между тригонометрическими функциями половинного и целого угла

Для преобразования различных тригонометрических выражений часто используют формулы

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \tag{17}$$

и

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad (18)$$

которые доказываются почленным сложением и вычитанием тождеств

$$1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Приведем формулы, выражающие тригонометрические функции угла $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции угла α:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad (19)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad (20)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (21)$$

Знаки (+ или –) перед радикалами в формулах (19), (20) и (21) выбирают в зависимости от того, какой четверти принадлежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Тангенс половинного аргумента выражается через синус и косинус целого аргумента по формулам

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad (\alpha\neq\pi+2k\pi) \qquad (22)$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (23)$$

Заметим, что левая часть формулы (23) определена при $\alpha\neq\pi+2k\pi$, а правая — при $\alpha\neq k\pi$.

4. Преобразование понижения степени

Всякую целую неотрицательную степень косинуса $(\cos^n \alpha)$ и синуса $(\sin^n \alpha)$, а также всякое произведение этих степеней $(\cos^n \alpha \sin^n \alpha)$ можно представить в виде линейной комбинации косинусов и синусов кратных углов $(\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha)$. Данное преобразование называют ***преобразованием понижения степени.*** При его практической реализации целесообразно пользоваться формулами

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha, \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \qquad (24)$$

Например,

$$\sin^4\alpha = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1-2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4\alpha}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha.$$

Имеют место следующие формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha, \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha,$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha, \quad \cos^3\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha,$$

$$\sin^4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha,$$

$$\cos^4\alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha, \qquad (25)$$

$$\sin^5\alpha = \frac{5}{8}\sin\alpha - \frac{5}{16}\sin 3\alpha + \frac{1}{16}\sin 5\alpha,$$

$$\cos^5\alpha = \frac{5}{8}\cos\alpha + \frac{5}{16}\cos 3\alpha + \frac{1}{16}\cos 5\alpha$$

и. т. д.

Заметим, что формулы (25) можно получить как следствие формул (10).

5. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Для произвольных значений аргумента α и β справедливы следующие формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], \qquad (26)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)], \qquad (27)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (28)$$

Все они непосредственно следуют из теорем сложения. Формулу (26) можно получить почленным сложением тождеств (1) и (2), формулу (27) — почленным вычитанием тождеств (2) и (1), а формулу (28) — почленным сложением тождеств (3) и (4).

6. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

Для любых значений α и β имеют место следующие формулы:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (29)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (30)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (31)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (32)$$

Для всех значений α и β, отличных от $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k = 0, \pm1...$), справедливы формулы

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad (33)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (34)$$

Доказательство формул (29)–(32) можно провести введением вспомогательных аргументов $x=\alpha+\beta$, $y=\alpha-\beta$ и применением соотношений (26)–(28). Формулы (33) и (34) доказываются с помощью формальных преобразований и использования соотношений (29) и (30).

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение называются также ***формулами приведения к логарифмическому виду.***

7. Преобразование тригонометрических выражений с помощью введения вспомогательного угла

При выполнении тождественных преобразований иногда оказывается удобным данное число или данное выражение рассматривать как значение тригонометрической функции некоторого аргумента, называемого ***вспомогательным углом.***

В качестве примера рассмотрим преобразование выражения

$$a\sin x+b\cos x \quad (a^2+b^2\neq 0)$$

с помощью введения вспомогательного угла. Укажем один из возможных способов введения этого угла.

Полагая

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\ \sin\varphi=\frac{b}{\rho},\ \cos\varphi=\frac{a}{\rho} \tag{35}$$

(из двух последних соотношений определяется вспомогательный угол φ), получим

$$a\sin x+b\cos x=\rho\sin(x+\varphi). \tag{36}$$

Например,

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Здесь роль вспомогательного угла играет угол $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

В следующих пунктах проиллюстрируем, как преобразования тригонометрических выражений используются при решении уравнений и неравенств. Будем предполагать, что читатель уже знаком с решением простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

8. Сведение тригонометрических уравнений и неравенств к простейшим

Основная идея большинства приемов решения тригонометрических уравнений и неравенств — сведение к простейшим. При этом наиболее употребителен метод замены неизвестного (метод подстановки). Наряду с этим существует целый ряд специальных приемов и способов решения тригонометрических уравнений и неравенств, предусмотреть которые общей теорией не представляется возможным. Назовем некоторые из них: применение рационализирующих подстановок, приведение к одной функции, приведение к одному аргументу, разложение на множители, введение вспомогательного угла, выделение полного квадрата, обозначение некоторой комбинации тригонометрических функций через новое неизвестное, преобразование произведения тригонометрических функций в сумму, и наоборот, использование свойств симметрических многочленов, применение неравенств при решении уравнений, использование свойств квадратного трехчлена и свойств других элементарных функций и т. д.

Рассмотрим некоторые приемы решения тригонометрических уравнений и неравенств, приводящихся к простейшим.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=5\operatorname{tg}2x+7.$$

Решение. Область определения данного уравнения находится из условий $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$ и представляет собой множество значений

$$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\quad (m=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

Выразим все функции, входящие в уравнение, через одну $\operatorname{tg}x=t$:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)};\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{1-t}{1+t};$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

В этих формулах предполагается, что $\operatorname{tg}x\neq\pm1$, $\cos x\neq0$ (всюду в области определения уравнения имеем $\operatorname{tg}x\neq\pm1$; значения x, при которых $\cos x\neq 0$, корнями исходного уравнения не являются). Тогда исходное уравнение примет вид

$$\frac{1+t}{1-t}=5\cdot\frac{2t}{1-t^2}+7,$$

или (при $t\neq\pm1$)

$$4t^2-4t-3=0,$$

откуда $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=-\frac{1}{2}$. Воспользовавшись подстановкой $\operatorname{tg}x=t$, получим два простейших тригонометрических уравнения, эквивалентных в совокупности исходному:

$$\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}\ \text{ и }\ \operatorname{tg}x=-\frac{1}{2}.$$

Их решениями являются

$$x_1=k\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}\ \text{ и }\ x_2=k\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2},\ \text{где}\ k=0,\pm1,\ldots$$

Ответ. $x_1=k\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$, $x_2=k\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ $(k=0,\pm1,\ldots)$.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$4\sin^4x+\cos4x=1+12\cos^4x.$$

Решение. Воспользовавшись формулами понижения степени

$$\sin^4x=\frac{1}{8}\cos4x-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{3}{8},$$

$$\cos^4x=\frac{1}{8}\cos4x+\frac{1}{2}\cos2x+\frac{3}{8},$$

приведем все функции к одному и тому же аргументу $2x$:

$$\frac{1}{2}\cos4x-2\cos2x+\frac{3}{2}+\cos4x-1-\frac{3}{2}\cos4x-6\cos2x-\frac{9}{2}=0,$$

или

$$\cos2x=-\frac{1}{2}.$$

Решив полученное простейшее уравнение, эквивалентное исходному, находим $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ $(k=0,\pm1,\ldots)$.

Ответ. $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ $(k=0,\pm1,\ldots)$.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\sin3x+\sin x+2\cos x=\sin2x+2\cos^2x.$$

Р е ш е н и е. Перенесем все члены в левую часть уравнения:

$$(\sin 3x+\sin x)+2\cos x-(\sin 2x+2\cos^2 x)=0.$$

Применим способ разложения на множители. Воспользовавшиоь формулами суммы синусов и синуса удвоенного угла, запишем уравнение в следующем виде:

$$(2\sin 2x\cos x+2\cos x)-(2\sin x\cos x+2\cos^2 x)=0,$$

или

$$2\cos x[\sin 2x+1-(\sin x+\cos x)]=0,$$

откуда либо $\cos x=0$, т. е. $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,...)$,

либо

$$\sin 2x+1-(\sin x+\cos x)=0.$$

Так как

$$\sin 2x+1=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=(\sin x+\cos x)^2,$$

то последнее уравнение эквивалентно следующему:

$$(\sin x+\cos x)^2-(\sin x+\cos x)=0,$$

или

$$(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x-1)=0.$$

Если $\sin x+\cos x=0$, то $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k=0,\pm 1,...)$.

Если $\sin x+\cos x-1=0$, то $x=2k\pi$ и $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\pm 1,...)$.

Последняя серия решений содержится в серии $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

О т в е т. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x_2=k\pi-\frac{\pi}{4}$, $x_3=2k\pi$ $(k=0,\pm 1,...)$.

П р и м е р 4. *Решить уравнение*

$$\sin 5x\sin 4x=-\cos 6x\cos 3x.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем произведение тригонометрических функций в алгебраическую сумму и разность, воспользовавшись формулами (27) и (26). Получим

$$\frac{1}{2}(\cos x-\cos 9x)=-\frac{1}{2}(\cos 9x+\cos 3x),$$

или

$$\cos x+\cos 3x=0.$$

Применяя формулу суммы косинусов, имеем

$$2\cos 2x\cos x=0,$$

откуда либо $\cos 2x=0$, т. е. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1,...)$, либо $\cos x=0$, т. е. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm 1,...)$. Обе полученные серии дают решение исходного уравнения.

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm 1,...)$.

Пример 5. *Решить уравнение*

$$\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+...+\sin 100x)=\frac{1}{2}\sin\frac{101}{2}x.$$

Решение. Раскрывая скобки и преобразуя по формуле (27) произведение синусов в разность косинусов, получим

$$\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+...+\sin 100x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\sin x+\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 2x+...+$$

$$+\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 100x=\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{5x}{2}\right)+...+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{197x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{199x}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{199x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{201x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{201x}{2}\right)$$

Далее, так как

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{201x}{2}\right)=\sin\frac{101x}{2}\sin 50x,$$

то уравнение примет вид

$$\sin\frac{101x}{2}\sin 50x=\frac{1}{2}\sin\frac{101x}{2},$$

или

$$\sin\frac{101x}{2}\left(\sin 50x-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Отсюда либо $\sin\frac{101x}{2}=0$, т. е. $x=\frac{2k\pi}{101}$ $(k=0, \pm 1,...)$, либо $\sin 50x-\frac{1}{2}=0$, т. е. $x=(-1)^k\frac{\pi}{300}+\frac{k\pi}{50}$ $(k=0, \pm 1,...)$, О т в е т. $x_1 = \frac{2k\pi}{101}$, $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{300} + \frac{k\pi}{50}$ $(k = 0, \pm 1, ...)$,

П р и м е р 6. *Решить уравнение*

$$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1.$$

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, перепишем данное уравнение следующим образом:

$$\cos 4x + \cos 2x = 0.$$

Левую часть полученного уравнения преобразуем по формуле суммы косинусов:

$$2\cos 3x \cos x = 0.$$

Отсюда либо $\cos 3x = 0$, т. е. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ $(k = 0, \pm 1, ...)$, либо $\cos x = 0$, т. е. $x_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, ...)$. Вторая серия решений содержится в первой, следовательно, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3}$ $(m = 0, \pm 1, ...)$.

О т в е т. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3}$ $(m = 0, \pm 1, ...)$.

П р и м е р 7. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg} x + \sin 2x = \sec x.$$

Р е ш е н и е. Область определения уравнения находится из условия

$$\cos x \neq 0$$

и представляет собой множество значений

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, ...).$$

В этой области исходное уравнение эквивалентно следующим:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin x \cos x = \frac{1}{\cos x},$$

$$(\sin x - 1) + 2\sin x(1 - \sin^2 x) = 0,$$

$$(\sin x - 1)(1 - 2\sin x - 2\sin^2 x) = 0.$$

Последнее уравнение в рассматриваемой области, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$, где $\sin x - 1 \neq 0$, эквивалентно квадратному алгебраическому уравнению относительно $\sin x$:

$$2\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0.$$

Это уравнение при $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, с помощью подстановки

$$\sin x = t \quad (-1 < t < 1)$$

приводится к смешанной системе

$$\begin{cases} 2t^2 + 2t - 1 = 0, \\ -1 < t < 1, \end{cases}$$

которая имеет решение $t = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. Воспользовавшись указанной подстановкой, получим простейшее тригонометрическое уравнение

$$\sin x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$

эквивалентное исходному. Его решение имеет вид

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + n\pi \ (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + n\pi \ (n = 0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$(1 + \cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2 + \sin x} = 2\cos x.$$

Решение. Применяя подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, получим

$$\frac{2}{1 + t^2}\sqrt{t - 2 + \frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{2 - 2t^2}{1 + t^2},$$

или

$$\sqrt{t} = 2 - t.$$

Последнее уравнение эквивалентно смешанной системе

$$\begin{cases} t = (2 - t)^2, \\ 2 - t \geq 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $t = 1$.

Следовательно, возвращаясь к первоначальному неизвестному, получаем простейшее тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,$$

откуда

$$x=\frac{4k+1}{2}\pi\ (k=0,\pm 1,\ \ldots).$$

Ответ. $x=\dfrac{4k+1}{2}\pi\ (k=0,\pm 1,\ \ldots)$.

Пример 9. *Решить уравнение*

$$\sqrt{\frac{1}{16}+\cos^4 x-\frac{1}{2}\cos^2 x}+\sqrt{\frac{9}{16}+\cos^4 x-\frac{3}{2}\cos^2 x}=\frac{1}{2}. \qquad (37)$$

Решение. С помощью подстановки

$$\cos^2 x=t\ (0\le t\le 1) \qquad (38)$$

данное уравнение приводится к следующей смешанной системе:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{16}+t^2-\dfrac{1}{2}t}+\sqrt{\dfrac{9}{16}+t^2-\dfrac{3}{2}t}=\dfrac{1}{2},\\ 0\le t\le 1,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\sqrt{\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{2},\\ 0\le t\le 1,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\left|t-\dfrac{1}{4}\right|+\left|t-\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{1}{2},\\ 0\le t\le 1.\end{cases} \qquad (39)$$

Если $0\le t<\dfrac{1}{4}$, то уравнение (39) принимает вид

$$-t+\frac{1}{4}-t+\frac{3}{4}=\frac{1}{2},$$

откуда $t=\dfrac{1}{4}$. Таким образом, в рассматриваемом промежутке уравнение (39) решений не имеет.

Далее, если $\frac{1}{4} \le t \le \frac{3}{4}$, то уравнение (39) принимает вид

$$t - \frac{1}{4} - t + \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

т. е. удовлетворяется тождественно.

Если, наконец, $\frac{3}{4} < t \le 1$, то уравнение (39) принимает вид

$$t - \frac{1}{4} + t - \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

откуда $t = \frac{3}{4}$, и, следовательно, в рассматриваемом промежутке уравнение (39) решений не имеет.

Итак, решением смешанной системы является промежуток

$$\frac{1}{4} \le t \le \frac{3}{4}.$$

Воспользовавшись подстановкой (38), получим систему неравенств

$$\frac{1}{4} \le \cos^2 x \le \frac{3}{4}, \tag{40}$$

эквивалентную исходному уравнению (37).

Так как

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

то система (40) эквивалентна простейшим неравенствам

$$-\frac{1}{2} \le \cos 2x \le \frac{1}{2},$$

решением которых является множество значений x из промежутков

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad -\frac{\pi}{3} + k\pi \le x \le -\frac{\pi}{6} + k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

Ответ. $\frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi$, $-\frac{\pi}{3} + k\pi \le x \le -\frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Замечание. Геометрически решение уравнения (39) можно трактовать как отыскание точек числовой оси, сумма расстояний которых от точек $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ равна $\frac{1}{2}$. Очевидно, что искомые точки расположены на отрезке $\frac{1}{4} \le t \le \frac{3}{4}$.

Пример 10. *Решить неравенство*

$$5+2\cos 2x \le 3|2\sin x-1|. \qquad (41)$$

Решение. Воспользовавшись формулой $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$, перепишем данное неравенство в следующем виде:

$$5+2(1-2\sin^2 x)\le 3|2\sin x-1|.$$

Полученное неравенство является алгебраическим относительно функции $\sin x$. С помощью подстановки

$$\sin x = t \ (-1\le t\le 1) \qquad (42)$$

оно приводится к системе

$$\begin{cases} 7-4t^2 \le 3|2t-1|, \\ -1\le t\le 1. \end{cases} \qquad (43)$$

Для решения этой системы применим метод промежутков, а именно, рассмотрим промежутки $-1\le t<\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}\le t\le 1$.

По определению абсолютной величины имеем:

если $-1\le t<\frac{1}{2}$, то $|2t-1|=1-2t$; если $\frac{1}{2}\le t\le 1$, то $|2t-1|=2t-1$.

Значит, система неравенств (43) эквивалентна совокупности двух систем:

$$(I)\ \begin{cases} 4t^2-6t-4\ge 0, \\ -1\le t<\frac{1}{2}; \end{cases} \qquad (II)\ \begin{cases} 4t^2+6t-10\ge 0, \\ \frac{1}{2}\le t\le 1. \end{cases}$$

Система неравенств (I) имеет решение $-1\le t\le -\frac{1}{2}$, а система (II) — решение $t=1$. Найденные значения t дают все решения системы неравенств (43).

Воспользовавшись подстановкой (42), получим

$$-1\le \sin x\le -\frac{1}{2};\ \ \sin x=1. \qquad (44)$$

Все те значения x (и только они), для которых имеют место соотношения (44), являются решениями исходного неравенства (41). Эти значения таковы:

$$-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\le x\le -\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ (k=0,\pm 1,\ldots).$$

Ответ. $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi \le x \le -\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k=0, \pm 1,...)$.

Пример 11. *Решить неравенство*

$$\cos^2(3+x)+\sin^2(3-x) \le \operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}-\sqrt{\sin 2x}$$

(*все углы измеряются в радианах*).

Решение. Воспользовавшись формулами (24), (32) и тем, что

$$\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}=1,$$

перепишем данное неравенство следующим образом:

$$\sin 6 \sin 2x \ge \sqrt{\sin 2x}.$$

Всюду в области определения этого неравенства $\sin 2x$ неотрицателен. Так как $\frac{3\pi}{2}<6<2\pi$, то $-1<\sin 6<0$. Следовательно,

$$0 \ge \sin 6 \sin 2x \ge \sqrt{\sin 2x} \ge 0,$$

а это может иметь место только тогда, когда

$$\sin 2x = 0,$$

т. е. $x=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, ...)$. Проверкой убеждается, что найденные значения x удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ. $x=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, ...)$.

Пример 12. *Решить неравенство*

$$\cos x - y^2 - \sqrt{y-x^2-1} \ge 0.$$

Решение. Предположим, что существует решение данного неравенства. Запишем неравенство в виде

$$\cos x - y^2 \ge \sqrt{y-x^2-1}. \tag{45}$$

Если левая часть неравенства (45) отрицательна, то оно не имеет решений (так как всегда $\sqrt{y-x^2-1} \ge 0$). Значит, необходимо, чтобы $\cos x - y^2 \ge 0$, т.е. чтобы

$$y^2 \le \cos x, \tag{46}$$

откуда

$$y^2 \le 1. \tag{47}$$

Правая часть неравенства (45) определена, когда $y-x^2-1\geq 0$, т. е. когда

$$y\geq x^2+1, \tag{48}$$

что выполняется при любых x.

Сопоставив неравенства (47) и (48), получим

$$1\leq x^2+1\leq y\leq 1,$$

что возможно лишь при $y = 1$. В этом случае из условия (48) имеем $x = 0$. При $x = 0$, $y = 1$ условие (46) также выполняется.

Таким образом, исходное неравенство может иметь лишь единственную пару (x, y), являющуюся решением этого неравенства.

Подставляя значения $x = 0$, $y = 1$ в исходное неравенство, убеждаемся, что эта пара значений действительно является решением рассматриваемого неравенства (оно сводится к верному числовому равенству).

Ответ. $x = 0, y = 1$.

Пример 13. *Решить неравенство*

$$\sin^2 x\leq a^2\sin^2 3x,\ a>0.$$

Решение. Воспользовавшись формулой

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x,$$

запишем данное неравенство в виде

$$\sin^2 x\leq a^2(3\sin x-4\sin^3 x)^2,$$

или

$$\sin^2 x[a^2(4\sin^2 x-3)^2-1]\geq 0.$$

С помощью подстановки

$$\sin^2 x=t\ (0\leq t\leq 1) \tag{49}$$

полученное неравенство приводится к системе неравенств

$$\begin{cases} t[a^2(4t-3)^2-1]\geq 0,\\ 0\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Запишем эту систему следующим образом:

$$\begin{cases} t\left(t-\dfrac{3a-1}{4a}\right)\left(t-\dfrac{3a+1}{4a}\right)\geq 0,\\ 0\leq t\leq 1.\end{cases} \tag{50}$$

Учитывая, что при $a>0$ выполняются неравенства

$$\frac{3a-1}{4a}<1;\ \frac{3a-1}{4a}\leq\frac{3a+1}{4a};\ 0<\frac{3a+1}{4a};$$

$$0 \le \frac{3a-1}{4a}, \text{ т. е } a \ge \frac{1}{3}; \ \frac{3a+1}{4a} \le 1, \text{ т. е } a \ge 1,$$

находим решения системы неравенств (50):

1) $t = 0$ при любом $a > 0$;

2) $t \le \frac{3a-1}{4a}$ при $a > \frac{1}{3}$;

3) $t \ge \frac{3a+1}{4a}$ при $a \ge 1$.

Воспользовавшись подстановкой (49), получим:

1) $\sin^2 x = 0$, откуда $x = k\pi$ при любом $a > 0$;

2) $\sin^2 x \le \frac{3a-1}{4a}$, откуда $k\pi - \arcsin\sqrt{\frac{3a-1}{4a}} \le x \le k\pi + \arcsin\sqrt{\frac{3a-1}{4a}}$ при $a > \frac{1}{3}$;

3) $\sin^2 x \ge \frac{3a+1}{4a}$, откуда $k\pi + \arcsin\sqrt{\frac{3a+1}{4a}} \le x \le (k+1)\pi - \arcsin\sqrt{\frac{3a+1}{4a}}$ при $a \ge 1$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Ответ. Неравенство имеет решение $x = k\pi$ при любом $a > 0$. Кроме того, если $\frac{1}{3} < a < 1$, то

$$k\pi - \arcsin\sqrt{\frac{3a-1}{4a}} \le x \le k\pi + \arcsin\sqrt{\frac{3a-1}{4a}};$$

если $a \ge 1$, то

$$k\pi - \arcsin\sqrt{\frac{3a-1}{4a}} \le x \le k\pi + \arcsin\sqrt{\frac{3a-1}{4a}},$$

$$k\pi + \arcsin\sqrt{\frac{3a+1}{4a}} \le x \le (k+1)\pi - \arcsin\sqrt{\frac{3a+1}{4a}} \ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Пример 14. *Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:*

$$\sin^2 4x = \cos^2 5x,$$

$$\sin 5x + \sin 4x = 1,$$

$$|x| < 10.$$

Решение. Представив $\cos^2 5x$ как $1 - \sin^2 5x$, запишем первые два уравнения в виде

$$\begin{cases} \sin^2 5x + \sin^2 4x = 1, \\ \sin 5x + \sin 4x = 1. \end{cases}$$

Решив полученную систему двух линейных алгебраических уравнений относительно функций $\sin 5x$ и $\sin 4x$, приходим к следующим двум системам:

$$\text{(I)} \begin{cases} \sin 5x = 0, \\ \sin 4x = 1, \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin 4x = 0. \end{cases}$$

Исследуем, имеет ли решение каждая из этих систем.

1. Запишем решение каждого из уравнений системы (I):

$$\begin{cases} 5x = m\pi, \\ 4x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} x = \dfrac{m\pi}{5}, \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$$

(m и k принимают независимо друг от друга любые целые значения). Для того чтобы система имела решение, необходимо, чтобы существовали такие целые числа m и k, что

$$\frac{m\pi}{5} = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},$$

или

$$8m = 5 + 20k.$$

Но это невозможно, так как последнее равенство не выполняется ни при каких целых m и k, поскольку его левая часть представляет собой четное число, а правая — нечетное.

Итак, система (I) решений не имеет.

2. Запишем решение каждого из уравнений системы (II):

$$\begin{cases} 5x = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi, \\ 4x = \pi k, \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2m\pi}{5}, \\ x = \dfrac{k\pi}{4} \end{cases}$$

(m и k принимают независимо друг от друга любые целые значения). Система будет иметь решение, если

$$\frac{\pi}{10}+\frac{2m\pi}{5}=\frac{k\pi}{4},$$

или

$$2+8m=5k$$

для целых m и k. Записав последнее равенство в виде

$$5m+(3m+2)=5k,$$

заключаем, что $(3m+2)$ должно делиться на 5, т. е.

$$3m+2=5l \quad (l=0,\ \pm 1,\dots),$$

или

$$l+2=6l-3m.$$

Правая часть последнего равенства делится на 3, следовательно,

$$l+2=3s, \text{ т.е. } l=3s-2, \text{ где } s=0,\pm 1,\ \dots$$

Полученному значению l соответствуют значения

$$m=\frac{1}{3}(5l-2)=5s-4,$$

$$k=8s-6.$$

Таким образом, решениями системы (II) являются значения

$$x=\frac{k\pi}{4}=\frac{8s-6}{4}\pi=-\frac{3\pi}{2}+2s\pi,$$

или, что то же,

$$x=\frac{\pi}{2}+2s\pi \quad (s=0,\ \pm 1,\dots).$$

Проверкой убеждаемся, что эти значения x удовлетворяют первым двум уравнениям исходной системы.

Остается установить, при каких s найденные значения x удовлетворяют неравенству $|x|<10$, т. е.

$$\left|\frac{\pi}{2}+2s\pi\right|<10.$$

Непосредственным вычислением находим, что s должно принимать следующие значения: $s=-1,\ 0,\ 1$.

Ответ. $x_1=-\frac{3\pi}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{2}$; $x_3=\frac{5\pi}{2}$.

9. Использование рационализирующих подстановок при решении тригонометрических уравнений

Из формул (10)–(16) следует, что всякий тригонометрический многочлен n-й степени

$$a_0+(a_1\sin x+b_1\cos x)+(a_2\sin 2x+b_2\cos 2x)+...+(a_n\sin nx+b_n\cos nx),$$

где $a_n^2+b_n^2\neq 0$, *является многочленом* n*-й степени относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$. Поэтому представляет интерес рассмотрение уравнений вида

$$R(\sin x,\ \cos x)=0, \tag{51}$$

где $R(u,\ v)$ — рациональная функция двух аргументов.

Метод, основанный на применении подстановки $t=\varphi(x)$, приводящей рассматриваемое тригонометрическое уравнение (51) к рациональному алгебраическому относительно t уравнению $R^*(t)=0$, мы назвали методом рационализации, а подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \tag{52}$$

— *универсальной рационализирующей (см. § 2, п. 3)*.

Формулы (11)–(16) позволяют указать целый ряд рационализирующих подстановок, которые также успешно могут применяться при решении тригонометрических уравнений и неравенств.

Рассмотрим, например, уравнение

$$R\ [\cos 2mx,\ \sin(2n+1)x]=0, \tag{53}$$

левая часть которого — рациональная функция косинуса аргумента четной кратности и синуса аргумента нечетной кратности (m и n — целые числа). В этом случае согласно формулам (13) и (16) левую часть данного уравнения можно представить в виде рациональной функции относительно $\sin x$:

$$R\ [\cos 2mx,\ \sin(2n+1)x]=R\,[(-1)^m T_{2m}(\sin x),\ (-1)^n T_{2n+1}(\sin x)]=R^*(\sin x),$$

где R^* — рациональная функция от многочленов Чебышева первого рода, т. е. также рациональная функция относительно $\sin x$.

Таким образом, с помощью рационализирующей подстановки

$$\sin x=t\ \ (-1\le t\le 1)$$

решение тригонометрического уравнения (53) сводится к решению смешанной алгебраической системы

$$\begin{cases} R^*(t)=0, \\ -1\le t\le 1. \end{cases}$$

Зная решения этой системы $t = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и воспользовавшись указанной подстановкой, найдем корни уравнения (53), для чего решим простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin x = t_i,$$

откуда

$$x = (-1)^k \arcsin t_i + k\pi \; (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Рассмотрим однородное уравнение относительно $\sin 2mx$ и $\cos(2n+1)x$ (m, n — целые числа), т. е. такое, в котором сумма показателей у $\sin 2mx$ и $\cos(2n+1)x$ (степень однородности) во всех членах уравнения одинакова:

$$f[\sin 2mx, \; \cos(2n+1)x] = 0, \tag{54}$$

где $f(u, v)$ — однородная функция своих аргументов u и v.

Согласно формулам (14) и (15) имеем

$$\sin 2mx = \cos x \cdot (-1)^{m+1} U_{2m-1}(\sin x),$$

$$\cos(2n+1)x = \cos x \cdot (-1)^n U_{2n}(\sin x),$$

где $U(\sin x)$ — многочлен Чебышева второго рода. Следовательно, левую часть уравнения (54) можно представить в виде произведения $\cos^p x$ (где p — степень однородности функции f) на рациональную функцию относительно $\sin x$:

$$f[\sin 2mx, \; \cos(2n+1)x] = \cos^p x \cdot R(\sin x) = 0. \tag{55}$$

Уравнение (55) в области его определения эквивалентно совокупности двух уравнений

$$\cos^p x = 0$$

и

$$R(\sin x) = 0,$$

первое из которых приводится к простейшему тригонометрическому уравнению, а второе с помощью подстановки

$$\sin x = t \; (-1 \le t \le 1)$$

сводится к решению смешанной алгебраической системы

$$R(t) = 0, \; -1 \le t \le 1.$$

Уравнение вида

$$R(\sin^{2n} x, \; \cos^{2m} x) = 0,$$

где m и n — целые числа, рационализируется подстановкой $\cos 2x = t$.

В общем случае выбор наиболее эффективной рационализирующей подстановки обусловлен конкретным видом уравнения.

Например, уравнение вида

$$R(\sin x, \sqrt{1-p^2\sin^2 x}) = 0$$

можно с помощью рационализирующей тригонометрической подстановки

$$p\sin x = \sin\alpha \quad (\alpha = \arcsin(p\sin x))$$

привести к рациональному уравнению

$$R^*(\sin\alpha, \cos\alpha) = 0.$$

Уравнение вида

$$R(\sin x, \sqrt{\cos 2x}) = 0$$

с помощью рационализирующей тригонометрической подстановки

$$\sqrt{2}\sin x = \sin\alpha \ (\alpha = \arcsin(\sqrt{2}\sin x))$$

приводится к рациональному уравнению

$$R^{**}(\sin\alpha, \cos\alpha) = 0.$$

Указать все многообразие рационализирующих подстановок не представляется возможным.

Приведем пример более сложной рационализирующей подстановки.

Выражение

$$R(\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}) \ (0 < b < a)$$

рационализируется с помощью подстановки

$$\sin\alpha = t,$$

где α связано с x соотношениеем Гаусса:

$$\sin x = \frac{2a\sin\alpha}{(a+b)+(a-b)\sin^2\alpha}.$$

Действительно, в этом случае

$$\cos x = \frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2\alpha}}{(a+b)+(a-b)\sin^2\alpha}\cos\alpha.$$

Значит,

$$\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\alpha}{(a+b)+(a-b)\sin^2\alpha};$$

поэтому

$$R(\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}) = R^*(\sin\alpha) = R^*(t),$$

где R^* — рациональная функция.

П р и м е р 15. *Решить уравнение*

$$3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x.$$

Р е ш е н и е. Применяя формулу синуса удвоенного аргумента, перепишем уравнение следующим образом:

$$6\sin 2x\cos 2x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x.$$

С помощью универсальной рационализирующей подстановки

$$\operatorname{tg} x = t$$

полученное уравнение приводится к алгебраическому:

$$6\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1\right)\cdot t.$$

Последнее уравнение в результате преобразований примет вид

$$t(t^4 - 5t^2 + 6) = 0.$$

Определив его корни и возвращаясь к первоначальному неизвестному, получим

$$\operatorname{tg} x = 0,\ \operatorname{tg}^2 x = 2,\ \operatorname{tg}^2 x = 3,$$

откуда

$$x_1 = k\pi,\ x_2 = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{2} + m\pi,\ x_3 = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi,$$

где k, m и n — любые целые числа.

О т в е т. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{2} + m\pi$, $x_3 = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$ (k, m и n — любые целые числа).

П р и м е р 16. *Решить уравнение*

$$2\cos 2x + \sin 3x - 2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Левая часть данного уравнения есть целая рациональная функция относительно косинуса аргумента x четной кратности и синуса этого аргумента нечетной кратности. Следовательно, ее можно прелдставить в виде целой рациональной функции относительно $\sin x$. В самом деле,

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,\ \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

и уравнение принимает вид

$$2(1 - 2\sin^2 x) + 3\sin x - 4\sin^3 x - 2 = 0,$$

или

$$\sin x(4\sin^2 x + 4\sin x - 3) = 0,$$

откуда либо

$$\sin x = 0, \text{ т.е. } x = k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ ...),$$

либо

$$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0, \text{ т.е. } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \ (n = 0, \pm 1, \ ...).$$

Найденные значения x дают решения исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = k\pi,\ x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \ (k = 0, \pm 1, ...; \ n = 0, \pm 1, ...)$.

Пример 17. *Для каждого действительного параметра p найти все действительные корни уравнения*

$$2p\sin 2x = \cos 3x.$$

Решение. Запишем уравнение следующим образом:

$$2p\sin 2x - \cos 3x = 0.$$

Левая часть этого уравнения есть однородная функция (первой степени однородности) относительно синуса аргумента x четной кратности и косинуса этого аргумента нечетной кратности. Следовательно, ее можно представить в виде произведения косинуса x на целую рациональную функцию относительно $\sin x$. Действительно,

$$\sin 2x = \cos x \cdot 2\sin x, \ \cos 3x = \cos x(1 - 4\sin^2 x);$$

поэтому

$$2p\sin 2x - \cos 3x = 2p\cos x \cdot 2\sin x - \cos x(1 - 4\sin^2 x) = 0,$$

или

$$\cos x(4\sin^2 x + 4p\sin x - 1) = 0.$$

Отсюда либо

$$\cos x = 0, \text{ т. е. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, ...),$$

либо

$$\sin^2 x + p\sin x - \frac{1}{4} = 0. \tag{56}$$

Исследуем, при каких значениях p уравнение (56) имеет решения, и найдем их.

С помощью подстановки

$$\sin x = t \ (-1 \le t \le 1)$$

это уравнение приводится к смешанной системе

$$\begin{cases} t^2 + pt - \dfrac{1}{4} = 0, & (57) \\ -1 \le t \le 1. & (58) \end{cases}$$

Установим условия, при которых эта система имеет решения. Рассмотрим возможные случаи.

1^0. Уравнение (57) имеет корень $t_1 = -1$, если $p = \frac{3}{4}$. Этому корню соответствует следующее решение исследуемого уравнения (56) (определяемое из условия $\sin x = -1$):

$$x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \ (k = 0, \pm 1, ...).$$

При этом второй корень уравнения (57) равен $t_2 = \frac{1}{4}$ и является решением смешанной системы (57), (58). Ему соответствует следующее решение исследуемого уравнения $\left(\text{определяемое из условия } \sin x = \frac{1}{4}\right)$:

$$x_2 = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{4} \ (k = 0, \pm 1, ...).$$

Значит, если $p = \frac{3}{4}$, то уравнение (56) имеет решения

$$x_1 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ и } x_2 = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{4},$$

где k — любое целое число.

2^0. Уравнение (57) имеет корень $t_1 = 1$, если $p = -\frac{3}{4}$. Этому корню соответствует следующее решение исследуемого уравнения (определяемое из условия $\sin x = 1$):

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ (k = 0, \pm 1, ...).$$

При этом второй корень уравнения (57) равен $t_2 = -\frac{1}{4}$ и является решением смешанной системы (57), (58). Ему соответствует следующее решение исследуемого уравнения $\left(\text{определяемое из условия } \sin x = \frac{1}{4}\right)$:

$$x_2 = k\pi + (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{4}.$$

Значит, если $p = -\frac{3}{4}$, то уравнение (56) имеет решения

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ и } x_2 = k\pi + (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4},$$

где k — любое целое число.

3^0. Корни уравнения (57) не могут быть равными, так как его дискриминант $\Delta = \frac{p^2+1}{4}$ не равен нулю ни при каком действительном значении параметра p.

Будем считать в дальнейшем, что $p \neq \pm\frac{3}{4}$. Тогда, поскольку $\Delta = \frac{p^2+1}{4} > 0$, корни t_1 и t_2 уравнения (57) действительны, различны и оба отличны от -1 и 1. Смешанная система (57), (58), а следовательно, и уравнение (56) будут иметь решения только в трех случаях:

$$\text{I. } -1 < t_1 < 1 < t_2;$$

$$\text{II. } t_1 < -1 < t_2 < 1;$$

$$\text{III. } -1 < t_1 < t_2 < 1.$$

Применим теорему о расположении числа относительно корней квадратного трехчлена (см. гл. III, § 4, п. 2).

Случай I имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 1 - p - \frac{1}{4} > 0, \\ 1 + p - \frac{1}{4} < 0, \end{cases} \text{ т. е. когда } p < -\frac{3}{4}$$

(условие $\Delta > 0$ выполняется автоматически !). В этом случае решением уравнения (56) является только меньший корень t_1, т. е.

$$x = k\pi + (-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{p+\sqrt{p^2+1}}{2}\right) \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Случай II имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{cases} 1 - p - \frac{1}{4} < 0, \\ 1 + p - \frac{1}{4} > 0, \end{cases} \text{ т. е. когда } p > \frac{3}{4}.$$

При этом решением смешанной системы (57), (58) будет только больший корень t_2, а следовательно, решением уравнения (56) является

$$x = k\pi + (-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{p-\sqrt{p^2+1}}{2}\right)(k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Для того чтобы имел место случай III, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} 1-p-\dfrac{1}{4}>0, \\ 1+p-\dfrac{1}{4}>0, \\ -2+p<0, \\ 2+p>0, \\ \dfrac{p^2+1}{4}>0, \end{cases} \quad \text{т. е. чтобы } -\frac{3}{4}<p<\frac{3}{4}.$$

В этом случае

$$x = k\pi + (-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{p\pm\sqrt{p^2+1}}{2}\right).$$

Во всех остальных случаях смешанная система (57), (58), а значит, и уравнение (56) не имеют решений.

Ответ. Уравнение имеет решение $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ при любом p.

Кроме того, оно имеет еще одну серию решений при следующих значениях p:

если $p < -\dfrac{3}{4}$, то

$$x = k\pi + (-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{p+\sqrt{p^2+1}}{2}\right);$$

если $p = -\dfrac{3}{4}$, то

$$x = k\pi + (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4};$$

если $p=\frac{3}{4}$, то

$$x=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{1}{4};$$

если $p>\frac{3}{4}$, то

$$x=k\pi+(-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{p-\sqrt{p^2+1}}{2}\right);$$

уравнение имеет две серии решений, если $-\frac{3}{4}<p<\frac{3}{4}$:

$$x=k\pi+(-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{p\pm\sqrt{p^2+1}}{2}\right)\ (k=0,\pm1,\ldots).$$

Пример 18. *Найти все числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения*

$$\sin 3x=a\sin x+(4-2|a|)\sin^2 x \tag{59}$$

является корнем уравнения

$$\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x\cos 2x \tag{60}$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Решение. Обе части уравнений являются целыми рациональными функциями относительно косинуса аргумента x четной кратности и синуса того же аргумента нечетной кратности и, следовательно, могут быть представлены как целые рациональные функции относительно синуса x.

А именно, воспользовавшись формулами

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

и

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x,$$

представим уравнения (59) и (60) в виде

$$4\sin^3 x+(4-2|a|)\sin^2 x+(a-3)\sin x=0, \tag{61}$$

$$2\sin^2 x-\sin x=0. \tag{62}$$

С помощью подстановки

$$\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$$

уравнения (61) и (62) сводятся к смешанным системам.

Исходная задача эквивалентна следующей: найти все числа a, при каждом из которых всякое решение смешанной системы

$$\begin{cases} 4t^3+(4-2|a|)t^2+(a-3)t=0, \\ -1\le t\le 1 \end{cases} \tag{63}$$

является решением системы

$$\begin{cases} 2t^2-t=0, \\ -1\le t\le 1 \end{cases} \tag{64}$$

и, наоборот, всякое решение второй смешанной системы является решением первой.

Решения второй системы (64), т. е.

$$t=0 \text{ и } t=\frac{1}{2}, \tag{65}$$

подставим в первую систему (63) и найдем те значения a, при которых эти решения будут также решениями системы (63). Тогда получим: если $t=0$, то a — любое действительное число; если $t=\frac{1}{2}$, то уравнение смешанной системы (63) дает

$$a-|a|=0, \text{ т.е. } a\ge 0.$$

Итак, при $a\ge 0$ все решения системы (64) являются также решениями системы (63). При этих значениях a система (63) принимает вид

$$\begin{cases} t[4t^2+2(2-a)t+(a-3)]=0, \\ -1\le t\le 1. \end{cases} \tag{66}$$

Уравнение этой системы имеет корни

$$t=0,\ t=\frac{1}{2} \text{ и } t=\frac{a-3}{2}.$$

Найдем значения $a\ge 0$, при которых выражение $t=\frac{a-3}{2}$ дает решения (65) системы (63), либо не удовлетворяет неравенству $-1\le t\le 1$, т. е. смешанная система (66) не имеет решений.

1. Если $\frac{a-3}{2}=0$, то $a=3$.

2. Если $\frac{a-3}{2}=\frac{1}{2}$, то $a=4$.

3. Если $\frac{a-3}{2}>1$, то $a>5$.

4. Если $\frac{a-3}{2}<-1$, то $0 \le a < 1$.

Полученные значения a дают решение исходной задачи.

Ответ. $0 \le a < 1$, $a=3$, $a=4$, $a>5$.

Пример 19. *Решить неравенство*

$$2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x.$$

Решение. Применим универсальную рационализирующую подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда неравенство примет вид

$$2\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}>t,$$

или

$$\frac{t^3+2t^2-t-2}{1+t^2}<0.$$

Так как $1+t^2>0$ при любых t, то полученное дробное неравенство эквивалентно неравенству

$$t^3+2t^2-t-2<0,$$

или

$$(t-1)(t+1)(t+2)<0.$$

Решениями последнего неравенства являются значения t из промежутков

$$-1<t<1,\ t<-2.$$

Таким образом, исходное неравенство эквивалентно совокупности следующих простейших неравенств:

$$-1<\operatorname{tg} x<1 \text{ и } \operatorname{tg} x<-2,$$

решениями которых являются соответственно

$$k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4} \text{ и } k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi-\operatorname{arctg} 2,$$

где k — любое целое число.

Ответ. $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi-\operatorname{arctg} 2$ $(k=0,\pm 1,\ldots)$.

10. Введение вспомогательного угла при решении тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений (и неравенств) применяется введение вспомогательного угла. Этот прием мы проиллюстрируем на примере решения уравнения

$$a\sin x+b\cos x=c. \qquad (67)$$

В п. 7 мы указали один из возможных способов введения вспомогательного угла. Полагая

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\ \sin\varphi=\frac{b}{\rho},\ \cos\varphi=\frac{a}{\rho}$$

(из двух последних соотношений определяется вспомогательный угол φ), получим

$$a\sin x+b\cos x=\rho\sin(x+\varphi).$$

Таким образом, исходное уравнение приводится к виду

$$\rho\sin(x+\varphi)=c,$$

т. е. к простейшему уравнению

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\rho}.$$

Последнее уравнение (а следовательно, и исходное) будет иметь корни при условии $|c|\le\rho$, т.е. когда $c^2\le a^2+b^2$. Эти корни определяются по формуле

$$x=-\varphi+(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+k\pi,$$

где $k=0,\pm1,\ldots$

Если $c^2>a^2+b^2$, то исходное уравнение (67) корней не имеет.

Замечание. Рассмотренное уравнение можно решить и другими способами (например, с помощью универсальной рационализирующей подстановки $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, возведением обеих частей уравнения в квадрат и т д.).

Введение вспомогательного угла можно использовать в комбинации с другими приемами (например, с методом подстановки, с методом, основанном на равенстве одноименных функций, и т. д.).

В частности, уравнение

$$R(a\sin x+b\cos x,\ \sin(x+\varphi))=0, \tag{68}$$

где R — рациональная функция своих аргументов, а φ определяется из соотношений $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, с помощью подстановки

$$\sin(x+\varphi)=t\ (-1\le t\le1)$$

сводится к смешанной алгебраической системе

$$R^*(t)=0,\ -1\le t\le1,$$

где $R^*(t)$ — также рациональная функция.

Если $t = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ — решение этой смешанной системы, то все корни исходного уравнения находятся по формуле

$$x = -\varphi + (-1)^k \arcsin t_i + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Рассмотрим уравнение

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha x. \tag{69}$$

Левая часть этого уравнения с помощью введения вспомогательного угла φ, определяемого из соотношений

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

приводится к виду $\sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \varphi)$. Тогда рассматриваемое уравнение (69) запишется следующим образом:

$$\sin (x + \varphi) = \sin \alpha x$$

и, значит, в силу метода, основанного на равенстве одноименных функций, эквивалентно уравнению с целочисленным параметром

$$x + \varphi = (-1)^k \alpha x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots),$$

откуда при четном $k = 2m$ имеем

$$x = \frac{1}{\alpha - 1} [\varphi - 2m\pi],$$

а при нечетном $k = 2m + 1$ имеем

$$x = \frac{1}{\alpha + 1} [-\varphi + (2m + 1)\pi],$$

где $m = 0, \pm 1, \ldots$

Аналогично решаются уравнения

$$R(a \sin x + b \cos x, \ \cos (x + \varphi)) = 0$$

и

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \beta x,$$

где угол φ определяется из соотношений

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример 20. *Решить уравнение*

$$\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\sin 8x - \sqrt{3} \cos 8x = \sqrt{3} \sin 6x + \cos 6x.$$

Преобразуем обе части уравнения, вводя вспомогательные углы с помощью соотношений

$$\begin{cases}\sin\varphi_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\varphi_1 = \dfrac{1}{2}\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\sin\varphi_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Тогда $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6}$ и, следовательно,

$$\sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Согласно методу, основанному на равенстве одноименных функций, последнее уравнение эквивалентно уравнению с целочисленным параметром

$$8x - \frac{\pi}{3} = \left(6x + \frac{\pi}{6}\right)(-1)^k + k\pi \ (k = 0, \pm 1, ...).$$

Отсюда при $k = 2m$ имеем

$$x = \frac{\pi}{4} + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, ...),$$

а при $k = 2m + 1$ получим

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{m\pi}{7} \quad (m = 0, \pm 1, ...).$$

Ответ. $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + km$, $x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{m\pi}{7}$ $(m = 0, \pm 1, ...)$.

Пример 21. *Найти все решения уравнения*

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0, \tag{70}$$

заключенные между π и $\dfrac{3\pi}{2}$.

Решение. Так как

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x|,$$

то уравнение (70) на множестве

$$\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} \tag{71}$$

эквивалентно следующему:

$$-(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}\cos 3x=0. \qquad (72)$$

Вводя вспомогательный угол, имеем

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому уравнение (72) примет вид

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos 3x=0.$$

Воспользовавшись формулой суммы косинусов, получим

$$2\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Последнее уравнение выполняется, когда либо

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=0,\ \text{т. е. } x_1=\frac{5\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\ (k=0,\pm 1,\ldots), \qquad (73)$$

либо

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=0,\ \text{т. е. } x_2=\frac{3\pi}{8}+n\pi\ (n=0,\pm 1,\ldots), \qquad (74)$$

Из серии (73) множеству (71) принадлежит только значение $x_1=\dfrac{21\pi}{16}$ (при $k=2$), а из серии (74) — значение $x_2=\dfrac{11\pi}{8}$ (при $n=1$). Эти значения и дают решения исходной задачи.

Ответ. $x_1=\dfrac{21\pi}{16}$, $x_2=\dfrac{11\pi}{8}$.

Пример 22. *Решить уравнение*

$$4\cos^2 x=2+\frac{1}{2}\cos 2x(\sqrt{3}\sec 2x+\operatorname{cosec} 2x).$$

Решение. Воспользовавшись формулами

$$2\cos^2 x=1+\cos 2x,\quad \sec 2x=\frac{1}{\cos 2x},\quad \operatorname{cosec} 2x=\frac{1}{\sin 2x},$$

перепишем уравнение следующим образом:

$$\cos 2x\left[2-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos 2x}+\frac{1}{\sin 2x}\right)\right]=0.$$

Полученное уравнение в области его определения эквивалентно следующему:

$$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=4\sin 2x\cos 2x.$$

Так как $2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x$, то последнее уравнение примет вид

$$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\sin 4x,$$

или

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = \sin 4x.$$

Введем вспомогательный угол φ с помощью соотношений

$$\sin\varphi = \frac{1}{2},\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда находим $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Значит,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = \sin(2x+\varphi) = \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

и

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin 4x.$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению с целочисленным параметром

$$2x + \frac{\pi}{6} = (-1)^k 4x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Полагая $k = 2m$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$, получим $x = \frac{\pi}{12} - m\pi$.

Полагая $k = 2m+1$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$, находим $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{m\pi}{3}$.

Полученные значения x принадлежат области определения исходного уравнения и, следовательно, являются его корнями.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{12} + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$;

$x_2 = \frac{5\pi}{36} + \frac{m\pi}{3}$ $(m = 0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 23. *Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения*

$$\sin x + \cos(a+x) + \cos(a-x) = 2. \tag{75}$$

Решение. Применяя формулу суммы косинусов, преобразуем уравнение к следующему виду:

$$\sin x + 2\cos a\cos x = 2. \tag{76}$$

Это уравнение решим с помощью введения вспомогательного угла. Положим

$$\rho=\sqrt{1+(2\cos a)^2},\ \sin\varphi=\frac{2\cos a}{\sqrt{1+(2\cos a)^2}},\ \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+(2\cos a)^2}}.$$

Из двух последних соотношений определим вспомогательный угол φ. Так как $\cos\varphi>0$, то φ — угол первой или четвертой четверти. Значит, его можно записать как

$$\varphi=\arcsin\frac{2\cos a}{\sqrt{1+(2\cos a)^2}}.$$

Тогда уравнение (76) примет вид

$$\rho\sin(x+\varphi)=2,$$

или

$$\sin(x+\varphi)=\frac{2}{\sqrt{1+(2\cos a)^2}}. \qquad (77)$$

Последнее уравнение будет иметь корни при условии

$$\frac{2}{\sqrt{1+(2\cos a)^2}}\le 1$$

или, что то же самое, $|\cos a|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это неравенство выполняется при

$$-\frac{\pi}{6}+k\pi\le a\le\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k=0,\ \pm1,\dots).$$

При этих значениях a корнями уравнения (77) *являются*

$$x=-\varphi+(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+(2\cos a)^2}}+n\pi\ (n=0,\ \pm1,\dots).$$

Если $|\cos a|<\frac{\sqrt{3}}{2}$, то уравнение (77), а следовательно, и уравнение (75) корней не имеют.

Ответ. Если $-\frac{\pi}{6}+k\pi\le a\le\frac{\pi}{6}+k\pi$, то

$$x=-\arcsin\frac{2\cos a}{\sqrt{1+(2\cos a)^2}}+(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+(2\cos a)^2}}+n\pi$$

$(k=0,\ \pm1,\dots;\ n=0,\ \pm1,\dots)$; при остальных a корней нет.

Пример 24. *Решить уравнение*

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi\sin 2x).$$

Решение. Воспользовавшись формулой $2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$, перепишем данное уравнение следующим образом:

$$1-\cos(\pi\cos^2 x) = 1-\cos(\pi\sin 2x),$$

или

$$\cos(\pi\cos^2 x) = \cos(\pi\sin 2x).$$

Полученное уравнение эквивалентно уравнению с целочисленным параметром

$$\pi\cos^2 x = \mp\pi\sin 2x + 2k\pi \quad (n = 0, \pm 1, \ldots)$$

или

$$\cos^2 x = \mp\sin 2x + 2n.$$

Применяя формулу $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$, получим

$$\pm 2\sin 2x + \cos 2x = 4n - 1.$$

Последнее уравнение имеет корни при условии

$$(4n-1)^2 \le 5,$$

т. е. только при $n = 0$.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$2\sin 2x + \cos 2x = -1, \tag{78}$$

$$2\sin 2x - \cos 2x = 1. \tag{79}$$

Применим для их решения метод введения вспомогательного угла. Уравнение (78) приводится к простейшему уравнению

$$\sin(2x+\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ где } \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}},$$

откуда

$$2x + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + k\pi,$$

т. е. при k — четном ($k = 2m$) имеем

$$x = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \ldots),$$

а при k — нечетном ($k = 2m+1$) получим

$$x = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \ldots).$$

Уравнение (79) приводится к простейшему уравнению

$$\sin(2x+\varphi)=\frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ где } \varphi=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

откуда

$$2x-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=(-1)^k\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+k\pi,$$

т. е. при k — четном ($k=2m$) имеем

$$x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+m\pi \quad (m=0, \pm 1, \ldots),$$

а при k — нечетном ($k=2m+1$) получим

$$x=(2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m=0, \pm 1, \ldots).$$

Итак, все корни исходного уравнения задаются двумя сериями:

$$x=(2m+1)\frac{\pi}{2} \text{ и } x=\mp\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+n\pi,$$

где m и n — произвольные целые числа.

Ответ. $x_1=(2m+1)\frac{\pi}{2}$, $x_2=\mp\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+n\pi$,

$(m=0, \pm 1, \ldots;\ n=0, \pm 1, \ldots)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $8\sin^2 x\cos^2 x+4\sin 2x-1=(\sin x+\cos x)^2$.

Ответ. $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$.

2. $3\cos^2 2x-3\sin^2 x+\cos^2 x=0$.

Ответ. $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x_2=n\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}$.

3. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-7x\right)+\sin x=6\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)$.

Ответ. $x=\frac{k\pi}{3}$.

4. $(3-\operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x=2(1-\cos 2x)$.

Ответ. $x_1=k\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $x_2=(4n+1)\frac{\pi}{4}$.

5. $\sin x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 6(1-\cos x) + 5\sin x = 0.$

Ответ. $x_1 = 2k\pi$; $x_2 = (4n-1)\frac{\pi}{2}$; $x_3 = 2m\pi - 2\operatorname{arctg} 5.$

6. $8\cos^4 x - \cos 4x = 1.$

Ответ. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$

7. $3\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = 4\cos^2 x.$

Ответ. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$

8. $2\sqrt{3}\sin 2x(3+\cos 4x) = 7\sin 4x.$

Ответ. $x_1 = \frac{k\pi}{2}$; $x_2 = n\pi \pm \frac{\pi}{12}.$

9. $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x.$

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}.$

10. $\sin 2x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cos 2x = 1.$

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = \frac{5\pi}{12} + n\pi.$

11. $8\cos^4 x = 3 + 5\cos 4x.$

Ответ. $x = \frac{k\pi}{3}.$

12. $2\left[1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right] = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi - x}{2}.$

Ответ. $x_1 = (2k+1)\pi$; $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi.$

13. $(2\sin x - \cos x)(1+\cos x) = \sin^2 x.$

Ответ. $x_1 = (2k+1)\pi$; $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$

14. $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x.$

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

15. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5\operatorname{tg} 2x + 7.$

Ответ. $x_1 = k\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $x_2 = n\pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$.

16. $2(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3\sin 2x(\sin x + \cos x)$.

Ответ. $x_1 = (4k-1)\frac{\pi}{4}$; $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$.

17. $\sin 3x + \sin x = \sqrt{2}\cos x$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$.

18. $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$; $x_2 = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

19. $2\sin 4x - 3\sin^2 2x = 1$.

Ответ. $x = \frac{1}{4}\arccos\frac{3}{5} + \frac{k\pi}{2}$.

20. $\cos^2 x + \cos^2 \frac{3x}{4} + \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{4} = 2$.

Ответ. $x_1 = 2(2k+1)\pi$; $x_2 = (2n+1)\pi$; $x_3 = \frac{2\pi}{5} + \frac{4m\pi}{5}$.

21. $\left(2\sin^4 \frac{x}{2} - 1\right)\frac{1}{\cos^4 \frac{x}{2}} = 2$.

Ответ. $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

22. $3 - \operatorname{tg}^2 \frac{10\pi}{3}\cos\left[4\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)\right] + \frac{8}{\cos^2 \frac{9\pi}{4}}\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right) = 0$.

Ответ. $x = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

23. $2\sin(5\pi + x)\sin(5\pi - x)[1 - \cos(2x - \pi)] = 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\cos 2(\pi - x)$.

Ответ. $x = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

24. $2\sin x + \sin 3x = 2\cos x - \cos 3x$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$.

25. Найти все решения уравнения

$$\cos 2x+\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{2}}=0,$$

заключенные между $\frac{3\pi}{2}$ и 2π.

Ответ. $\frac{19\pi}{12}$.

26. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0,$$

заключенные в промежутке от π до $\frac{3\pi}{2}$.

Ответ. $\frac{21\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{8}$.

Решить уравнения:

27. $\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0$.

Ответ. $x_1=(2k+1)\pi$; $x_2=2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

28. $\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$.

Ответ. $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $x_3=2m\pi$.

29. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos 2x$.

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$; $x_2=2n\pi-\frac{\pi}{3}$.

30. $\operatorname{tg} 2x=4\cos^2 x-\operatorname{ctg} x$.

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$.

31. $3\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=0$.

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=n\pi-\operatorname{arctg} 3$.

32. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5}$; $x_2=2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

33. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=3\operatorname{ctg}\frac{2\pi-x}{4}$.

Ответ. $x_1=4k\pi$; $x_2=4n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

34. $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=(\sin x+\cos x)^2.$

Ответ. $x_1=k\pi;\ x_2=\dfrac{3\pi}{4}+n\pi.$

35. $\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1=0.$

Ответ. $x_1=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi;\ x_2=2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}.$

36. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)-\operatorname{ctg}(\pi\sin x)=0.$

Ответ. $x=2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}+k\pi.$

37. $6\cos^2 x+\cos 3x=\cos x.$

Ответ. $x_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ x_2=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}.$

38. $\sqrt{-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin 2x-\dfrac{1}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}.$

Ответ. $x_1=(8k-1)\dfrac{\pi}{4};\ x_2=(6n-1)\dfrac{\pi}{3};\ x_3=(6m+4)\dfrac{\pi}{3}.$

39. $\sqrt{\sin 3x+\cos x-\sin x}=\sqrt{\cos x-\sin 2x}.$

Ответ. $x_1=2k\pi;\ x_2=(6n+5)\dfrac{\pi}{3}.$

40. $\sqrt{\cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x-3\cos^2 x+\cos x+\dfrac{13}{4}}=\sqrt{3}\sin x+\dfrac{1}{2}.$

Ответ. $x_1=(8k+1)\dfrac{\pi}{4};\ x_2=(8n+3)\dfrac{\pi}{4};\ x_3=(12m+5)\dfrac{\pi}{6}.$

41. $\sqrt{\cos 3x+\sin 3x-\cos^2 x+\cos x+\dfrac{5}{4}}=\sin x+\dfrac{1}{2}.$

Ответ. $x_1=(8k+1)\dfrac{\pi}{4};\ x_2=(8n+3)\dfrac{\pi}{4}.$

42. $\operatorname{tg} 2x\ \operatorname{tg} 7x=1.$

Ответ. $x=(2p+1)\dfrac{\pi}{18}$, где p — любое целое число, кроме чисел вида $9m+4$ $(m=0,\pm 1,\ldots)$.

43. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x.$

Ответ. $x_1=k\pi;\ x_2=n\pi-\dfrac{\pi}{4}.$

44. $\operatorname{tg} x=(2+\sqrt{3})\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}.$

Ответ. $x_1=3k\pi;\ x_2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}.$

45. $\cos^2(x-\gamma)+\cos^2(0{,}5x+\beta-\gamma)-$

$$-2\cos(0{,}5x-\beta)\ \cos(x-\gamma)\cos(0{,}5x+\beta-\gamma)=\frac{3}{4}.$$

Ответ. $x=2\beta\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi.$

46. $\sqrt{17\sec^2 x+16\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x\sec x-1\right)}=2\operatorname{tg} x(1+4\sin x).$

Ответ. $x_1=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{6};\ x_2=(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{1}{4}+n\pi.$

47. $\sin 4x\sin x-\sin 3x\ \sin 2x=\dfrac{1}{2}\cos 3x+(1+\cos x)^{\frac{1}{2}}.$

Ответ. $x=2k\pi\pm\arccos(2-2\sqrt{2}).$

48. $\cos^4 x+\sin^4 x=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Ответ. $x=\dfrac{k\pi}{2}\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{1}{3}.$

49. $(\sin x+\cos x)^2=\operatorname{tg} x\cos 2x.$

Ответ. $x=k\pi-\dfrac{\pi}{4}.$

50. $\sqrt{\sin x}+\cos x=0.$

Ответ. $x=(2k+1)\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.$

51. $\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}+2\operatorname{tg} x=0.$

Ответ. $x_1=k\pi;\ x_2=n\pi\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{5}{7}}.$

52. $6\operatorname{tg} x+5\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x.$

Ответ. $x_1=k\pi\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3};\ x_2=n\pi\pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

53. $5(\sin x+\cos x)+\sin 3x-\cos 3x=2\sqrt{2}(2+\sin 2x)$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

54. $(\operatorname{tg} x+\sin x)^{\frac{1}{2}}+(\operatorname{tg} x-\sin x)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos x$.

Ответ. $x_1=k\pi$; $x_2=(12n+1)\frac{\pi}{6}$.

55. $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 3x=4$.

Ответ. $x=k\pi\pm\operatorname{arctg}\sqrt{11}$.

56. $\sin x-\sin 3x=\cos 2x\sin 3x$.

Ответ. $x_1=k\pi$; $x_2=(2n+1)\frac{\pi}{4}$.

57. $\cos^2 x+\cos\frac{x}{2}\cos^2 x-\cos\frac{x}{2}-1=2\left(\sin\frac{x}{4}-\cos x\right)^2$.

Ответ. $x=2(4k+1)\pi$.

58. $\left(\cos\frac{x}{4}-2\sin x\right)\sin x+\left(1+\sin\frac{x}{4}-2\cos x\right)\cos x=0$.

Ответ. $x=2(4k+1)\pi$.

59. $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2+\sin x}=2\cos x$.

Ответ. $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$.

60. $2\sin^2 x+\sin(x^2)=1$.

Ответ. $x=\pm 1\pm\sqrt{1+\frac{\pi}{2}+2p\pi}$ $(p=0,1,2,\ldots)$.

61. $\cos 5x\cos 4x+\cos 4x\cos 3x-\cos^2 2x\cos x=0$.

Ответ. $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $x_2=\frac{n\pi}{2}\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$.

62. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}}{\cos x}=4\sin x,$$

лежащие между 0 и 2π.

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{6}$; $x_2=\frac{3\pi}{10}$; $x_3=\frac{7\pi}{6}$; $x_4=\frac{13\pi}{10}$.

Решить уравнения:

63. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0.$

Ответ. $x_1=(2k+1)\pi;\ x_2=\frac{\pi}{2}+n\pi;\ x_3=\frac{2m\pi}{5}.$

64. $\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\sin 2x\cos 2x\operatorname{ctg} 3x=0.$

Ответ. $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{4};\ x_2=(6n\pm 1)\frac{\pi}{6}.$

65. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x.$

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi.$

66. $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9}{8}.$

Ответ. $x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right).$

67. $\sin 4x\sin 6x=2(\sin x+\sin 5x).$

Ответ. $x_1=\frac{k\pi}{3};\ x_2=(2n+1)\frac{\pi}{4}.$

68. $\cos^2 x\sin 6x+2\sin^2 x\sin 3x\cos 3x+\left(\frac{\cos^2 x}{\cos 3x}-\sin^2 x\right)\sin 6x=0.$

Ответ. $x=\frac{k\pi}{3}.$

69. $\operatorname{arctg}\sqrt{x(x+1)}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\pi}{2}.$

Ответ. $x_1=0;\ x_2=-1.$

70. $\operatorname{arctg}(2+\cos x)-\operatorname{arctg}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$

Ответ. $x=(2k+1)\pi.$

71. $\cos^6 x+\sin^6 x=4\sin^2 2x.$

Ответ. $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{19}}.$

72. $\sin^2 x+\sin 2x\sin 4x+\ldots+\sin nx\sin n^2x=1.$

Ответ. $x=\frac{2k\pi}{n(n+1)}\ (k=0,\pm 1,\ldots).$

73. $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{ctg} x}=2\sin x.$

Ответ. $x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}.$

74. $\sin^6 2x+\cos^6 2x=\dfrac{7}{16}.$

Ответ. $x=\dfrac{k\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{12}.$

75. $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}(\sin 6x+\cos 8x).$

Ответ. $x_1=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{7};\ x_2=\dfrac{\pi}{4}+n\pi.$

76. $4\cos^2(2-6x)+16\cos^2(1-3x)=13.$

Ответ. $x=\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}.$

77. $\cos(10x+12)+4\sqrt{2}\sin(5x+6)=4.$

Ответ. $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{20}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{k\pi}{5}.$

78. $\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos 5x=\sin 3x\cos 5x.$

Ответ. $x_1=\dfrac{k\pi}{3};\ x_2=\dfrac{2n\pi}{9}.$

79. $(\cos 5x+\cos 7x)^2=(\sin 5x+\sin 7x)^2.$

Ответ. $x_1=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2};\ x_2=\dfrac{n\pi}{6}\pm\dfrac{\pi}{24}.$

80. $\sin 2x\sin 4x\sin 6x=\dfrac{1}{4}\sin 4x.$

Ответ. $x_1=\dfrac{k\pi}{4};\ x_2=\dfrac{n\pi}{2}\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{1+\sqrt{5}}{4};$

$$x_3=\frac{m\pi}{2}\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

81. $\sin 3t\cos t=\dfrac{3}{2}\operatorname{tg} t.$

Ответ. $t_1=k\pi;\ t_2=n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}.$

82. $\sin y+\cos 3y=1-2\sin^2 y+\sin 2y.$

Ответ. $y_1=2k\pi;\ y_2=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{n\pi}{2},\ y_3=2m\pi-\dfrac{\pi}{2}.$

83. $2\sin 4x + 16\sin^3 x\cos x + 3\cos 2x - 5 = 0.$

Ответ. $x = k\pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5} + \frac{\pi}{4}.$

84. $\cos x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 3x.$

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2};\ x_3 = \frac{\pi}{16} + \frac{m\pi}{4}.$

85. $\sin 3x + 4\sin^3 x + 4\cos x = 5.$

Ответ. $x = \arccos\frac{4}{5} + 2k\pi.$

86. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x.$

Ответ. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}.$

87. $$\left(\sqrt{\cos x} - 4\sqrt[4]{2}\ \sqrt[4]{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + 5\sqrt[4]{2}\right)^2 -$$
$$-2\sqrt{\cos x}\left(\sqrt{\cos x} - 4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + 5\sqrt[4]{2}\right) - \sin x = 0.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$

88. $x = \sin\frac{\pi(x+1)}{3}\sin\frac{\pi(1-x)}{3},\ 0 \le x \le 1.$

Ответ. $x = \frac{1}{2}.$

89. $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y = 3 + \cos 2y.$

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ y_1 = (2n+1)\pi,\ y_2 = 2n\pi.$

Решить системы уравнений:

90. $$\begin{cases} \frac{1}{2}\cos y(\cos x - \cos y) = \cos\frac{x+y}{2}\sin y\sin\frac{y-x}{2}, \\ 2y - x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi,\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

91. $\begin{cases} \sin x + \sec y = 2, \\ \sin x \sec y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ. $x = (-1)^k \arcsin \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} + k\pi,\ y = \pm \arccos(2-\sqrt{2}) + 2n\pi.$

92. $\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ \cos x = \sin y \end{cases}$ $(0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi).$

Ответ. $x_1 = \dfrac{\pi}{3},\ y_1 = \dfrac{\pi}{6};\ x_2 = 0,\ y_2 = \dfrac{\pi}{2}.$

93. $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2. \end{cases}$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{6} - k\pi.$

94. $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{18}, \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{18}\right)\sin\left(y + \dfrac{\pi}{9}\right) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ. $x_1 = \dfrac{7\pi}{36} + k\pi,\ y_1 = \dfrac{5\pi}{36} + k\pi;\ x_2 = n\pi - \dfrac{11\pi}{36},\ y_2 = n\pi - \dfrac{13\pi}{36}.$

95. $\begin{cases} |\sin x| \sin y = -\dfrac{1}{4}, \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ $(0 < x < 2\pi,\ \pi < y < 2\pi).$

Ответ. $x_1 = \dfrac{5\pi}{6},\ y_1 = \dfrac{7\pi}{6};\ x_2 = \dfrac{\pi}{6},\ y_2 = \dfrac{11\pi}{6};$

$$x_3 = \frac{7\pi}{6},\ y_3 = \frac{7\pi}{6};\ x_4 = \frac{11\pi}{6},\ y_4 = \frac{11\pi}{6}.$$

96. $\begin{cases} |\sin x| = a \sin y, \\ \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} y \end{cases}$ $(a > 0,\ 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi).$

Ответ. $x_1 = \pi;\ y_1 = \pi$ при любом $a > 0$; если $1 \le a \le 2$, то решениями являются также

$$x_2 = \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3}},\ y_2 = \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3a^2}};$$

$$x_3 = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3}},\ y_3 = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3a^2}};$$

$$x_4 = \pi + \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3}},\ y_4 = \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3a^2}};$$

$$x_5 = 2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3}},\ y_5 = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{4-a^2}{3a^2}}.$$

97. $\begin{cases} \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

Ответ. $x = \frac{5\pi}{24} - \frac{k\pi}{2},\ y = \frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2}.$

98. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin\alpha, \\ \cos x + \cos y = \cos\alpha. \end{cases}$

Ответ. $x = \alpha \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ y = \alpha \mp \frac{\pi}{3} + 2(k-n)\pi;$ k и n — любые целые числа; в обеих формулах берутся одновременно либо верхние, либо нижние знаки.

99. $\begin{cases} \sin(x-y) = 3\sin x\cos y - 1, \\ \sin(x+y) = -2\cos x\sin y. \end{cases}$

Ответ. $x = \frac{1}{2}\left[(-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + (-1)^n \arcsin\frac{4}{5} + (k+n)\pi\right],$

$$y = \frac{1}{2}\left[(-1)^k \arcsin\frac{2}{5} - (-1)^n \arcsin\frac{4}{5} + (k-n)\pi\right].$$

100. $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1. \end{cases}$

Ответ. $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 4k\pi,\ y_1 = 2\pi + 4n\pi;\ x_2 = 2\pi + 4p\pi,\ y_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 4q\pi.$

101. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = 3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ y_1=\operatorname{arctg}2+n\pi;\ z_1=\frac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg}2-(k+n)\pi;$

$$x_2=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ y_2=-\operatorname{arctg}2+n\pi,\ z_2=\frac{5\pi}{4}+\operatorname{arctg}2-(k+n)\pi.$$

102. $\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=0,\\ \cos(x-y-z)=\frac{1}{2},\\ x+y+z=\pi.\end{cases}$

Ответ. $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ y_1=\mp\frac{\pi}{3}+(2n-k)\pi,\ z_1=\pi-2n\pi;$

$$x_2=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ y_2=2m\pi,\ z_2=\pi\mp\frac{\pi}{3}-(2m+k)\pi.$$

103. $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}y=3,\\ |x-y|=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

Ответ. $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\frac{k\pi}{2},$

$$y=\frac{\pi}{6}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\frac{k\pi}{2}.$$

104. $\begin{cases}\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x=2\sin^2y,\\ \sin^2y+\cos^2z=1.\end{cases}$

Ответ. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ \ y=\frac{\pi}{2}+l\pi,\ z=\frac{\pi}{2}+m\pi.$

105. Сколько корней на отрезке $0\le x\le\pi$ имеет уравнение

$$\sin x+2\sin 2x=3+\sin 3x?$$

Ответ. Уравнение корней не имеет.

106. Найти все пары чисел a и b, при которых всякая пара чисел x, y $\left(x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,\ y\ne\frac{\pi}{2}+n\pi;\ k=0,\pm1,\dots,n=0,\pm1,\dots\right)$ удовлетворяющая уравнению $x+y=a$, удовлетворяет также уравнению

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=b.$$

Ответ. $a=\frac{\pi}{4}+m\pi,\ b=1\ (m=0,\pm1,\dots).$

107. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}.$$

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi$ (в формулах одновременно берутся либо оба верхних знака, либо оба нижних).

108. Найти все значения параметров a и b, для которых уравнение

$$\frac{x^2+5}{2}=x-2\cos(ax+b)$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ. a — любое число, $b=(2k+1)\pi-a$.

109. Найти все числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$a\cos 2x+|a|\cos 4x+\cos 6x=1$$

является корнем уравнения

$$\sin x\cos 2x=\sin 2x\cos 3x-\frac{1}{2}\sin 5x,$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ. $a<-1,\ a=0$.

110. Найти все числа a, при каждом из которых всякий корень уравнения

$$4\cos^2 x-\cos 3x=a\cos x-|a-4|(1+\cos 2x)$$

является корнем уравнения

$$2\cos x\cos 2x=1+\cos 2x+\cos 3x,$$

и, наоборот, всякий корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Ответ. $a=4,\ a>5$.

111. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\cos 6x+\cos 8x=0,$$

$$\cos 3x=2\sin^2 2x,$$

$$|x|<5.$$

Ответ. $\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2}$.

112. Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

$$\cos 13x=\cos x,$$

$$\cos 2x+\sin 5x=1,$$

$$|x|<3.$$

Ответ. $0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$.

113. Доказать, что уравнение

$$\sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = n - 1$$

при любом целом $n > 2$ не имеет решений.

114. При каких значениях b уравнение

$$\frac{b\cos x}{2\cos 2x - 1} = \frac{b + \sin x}{(\cos^2 x - 3\sin^2 x)\operatorname{tg} x}$$

имеет решения? Найти эти решения.

Ответ. $x = (-1)^k \arcsin\dfrac{b}{b-1} + k\pi$ при $b < \dfrac{1}{2}$, $b \neq -1$, $b \neq \dfrac{1}{3}$, $b \neq 0$.

115. При каких значениях a уравнение

$$\frac{a^2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}$$

имеет решения? Найти эти решения.

Ответ. $x = \pm\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{1+a^2}} + k\pi$ при $|a| > 1$, $a \neq \sqrt{3}$.

116. При каких a уравнение

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

имеет единственное решение?

Ответ. Когда число a иррационально.

117. Найти все решения уравнения

$$(\sin x + \cos x)\sin 2x = a(\sin^3 x + \cos^3 x),$$

расположенные между $\dfrac{\pi}{2}$ и π. При каких a это уравнение имеет не более одного решения, удовлетворяющего условию $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$?

Ответ. При $-\dfrac{2}{3} < a \leq 0$ уравнение имеет три корня на отрезке $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$: $x_1 = \dfrac{3\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2a}{2+a}$, $x_3 = \pi + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2a}{2+a}$; при остальных значениях a — лишь один корень $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

118. При каких значениях a уравнение

$$4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

имеет решения? Найти эти решения.

Ответ. $x = k\pi \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a^2 - 2}{2}$ при $|a| \leq 2$.

119. Для каждого действительного числа $m > 0$ найти все действительные решения уравнения $\sin 4x = m \operatorname{tg} x$.

Ответ. $x = k\pi$ при любом $m > 0$; кроме того,

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{1+2m}-1}{2} \text{ при } 0 < m \le 4.$$

120. Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения

$$\sin x + \sqrt{2}\sin(a - x) = 1.$$

Ответ. Если $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le a \le \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$, то

$$x = -\arcsin\frac{\sqrt{2}\sin a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}} + (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}} + n\pi;$$

при других a решений нет.

121. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a^2, \\ \sin y \cos x = a \end{cases}$$

имеет решения, и найти эти решения.

Ответ. Если $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le a \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, то

$$x = \frac{1}{2}[(-1)^n \arcsin(a^2 + a) + (-1)^k \arcsin(a^2 - a) + (n+k)\pi],$$

$$y = \frac{1}{2}[(-1)^n \arcsin(a^2 + a) - (-1)^k \arcsin(a^2 - a) + (n-k)\pi].$$

122. Указать все действительные значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos 2x + 2a\cos x = 2a^2 - 3$$

имеет решения.

Ответ. $\frac{2}{\sqrt{5}} \le |a| \le 2.$

123. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + a(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x}) + 3 = 0.$$

Ответ. Если $a < -\frac{5}{2}$, то $x_{1,2} = k\pi + \operatorname{arctg} t_{1,2}$ где

$$t_{1,2} = \frac{1}{16}\left[\sqrt{a^2-4} - a \pm \sqrt{2(a^2 - 10 - a\sqrt{a^2-4})}\right]^2;$$

если $a=-\frac{5}{2}$, то $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$; если $a>-\frac{5}{2}$, то уравнение не имеет корней $(k=0,\pm 1,\ldots)$.

124. Определить, при каких значениях a и b система

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x=a\operatorname{ctg} x,\\ \operatorname{tg} 2x=b\cos y\end{cases}$$

имеет решения, и найти эти решения.

Ответ. Если $a\geq 0,\ a\neq 1,\ 2\sqrt{a}\leq |b(1-a)|$, то

$$x_1=\operatorname{arctg}\sqrt{a}+k\pi,\ \ y_1=\pm\arccos\frac{2\sqrt{a}}{b(1-a)}+2n\pi;$$

$$x_2=-\operatorname{arctg}\sqrt{a}+k\pi,\ \ y_2=\pm\arccos\frac{2\sqrt{a}}{b(1-a)}+2n\pi.$$

125. При каких значениях α всякая пара чисел x, y, являющаяся решением системы уравнений

$$\begin{cases}x\sin 2\alpha+y(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha,\\ x(1+\cos 2\alpha)-y\sin 2\alpha=0,\end{cases}$$

является одновременно и решением системы уравнений

$$\begin{cases}x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin\alpha,\\ x\cos\alpha-y\sin\alpha=0?\end{cases}$$

Ответ. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

126. Найти все пары (a, b), для которых всякая пара (x, y), где $x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\pm 1,\ldots)$, удовлетворяющая уравнению

$$x+y=a,$$

удовлетворяет также уравнению

$$\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=b.$$

Ответ. $a=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ b=1\ (n=0,\pm 1,\ldots)$.

127. Доказать неравенство

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2}\leq\sin^2 x+\sin x\cos x\leq\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

128. Доказать, что имеет место неравенство

$$\sin x+2\sin 2x<3+\sin 3x,$$

если $0\leq x\leq\pi$.

Решить неравенства:

129. $\cos^2 x(\operatorname{tg} x+1)>1$.

Ответ. $k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi.$

130. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin x + 2\cos x} \quad (0 < x < \pi).$

Ответ. $0 < x < \frac{\pi}{2};\ 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \pi.$

131. $\cos[\pi(x^2-10x)] - \sqrt{3}\sin[\pi(x^2-10x)] > 1.$

Ответ. $5-\sqrt{25+2p} < x < 5-\sqrt{25+2p-\frac{2}{3}},$

$$5+\sqrt{25+2p-\frac{2}{3}} < x < 5+\sqrt{25+2p},$$

где p — целое число и $p \geq -12.$

132. $\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x > \cos 2x.$

Ответ. $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi.$

133. $2\sin^2 x + 2\cos 2x - (2+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} > 0.$

Ответ. $2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{4} + 2(k+1)\pi.$

134. $2\operatorname{tg} 2x \leq 3\operatorname{tg} x.$

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x \leq k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$

135. $\frac{2+\sqrt{2}-4\cos^2 x}{\sin x - \cos 2x} \geq 2.$

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$

136. $\sin^2 x \operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2} > \sin^2 x.$

Ответ. $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} < x < 0,\ 0 < x < \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$

137. $\cos^2\left(2-\frac{y}{2}\right) - \sin^2\left(2+\frac{y}{2}\right) \geq \sqrt{\frac{\cos y}{1+\operatorname{ctg}^2 y}}.$

Ответ. $y = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

138. $\operatorname{ctg}(5+3x)(\operatorname{ctg}5+\operatorname{ctg}3x) \geq \sqrt{\operatorname{ctg}3x}-1.$

Ответ. $x=\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}.$

139. $y-|\sec x|-\sqrt{1-y-x^2} \geq 0.$

Ответ. $x=0,\ y=1.$

140. На координатной плоскости указать все точки, координаты которых x, y таковы, что выражение

$$\cos 2(t+x)+2\sin(t+x)\cos y-\frac{1}{2}(\cos y-1)^2-\sin x$$

при всяком значении t меньше $\dfrac{1}{2}$, и изобразить область, образуемую этими точками.

Указание. Свести к неравенству $\sin x-\cos y>0.$

141. На координатной плоскости указать все точки с координатами (x, y), для каждой из которых существует хотя бы одно значение t, при котором выражение

$$\cos(t+3x+y)-\cos(t+x-y)-\sin^2(t+2x)$$

больше $\dfrac{1}{4}$, и изобразить область, образуемую этими точками.

Указание. Свести к неравенству $|\sin(x+y)|>\dfrac{1}{2}.$

142. Найти все действительные значения a, при которых для всех x имеет место неравенство

$$(a^2+a-2)\cos 2x+2(a+5)|\sin x|-(a^2+a-6) \geq 0.$$

Ответ. $|a| \leq 3.$

143. Найти все x, удовлетворяющие условию

$$\frac{\pi}{4} \leq \left|3x+\frac{\pi}{4}\right| < \pi$$

и являющиеся решением уравнения

$$\cos x-\sin 3x=4\cos^3 x.$$

Ответ. $x_1=-\dfrac{\pi}{4},\ x_2=-\dfrac{\pi}{3}.$

144. Найти все x, удовлетворяющие условию

$$\frac{\pi}{2} < \left|3x-\frac{\pi}{2}\right| \leq \pi$$

и являющиеся решением уравнения

$$1+\cos x+\cos 2x=\sin x+\sin 2x+\sin 3x.$$

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{2}.$

ГЛАВА V

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Функцию $y = f(x)$ принято называть ***алгебраической***, если для нее существует такой многочлен $P(x, y)$ от двух переменных, что при любом x выполняется равенство

$$P[x,\ f(x)] = 0.$$

Всякая не алгебраическая функция называется ***трансцендентной***.

Примерами *элементарных трансцендентных функций* могут служить тригонометрические, а также рассматриваемые в данной главе показательная и логарифмическая функции. Уравнения и неравенства, с ними связанные, называются трансцендентными и, как правило, не решаются элементарными методами.

Наиболее эффективными методами решения таких уравнений и неравенств являются приближенные методы (графические, численные и т. д.), в последнее время достаточно интенсивно развивающиеся в связи с возрастающими возможностями современных быстродействующих электронных машин.

В данной главе рассмотрены основные свойства показательной и логарифмической функций и показано, как эти свойства могут быть использованы при решении некоторых трансцендентных уравнений и неравенств, содержащих показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Применяемые при этом методы решения, как правило, основаны на специфических особенностях рассматриваемых уравнений и неравенств.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

1. Показательная функция

Функция, заданная формулой

$$y = a^x, \text{ где } a > 0,$$

называется ***показательной функцией***.

Показательная функция в области действительных чисел при отрицательном основании a в элементарной математике не рассматривается, так как не рассматриваются иррациональные степени отрицательных чисел.

Также не рассматривается эта функция при $a = 0$.

При $a = 1$ функция $y = a^x$ имеет вид $y = 1$ при любом x.

Все основные свойства показательной функции непосредственно вытекают из свойств степени с любым действительным показателем*.

Перечислим некоторые из этих свойств.

1^0. *Областью определения показательной функции служит вся числовая ось* $-\infty < x < +\infty$.

2^0. *Показательная функция* $y = a^x$ *положительна во всей области своего определения и принимает все положительные значения.*

Это свойство доказывается в курсе высшей математики и означает, что *если* $0 < a \neq 1$, *то для любого данного положительного числа y существует единственное действительное число x такое, что x-я степень числа a равна y*: $a^x = y$.

3^0. *Если* $a > 1$, *то* $a^x > 1$ *при* $x > 0$ *и* $a^x < 1$ *при* $x < 0$. *Если же* $0 < a < 1$, *то, наоборот,* $a^x < 1$ *при* $x > 0$ *и* $a^x > 1$ *при* $x < 0$.

4^0. *Если* $x = 0$, *то* $a^x = 1$ *при любом основании* $a > 0$.

5^0. *При* $a > 1$ *показательная функция* $y = a^x$ *является монотонно возрастающей, а при* $0 < a < 1$ *— монотонно убывающей.*

6^0. *Если* $0 < a \neq 1$, *то равенство степеней числа a имеет место лишь при условии равенства их показателей,* т. е. из равенства $a^b = a^c$ следует, что $b = c$.

7^0. *Если* $a < b$, *то* $a^x < b^x$ *при* $x > 0$ *и* $a^x > b^x$ *при* $x < 0$.

При $x = 0$ значения a^x и b^x совпадают (и равны 1).

Отметим еще одно свойство функции $y = a^x$.

Кривая a^x *выпукла вниз в интервале* $-\infty < x < +\infty$.

Действительно, неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

---

* Заметим, что строгое определение степени с иррациональным показателем и доказательства всех ее основных свойств даются в курсе высшей математики.

для $x_1 < x_2$ в данном случае означает

$$\sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2},$$

что выполняется, так как среднее геометрическое чисел a^{x_1} и a^{x_2} (неравных и положительных) меньше их среднего арифметического.

Учитывая перечисленные свойства функции $y = a^x$, построим ее графики при $a > 1$ и $0 < a < 1$. Графики имеют вид кривых, изображенных на рис. 167. Эти кривые называют ***экспонентами***.

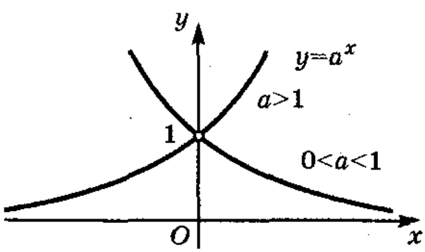


Рис. 167

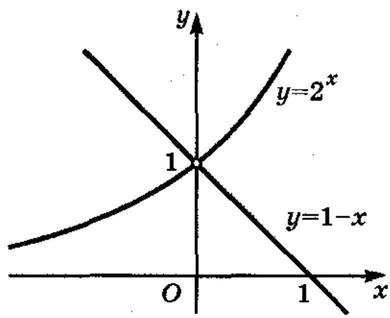


Рис. 168

Пример 1. *Решить уравнение*

$$x \cdot 2^x = x(3 - x) + 2(2^x - 1).$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$(x-2)2^x = (x-2)(1-x),$$

или

$$(x-2)\,[2^x - (1-x)] = 0.$$

Отсюда $x - 2 = 0$, $2^x = 1 - x$. Последнее уравнение имеет единственный корень $x = 0$, так как при $x < 0$ левая часть этого уравнения меньше единицы, а правая — больше единицы; при $x > 0$ левая часть больше единицы, а правая — меньше единицы (рис. 168).

Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

2. Логарифмы и их свойства

Для любого действительного числа $N > 0$ и действительного числа a, удовлетворяющего условию $0 < a \neq 1$, существует и притом единственное число b такое, что

$$a^b = N \ (0 < a \neq 1,\ N > 0). \qquad (1)$$

Это число b называют ***логарифмом*** числа N по основанию a и обозначают

$$b = \log_a N \ (0 < a \neq 1,\ N > 0). \qquad (2)$$

Соотношения (1) и (2) равносильны друг другу.

Таким образом, имеет место следующее определение.

Логарифмом данного числа $N (N > 0)$ по данному основанию $a (0 < a \neq 1)$ называется показатель степени, при возведении в которую числа a получается данное число N:

$$a^{\log_a N} = N \ (0 < a \neq 1,\ N > 0). \qquad (3)$$

Соотношение (3), которое следует из определения логарифма, будем называть ***основным логарифмическим тождеством.***

Логарифмы при отрицательном основании в элементарной математике не рассматриваются.

В области действительных чисел *отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют.* В самом деле, любая действительная степень положительного числа a является положительным числом, поэтому ни при каком показателе степень не может быть ни отрицательным числом, ни нулем.

Перечислим основные свойства логарифмов.

1^0. *Если логарифмы двух чисел по одному и тому же положительному основанию, отличному от* 1, *равны, то равны и сами эти числа*:

$$\log_a N_1 = \log_a N_2 \Rightarrow N_1 = N_2 \ (0 < a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0). \qquad (4)$$

2^0. *Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов сомножителей*:

$$\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2 \ (0 < a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0). \qquad (5)$$

Замечание. В случае, если $N_1 \cdot N_2 > 0$ (например, $N_1 < 0$ и $N_2 < 0$), имеет место формула

$$\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a |N_1| + \log_a |N_2| \ (0 < a \neq 1,\ N_1 \cdot N_2 > 0). \qquad (6)$$

Формулу (5) можно обобщить на случай произвольного числа сомножителей. А именно, для любого натурального k и любых положительных чисел $N_1,\ N_2, ...,\ N_k$ имеет место тождество

$$\log_a (N_1 \cdot N_2 ... N_k) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + ... + \log_a N_k \ \ (0 < a \neq 1), \qquad (7)$$

или

$$\log_a \prod_{i=1}^{k} N_i = \sum_{i=1}^{k} \log_a N_i, \tag{8}$$

где символ $\prod\limits_{i=1}^{k}$ означает произведение сомножителей, а символ $\sum\limits_{i=1}^{k}$ означает суммирование.

3^0. *Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:*

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2 \quad (0 < a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0). \tag{9}$$

4^0. *Логарифм степени положительного числа равен показателю степени, умноженному на логарифм данного числа:*

$$\log_a N^k = k \log_a N \ (0 < a \neq 1,\ N > 0). \tag{10}$$

При четном $k\,(k = 2n)$ имеет место следующая формула:

$$\log_a N^{2n} = 2n \log_a |N| \ (0 < a \neq 1,\ N \neq 0). \tag{11}$$

5^0. *Логарифм корня из положительного числа равен логарифму подкоренного выражения, деленному на показатель корня:*

$$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k} \log_a N \ (0 < a \neq 1,\ N > 0). \tag{12}$$

6^0. *Логарифмы числа N при основаниях a и b связаны соотношением*

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \ (0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1,\ N > 0). \tag{13}$$

(Формула (13) получается логарифмированием равенства (3) по основанию b.) В частности, при $N = b$ имеем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1). \tag{14}$$

Часто при решении задач употребляются также формула

$$\log_{a^\beta} N^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a N \ (N > 0,\ \beta \neq 0) \tag{15}$$

и ее следствия

$$\log_{a^\beta} N = \frac{1}{\beta} \log_a N \ \ (N > 0,\ \beta \neq 0); \tag{16}$$

$$\log_{a^\alpha} N^\alpha = \log_a N \ (N > 0,\ \alpha \neq 0). \tag{17}$$

В частности, если в формуле (16) число β — четное ($\beta = 2k$), то имеет место соотношение

$$\log_{a^{2k}} N = \frac{1}{2k}\log_{|a|} N \ (N > 0,\ k \neq 0 \text{ — целое},\ a \neq 0,\ |a| \neq 1). \qquad (18)$$

Рассмотрим примеры, в которых используются основные свойства логарифмов.

Пример 2. *Доказать, что*

$$\log_{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i} x = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\log_{a_i} x}} \ (\textit{при}\ \ 0 < x \neq 1,\ 0 < a_i \neq 1,\ i = 1,\ 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Применяя формулы (14) и (8), получим

$$\log_{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i} x = \frac{1}{\log_x \prod\limits_{i=1}^{n} a_i} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \log_x a_i} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\log_{a_i} x}},$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. *Доказать, что если* $a^2 + b^2 = 7ab$ $(ab \neq 0)$, *то*

$$\lg\frac{|a+b|}{3} = \frac{1}{2}(\lg|a| + \lg|b|).$$

Доказательство. Перепишем соотношение

$$a^2 + b^2 = 7ab$$

следующим образом:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab,$$

или

$$\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab.$$

Логарифмируя полученное равенство и применяя формулы (11) и (6), имеем

$$2\lg\frac{|a+b|}{3} = \lg|a| + \lg|b|,$$

откуда следует доказываемое равенство.

Пример 4. *Доказать, что*

$$\log_a c = (1 + \log_a b)\log_{ab} c.$$

Доказательство. Воспользуемся формулами (14) и (13) перехода от одного основания логарифма к другому:

$$(1 + \log_a b)\log_{ab} c = \frac{1 + \log_a b}{\log_c (ab)} = \frac{1 + \log_a b}{\log_c a + \log_c b} =$$

$$= \frac{1+\log_a b}{\dfrac{1}{\log_a c}+\dfrac{\log_a b}{\log_a c}} = \log_a c.$$

Пример 5. *Доказать, что если a и b — отличные от единицы положительные числа, то*

$$\left|\log_a b + \log_b a\right| \ge 2.$$

Доказательство. Возводя в квадрат обе части неравенства и воспользовавшись тождеством

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1,$$

получим

$$(\log_a b + \log_b a)^2 \ge 4,$$

$$\log_a^2 b + 2 + \log_b^2 a \ge 4,$$

$$\log_a^2 b - 2\log_a b \log_b a + \log_a^2 a \ge 0,$$

$$(\log_a b - \log_b a)^2 \ge 0.$$

Последнее неравенство выполняется при всех значениях $0 < a \ne 1$ и $0 < b \ne 1$. Проведя те же преобразования в обратном порядке, получим доказываемое неравенство.

Пример 6. ***Вычислить*** $\log_{25} 24$, ***если*** $\log_6 15 = \alpha$ ***и*** $\log_{12} 18 = \beta$.

Решение. Разложим числа 25, 24, 6, 15, 12 и 18 на простые множители:

$$25 = 5^2,\ 24 = 2^3 \cdot 3,\ 6 = 2 \cdot 3,\ 15 = 3 \cdot 5,\ 12 = 2^2 \cdot 3,\ 18 = 2 \cdot 3^2.$$

Заметим, что число различных простых множителей, входящих в эти разложения, равно трем: 2, 3, 5. Полагая

$$\log_2 3 = x,\ \log_2 5 = y,$$

находим

$$\log_6 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 6} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = \frac{x+y}{1+x},$$

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3} = \frac{1+2x}{2+x},$$

$$\log_{25} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 25} = \frac{3 + \log_2 3}{2\log_3 5} = \frac{3+x}{2y}.$$

Используя условие задачи, составим для определения x и y систему двух уравнений

$$\frac{x+y}{1+x}=\alpha,\ \frac{1+2x}{2+x}=\beta.$$

Отсюда получим $x=\dfrac{2\beta-1}{2-\beta}$, $y=\dfrac{1+\alpha+\alpha\beta-2\beta}{2-\beta}$. Следовательно, искомая величина

$$\log_{25}24=\frac{3+x}{2y}=\frac{5-\beta}{2(1+\alpha+\beta-2\beta)}.$$

Ответ. $\dfrac{5-\beta}{2(1+\alpha+\beta-2\beta)}$.

Пример 7. *Без помощи таблиц логарифмов определить, что больше*: $\log_{189}1323$ *или* $\log_{63}147$. (*Ответ должен быть обоснован.*)

Решение. Требуется сравнить два числа

$$A=\log_{189}1323 \text{ и } B=\log_{63}147.$$

Полагая $x=\log_3 7$, где $x>1$, находим

$$A=\log_{189}1323=\frac{\log_3(3^3\cdot 7^2)}{\log_3(3^3\cdot 7)}=\frac{3+2\log_3 7}{3+\log_3 7}=\frac{3+2x}{3+x};$$

$$B=\log_{63}147=\frac{\log_3(3\cdot 7^2)}{\log_3(3^2\cdot 7)}=\frac{1+2\log_3 7}{2+\log_3 7}=\frac{1+2x}{2+x}.$$

Пусть $A>B$, т. е.

$$\frac{3+2x}{3+x}>\frac{1+2x}{2+x}, \tag{19}$$

или

$$2x^2+7x+6>2x^2+7x+3. \tag{20}$$

Последнее неравенство справедливо при всех $x>1$.

Проведя те же самые преобразования в обратном порядке, убеждаемся в том, что из неравенства (20) следует неравенство (19).

Ответ. $\log_{189}1323>\log_{63}147$.

Пример 8. *Доказать, что*

$$\frac{1}{\log_2 N}+\frac{1}{\log_3 N}+\ldots+\frac{1}{\log_{1970} N}=\frac{1}{\log_{1970!} N}\quad (n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n).$$

Доказательство. Применяя формулы (14) и (7), получим

$$\frac{1}{\log_2 N}+\frac{1}{\log_3 N}+\ldots+\frac{1}{\log_{1970} N}=\log_N 2+\log_N 3+\ldots+\log_N 1970=$$

$$=\log_N(2\cdot 3\ldots 1970)=\log_N 1970!=\frac{1}{\log_{1970!} N}.$$

3. Логарифмическая функция

Функция, заданная формулой

$$y = \log_a x, \text{ где } 0 < a \neq 1,$$

называется ***логарифмической функцией.***

Каждому положительному числу x соответствует единственное действительное число y. Обратно, каждому действительному числу y соответствует единственное положительное число $x = a^y$. Таким образом, между значениями x (где $0 < x < +\infty$) и y (где $-\infty < y < +\infty$) устанавливается взаимно однозначное соответствие. Следовательно, при $0 < a \neq 1$ функции $y = \log_a x$ и $x = a^y$ — *взаимно обратные* (см гл. I, § 2, п 7). График логарифмической функции получается из графика показательной функции $y = a^x$ зеркальным отображением последнего относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 169, 170).

Перечислим основные свойства логарифмической функции.

1^0. *Областью определения логарифмической функции является множество всех положительных чисел.*

2^0. *Множеством значений логарифмической функции служит бесконечный интервал* $(-\infty, +\infty)$.

3^0. *При* $a > 1$ *логарифмическая функция* $y = \log_a x$ *является монотонно возрастающей, а при* $0 < a < 1$ *— монотонно убывающей.*

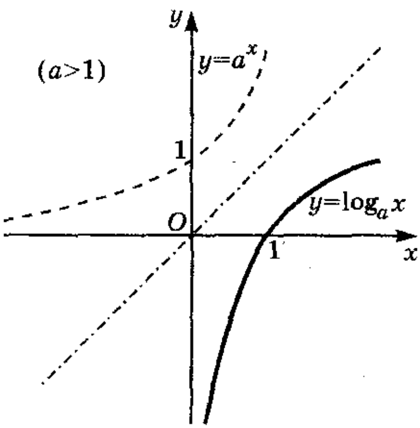


Рис. 169

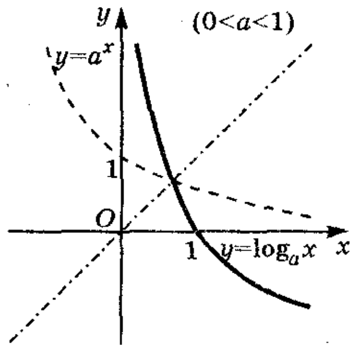


Рис. 170

В силу монотонности логарифмической функции из равенства $\log_a x_1 = \log_a x_2$ следует, что $x_1 = x_2$.

4^0. *Справедливы равенства* $\log_a 1 = 0$ *и* $\log_a a = 1$ *при* $0 < a \neq 1$.

5^0. *Если* $a > 1$, *то при* $x > 1$ *функция* $y = \log_a x$ *принимает положительные, а при* $0 < x < 1$ *— отрицательные значения.*

Если же $0 < a < 1$, *то, наоборот, при* $x > 1$ *функция* $y = \log_a x$ *принимает отрицательные, а при* $0 < x < 1$ *— положительные значения.*

Докажем, что *функция* $y = \log_a x$ *при* $0 < a < 1$ *является выпуклой вниз, а при* $a > 1$ *— выпуклой вверх.*

При положительных $x_1 \neq x_2$ имеет место неравенство

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}.$$

Это неравенство при $0 < a < 1$ эквивалентно неравенству

$$\log_a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2},$$

а при $a > 1$ — неравенству

$$\log_a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2},$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Рассмотрим примеры, связанные с исследованием логарифмических функций.

Пример 9. *Найти область определения функции*

$$y = \log_a[\log_a(\log_a x)].$$

Решение. Область определения находится как решение неравенства

$$\log_a(\log_a x) > 0.$$

При $a > 1$ оно эквивалентно неравенству

$$\log_a x > 1,$$

откуда получим $a < x < +\infty$.

При $0 < a < 1$ имеем

$$0 < \log_a x < 1,$$

откуда следует $a < x < 1$.

Ответ. Если $a > 1$, то $a < x < +\infty$; если $0 < a < 1$, то $a < x < 1$.

Пример 10. *Построить график функции* $y = \log_x 10$.

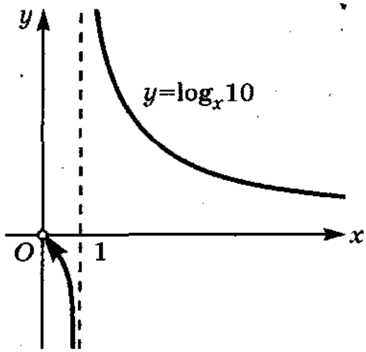


Рис. 171

Решение. Область определения функции $y = \log_x 10 = \frac{1}{\lg x}$ состоит из двух интервалов: $0 < x < 1$ и $1 < x < +\infty$. В первом интервале $\lg x < 0$ и возрастает от $-\infty$ до 0, а y убывает от 0 до $-\infty$. Во втором интервале $\lg x > 0$ и возрастает от 0 до $+\infty$, а y убывает от $+\infty$ до 0 (рис. 171).

Пример 11. *Изобразить на плоскости с заданной системой координат xOy множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству*

$$\log_y |\sin x| > 0.$$

Решение. Эта задача эквивалентна задаче о нахождении геометрического места точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < y < 1, \\ 0 < |\sin x| < 1. \end{cases}$$

Ответ. Искомое геометрическое место точек на рис. 172 заштриховано. Пунктирные линии этому геометрическому месту не принадлежат.

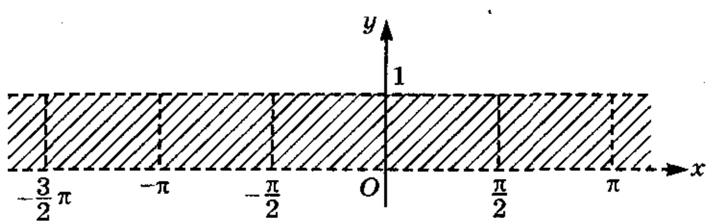


Рис. 172

Пример 12. *Изобразить на плоскости с заданной системой координат xOy множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют соотношению*

$$\log_2 x \cdot \log_y 4 = 1.$$

Решение. Заменим данное соотношение ему эквивалентными:

$\log_2 x \cdot \log_y 4 = 1 (x > 0,\ 0 < y \neq 1) \Leftrightarrow 2\log_2 x \cdot \log_y 2 = 1 (x > 0, 0 < y \neq 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x = \frac{1}{\log_y 2} \ (x>0,\ 0<y\neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x = \log_2 y \,(x>0,\ 0<y\neq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x>0, \\ 0<y\neq 1. \end{cases}$$

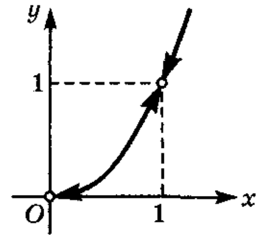


Рис. 173

Ответ. Искомое геометрическое место точек представляет собой часть параболы $y=x^2$, расположенную в полуплоскости $x>0$, за исключением точки с координатами $x=1$, $y=1$ (рис. 173).

4.Степенная функция

Рассмотрим ***степенную функцию***

$$y = x^p$$

с любым действительным показателем p.

Она определена при всех положительных x. Для $p<0$ она не определена при $x=0$. Для иррационального p и для рационального p, имеющего вид $\frac{2s+1}{2r}$ (r — натуральное число, s — целое, а дробь несократимая), она не определена при $x<0$. Для остальных рациональных p она определена при $x<0$.

Таким образом, при $x<0$ она определена только для показателей вида $p=\frac{s}{2r-1}$ (r — натуральное число, s — целое, а дробь несократимая). Если степенная функция определена как для положительных, так и для отрицательных x, то эта функция или четная $\left(\text{при } p=\frac{2q}{2r-1}\right)$ или нечетная $\left(\text{при } p=\frac{2q-1}{2r-1}\right)$.

Для изучения свойств степенной функции на множестве $x>0$, пользуясь определением логарифма, ее представляют в следующем виде:

$$y = a^{p\log_a x} \ (0<a\neq 1,\ x>0). \qquad (21)$$

Докажем, например, что функция $y=x^p$ при $p>0$ возрастает, а при $p<0$ убывает. Это следует из свойств показательной и логарифмической функций, так как при $p>0$ показатель $p\log_a x$ (в случае $a>1$) возрастает, а при $p<0$ — убывает.

5.Обобщенно-показательная функция

Обобщенно-показательной (или сложной показательной) ***функцией*** называют функцию вида

$$y=f(x)^{\varphi(x)},$$

у которой и основание, и показатель степени — функции x.

Так как произвольная действительная (как рациональная, так и иррациональная) степень рассматривается лишь при положительном основании, то допустимыми являются только те значения x, при которых $f(x)>0$. Следовательно, областью определения обобщенно-показательной функции является множество значений x, для которых $f(x)>0$ и которые входят в область определения функции $\varphi(x)$. Для некоторых конкретных численных значений x, при которых $f(x)\le 0$, выражение $f(x)^{\varphi(x)}$ может иметь смысл; однако все же эти значения x к области определения обобщенно-показательной функции на множестве действительных чисел не причисляются.

В силу основного логарифмического тождества всюду в области определения обобщенно-показательной функции имеет место равенство

$$f(x)^{\varphi(x)}=a^{\varphi(x)\log_a f(x)}\ (0<a\ne 1). \tag{22}$$

Пример 13. *Доказать, что*

$$2^{\sqrt{\log_2 x}}=x^{\sqrt{\log_x 2}}\quad \textit{при}\quad x>1.$$

Доказательство. Согласно определению обобщенно-показательной функции и формуле (14), имеем

$$x^{\sqrt{\log_x 2}}=2^{\sqrt{\log_x 2}\log_2 x}=2^{\frac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}}}=2^{\sqrt{\log_2 x}}\quad (\text{где } x>1).$$

6. О вычислении значений показательной и логарифмической функций

Для приближенного вычисления значений показательной и логарифмической функций используются доказываемые в курсе высшей математики разложения этих функций в степенные ряды:

$$a^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^k}{k!},\ \log_a(1+x)=\frac{1}{\ln a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\ (-1<x\le 1).$$

Здесь $\ln a = \log_e a$ — натуральный логарифм.

Ограничиваясь $N+1$ первыми слагаемыми степенных рядов, получим

$$a^x \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{(x\ln a)^k}{k!}, \ \log_a(1+x) \approx \frac{1}{\ln a}\sum_{k=0}^{N}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \ (-1 < x \le 1).$$

При этом точность вычислений значений функций a^x и $\log_a(1+x)$ по этим приближенным формулам зависит от величины x, существенно возрастая с уменьшением аргумента. Поэтому такие вычисления можно осуществить следующим образом.

1^0. Известно, что любое действительное число x представимо в виде

$$x = n + y,$$

где $n = E(x)$ — целая часть числа x, а $y = \{x\}$ — дробная часть числа x, $0 \le y < 1$. Отсюда

$$a^x = a^n \cdot a^y.$$

Следовательно, вычисление значений показательной функции сводится к их вычислению для аргумента y из интервала (0, 1).

Далее имеем

$$a^y = (a^{y\cdot 2^{-m}})^{2^m} = \underbrace{((\ldots(a^{y\cdot 2^{-m}})^2)^2\ldots)^2}_{m\,\text{раз}}$$

(m — целое положительное число).

Таким образом, вычисление значений показательной функции сводится к их вычислению для аргумента y из интервала $\left(0, \frac{1}{2^m}\right)$ при любом положительном m.

2^0. Так как с помощью соотношения

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

логарифм по основанию $a_1 = \frac{1}{a} < 1$ всегда можно выразить через логарифм по основанию $a > 1$, то в дальнейшем будем считать, что основание логарифма $a > 1$.

Каждому числу $x > 0$ соответствует целое число $n > 1$ такое, что

$$a^n \le x < a^{n+1} \ (\text{где } n = E(\log_a x)).$$

Поэтому

$$x = a^n y = a^{n+1} y_1,\ 1 \le y \le a,\ \frac{1}{a} \le y_1 = \frac{1}{a} y < 1;$$

$$\log_a x = n + \log_a y = (n+1) + \log_a y_1.$$

Таким образом, вычисление логарифма по основанию a любого положительного числа сводится к вычислению логарифма числа из интервала $(1, a)$ или $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить без таблиц:

а) $100^{1-\lg 2{,}5}$; б) $4^{\log_{16} 3}$; в) $2a^{\log_a b}$ (a и b — заданые числа);

г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 81\sqrt{3}$; д) $2^{\log_{\sqrt{2}} 5}$; е) $2^{\frac{1}{5\log_5 2}}$; ж) $0{,}001^{\lg 2}$;

з) $3^{\log_{3\sqrt{9}} 41} + 2^{\frac{1}{\log_{15} 4}}$; и) $2^{\log_8 7}$; к) $3^{-\log_{\sqrt{3}} 6}$.

Ответ. а) 16; б) $\sqrt{3}$; в) $2b$; г) -9; д) 25; е) $\sqrt[5]{5}$; ж) $\frac{1}{8}$; з) $41\sqrt{41} + \sqrt{15}$; и) $\sqrt[3]{7}$; к) $\frac{1}{36}$.

2. Вычислить:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 5$, если $\log_2 5 = a$ (a задано);

б) $\lg \operatorname{tg} 1° + \lg \operatorname{tg} 2° + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89°$.

Ответ. а) $-a$: б) 0.

3. Доказать, что выражение $\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4(4x^4)$ при $x = -2$ равно -6.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ. 0.

5. Найти $\lg 2$ и $\lg 5$, если $\lg 2 \cdot \lg 5 = a$.

Ответ. $\lg 2 = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$, $\lg 5 = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$.

Указание. Воспользоваться тем, что $\lg 2 + \lg 5 = 1$.

6. Доказать, что если $\log_{12} 27 = a$, то $\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$.

7. Дано: $\log_{14} 7 = \alpha$, $\log_{14} 5 = \beta$. Найти $\log_{35} 28$.

Ответ. $\frac{2-\alpha}{\alpha+\beta}$.

8. Найти $\log_{54} 168$, если $\log_7 12 = \alpha$ и $\log_{12} 24 = \beta$.

Ответ. $\frac{1+\alpha\beta}{\alpha(8-5\beta)}$.

9. Вычислить $\log_4 39{,}2$, зная, что $\log_7 2 = a$ и $\log_2 10 = b$.

Ответ. $\frac{2+3a-ab}{2a}$.

Указание. $\log_4 39{,}2 = \log_4 \frac{49 \cdot 4}{5} = \log_2 \frac{7 \cdot 2}{\sqrt{5}}$.

10. Доказать, что если $\alpha = \log_{12} 18$ и $\beta = \log_{24} 54$, то $\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1$.

11. Доказать иррациональность чисел:

а) $\log_{10} 2$, б) $\log_3 5$; в) $\log_2 3$; г) $\log_{11} 7$; д) $\log_5 7$; е) $\log_4 18$.

12. Доказать, что если m и n — взаимно простые, то $\log_n m$ — число иррациональное.

13. Сколько цифр содержт число 2^{75}?

Ответ 23.

Указание. Вычислить десятичный логарифм этого числа и воспользоваться тем, что его характеристика на единицу меньше количества цифр.

14. Доказать соотношения:

а) $\log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{n} = \log_m n$, б) $a^{\log_{a^n} b} = \sqrt[n]{b}$;

в) $\frac{\log_a N}{\log_{ak} N} = 1 + \log_a k$; г) $\log_{ab} N = \frac{\log_a N \log_b N}{\log_a N + \log_b N}$;

д) $\log_{ab} \frac{b}{a} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_a N + \log_b N}$; е) $\frac{\log_a N \log_b N}{(\log_{ab} N)^2} = \frac{(1+\log_a b)^2}{\log_a b}$;

ж) $\log_{\frac{a}{b}} N = \frac{\log_a N \log_b N}{\log_b N - \log_a N}$; з) $a^{\frac{\lg\lg N}{\lg a}} = \lg N$.

15. Доказать, что отношение логарифмов двух чисел не зависит от основания, т. е.

$$\frac{\log_a N}{\log_a M}=\frac{\log_b N}{\log_b M}.$$

16. Доказать, что отношение логарифмов одного и того же числа при разных основаниях не зависит от этого числа.

17. Доказать, что

$$\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c=\log_d a,$$

где $a>0,\ 0<b\neq 1,\ 0<c\neq 1,\ 0<d\neq 1.$

18. Доказать равенства:

а) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\ldots\log_{15}16=4;$

б) $\lg 2=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\ldots\log_{10}9.$

19. Доказать, что если $a^{\log_a c+1}=b^2$, то для $0<N\neq 1$ числа $\log_N a$, $\log_N b$ и $\log_N c$ составляют арифметическую прогресию.

20. Доказать, что если $b^2=ac$, причем a, b и c различны, то для $0<N\neq 1$ справедливо равенство

$$\frac{\log_a N}{\log_c N}=\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}.$$

21. Доказать тождество $\sum\limits_{k=1}^{4}\frac{1}{\log_{a^k}N}=\frac{10}{\log_a N}$, если $0<a\neq 1,\ N>0.$

22. Доказать, что

$$n=-\log_p\log_p\underbrace{\sqrt[p]{\sqrt[p]{\ldots\sqrt[p]{p}}}}_{n\text{ раз}},\ \text{где } p \text{ — целое число, } p>1.$$

23. Доказать, что если $n^2=(kn)^{\log_k m}$, то $\log_m x=\frac{1}{2}(\log_k x+\log_n x).$

24. Доказать, что если $a^{3-x}\cdot b^{5x}=b^{3x}\cdot a^{x+5}$, то

$$x\lg\frac{b}{a}=\lg a,\ \text{где } a>0, b>0.$$

25. Доказать, что если $4a^2+9b^2=4ab,\ a>0$, то

$$\log_c\frac{2a+3b}{4}=\frac{\log_c a+\log_c b}{2},$$

где $0<c\neq 1.$

26. Доказать, что если a и b — длины катетов, а c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника, то

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

27. Доказать, что

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N},$$

где $0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1, 0 < c \neq 1, abc \neq 1, 0 < N \neq 1.$

28. Найти $\log_{abc} x$, если $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ и $\log_c x = 6$.

Ответ. 1.

29. Дано: $\log_a x = p$, $\log_b x = q$, $\log_{abc} x = r$ $(x \neq 1)$. Найти $\log_c x$.

Ответ. $\log_c x = \dfrac{pqr}{pq - pr - qr}$.

30. Доказать, что если при некотором положительном $N \neq 1$ для трех различных положительных отличных от 1 чисел *a*, *b* и *c* выполняется соотношение

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N},$$

то *b* есть среднее пропорциональное между *a* и *c* и это соотношение выполняется при любом положительном $N \neq 1$.

31. Даны три числа *a*, *b* и *c* такие, что $0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1, 0 < c \neq 1,$ $abc \neq 1$. При каком соотношении между ними будет выполняться равенство

$$\log_a N + \log_b N + \log_c N = \log_{abc} N$$

для всех $N > 0$?

Ответ. $(ab-1)(bc-1)(ac-1) = 0.$

32. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n} (\log_{b^{2-k}} a - \log_{a^k} b)^2 = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)\left(\log_b^2 a + \frac{1}{4^n \log_b^2 a}\right) - 2(n+1).$$

33. Сравнить по величине числа:

а) $\log_3 2$ и 1; б) $\log_2 3$ и $\log_3 2$; в) $\log_2 3$ и $\log_3 4$; г) $\log_4 7$ и $\log_{\frac{1}{3}} 2$;

д) $(\log_2 5)^2$ и $\log_2 20$; е) $\log_2 a$ и $\log_3 a$.

Ответ. а) Первое число меньше; б) первое число больше; в) первое число больше; г) первое число больше; д) первое число больше; е) если $a > 1$, то $\log_2 a > \log_3 a$; если $a = 1$, то $\log_2 a = \log_3 a = 0$; если $0 < a < 1$, то $\log_2 a < \log_3 a$.

34. Не пользуясь таблицами, доказать, что:

а) $\log_{10}11<\log_{11}12$; б) $\log_9 10>\log_{10}11$; в) $\log_4 9>\log_5 11$;

г) $\log_2 3>\log_3 5$; д) $\log_3 5<\log_4 9$; е) $\log_5 14>\log_7 18$;

ж) $\log_3 16>\log_{16}729$; з) $\log_2 5>\log_5 32$; и) $\log_3 7>\log_7 27$;

к) $\log_4 6>\log_6 8$.

35. Без таблиц определить, что больше:

а) $\log_{135}675$ или $\log_{45}75$; б) $\log_{15}60$ или $\log_{60}480$;

в) $\log_{20}80$ или $\log_{80}640$.

Ответ. а) Второе число больше; б) первое число больше; в) второе число больше.

36. Доказать, что $21^{23}>23^{21}$.

37. Доказать неравенства:

а) $\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_3 2}>2$; б) $\log_3\pi+\log_\pi 3>2$.

38. Доказать, что $\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_5 3}>2$.

39. Доказать, что

$$\log_c\frac{a+b}{2}\geq\frac{\log_c a+\log_c b}{2},\text{ если } a>0,\ b>0,\ c>1$$

и

$$\log_c\frac{a+b}{2}\leq\frac{\log_c a+\log_c b}{2},\text{ если } a>0,\ b>0,\ 0<c<1.$$

40. Доказать, что если $0<a<1$ и $n\geq k\geq 1$, то

$$\log_a k+\log_a(n-k+1)<\log_a n.$$

41. Доказать, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\log_a k\geq\frac{1}{2}\log_a n,\text{ если } a>1.$$

42. При каких значениях a и b имеет место неравенство

$$\log_a(a^2b)>\log_b\frac{1}{a^5}?$$

Ответ. При $a>1$ и $b>1$ или $0<a<1$ и $0<b<1$.

43. Доказать, что если $a>0,\ b>0$, то для любых x и y справедливо неравенство

$$a\cdot 2^x+b\cdot 3^y+1\leq\sqrt{4^x+9^y+1}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1}.$$

44. Найти области определения функций:

а) $y=\log_2(1-|x|)$; б) $y=\log_2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$; в) $y=\arcsin\log_2 x$;

г) $y=\log_{|x|}2$; д) $y=\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$; е) $y=\lg[\cos(\lg x)]$;

ж) $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(2^x)$; з) $y=\log_2\log_3\log_4 x$; и) $y=\sqrt[4]{\lg\operatorname{tg}x}$.

Ответ. а) $-1<x<1$; б) $2k\pi-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\ldots)$; в) $\frac{1}{2}\le x\le 2$; г) $x\ne 0$, $x\ne 1$; д) $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$ и $-\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$ $(k=0,1,2,\ldots)$; е) $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}<x<10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ $(k=0,\pm1,\ldots)$; ж) $x<0$, $x\ne -n$ $(n=1,2,\ldots)$; з) $x>4$; и) $k\pi+\frac{\pi}{4}\le x<k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\ldots)$.

45. Найти область определения и множество значений функций

$$y=\lg(1-2\cos x).$$

Ответ. $2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}$ $(k=0,\pm1,\ldots)$; $-\infty<y\le\lg 3$.

46. На какое множество Y отображает множество $X=\{10<x<1000\}$ функция $y=\lg x$?

Ответ. $Y=\{1<y<3\}$.

47. Найти функцию вида $f(x)=a+b\cdot c^x$, если $f(0)=15, f(2)=30$, $f(4)=90$.

Ответ. $f(x)=10+5\cdot 2^x$.

48. Доказать, что если для показательной функции $f(x)=a^x$ $(a>0)$ значения аргумента $x=x_n$ $(n=1,2,\ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n=f(x_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ образуют геометрическую прогрессию.

49. Пусть функция $f(u)$ определена при $0<u<1$. Найти область определения функции $y=f(\lg x)$.

Ответ. $1<x<10$.

50. Пусть $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ $(a>0)$. Показать, что

$$\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2}=f(x)\cdot f(y).$$

51. Определить, какие из данных функций являются четными, а какие — нечетными:

а) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ $(a>0)$; б) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

в) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

Ответ. а) Четная; б) нечетная; в) нечетная.

52. Найти наименьшее значение суммы 3^x+3^{-x}.

Ответ. 2.

53. Построить графики функций:

а) $y=\log_x 3$; б) $y=2^{\frac{1}{x}}$; в) $y=2^{|\sin x|}$;

г) $y=\log_{|\sin x|}\dfrac{1}{2}$; д) $y=9^{\sqrt{\cos x-1}}$;

е) $y=2^{\log_{0,5}x}$; ж) $y=x^{\frac{1}{\log_2 x}}$;

з) $y=\lg(x^2-3x+2)$; и) $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$;

к) $y=\sqrt[1970]{\log_{1970}\cos^{1970}x}$; л) $y=\log_{\cos x}\sin x$; м) $y=(\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

54. Построить графики функций:

а) $y=3+2^{3\cos\frac{x}{3}}$; б) $y=1-2^{1+\sin(x+1)}$;

в) $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\log_2\sqrt{4x^2-4x+1}$.

55. Изобразить на плоскости с заданной системой координат множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют соотношениям:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(|x|+|y|)\ge 0$; б) $|y|=|\log_2|x||$; в) $|y|=\log_{\frac{1}{3}}||x+2|-1|$;

г) $y=|y-\log_{\frac{1}{3}}|x-1||$; д) $\log_y x>0$; е) $\log_{xy}(x+y)>0$;

ж) $\log_x\log_y x>0$; з) $\log_{\cos x}(|y|-2)>0$; и) $|\sin x|^y+|\cos x|^y=1$;

к) $\begin{cases} x^y + (1-x)^y = 1, \\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

56. Решить уравнение $\lg x = \sqrt{1-x^2}$.

Ответ. $x = 1$.

57. Имеет ли положительные корни уравнение $(\sqrt{2})^x = \dfrac{\pi}{4}$?

Ответ. Не имеет.

58. Сколько корней имеет уравнение

$$\log_{\frac{5\pi}{2}} x = \cos x\,?$$

Ответ. Три корня.

59. При каких a уравнение

$$|x+2| - |2x+8| = a^x$$

а) имеет единственный корень;
б) имеет не единственный корень;
в) не имеет корней?

Ответ. а) При $a = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$; б) при $a > \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$; в) при $0 < a < \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

60. Доказать, что уравнение $10x^{\lg x} = 1$ не имеет корней.

61. Решить уравнения:

а) $x^x = 10^{x-x^2}$ $(x > 0)$; б) $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$.

Ответ. а) $x = 1$; б) $x = 2$.

62. Упростить выражение $(0 < a \ne 1)$:

$$\frac{a^{-x}}{\sqrt{5}}[2a^{2x} - a^x(2a^x - 1)] \cdot \left[1 - \left(\frac{\sqrt{5}a^x}{2a^x - 1}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{(a^x+2)^2 - 5} - (a^{2x}+4) \times$$

$$\times [a^{2x} + 4(1 - a^x)]^{-\frac{1}{2}} + 4a^x[1 + (a^x+2)(a^{2x} - 4a^x + 4)^{-\frac{1}{2}}] \times$$

$$\times [a^x + 2 + (a^{2x} - 4a^x + 4)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$$

и определить, при каких значениях x это выражение равно единице.

Ответ. $a^x - |a^x - 2|$; при $x = \log_a \dfrac{3}{2}$.

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В элементарной математике ***показательными*** и ***логарифмическими уравнениями*** называют такие частные виды трансцендентных уравнений, которые содержат неизвестное в показателе степени или под знаком логарифма и допускают решение элементарными средствами.

Как известно, решение и исследование трансцендентных уравнений в общем виде не представляется возможным. Мы остановимся на некоторых типах показательных и логарифмических уравнений.

1. Простейшие показательные и логарифмические уравнения

Многие рассматриваемые в курсе элементарной математики показательные и логарифмические уравнения сводятся к простейшим.

Простейшим показательным уравнением называется уравнение вида

$$a^x = b \ (0 < a \neq 1), \tag{1}$$

которое при $b > 0$ имеет единственное решение

$$x = \log_a b, \tag{2}$$

а при $b \leq 0$ решений не имеет.

Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида

$$\log_a x = b \ \ (0 < a \neq 1), \tag{3}$$

которое при любом действительном b имеет единственное решение

$$x = a^b. \tag{4}$$

2. Решение показательных уравнений

Рассмотрим наиболее распространенные приемы решения некоторых типов показательных уравнений.

1^0. Логарифмирование обеих частей уравнения.

Этот прием основан на следующей теореме.

Теорема 1. *Уравнения*

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{5}$$

и

$$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \ (0 < a \neq 1) \tag{6}$$

эквивалентны на множестве, где функции $f_1(x) > 0$ *и* $f_2(x) > 0$.

Доказательство теоремы основано на свойстве логарифмической функции, согласно которому из равенства чисел следует равенство их логарифмов с одинаковыми основаниями, и обратно.

Используя символ эквивалентности, данную теорему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x), \\ f_1(x) > 0,\ f_2(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_a f_1(x) = \log_a f_2(x)\ (0 < a \neq 1).$$

Так, в частности, уравнение

$$Ma^{\varphi_1(x)} = Nb^{\varphi_2(x)} \begin{pmatrix} 0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1, \\ M > 0,\ N > 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

эквивалентно следующему:

$$\log_c M + \varphi_1(x)\log_c a = \log_c N + \varphi_2(x)\log_c b \tag{8}$$

(основание логарифмов c — произвольное положительное число, отличное от единицы).

К уравнению (7) приводится, например, уравнение вида

$$Aa^{mf(x)+\alpha} + Ba^{mf(x)+\beta} = Cb^{nf(x)+\gamma} + Db^{nf(x)+\delta}. \tag{9}$$

Действительно, вынесем за скобку в левой части уравнения $a^{mf(x)}$, а в правой — $b^{nf(x)}$:

$$a^{mf(x)}(Aa^{\alpha} + Ba^{\beta}) = b^{nf(x)}(Cb^{\gamma} + Db^{\delta}).$$

Вводя обозначения

$$M = Aa^{\alpha} + Ba^{\beta},\ N = Cb^{\gamma} + Db^{\delta},$$

перепишем последнее уравнение в виде

$$Ma^{mf(x)} = Nb^{nf(x)}.$$

Логарифмируя его так же, как и уравнение (7), по основанию $0 < c \neq 1$, получим

$$f(x) = \frac{\log_c \dfrac{N}{M}}{\log_c \dfrac{a^m}{b^n}}. \tag{10}$$

Полученное уравнение, как правило, более простое (например, алгебраическое, если $f(x)$ — многочлен). Решив его (если это возможно), находим корни исходного уравнения.

Операция логарифмирования особенно эффективна при решении показательных уравнений, в которых над степенями не производится сложения и вычитания.

З а м е ч а н и е. Уравнения (5) и (6) эквивалентны только на множестве, где $f_1(x)>0$ и $f_2(x)>0$. Область определения уравнения (6) является более узкой, чем область определения уравнения (5), поэтому при решении уравнения (5) логарифмированием возможна, вообще говоря, «потеря» корней, а именно тех, при которых $f_1(x)\le 0$ или $f_2(x)\le 0$.

П р и м е р 1. *Решить уравнение*

$$3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6.$$

Р е ш е н и е. Областью определения уравнения является множество значений $x \ne -2$.

Прологарифмируем обе части уравнения, например, по основанию 3. Получим уравнение, эквивалентное при $x \ne -2$ исходному:

$$x\log_3 3 + \frac{x}{x+2}\log_3 8 = \log_3 3 + \log_3 2,$$

или

$$x + \frac{x}{x+2}\cdot 3\log_3 2 = 1 + \log_3 2.$$

После приведения к общему знаменателю имеем

$$x^2 + (1+2\log_3 2)x - 2(1+\log_3 2) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2-2\log_3 2.$$

При $x \ne -2$ последнее уравнение эквивалентно исходному. Следовательно, найденные значения x являются корнями рассматриваемого уравнения.

О т в е т. $x_1 = 1,\ x_2 = -2-2\log_3 2.$

П р и м е р 2. *Решить уравнение*

$$9^x - 2^x\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\cdot 2^{x+1} - 3^{2x-1}.$$

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение следующим образом:

$$9^x + \frac{1}{3}\cdot 9^x = 8\sqrt{2}\cdot 2^x + \sqrt{2}\cdot 2^x.$$

Вынесем за скобку общий множитель в левой и правой частях этого уравнения:

$$9^x\left(1+\frac{1}{3}\right) = 2^x(8\sqrt{2}+\sqrt{2}).$$

Разделив на $2^x \ne 0$, получим

$$\left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{27\sqrt{2}}{4},$$

откуда, логарифмируя по основанию $\frac{9}{2}$, находим $x = \frac{3}{2}$.

Ответ. $x = \frac{3}{2}$.

2^0. Сведение методом подстановки к алгебраическому уравнению.

В некоторых случаях с помощью подстановки показательное уравнение сводится к алгебраическому относительно нового неизвестного.

Например, уравнение

$$R(a^x) = 0, \tag{11}$$

где $R(t)$ — рациональная алгебраическая функция, подстановкой

$$a^x = t \ (t > 0) \tag{12}$$

сводится к смешанной системе

$$R(t) = 0, \ t > 0. \tag{13}$$

Решив алгебраическое уравнение $R(t) = 0$ и взяв его положительные корни t_i (i — номер корня), получим для нахождения x простейшие показательные уравнения

$$a^x = t_i,$$

эквивалентные в совокупности исходному уравнению (11), откуда

$$x = \log_a t_i.$$

В частности, уравнение вида

$$Aa^{2f(x)+\alpha} + Ba^{f(x)+\beta} + C = 0 \tag{14}$$

подстановкой

$$a^{f(x)} = t \ (t > 0)$$

сводится к смешанной системе

$$Aa^{\alpha}t^2 + Ba^{\beta}t + C = 0, \ t > 0. \tag{15}$$

Пусть $t = t_i$ — решения этой системы, т. е. положительные корни квадратного алгебраического уравнения (15). Тогда исходное уравнение эквивалентно совокупности следующих уравнений:

$$a^{f(x)} = t_i,$$

или

$$f(x) = \log_a t_i.$$

Определив (если это возможно) корни последних уравнений, получаем решение уравнения (14).

Если основания показательных функций, входящих в уравнение, являются целыми или дробными степенями одного и того же числа a, то, полагая

$$a^x = t \ (t > 0),$$

получаем в некоторых случаях алгебраическое уравнение относительно t; решив его и учитывая, что $t > 0$, находим

$$x = \log_a t.$$

Пример 3. *Решить уравнение*

$$Aa^x + Bb^x = C \quad (0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1),$$

если $ab = 1$.

Решение. Так как $b^x = \dfrac{1}{a^x}$, то с помощью подстановки

$$a^x = t \quad (t > 0)$$

рассматриваемое уравнение сводится к смешанной системе

$$At^2 - Ct + B = 0,\ t > 0.$$

Зная решения $t = t_i$ этой системы и возвращаясь к первоначальному неизвестному, находим корни рассматриваемого уравнения:

$$x = \log_a t_i.$$

Замечание. Уравнение вида $Aa^x + Bb^x = Cc^x$ (где $ab = c^2$) приводится к рассмотренному делением на $c^x \neq 0$.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$3 \cdot 9^x - 29 \cdot 6^{x-1} + 2^{2x-1} = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом:

$$3 \cdot 3^{2x} - \frac{29}{6} \cdot 2^x \cdot 3^x + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} = 0,$$

откуда, разделив на $2^{2x} \neq 0$, имеем

$$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \frac{29}{6} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{2} = 0.$$

Полученное уравнение с помощью подстановки

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t \ (t > 0)$$

сводится к смешанной системе

$$18t^2-29t+3=0,\ t>0,$$

которая имеет два решения

$$t_1=\frac{3}{2},\ t_2=\frac{1}{9}.$$

Используя указанную подстановку и возвращаясь к первоначальному неизвестному, получаем для определения x два простейших показательных уравнения

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{1}{9}.$$

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности двух простейших показательных уравнений, решая которые находим

$$x_1=1,\ x_2=-\log_{\frac{3}{2}}9.$$

Ответ. $x_1=1,\ x_2=-\log_{\frac{3}{2}}9.$

Пример 5. *Для каждого действительного числа а решить уравнение*

$$9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0.$$

Решение. С помощью подстановки

$$3^{-|x-2|}=t\ \ (0<t\le 1)$$

данное уравнение сводится к смешанной системе

$$t^2-4t-a=0,\ \ 0<t\le 1.$$

Квадратное уравнение этой системы имеет действительные корни

$$t_{1,2}=2\pm\sqrt{4+a}$$

тогда и только тогда, когда $a\ge -4$. При этом условии $t_1=2+\sqrt{4+a}>1$ и, следовательно, решением смешанной системы не является. Второй корень

$$t_2=2-\sqrt{4+a}$$

удовлетворяет условиям $0<t_2\le 1$, т. е. неравенствам $0<2-\sqrt{4+a}\le 1$ при $-3\le a<0$.

Таким образом, если $-3\le a<0$, то смешанная система имеет решение $t=2-\sqrt{4+a}$, которому соответствуют корни исходного уравнения

$$x=2\pm\log_3(2-\sqrt{4+a}).$$

Если $a<-3$ или $a \ge 0$, то смешанная система, а следовательно, и исходное уравнение решений не имеют.

Замечание. Для исследования смешанной системы можно применить КП-метод.

Ответ. Если $-3 \le a < 0$, то $x = 2 \pm \log_3(2-\sqrt{4+a})$; если $a<-3$ или $a \ge 0$, то уравнение корней не имеет.

Метод рационализации при решении показательных уравнений рассмотрим на примере уравнения

$$R(a^{mx},\ a^{nx},...,a^{px})=0,$$

где $m,\ n,...,p$ — рациональные числа, а R — рациональная алгебраическая функция.

Подстановкой

$$a^x = t\ (t>0)$$

рассматриваемое уравнение приводится к смешанной системе

$$R(t^m,\ t^n,...,t^p)=0,\ t>0,$$

которая в свою очередь приводится к системе

$$R^*(z)=0,\ z>0,$$

получаемой из предыдущей подстановкой

$$z=\sqrt[r]{t},$$

где r — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m,\ n,...,p$.

Уравнение $R^*(z)=0$ в последней системе является рациональным алгебраическим относительно неизвестного z.

3^0. Уравнивание оснований.

Рассматриваемый прием решения показательных уравнений заключается в уравнивании оснований показательных функций, входящих в левую и правую части уравнения, и использовании следующей теоремы.

Теорема 2. *Уравнения*

$$a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)} \tag{16}$$

и

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{17}$$

при $0<a \ne 1$ *эквивалентны.*

Доказательство теоремы основано на свойстве 6^0 показательной функции, согласно которому из равенства степеней с одинаковыми основаниями следует равенство их показателей, и обратно (см. § 1, п. 1).

П р и м е р 6. *Решить систему*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\sqrt[y]{9} = 9^{\frac{x}{2y}}, \\ 16\sqrt[x]{2^{x+3y}} = 2^{\frac{2x}{y}}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Уравнивая основания степеней, перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} 3^{-1+\frac{2}{y}} = 3^{\frac{x}{y}}, \\ 2^{4+\frac{x+3y}{x}} = 2^{\frac{2x}{y}}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} -1+\dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{y}, \\ 4+\dfrac{x+3y}{x} = \dfrac{2x}{y}. \end{cases}$$

Решим полученную алгебраическую систему уравнений. Второе уравнение этой системы подстановкой

$$\frac{x}{y} = t$$

приводится к квадратному уравнению

$$2t^2 - 5t - 3 = 0,$$

корни которого $t_1 = 3,\ t_2 = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, рассматриваемая система алгебраических уравнений эквивалентна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} -1+\dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{y}, \\ x = 3y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -1+\dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{y}, \\ x = -\dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{3}{2},\ y_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -2,\ y_1 = 4.$$

О т в е т. $x_1 = \dfrac{3}{2},\ y_1 = \dfrac{1}{2};\ x_2 = -2,\ y_2 = 4.$

3. Решение логарифмических уравнений

Рассмотрим наиболее распространенные приемы решения некоторых типов логарифмических уравнений.

1^0. Потенцирование.

При потенцировании логарифмического уравнения

$$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \tag{18}$$

получается уравнение

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{19}$$

которое является, вообще говоря, ***следствием*** исходного. Поэтому из решений уравнения (19) выбирают только те, которые удовлетворяют исходному уравнению (18). Это связано с тем, что область определения полученного при этом уравнения (19) шире, чем область определения уравнения (18), и поэтому ***проверка является логически необходимой***.

Замечание. Уравнения (18) и (19) эквивалентны на множестве, где $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$, т. е. всюду в области определения уравнения (18).

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\log_3[(x+2)(x-3)] = 4\log_9(2x+1) - \log_{\sqrt{7}} 7. \tag{20}$$

Решение. Область определения уравнения является решением системы неравенств

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) > 0, \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$$

и представляет собой множество

$$x > 3. \tag{21}$$

Всюду в области определения (21) исходное уравнение (20) эквивалентно следующим:

$$\log_3[(x+2)(x-3)] = 4\log_9(2x+1) - 2,$$

или

$$\log_3[(x+2)(x-3)] = 2\log_3 \frac{2x+1}{3},$$

или

$$\log_3[(x+2)(x-3)] = \log_3 \frac{(2x+1)^2}{9}. \tag{22}$$

Потенцируя уравнение (22), получаем уравнение

$$(x+2)(x-3) = \frac{(2x+1)^2}{9}, \tag{23}$$

которое является следствием уравнения (22), так как область определения уравнения (23) шире, чем область определения логарифмического уравнения и, представляет собой множество всех действительных чисел.

Переписав уравнение (23) в виде

$$5x^2-13x-55=0$$

и решив его, находим

$$x_1=\frac{13+3\sqrt{141}}{10},\ x_2=\frac{13-3\sqrt{141}}{10}.$$

Исследуем, какие из найденных значений x_1 и x_2 принадлежат множеству (21) и, следовательно, являются *корнями* исходного логарифмического уравнения (20).

Значение $x_1>3$, поэтому x_1 — корень уравнения (20).

Так как $x_2<3$, то x_2 не входит в область определения уравнения (20) и поэтому его корнем не является.

Ответ. $x=\dfrac{13+3\sqrt{141}}{10}$.

2^0. Сведение методом подстановки к алгебраическому уравнению. В некоторых случаях логарифмическое уравнение удается свести к алгебраическому уравнению относительно нового неизвестного.

Например, уравнение

$$R(\log_a x)=0, \tag{24}$$

где $R(t)$ — рациональная алгебраическая функция, заменой

$$\log_a x=t \tag{25}$$

сводится к алгебраическому уравнению относительно введенного неизвестного t:

$$R(t)=0. \tag{26}$$

Определив корни $t=t_i$ уравнения (26) и воспользовавшись подстановкой (25), получаем простейшие логарифмические уравнения

$$\log_a x=t_i,$$

которые в совокупности эквивалентны исходному уравнению. Следовательно, корнями рассматриваемого уравнения (24) являются

$$x=a^{t_i}.$$

Аналогично решаются уравнения, содержащие логарифм от одного и того же выражения. В этом случае принимаем логарифм за новое неизвестное, решаем полученное уравнение и потенцируем найденное решение.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0.$$

Решение. Область определения уравнения — множество $x > 0$. В этой области рассматриваемое уравнение эквивалентно следующему:

$$9\lg^2 x - 10\lg x + 1 = 0.$$

Последнее подстановкой $\lg x = t$ сводится к квадратному уравнению

$$9t^2 - 10t + 1 = 0.$$

Определив его корни $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{9}$ и воспользовавшись указанной подстановкой, получим два простейших логарифмических уравнения

$$\lg x = 1 \text{ и } \lg x = \frac{1}{9},$$

которые в совокупности эквивалентны при $x > 0$ исходному уравнению. В результате находим

$$x_1 = 10, \ x_2 = \sqrt[9]{10}.$$

Ответ. $x_1 = 10$, $x_2 = \sqrt[9]{10}$.

Пример 9. *Решить уравнение*

$$\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}}\, \log_3 x + 1 = 0.$$

Решение. В области определения уравнения справедливы тождества

$$\log_x \sqrt{27} = \frac{3}{2}\log_x 3 = \frac{3}{2\log_3 x}.$$

Поэтому уравнение примет вид

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2\log_3 x}}\, \log_3 x + 1 = 0.$$

Полагая $\log_3 x = t$, получаем иррациональное алгебраическое уравнение

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2t}} \cdot t + 1 = 0.$$

Решив его, находим $t = -2$ $\left(t = \frac{1}{2}\right.$ — «посторонний корень» иррационального уравнения). Следовательно, $\log_3 x = -2$, откуда $x = \frac{1}{9}$.

Ответ. $x = \frac{1}{9}$.

Пример 10. *Указать все значения a, при которых уравнение*

$$\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a|a + \log_a x| = a\log_x a$$

имеет решение, и найти все соответствующие решения.

Решение. Область определения уравнения: $0 < x \neq 1$, а множество допустимых значений параметра: $0 < a \neq 1$. При этих значениях исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$\log_a x + \frac{2}{\log_a x}|a + \log_a x| - \frac{a}{\log_a x} = 0,$$

или

$$\log_a^2 x + 2|a + \log_a x| - a = 0 \tag{27}$$

(так как $\log_a x \neq 0$; в самом деле, если $\log_a x = 0$, т. е. $x = 1$, то левая часть последнего уравнения равна $2|a| - a$ и обращается в нуль только при $a = 0$). Уравнение (27) с помощью подстановки

$$\log_a x = t \ (t \neq 0) \tag{28}$$

приводится к алгебраическому:

$$t^2 + 2|a + t| - a = 0. \tag{29}$$

Таким образом, исходная задача эквивалентна следующей: требуется определить все значения $a\,(0 < a \neq 1)$, при которых уравнение (29) имеет решение, и найти все соответствующие решения $(t \neq 0)$.

Уравнение (29) эквивалентно совокупности двух смешанных систем:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} t^2 + 2t + a = 0, \\ a + t \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{(II)}\ \begin{cases} t^2 - 2t - 3a = 0, \\ a + t < 0. \end{cases}$$

Исследуем, при каких значениях параметра $a\,(0 < a \neq 1)$ система (I) имеет ненулевое решение и найдем его.

Квадратное уравнение системы (I), т. е. уравнение

$$t^2 + 2t + a = 0, \tag{30}$$

имеет действительные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$\Delta = 1 - a \geq 0,$$

т. е. когда $a \leq 1$ или, учитывая условие $0 < a \neq 1$, когда

$$0 < a < 1. \tag{31}$$

При значениях a, удовлетворяющих системе неравенств (31), корни квадратного уравнения (30) действительны и различны:

$$t_1 = -1 - \sqrt{1-a}, \ t_2 = -1 + \sqrt{1-a}.$$

Условие $a + t = 0$ не выполняется, так как при $0 < a < 1$ число $t = -a$ не является корнем квадратного уравнения (30).

Установим, при каком условии уравнение (30) имеет корни $t > -a$. Для того чтобы выполнялись неравенства $-a < t_1 < t_2$, необходимо и достаточно, чтобы a удовлетворяло системе неравенств

$$\begin{cases} a^2 - a > 0, \\ -2a + 2 < 0, \end{cases}$$

откуда $a > 1$, что противоречит условию $0 < a < 1$.

Для того чтобы имели место неравенства $t_1 < -a < t_2$, необходимо и достаточно, чтобы a удовлетворяло неравенству

$$a^2 - a < 0,$$

которое выполняется, если $0 < a < 1$.

Таким образом, если $0 < a < 1$, то существует только один корень уравнения (30) $t = t_2$, который больше, чем $-a$, т. е. если $0 < a < 1$, то смешанная система (I) имеет единственное решение

$$t = \sqrt{1-a} - 1.$$

Воспользовавшись подстановкой (28), находим соответствующий этому решению корень исходного уравнения:

$$x = a^{\sqrt{1-a}-1}.$$

Аналогично исследуем, при каких значениях параметра $a \, (0 < a \neq 1)$ система (II) имеет ненулевое решение, и найдем его.

Квадратное уравнение системы (II), т. е. уравнение

$$t^2 - 2t - 3a = 0, \tag{32}$$

при $0 < a \neq 1$ имеет действительные и различные корни, так как его дискриминант

$$4\,(1 + 3a) > 0.$$

Найдем эти корни:

$$t_1 = 1 - \sqrt{1+3a}, \quad t_2 = 1 + \sqrt{1+3a},$$

причем $t_1 < t_2$.

Для того чтобы имели место неравенства $t_1 < t_2 < -a$, необходимо и достаточно, чтобы a удовлетворяло системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+2a-3a>0, \\ -2a-2>0, \end{cases}$$

откуда $a<-1$, что противоречит условию $0<a\neq 1$.

Чтобы выполнялись неравенства $t_1<-a<t_2$, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^2-a<0,$$

т. е. $0<a<1$.

Таким образом, если $0<a<1$, то существует единственный корень уравнения (32) $t=t_1$, который меньше, чем $-a$, т. е. если $0<a<1$, то смешанная система (II) имеет единственное решение

$$t=1-\sqrt{1+3a}.$$

Воспользовавшись подстановкой (28), находим соответствующий этому решению корень исходного уравнения:

$$x=a^{1-\sqrt{1+3a}}.$$

Ответ. Уравнение имеет два корня $x=a^{\sqrt{1-a}-1}$ и $x=a^{1-\sqrt{1+3a}}$, если $0<a<1$. При всех остальных значениях a уравнение корней не имеет.

Замечание. Системы (I) и (II) можно исследовать на КП-плоскости aOt.

Метод рационализации является эффективным методом при решении уравнений, содержащих неизвестное под знаком логарифмической функции.

Рассмотрим уравнение

$$R(\log_a^m x, \log_a^n x, \ldots, \log_a^p x)=0,$$

где $m, n, \ldots, p$ — рациональные числа, а R — рациональная алгебраическая функция.

Подстановкой

$$\log_a x=t$$

оно приводится к уравнению

$$R(t^m, t^n, \ldots, t^p)=0,$$

которое в свою очередь приводится к рациональному алгебраическому уравнению

$$R^*(z)=0,$$

получаемому из предыдущего подстановкой

$$z=\sqrt[r]{t},$$

где r — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m, n, \ldots, p$.

3^0. Сведение к смешанной системе.

Рассматриваемый прием решения логарифмических уравнений заключается в уравнивании оснований логарифмических функций, входящих в левую и правую часть уравнения, приведении уравнения к виду

$$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \ (0 < a \neq 1) \tag{33}$$

и последующем использовании теоремы 1, согласно которой полученное уравнение в области его определения, т. е. при

$$f_1(x) > 0 \ \text{ и } \ f_2(x) > 0, \tag{34}$$

эквивалентно уравнению

$$f_1(x) = f_2(x). \tag{35}$$

Иначе говоря, логарифмическое уравнение (33) эквивалентно смешанной системе (34), (35):

$$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) > 0.$$

В частности, если уравнение содержит линейную комбинацию (с целыми коэффициентами) логарифмов при одном и том же основании относительно целых рациональных функций от x:

$$m \log_a P(x) + n \log_a Q(x) + \ldots = 0,$$

то это уравнение будет эквивалентно алгебраической смешанной системе.

Если основание логарифмов a не число, а функция от x, то имеет место следующая эквивалентность:

$$\log_{a(x)} f_1(x) = \log_{a(x)} f_2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) > 0, \\ 0 < a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Данная схема содержит минимальное число операций. Как правило, сначала решают уравнение смешанной системы. Если оно имеет, например, дискретное множество корней, то подстановкой их в неравенства проверяют, какие из найденных корней этим неравенствам удовлетворяют, а следовательно, являются решениями рассматриваемого исходного уравнения. При этом есть право выбора — проверить выполнение либо неравенства $f_1(x) > 0$, либо неравенства $f_2(x) > 0$.

Аналогично, в силу свойств логарифмической функции уравнение

$$\log_{a_1(x)} f(x) = \log_{a_2(x)} f(x)$$

в области его определения (ОДЗ), задаваемой условиями

$$\text{ОДЗ:} \ \begin{cases} 0 < a_1(x) \neq 1, \\ 0 < a_2(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a_1(x)=a_2(x), \\ f(x)=1. \end{array}\right.$$

Иначе говоря, имеет место следующая логическая схема:

$$\log_{a_1(x)} f(x)=\log_{a_2(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a_1(x)\neq 1, \\ 0<a_2(x)\neq 1, \\ f(x)>0, \\ \left[\begin{array}{l} a_1(x)=a_2(x), \\ f(x)=1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Здесь, как и в предыдущей схеме, уравнения совокупности смешанной системы, как правило, решают, а неравенства — проверяют. Так как $a_1(x)=a_2(x)$, то проверку осуществляют либо по условию $0<a_1(x)\neq 1$, либо по условию $0<a_2(x)\neq 1$. Для корней уравнения $f(x)=1$ неравенство $f(x)>0$ выполняется автоматически.

Пример 11. *Решить уравнение*

$$\log_{84-2x-2x^2}\cos x=\log_{x+19}\cos x.$$

Решение. Данное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} 0<84-2x-2x^2\neq 1, \\ 0<x+19\neq 1, \\ \cos x>0, \\ \left[\begin{array}{l} 84-2x-2x^2=x+19, \\ \cos x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{13}{2}, \\ x=5, \\ x=0, \\ x=-2\pi. \end{array}\right.$$

Ответ. $x\in\left\{-\dfrac{13}{2},\ 5,\ 0,\ -2\pi\right\}$.

Пример 12. *Найти все решения уравнения*

$$\log_{\sqrt{x}}(x+|x-2|)=\log_x(5x-6+5|x-2|). \qquad (36)$$

Решение. Область определения данного уравнения находится из системы неравенств

$$\begin{cases} x+|x-2|>0, \\ 5x-6+5|x-2|>0, \\ 0<x\neq 1. \end{cases} \qquad (37)$$

В этой области уравнение (36) эквивалентно уравнению

$$2\log_x(x+|x-2|)=\log_x(5x-6+5|x-2|),$$

или

$$\log_x(x+|x-2|)^2=\log_x(5x-6+5|x-2|).$$

Последнее на множестве (37) эквивалентно алгебраическому уравнению

$$(x+|x-2|)^2=5x-6+5|x-2|. \qquad (38)$$

Таким образом, логарифмическое уравнение (36) в своей области определения эквивалентно смешанной системе (38), (37). Найдем решения этой системы.

Рассмотрим два случая.

а) Пусть $x\geq 2$. Тогда смешанная система принимает вид

$$\begin{cases} 2x^2-9x+10=0, & (39)\\ x-1>0, & \\ 5x-8>0, & (40)\\ 0<x\neq 1. & \end{cases}$$

Корни $x_1=\dfrac{5}{2}$ и $x_2=2$ квадратного уравнения (39) удовлетворяют неравенствам (40) и, следовательно, являются решениями смешанной системы (38), (37) при $x\geq 2$.

б) Пусть $x<2$. В этом случае система неравенств (37) выполняется для всех значений $0<x\neq 1$, а уравнение (38) превращается в тождество.

Таким образом, решениями смешанной системы (38), (37) в рассматриваемом случае являются все значения $x<2$, удовлетворяющие условию $0<x\neq 1$, т. е. значения $0<x<1$, $1<x<2$.

Итак, смешанная система (38), (37), а значит, и исходное логарифмическое уравнение (36) имеют следующие решения:

$$0<x<1,\ 1<x\leq 2,\ x=\frac{5}{2}.$$

Ответ. $0<x<1,\ 1<x\leq 2,\ x=\dfrac{5}{2}.$

Пример 13. *Найти все значения а, при каждом из которых уравнение*

$$(x^2-(a+1)x+3(a-2))\cdot\log_{a-x}(2a-x-1)=0$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1,\ 2]$, *а вне этого отрезка корней не имеет.*

Р е ш е н и е. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x-3)\cdot(x-(a-2))\cdot\log_{a-x}(2a-x-1)=0.$$

Далее, применяя логическую схему решения логарифмического уравнения, заменим полученное уравнение эквивалентной совокупностью трех систем:

$$\left[\begin{array}{l} \text{I.}\begin{cases} x=3, \\ 0<a-x\ne 1, \\ 2a-x-1>0; \end{cases} \\ \text{II.}\begin{cases} x=a-2, \\ 0<a-x\ne 1, \\ 2a-x-1>0; \end{cases} \\ \text{III.}\begin{cases} 0<a-x\ne 1, \\ 2a-x-1=1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{I.}\begin{cases} x_1=3, \\ a>3, \\ a\ne 4; \end{cases} \\ \text{II.}\begin{cases} x_2=a-2, \\ a>-1; \end{cases} \\ \text{III.}\begin{cases} x_3=2a-2, \\ a<2, \\ a\ne 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Область допустимых значений переменной x и параметра a находим из условий

$$\text{(ОДЗ)}\ \begin{cases} 0<a-x\ne 1, \\ 2a-x-1>0 \end{cases}$$

и на КП-плоскости aOx изображаем как пересечение полуплоскостей (без границ) $x<a$ и $x<2a-1$ за исключением точек прямой $x=a-1$ (рис. 174).

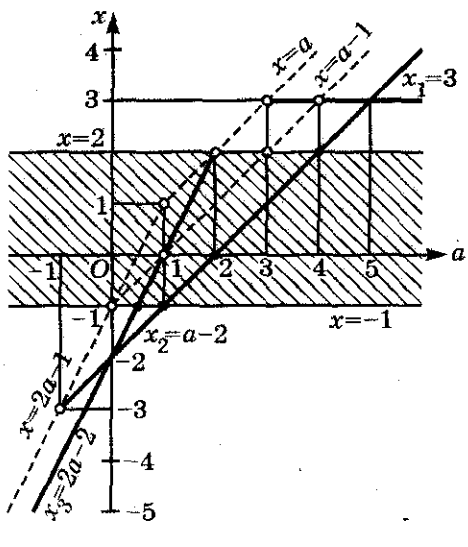


Рис. 174

Корни исходного уравнения в зависимости от значений параметра a изображаем на КП-плоскости как множество всех точек трех прямых

$$x_1 = 3,\ x_2 = a - 2 \text{ и } x_3 = 2a - 2,$$

принадлежащих области допустимых значений.

Следовательно, существует хотя бы одна точка этого множества в полосе

$$-1 \le x \le 2$$

(заштрихованной на КП-плоскости) и не существует точек указанного множества вне этой полосы для всех значений параметра

$$a \in [1,\ 3] \cup \{4\}.$$

Ответ. $a \in [1,\ 3] \cup \{4\}$.

4. Уравнения, связанные с обобщенно-показательной функцией

Рассмотрим уравнение вида

$$f_1(x)^{\varphi_1(x)} = f_2(x)^{\varphi_2(x)}. \tag{41}$$

Областью определения этого уравнения (рассматриваемого как равенство двух функций) служит общая часть (пересечение множеств) областей определения обобщенно-показательных функций

$$y_1(x) = f_1(x)^{\varphi_1(x)} \text{ и } y_2(x) = f_2(x)^{\varphi_2(x)}.$$

Значит, всюду в области определения уравнение (41) эквивалентно следующему:

$$a^{\varphi_1(x)\log_a f_1(x)} = a^{\varphi_2(x)\log_a f_2(x)} \ (0 < a \ne 1),$$

или уравнению

$$\varphi_1(x)\log_a f_1(x) = \varphi_2(x)\log_a f_2(x). \tag{42}$$

Так , например, уравнение

$$f(x)^{\varphi_1(x)} = f(x)^{\varphi_2(x)} \tag{43}$$

на множестве $f(x) > 0$ эквивалентно уравнению

$$a^{\varphi_1(x)\log_a f(x)} = a^{\varphi_2(x)\log_a f(x)} \ (0 < a \ne 1),$$

которое в свою очередь на рассматриваемом множестве эквивалентно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \varphi_2(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) = 1, \\ x \in \text{ОДЗ}. \end{cases} \tag{44}$$

Замечание. Как уже отмечалось (см. § 1, п. 5) при отдельных значениях $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ выражения $f_1(x)^{\varphi_1(x)}$ и $f_2(x)^{\varphi_2(x)}$ имеют смысл и для неположительных значений $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Однако те значения x, которые хотя формально и удовлетворяют равенству (41), но при которых $f_1(x) \le 0$ или $f_2(x) \le 0$, мы не будет считать корнями уравнения (41).

Пример 14. *Решить уравнение*

$$\left|3^x - 2 \cdot 3^{-x}\right|^{\log_4(x+2) - \log_2 x} = 1. \tag{45}$$

Решение. Область определения уравнения находится из условий

$$3^x - 2 \cdot 3^{-x} \ne 0,\ x + 2 > 0,\ x > 0,$$

т. е. представляет собой множество

$$0 < x \ne \log_3 \sqrt{2}. \tag{46}$$

Уравнение (45) эквивалентно уравнению

$$a^{[\log_4(x+2) - \log_2 x] \cdot \log_a \left|3^x - 2 \cdot 3^{-x}\right|} = a^{\log_a 1} \ (0 < a \ne 1),$$

или

$$[\log_4(x+2) - \log_2 x] \cdot \log_a \left|3^x - 2 \cdot 3^{-x}\right| = 0.$$

Последнее на множестве (46) эквивалентно совокупности двух уравнений

$$\log_4(x+2) - \log_2 x = 0 \text{ и } \log_a \left|3^x - 2 \cdot 3^{-x}\right| = 0.$$

Решая первое из них, находим $x = 2$. Решая второе, получим $3^x = 2$, откуда $x = \log_3 2$.

Ответ. $x_1 = 2,\ x_2 = \log_3 2$.

5. Об эквивалентности логарифмических уравнений

При решении логарифмических уравнений часто совершают преобразования, которые изменяют область определения исходного уравнения. При этом если область определения преобразованного уравнения шире, чем область определения исходного, то возможно появление «посторонних корней»; если же область определения нового уравнения является более узкой, чем область определения исходного, то возможна потеря корней.

Например, следующие пары уравнений, вообще говоря, не эквивалентны:

1. $f_1(x) = f_2(x)$ и $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x)$.
2. $\log_a[f_1(x) \cdot f_2(x)] = b$ и $\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) = b$.
3. $\log_a\left[\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = b$ и $\log_a f_1(x) - \log_a f_2(x) = b$.

4. $\log_a[f_1(x)]^m = b$ и $m\log_a f_1(x) = b$ (m — действительное число).

Неэквивалентность указанных пар уравнений может быть вызвана тем, что область определения вторых уравнений каждой из пар является более узкой, чем область определения первых уравнений.

А именно, если для вторых уравнений необходимо, чтобы функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принимали положительные значения, то для первых это могут быть функции одинакового знака (в уравнении $f_1(x) = f_2(x)$ они могут быть равны нулю, а в уравнении $\log_a[f_1(x)]^m = b$, если m — четное, то возможно, что $f_1(x) < 0$).

В области, где $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$, все пары уравнений эквивалентны.

Таким образом, *при логарифмировании уравнения область его определения может лишь сузиться* (*возможна* <u>*потеря*</u> *корней*), *при потенцировании — расшириться* (*возможно* <u>*приобретение*</u> *«посторонних корней»*).

Использование формул потенцирования

$$\left.\begin{aligned}
&\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) = \log_a[f_1(x)\cdot f_2(x)];\\
&\log_a f_1(x) - \log_a f_2(x) = \log_a\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right];\\
&m\log_a f_1(x) = \log_a[f_1(x)]^m\\
&\qquad\qquad (m \text{ — действительное число})
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

при решении уравнений может привести только к приобретению «посторонних корней».

Использование формул логарифмирования

$$\left.\begin{aligned}
&\log_a[f_1(x)\cdot f_2(x)] = \log_a f_1(x) + \log_a f_2(x);\\
&\log_a\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \log_a f_1(x) - \log_a f_2(x);\\
&\log_a[f_1(x)]^m = m\log_a f_1(x)
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

при решении уравнений может привести к потере корней.

Чтобы формулы (48) не приводили к потере корней, ими пользуются в виде

$$\left.\begin{array}{l}\log_a[f_1(x)\cdot f_2(x)]=\log_a|f_1(x)|+\log_a|f_2(x)| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (f_1(x)\cdot f_2(x)>0); \\ \log_a\left[\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]=\log_a|f_1(x)|-\log_a|f_2(x)| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (f_1(x)\cdot f_2(x)>0); \\ \log_a[f_1(x)]^{2k}=2k\log_a|f_1(x)| \\ \qquad\qquad\qquad (f_1(x)\neq 0,\ k \text{ — целое число}) \end{array}\right\} . \qquad (49)$$

Использование первых двух формул может лишь привести к появлению «посторонних корней», которые, как правило, нетрудно устранить с помощью проверки.

По той же причине при решении уравнений пользуются также формулой

$$\log_{a^{2k}} N=\frac{1}{2k}\log_{|a|} N$$

($N>0$, $k\neq 0$ — целое число, $a\neq 0$, $|a|\neq 1$).

Пример 15. *Решить уравнение*

$$\log_{\frac{1}{6}}(x-1)+\log_{\frac{1}{6}}(5x+3)=-2. \qquad (50)$$

Решение. Область определения уравнения — это множество

$$x>1. \qquad (51)$$

Запишем уравнение (50) следующим образом:

$$\log_{\frac{1}{6}}[(x-1)(5x+3)]=-2. \qquad (52)$$

Область определения полученного уравнения (52) шире, чем область определения уравнения (50), и представляет собой множество

$$x<-\frac{3}{5},\ x>1. \qquad (53)$$

Потенцируя уравнение (52), получаем эквивалентное ему на множестве (50) алгебраическое уравнение

$$(x-1)(5x+3)=36,$$

корни которого $x_1=3$, $x_2=-\dfrac{13}{5}$. Значение $x_2=-\dfrac{13}{5}$ не входит в область определения уравнения (50) и, следовательно, не является его корнем.

Итак, при переходе от уравнения (50) к уравнению-следствию (52) мы выполнили преобразование, расширившее область определения (51) данного уравнения, в результате чего получился «посторонний корень» $x_2 = -\frac{13}{5}$.

Ответ. $x = 3$.

Пример 16. *Решить уравнение*

$$\log_4(2x^2 + x + 1) - \log_2(2x - 1) = 1. \qquad (54)$$

Решение. Данное уравнение в своей области определения

$$x > \frac{1}{2}$$

эквивалентно следующему:

$$\log_4(2x^2 + x + 1) - 2\log_4(2x - 1) = 1. \qquad (55)$$

Отсюда получаем уравнение

$$\log_4(2x^2 + x + 1) - \log_4(2x - 1)^2 = 1, \qquad (56)$$

которое является следствием уравнения (55).

Потенцируя уравнение (56), приходим к алгебраическому уравнению

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(2x - 1)^2} = 4,$$

корни которого

$$x_1 = 1, \ x_2 = \frac{3}{14}.$$

Значение $x_2 = \frac{3}{14}$ не принадлежит области определения исходного уравнения (54) и, следовательно, не является его корнем.

«Посторонний корень» $x_2 = \frac{3}{14}$ уравнения (54) появился в результате того, что, применив преобразование

$$2\log_4(2x - 1) = \log_4(2x - 1)^2,$$

мы получили уравнение (56), область определения которого $x \neq \frac{1}{2}$, т. е. шире, чем область определения уравнения (55).

Заметим, что потенцирование уравнения (56) в данном случае не привело к «посторонним корням».

Ответ. $x = 1$.

Пример 17. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} |x|^{\lg|y|} = 4, \\ xy = 40. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Логарифмируя оба уравнения и пользуясь формулами (49), получим систему

$$\begin{cases} \lg|y|\cdot\lg|x| = \lg 4, \\ \lg|x| + \lg|y| = 1 + \lg 4, \end{cases}$$

которая является следствием исходной.

Решив эту систему уравнений, находим

$$\lg|x| = 1,\ \lg|y| = \lg 4 \ \text{ и } \ \lg|x| = \lg 4,\ \lg|y| = 1,$$

откуда

$$x_1 = 10,\ y_1 = 4;\ x_2 = 4,\ y_2 = 10;$$

$$x_3 = -10,\ y_3 = -4;\ x_4 = -4,\ y_4 = -10.$$

Заметим, что использование формул (48) привело бы в данном случае к потере отрицательных решений системы.

О т в е т. $x_1 = 10,\ y_1 = 4;\ x_2 = 4,\ y_2 = 10;$

$$x_3 = -10,\ y_3 = -4;\ x_4 = -4,\ y_4 = -10.$$

Рассмотрим примеры преобразований, которые могут приводить как к потере корней, так и к приобретению «посторонних».

Использование основного логарифмического тождества

$$a^{\log_a N} = N \ (0 < a \neq 1,\ N > 0)$$

может расширить область определения уравнения, а следовательно, привести к получению «посторонних корней».

П р и м е р 18. *Решить уравнение*

$$x^{\log_{\sqrt{x}}(2x)} = 16. \tag{57}$$

Р е ш е н и е. Область определения уравнения (57) — это множество

$$0 < x \neq 1. \tag{58}$$

На множестве (58) уравнение (57) эквивалентно следующему:

$$(\sqrt{x})^{\log_{\sqrt{x}}(2x)^2} = 16.$$

Используя основное логарифмическое тождество, получим уравнение

$$(2x)^2 = 16, \tag{59}$$

областью определения которого является множество всех действительных чисел. Находим корни уравнения (59):

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2.$$

Значение $x_2 = -2$ не входит в область определения уравнения (57) и потому его корнем не является.

Таким образом, в результате применения основного логарифмического тождества мы получили уравнение (59), являющееся следствием уравнения (57), что привело к появлению «постороннего корня» $x_2 = -2$.

Ответ. $x = 2$.

Использование формулы

$$N = a^{\log_a N} \quad (N > 0,\ 0 < a \neq 1)$$

может привести к сужению области определения уравнения, так как из этой области исключаются те значения неизвестного, при которых $a \leq 0$ или $a = 1$. Следовательно, необходимо проверить, не являются ли указанные значения неизвестного корнями исходного уравнения.

Примером преобразований, которые могут привести как к потере корней, так и к приобретению «посторонних корней», может служить также переход к новому основанию логарифмов.

Часто при решении уравнений переходят к новому основанию, содержащему неизвестное:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad (0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1,\ N > 0).$$

При таком преобразовании, естественно, подразумевается, что новое основание $b(x)$ положительно и отлично от единицы. Поэтому необходимо проверить, не являются ли корнями исходного уравнения те значения x, при которых

$$b(x) \leq 0 \ \text{ или } \ b(x) = 1.$$

В противном случае эти корни могут быть потеряны.

Пример 19. *Решить уравнение*

$$\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 10\log_{4x} \sqrt{x} = 0. \tag{60}$$

Решение. Область определения уравнения задается условиями

$$x > 0,\ x \neq 2,\ x \neq \frac{1}{16},\ x \neq \frac{1}{4}.$$

Примем x в качестве нового основания логарифмов. При этом мы, естественно, считаем $x \neq 1$. Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся, что $x_1 = 1$ является корнем исходного уравнения (60).

Чтобы найти корни, отличные от единицы, преобразуем данное уравнение:

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x(0,5x)} - \frac{14\log_x x^3}{\log_x(16x)} + \frac{40\log_x \sqrt{x}}{\log_x(4x)} = 0.$$

Полагая в этом уравнении

$$\log_x 2 = t, \tag{61}$$

получим алгебраическое уравнение

$$\frac{2}{1-t} - \frac{42}{1+4t} + \frac{20}{1+2t} = 0,$$

или

$$2t^2 + 3t - 2 = 0. \tag{62}$$

Находим корни квадратного уравнения (62): $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -2$.

Воспользовавшись подстановкой (61), имеем

$$\log_x 2 = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x_2 = 4;$$

$$\log_x 2 = -2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значение $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ не принадлежит области определения исходного уравнения (60) и, следовательно, не является его корнем.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

В результате применения формулы

$$\frac{\log_b N}{\log_b a} = \log_a N$$

может произойти расширение области определения уравнения, так как левая часть формулы определена при $N > 0$, $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$, а правая — при $N > 0$, $0 < a \neq 1$. При этом «посторонними корнями» могут оказаться те значения неизвестного, при которых основание логарифмов $b(x)$ не удовлетворяет условию $0 < b \neq 1$.

Итак, при решении уравнений, выполняя различные преобразования с логарифмами, необходимо следить, не нарушают ли эти преобразования эквивалентность уравнений.

В заключение приведем следующие пары эквивалентных уравнений:

1. $f(x) = 1$ и $\log_a f(x) = 0$.
2. $f(x) = \varphi(x)$ и $\log_a[f(x) - \varphi(x) + 1] = 0$.
3. $\log_a \sqrt{f(x)} = 0$ и $f(x) = 1$.
4. $f(x) \cdot \varphi(x) = 1$ и $\log_a|f(x)| + \log_a|\varphi(x)| = 0$.

5. $\log_a x^2=0$ и $2\log_a|x|=0$.

6. $\log_a x^3=0$ и $3\log_a x=0$.

7. $\log_a\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|=0$ и $\log_a|f(x)|-\log_a|\varphi(x)|=0$.

8. $\log_a|f(x)\cdot\varphi(x)|=0$ и $\log_a|f(x)|+\log_a|\varphi(x)|=0$.

9. $\log_a\sqrt{x}=0$ и $\dfrac{1}{2}\log_a x=0$.

Уравнения $\log_a[f(x)\cdot\varphi(x)]=0$ и $\log_a|f(x)|+\log_a|\varphi(x)|=0$ эквивалентны, если уравнение $f(x)\cdot\varphi(x)=-1$ не имеет корней.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $5\cdot 2^{3(x-1)}-3\cdot 2^{5-3x}+7=0$. Ответ. $x=1$.

2. $8^x-3\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$. Ответ. $x_1=0$, $x_2=2$.

3. $2^{2x+2}-6^x-2\cdot 3^{2x+2}=0$. Ответ. $x=-2$.

4. $2^{x+2}+2\cdot 3^{x+1}=8\cdot 3^x+3\cdot 2^x$. Ответ. $x=\log_{\frac{2}{7}}2$.

5. $4^x=2\cdot 14^x+3\cdot 49^x$. Ответ. $x=\log_{\frac{2}{7}}2$.

6. $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4^x$. Ответ. $x=1$.

7. $(\log_2 x)^{-1}+4\log_2 x^2+9=0$. Ответ. $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{8}}}$.

8. $\log_{\sqrt{x}}2+4\log_4 x^2+9=0$. Ответ. $x_1=\dfrac{1}{4}$, $x_2=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$.

9. $\dfrac{\log_3\left(\dfrac{8}{x^2}\right)}{(\log_8 x)^2}=3$. Ответ. $x_1=\dfrac{1}{8}$, $x_2=2$.

10. $4\left(1+2^{x-1-2x^2}\right)^2+3\left(2^{x-2x^2}-3\right)\left(2^{x-2x^2}+1\right)+5\cdot 2^{x+1-2x^2}=0.$

Ответ. $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=1.$

11. $\log_2^2\frac{3+2x^2}{4\sqrt{2}}+[1+\log_2(3+2x^2)]\log_2\frac{3+2x^2}{2}=\frac{13}{4}.$

Ответ. $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

12. $\frac{1}{2}\log_3(-x-16)-\log_3(\sqrt{-x}-4)=1.$ Ответ. $x=-25.$

13. $\log_3 a-\log_x a=\log_{\frac{x}{3}} a\ (0<a\neq 1).$

Ответ. $x_{1,2}=a^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}.$

14. $\log_3\sqrt{130-7^{\log_x(6-x)}}=2.$ Ответ. $x=2.$

15. $(x^2+1)^{\frac{7}{4}}\cdot\sqrt[4]{(x^2+1)^{\lg(x^2+1)}}=10^{\lg(x^2+1)+1}.$

Ответ. $x_{1,2}=\pm 3.$

16. $\log_6\left(3\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+2\cdot 9^{-\frac{1}{x}}\right)+\frac{1}{x}=\log_6 5.$ Ответ. $x=1.$

17. $\left(\sqrt[3]{x^2-4}\right)^{\log_{x^2-4}\left(\log_{x-1}^3(5x-9)\right)}=2.$ Ответ. $x=5.$

18. $\log_{\sqrt{2x-1}}(2x-3)-2\log_8 4+\log_2\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$ Ответ. $x=\frac{5}{2}.$

19. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4.$ Ответ. $x=1.$

20. $\dfrac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}=1.$ Ответ. $x=5.$

21. $\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_2 3-\log_2(3^x-13)=3\log_{\frac{\sqrt{5}}{25}}5+4.$

Ответ. $x=4\log_3 2.$

22. $2\log_4(2^x-1)+x+\log_{\frac{1}{2}}3+\log_{\frac{\sqrt{6}}{6}}6=0.$

Ответ. $x=2.$

23. $\log_3(4^x+15\cdot 2^x+27)-2\log_3(4\cdot 2^x-3)=0.$

Ответ. $x=\log_2 3.$

24. $x^{(\log_3 x)^3-3\log_3 x}=3^{-3\log_{2\sqrt{2}}4}+8.$

Ответ. $x_1=9,\ x_2=\frac{1}{9}.$

25. $2\log_8(2x)+\log_8(x^2+1-2x)=\frac{4}{3}.$

Ответ. $x=2.$

26. $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3.$

Ответ. $x_1=2,\ x_2=1-\sqrt{33}.$

27. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1.$

Ответ. $x=3.$

28. $2\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}(13-x)=\log_2(x-10)^2+2\log_4(8-x).$

Ответ. $x=4.$

29. $\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4\log_4 x-2}=4.$ **Ответ.** $x=8.$

30. $\sqrt{2\left(\log_2\frac{x^2}{64}-1\right)[2+\log_4(8x)]}=\log_2(2x).$

Ответ. $x=32.$

31. $2\log_2\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}}\log_2(2\sqrt{2x})=1.$

Ответ. $x=8.$

32. $9^{-|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{|x+1|+|x-1|}}$

Ответ. $x_{1,2}=\pm\log_3 2.$

33. $2^{|x+2|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1.$

Ответ. $x=-3,\ x\geq -1.$

34. $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+4}+2^{x-1}.$

Ответ. $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2},\ x\geq 3.$

35. $\log_4(6+\sqrt{x}-\left|\sqrt{x}-2\right|)=\frac{1}{2}+\log_2\left|\sqrt{x}-\left|\sqrt{x}-2\right|\right|.$

Ответ. $x=\frac{1}{16},\ x\geq 4.$

36. $9\cdot 3^{\log_x^2 4}-\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x 0{,}125}=0.$

Ответ. $x_1=2,\ x_2=4.$

37. $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6.$

Ответ. $x_1=\log_3 28-3,\ x_2=\log_3 10.$

38. $\sqrt{\log_2 x^4}+4\log_4\sqrt{\frac{2}{x}}=2.$

Ответ. $x=2.$

39. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{101}{10(2-\sqrt{3})}.$

Ответ. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\log_{2+\sqrt{3}}10}.$

40. $\log_5[(2+\sqrt{5})^x-(\sqrt{5}-2)^x]=\frac{1}{2}-3\log_{\frac{1}{5}}2.$

Ответ. $x=2.$

41. $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6.$ Ответ. $x=1.$

42. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x.$ Ответ. $x_1=2,\ x_2=\frac{1}{4}.$

43. $\log_x 3\cdot\log_{\frac{x}{3}}3+\log_{\frac{x}{81}}3=0.$ Ответ. $x_1=9,\ x_2=\frac{1}{9}.$

44. $\log_2 x-8\log_{x^2}2=3.$ Ответ. $x_1=16,\ x_2=\frac{1}{2}.$

45. $\log_a(ax)\cdot\log_x(ax)=\log_{a^2}\dfrac{1}{a}$ $(0<a\neq 1)$.

Ответ. $x_1=\dfrac{1}{a^2},\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

46. $\log_x(ax)\cdot\log_a x=1+\log_x\sqrt{a}$ $(0<a\neq 1)$.

Ответ. $x_{1,2}=a^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

47. $\dfrac{1}{\log_6(3+x)}+\dfrac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1$.

Ответ. $x=3$.

48. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\dfrac{2}{\log_4 x}$. Ответ. $x_1=2,\ x_2=8$.

49. $\log_3(4\cdot 3^{x-1}-1)=2x-1$. Ответ. $x_1=0,\ x_2=1$.

50. $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$. Ответ. $x=2$.

51. $\log_2(9^x+3^{2x-1}-2^{x+\frac{1}{2}})=x+3{,}5$. Ответ. $x=\dfrac{3}{2}$.

52. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3(x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}$. Ответ. $x=3$.

53. $3\cdot 16^x+36^x=2\cdot 81^x$. Ответ. $x=\dfrac{1}{2}$.

54. $7x^{\frac{1}{(\log_2 x^3)^2}+\log_x 2}=5+(x+7)^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)}}$.

Ответ. $x=\dfrac{1}{\sqrt[9]{2}}$.

55. $\dfrac{3}{x^{(\log_3 x^2)^3}}=(\sqrt{x})^{-\log_3 x+\frac{1}{\log_3\sqrt{x}}}$.

Ответ. $x_1=\sqrt[4]{3},\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

56. $x^{\log_2^3 x^2-2\log_2 x+1}+2^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}}=2x.$

Ответ. $x_1=\sqrt{2},\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_3=1.$

Решить системы уравнений:

57. $\begin{cases}\log_a x-\log_{a^2} y=m,\\ \log_{a^2} x-\log_{a^3} y=n.\end{cases}$

Ответ. $x=a^{4m-6n},\ y=a^{6m-12n}.$

58. $\begin{cases}\log_2(x^2-3y^2-7y-11)=\log_4 9,\\ \log_3(x+2y)+\log_3(x-2y)=\log_9 4.\end{cases}$

Ответ. $x_1=\sqrt{18},\ y_1=2;\ x_2=\sqrt{102},\ y_2=5.$

59. $\begin{cases}\log_9(x^2+2)+\log_{81}(y^2+9)=2,\\ 2\log_4(x+y)-\log_2(x-y)=0.\end{cases}$

Ответ. $x=5,\ y=0.$

60. $\begin{cases}\log_2(xy)\cdot\log_2\dfrac{x}{y}=-3,\\ \log_2^2 x+\log_2^2 y=5.\end{cases}$

Ответ. $x_1=2,\ y_1=4;\ x_2=\dfrac{1}{2},\ y_2=\dfrac{1}{4}.$

61. $\begin{cases}(\sqrt{3})^{x-y}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2y},\\ \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=4.\end{cases}$

Ответ. $x=5,\ y=3.$

62. $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=18,\\ \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=-1.\end{cases}$

Ответ. $x=2,\ y=1.$

63. $\begin{cases}\log_2\left(1-\dfrac{x}{y}\right)=2-\log_2 y,\\ \log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} x+\log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} y=4.\end{cases}$

Ответ. $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{9}{2}.$

64. $\begin{cases} x^2+4y^3=96, \\ \log_{y^2} 2=\log_{xy} 4. \end{cases}$ **Ответ.** $x=8,\ y=2.$

65. $\begin{cases} \dfrac{1+x^2+xy}{x+y}=2-y, \\ \log_{2^{1-y}} 2^{x^2}=1+y. \end{cases}$ **Ответ.** $x=1,\ y=0.$

66. $\begin{cases} (2^x+1)2^{y+1}=9, \\ \sqrt{x+y^2}=x+y. \end{cases}$

Ответ. $x_1=3,\ y_1=-1;\ x_2=0,\ y_2=2\log_2 3-2.$

67. $\begin{cases} \sqrt[x]{x+2y}=2, \\ (2x+4y)3^x=72. \end{cases}$ **Ответ.** $x=2,\ y=1.$

68. $\begin{cases} \log_{a^x} y=2y^2, \\ \log_a \sqrt{xa}+2\log_{a^2} \dfrac{y}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ **Ответ.** $x=a^{1-4a},\ y=a^{2a}.$

69. $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2}=2, \\ \log_8 x\cdot\log_2(y+1)^2=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Ответ. $x_1=2,\ y_1=3;\ x_2=\sqrt{2},\ y_2=15.$

70. $\begin{cases} x^{2y-1}=5, \\ x^{y+2}=3. \end{cases}$ **Ответ.** $x=\sqrt[5]{\dfrac{9}{5}},\ y=\log_{\frac{9}{5}} 75.$

71. $\begin{cases} |\log_2(x+y)|+|\log_2(x-y)|=3, \\ xy=3. \end{cases}$

Ответ. $x=3,\ y=1.$

72. $\begin{cases} 5(\log_y x+\log_x y)=26, \\ xy=64. \end{cases}$

Ответ. $x_1=2,\ y_1=32;\ x_2=32,\ y_2=2.$

73. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2, \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2, \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2. \end{cases}$

Ответ. $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{27}{8}$, $z=\frac{32}{3}$.

74. $\begin{cases} x^{2/3}y^{1/3}-x^{1/3}y^{2/3}=2, \\ \log_3 x+\log_3 y=1. \end{cases}$ Ответ. $x=9$, $y=\frac{1}{3}$.

75. $\begin{cases} 2x^{y}-x^{-y}=1, \\ \log_2 y=\sqrt{x}. \end{cases}$ Ответ. $x=1$, $y=2$.

76. $\begin{cases} x^2=1+6\log_4 y, \\ y^2=y\cdot 2^x+2^{2x+1}. \end{cases}$

Ответ. $x_1=4$, $y_1=32$; $x_2=-1$, $y_2=1$.

77. $\begin{cases} |x|^{|y|}=|y|^{|x|}, \\ |x|^{\left|\frac{2}{x}\right|}+2|y|^{\left|\frac{1}{y}\right|}=3. \end{cases}$

Ответ. $x_1=1$, $y_1=1$; $x_2=-1$, $y_2=1$;
$x_3=1$, $y_3=-1$; $x_4=-1$, $y_4=-1$.

78. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}, \\ (x+y)2^{y-x}=3. \end{cases}$ Ответ. $x=7$, $y=5$.

79. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=\dfrac{\sqrt{52-2x}}{\sqrt[4]{x-y}}, \\ \dfrac{3}{2}\log_8(x-y)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-y)=5. \end{cases}$ Ответ. $x=20$, $y=16$.

80. Найти тот корень уравнения

$$\log_{0,3}^2 x-\log_{0,3} x+a=0\ (a<0),$$

который больше 1.

Ответ. $x=(0,3)^{\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}}$

81. Дано уравнение $a^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x=b.$

а) При каких $a>0$ и b оно имеет корни?

б) При каких $a>0$ и b оно имеет единственный корень?

в) Найти все b такие, что для любого $0<a\neq 1$ это уравнение имеет корни.

Ответ. а) При $a=1$, $b=2$ или при $0<a\neq 1$, $b\geq 2$; б) при $0<a\neq 1$, $b>2$; в) при $b\geq 2$.

Для каждого действительного числа a решить уравнения:

82. $4^x-4a\cdot 2^x+2a+2=0.$

Ответ. $x=\log_2(2a+\sqrt{4a^2-2a-2})$ при $a<-1$; $x=1$ при $a=1$; $x_{1,2}=\log_2(2a\pm\sqrt{4a^2-2a-2})$ при $a>1$; при остальных a корней нет.

83. $144^x-2\cdot 12^{|x|}+a=0.$

Ответ. $x_{1,2}=\pm\log_2(1+\sqrt{1-a})$ при $a<1$; $x=0$ при $a=1$; при $a>1$ корней нет.

84. $\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x.$

Ответ. $x=\log_2 a$ при $0<a\leq 1$; при остальных a корней нет.

85. $\log_{\sqrt{x}} a^2\left|\log_{a^2}\frac{x}{2}\right|+\log_a x=\log_{a^2}4\cdot\log_{\sqrt{x}} a.$

Ответ. При $0<a<1$ нет корней; $x=a^2$ при $1<a\leq\sqrt{2}$; $x=a^{-1+\sqrt{4+\log_a 2}}$ при $a>\sqrt{2}$.

86. $2|\lg(ax)|\cdot\log_x 10=(4\lg a-3)\log_{x^2}10-\frac{1}{2}\lg x.$

Ответ. $x=\frac{1}{10}$ при $a=10$; $x_1=\frac{1}{10}$, $x_2=10^{2-\sqrt{1+8\lg a}}$ при $10<a<1000$; $x_1=\frac{1}{10}$, $x_2=\frac{1}{1000}$ при $a\geq 1000$; при остальных a корней нет.

87. $\log_{\sqrt{x}} a\cdot\left|\log_a\frac{x}{2}\right|=\log_{a^2}2\cdot\log_{\sqrt{x}} a^2-\log_a\sqrt{x}.$

Ответ. $x=a^4$ при $1<a\le\sqrt[4]{2}$; $x=a^{\sqrt{8\log_a 2+4}-2}$ при $a>\sqrt[4]{2}$; при остальных a корней нет.

88. $\log_{100} x^2=\log_{\sqrt{x}} 10\cdot\left[\lg(10a)-\left|\lg\dfrac{x}{a}\right|\right]$.

Ответ. Если $a<10^{1-\sqrt{3}}$, то корней нет; если $a=10^{1-\sqrt{3}}$, то $x=10^{1-\sqrt{3}}$; если $10^{1-\sqrt{3}}<a<10^{-\frac{1}{2}}$, то $x=10^{1-\sqrt{3}}$ и $x=10^{\sqrt{3+4\lg a}-1}$; если $a=10^{-\frac{1}{2}}$, то $x=10^{1-\sqrt{3}}$; если $10^{-\frac{1}{2}}<a<10^{1+\sqrt{3}}$, то $x=10^{1-\sqrt{3}}$ и $x=10^{\sqrt{3+4\lg a}-1}$; если $a=10^{1+\sqrt{3}}$, то $x=10^{1-\sqrt{3}}$ и $x=10^{1+\sqrt{3}}$; если $a>10^{1+\sqrt{3}}$, то $x=10^{1-\sqrt{3}}$ и $x=10^{1+\sqrt{3}}$.

89. $\log_a x\cdot\left|\log_x a-\log_2 a\right|=\log_x(ax)-\log_2 a^2+\log_a x\cdot\log_2 a$.

Ответ. $x_1=a^{\frac{1}{\log_2 a+\sqrt{\log_2^2 a-2\log_2 a}}}$, $x_2=a^{\frac{1}{2\log_a 2-2}}$ при $0<a<1$; $x=x_2$ при $1<a<2$ и $2<a<4$; $x=x_1$ при $a\ge 4$.

90. Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a,\\ x^2+y^2=b\end{cases}$$

имеет только одно решение (a, b, x, y — действительные числа, $x>0$).

Ответ. $a=0$, $0<b\le 1$.

91. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases}2^{|x|}+|x|=y+x^2+a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет только одно решение (a, x, y — действительные числа).

Ответ. $a=0$.

92. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases}(x^2+1)^a+(b^2+1)^y=2,\\ a+bxy+x^2y=1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x, y — действительные числа

Ответ. $a=1$.

93. *Найти все значения a, при которых система*

$$\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2, \\ (a-1)x^3+y^3=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x, y — действительные числа).

Ответ. $a=-1$.

§ 3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

С показательной и логарифмической функциями связаны неравенства, называемые в школьном курсе математики ***показательными и логарифмическими.*** Мы рассмотрим некоторые типы этих неравенств, решение которых основано в первую очередь на использовании свойств монотонности показательной и логарифмической функций. Методы, применяемые при решении показательных и логарифмических неравенств, во многом аналогичны методам, которые мы применяли при решении подобных уравнений (см. § 2).

1. Использование свойств монотонности функции при решении неравенств

Если функция $y=f(x)$ монотонно возрастает на некотором множестве X из области ее определения, то решение системы неравенств

$$\alpha<f(x)<\beta \tag{1}$$

на этом множестве имеет вид

$$x_1<x<x_2 \tag{2}$$

(рис. 175), где x_1 и x_2 — корни уравнений

$$f(x_1)=\alpha, \tag{3}$$

$$f(x_2)=\beta \tag{4}$$

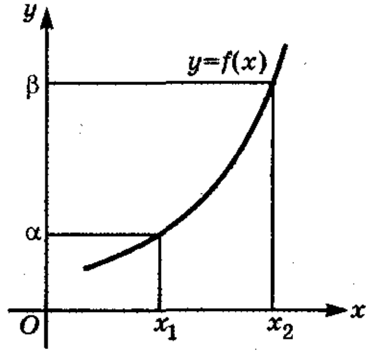


Рис. 175

Так как монотонная функция имеет обратную (см. гл. I, § 2, п. 5), определенную в области изменения функции $f(x)$, то решениями уравнений (3) и (4) являются

$$x_1 = \varphi(\alpha) \text{ и } x_2 = \varphi(\beta), \tag{5}$$

где $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$ — значения обратной функции при $x = \alpha$ и $x = \beta$.

В этом случае решением системы (1) являются значения обратной функции, заданной в общей части области изменения функции $f(x)$ и интервала (α, β). Если же указанная общая часть не существует, то система (1) решения не имеет.

Случай, когда функция $f(x)$ — монотонно убывающая, рассматривается аналогично. Также аналогично решаются неравенства

$$\alpha \le f(x) \le \beta,\ \alpha > f(x) > \beta$$

и. т. д.

Пример 1. *Решить систему неравенств*

$$\alpha < a^x < \beta\ (0 < a \ne 1,\ \alpha > 0). \tag{6}$$

Решение. Как известно (см. § 1), показательная функция a^x при $a > 1$ монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ монотонно убывает (рис. 176).

Значит, решением системы неравенств (6) при $a > 1$ является множество чисел $x_1 < x < x_2$, где x_1 и x_2 — корни простейших показательных уравнений

$$a^{x_1} = \alpha,\ a^{x_2} = \beta,$$

т. е. $x_1 = \log_a \alpha$, $x_2 = \log_a \beta$. Следовательно,

$$\log_a \alpha < x < \log_a \beta.$$

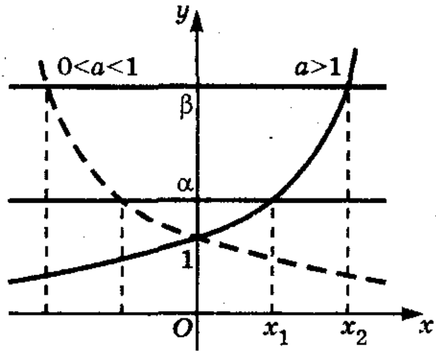


Рис. 176

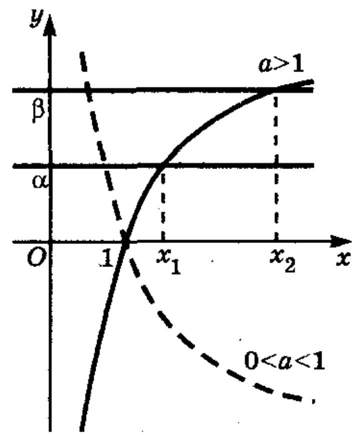


Рис. 177

Решением системы неравенств (6) при $0<a<1$ является множество чисел

$$\log_a \alpha > x > \log_a \beta.$$

Ответ. Если $a>1$, то $\log_a \alpha < x < \log_a \beta$; если $0<a<1$, то $\log_a \alpha >$ $> x > \log_a \beta$.

Пример 2. *Решить систему неравенств*

$$\alpha < \log_a x < \beta \quad (0<a\neq 1). \tag{7}$$

Решение. Логарифмическая функция $\log_a x$ при $a>1$ монотонно возрастает, а при $0<a<1$ — монотонно убывает (рис. 177). Следовательно, при $a>1$ исходная система неравенств (7) имеет решение $a^\alpha < x < a^\beta$, а при $0<a<1$ — решение $a^\alpha > x > a^\beta$.

Ответ. Если $a>1$, то $a^\alpha < x < a^\beta$; если $0<a<1$, то $a^\alpha > x > a^\beta$.

2. Показательные неравенства

Простейшими показательными неравенствами называются неравенства

$$a^x > b,\ \ a^x < b,\ \ a^x \geq b,\ a^x \leq b. \tag{8}$$

При решении таких неравенств (см. пример 1) следует использовать свойства монотонности показательной и логарифмической функций: <u>*функции*</u>

$y=a^x$ *и* $y=\log_a x$ *при* $a>1$ ***являются монотонно возрастающими, а при*** $0<a<1$ — ***монотонно убывающими.***

Так, при логарифмировании неравенств надо рассматривать два случая: если основание больше единицы, то неравенство сохраняет знак; если меньше единицы — меняет знак.

Рассмотрим, например, неравенство

$$a^x > b \quad (0<a\neq 1,\ b>0)^*. \tag{9}$$

Воспользовавшись основным логарифмическим тождеством, перепишем неравенство (9) следующим образом:

$$a^x > a^{\log_a b} \quad (0<a\neq 1,\ b>0). \tag{10}$$

Так как показательная функция a^x при $a>1$ монотонно возрастает, а при $0<a<1$ монотонно убывает, то неравенство (10) при $a>1$ выполняется в интервале $\log_a b<x<+\infty$, а при $0<a<1$ — в интервале $-\infty<x<\log_a b$.

Тот же результат мы получим, если прологарифмируем обе части неравенства (9) по основанию a, рассмотрев два случая: $a>1$ и $0<a<1$.

Таким образом, заключаем:

1^0. Неравенство $a^x>b$, где $b>0$, $0<a\neq 1$, при $a>1$ имеет решением интервал $\log_a b<x<+\infty$, а при $0<a<1$ — интервал $-\infty<x<\log_a b$.

2^0. Неравенство $a^x<b$, где $b>0$, при $a>1$ имеет решением интервал $-\infty<x<\log_a b$, а при $0<a<1$ — интервал $\log_a b<x<+\infty$.

Неравенства $a^x\geq b$ и $a^x\leq b$ решаются аналогично.

При решении более сложных неравенств, связанных с показательной или сложно-показательной функцией, также используются свойства этих функций (монотонность, область определения и. т. д.)

3^0. Неравенство

$$a(x)^{f_1(x)} > a(x)^{f_2(x)} \tag{11}$$

эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{(I)} \begin{cases} a(x)>1, \\ f_1(x)>f_2(x); \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} 0<a(x)<1, \\ f_1(x)<f_2(x). \end{cases} \tag{12}$$

Другими словами, исходное неравенство (11) эквивалентно на множестве $a(x)>0$ следующему неравенству:

---

* Так как $a^x>0$, то при $b\leq 0$ неравенство $a^x>b$ выполняется для всех значений x.

$$[a(x)-1]\cdot[f_1(x)-f_2(x)]>0. \tag{13}$$

В такой форме записи к неравенству (11) удобно применять метод интервалов*.

Например, неравенство

$$a(x)^{f(x)}>1 \tag{14}$$

эквивалентно на множестве $a(x)>0$ неравенству

$$[a(x)-1]f(x)>0. \tag{15}$$

4^0. Неравенство

$$a(x)^{f_1(x)}<a(x)^{f_2(x)} \tag{16}$$

эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} a(x)>1, \\ f_1(x)<f_2(x); \end{cases} \quad \text{(II)}\ \begin{cases} 0<a(x)<1, \\ f_1(x)>f_2(x) \end{cases} \tag{17}$$

или, что то же самое, эквивалентно на множестве $a(x)>0$ неравенству

$$[a(x)-1]\cdot[f_1(x)-f_2(x)]<0. \tag{18}$$

Например, неравенство

$$a(x)^{f(x)}<1 \tag{19}$$

эквивалентно на множестве $a(x)>0$ неравенству

$$[a(x)-1]f(x)<0. \tag{20}$$

5^0. Неравенство

$$a_1(x)^{f(x)}>a_2(x)^{f(x)}$$

эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} a_1(x)>0, \\ a_2(x)>0, \\ f(x)\cdot[a_1(x)-a_2(x)]>0. \end{cases}$$

Доказательство этих утверждений представляем читателю.

Пример 3. *Решить неравенство*

$$(0{,}5)^{x+\frac{6}{x}}>\frac{1}{128}.$$

Решение. Уравнивая основания, приведем неравенство к виду

$$2^{-x-\frac{6}{x}}>2^{-7}.$$

---

* Хотя «метод интервалов» был изложен применительно к рациональным алгебраическим неравенствам, им часто пользуются при решении более широкого класса неравенств.

Заменим полученное показательное неравенство эквивалентным ему алгебраическим:

$$-x-\frac{6}{x}>-7,$$

или

$$\frac{x^2-7x+6}{x}<0.$$

Применяя метод интервалов, находим решение неравенства:

$$x<0,\ \ 1<x<6.$$

Ответ. $x<0$, $1<x<6$.

Пример 4. *Решить неравенство*

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^x-\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^{-x}<3.$$

Решение. Применим метод подстановки. Выполним замену неизвестного, полагая

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^x=t\ (t>0).$$

Таким образом, имеем систему неравенств

$$t^2-3t-1<0,\ t>0.$$

Найдя ее решение $0<t<\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ и воспользовавшись указанной подстановкой, получим систему неравенств

$$0<\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)^x<\frac{3+\sqrt{13}}{2},$$

эквивалентную исходному неравенству. Отсюда, учитывая, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$$

и используя результат примера 1, находим

$$x>\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ. $x>\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

П р и м е р 5. *Решить неравенство*

$$5^{x+2}+5^{x+1}+5^{x}>7^{\frac{x}{2}+3}+7^{\frac{x}{2}+2}+6\cdot 7^{\frac{x}{2}+1}.$$

Р е ш е н и е. Вынося за скобку в левой части неравенства 5^x, а в правой — $7^{\frac{x}{2}}$, получим

$$5^{x}(25+5+1)>7^{\frac{x}{2}}(343+49+42),$$

или

$$5^{x}\cdot 31>7^{\frac{x}{2}}\cdot 434.$$

Так как для всех значений x величина $7^{\frac{x}{2}}>0$, то, разделив на нее, приходим к неравенству того же смысла

$$\frac{5^{x}}{7^{\frac{x}{2}}}>\frac{434}{31},$$

или

$$\left(\frac{5}{7^{\frac{1}{2}}}\right)^{x}>14.$$

Поскольку $\frac{5}{7^{\frac{1}{2}}}>1$, решение полученного простейшего показательного неравенства имеет вид $x>\frac{\lg 14}{\lg 5-\frac{1}{2}\lg 7}$.

О т в е т. $x>\frac{\lg 14}{\lg 5-\frac{1}{2}\lg 7}$.

П р и м е р 6. *Для каждого положительного* $a\neq 1$ *решить неравенство*

$$x^{\log_a x+1}>a^{2}x.$$

Решение. При $a > 1$, логарифмируя обе части неравенства, получим

$$(\log_a x + 1)\log_a x > \log_a x + 2,$$

или

$$\log_a^2 x > 2.$$

Для значений $\log_a x$ имеем два интервала

$$-\infty < \log_a x < -\sqrt{2}, \ \sqrt{2} < \log_a x < +\infty,$$

откуда, используя результат примера 2, находим

$$0 < x < a^{-\sqrt{2}}, \ a^{\sqrt{2}} < x < +\infty.$$

При $0 < a < 1$ аналогично получим

$$(\log_a x + 1)\log_a x < \log_a x + 2,$$

или

$$\log_a^2 x < 2,$$

откуда

$$-\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2}$$

и, следовательно (см. пример 2),

$$a^{-\sqrt{2}} > x > a^{\sqrt{2}},$$

т. е.

$$a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}.$$

Ответ. Если $a > 1$, то $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{2}} < x < +\infty$;

если $0 < a < 1$, то $a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}$.

Пример 7. *Найти положительные решения неравенства*

$$x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1.$$

Решение. Данное неравенство, имеющее вид (14), эквивалентно на множестве $x > 0$ алгебраическому неравенству

$$(x-1)\cdot\frac{2x-1}{3-x} > 0,$$

решая которое методом интервалов, находим положительные решения: $0 < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < 3$.

Ответ. $0 < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < 3$.

П р и м е р 8. *Решить неравенство*

$$(x^2+x+1)^x<1.$$

Р е ш е н и е. Область определения неравенства находится из условия $x^2+x+1>0$ и состоит из множества всех действительных чисел.

Данное неравенство, имеющее вид (19), эквивалентно алгебраическому неравенству

$$[(x^2+x+1)-1]\cdot x<0,$$

которое в свою очередь эквивалентно следующему:

$$(x+1)x^2<0.$$

Отсюда получаем $x+1<0$, т.е. $x<-1$.

О т в е т. $x<-1$.

П р и м е р 9. *Решить неравенство*

$$|x|^{x^2-x-2}<1.$$

Р е ш е н и е. Всюду в области определения $x\neq 0$ исходное неравенство эквивалентно алгебраическому неравенству

$$(|x|-1)(x^2-x-2)<0$$

или, что то же самое, совокупности двух систем неравенств:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x>0, \\ (x-1)(x^2-x-2)<0; \end{cases} \quad \text{(II)}\ \begin{cases} x<0, \\ -(x+1)(x^2-x-2)<0. \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались определением абсолютной величины:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geq 0, \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Система (I) имеет решение $1<x<2$; система (II) несовместна.

О т в е т. $1<x<2$.

П р и м е р 10. *Решить неравенство*

$$4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6.$$

Р е ш е н и е. Сгруппировав члены, содержащие $3^{\sqrt{x}}$, перепишем неравенство следующим образом:

$$(3^{\sqrt{x}}-2)(2x^2-x-3)>0\ (x\geq 0).$$

Полученное неравенство эквивалентно на множестве $x\geq 0$ совокупности двух систем:

$$
\text{(I)} \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 > 0, \\ 2x^2 - x - 3 > 0; \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 2 < 0, \\ 2x^2 - x - 3 < 0. \end{cases}
$$

Решив систему (I), получим $x > \dfrac{3}{2}$. Решением системы (II) является множество значений x из промежутка $0 \le x < \log_3^2 2$.

Ответ. $0 \le x < \log_3^2 2$, $x > \dfrac{3}{2}$.

Пример 11. *Решить неравенство*

$$5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x.$$

Решение. Перепишем неравенство следующим образом:

$$5 \cdot 5^{2x} + 6 \cdot 6^x > 5 \cdot 6 + 5^{2x} \cdot 6^x,$$

или

$$(6 - 5^{2x}) \cdot (6^x - 5) > 0.$$

Решив последнее неравенство (например, методом интервалов), получим

$$\frac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5$.

3. Логарифмические неравенства

Простейшими логарифмическими неравенствами называются неравенства

$$\log_a x > b,\ \log_a x < b,\ \log_a x \ge b,\ \log_a x \le b. \tag{21}$$

Используя свойство монотонности логарифмической функции (см. пример 2), получим решение этих неравенств.

1^0. Неравенство $\log_a x > b$, где $0 < a \ne 1$, при $a > 1$ имеет решением интервал $a^b < x < +\infty$, а при $0 < a < 1$ — интервал $0 < x < a^b$.

2^0. Неравенство $\log_a x < b$, где $0 < a \ne 1$, при $a > 1$ имеет решением интервал $0 < x < a^b$, а при $0 < a < 1$ — интервал $a^b < x < +\infty$.

Аналогично решаются остальные простейшие логарифмические неравенства.

Приведем решение ряда неравенств, содержащих логарифмическую функцию и переменное основание a (или параметр).

3^0. Неравенство

$$\log_{a(x)} f_1(x) > \log_{a(x)} f_2(x) \tag{22}$$

эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{(I)} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f_1(x) > f_2(x) > 0; \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < f_1(x) < f_2(x). \end{cases} \tag{23}$$

Другими словами, неравенство (22) эквивалентно на множестве $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$, $a(x) > 0$ следующему неравенству:

$$[a(x) - 1] \cdot [f_1(x) - f_2(x)] > 0. \tag{24}$$

Неравенства $f_1(x) > f_2(x)$ и $f_1(x) < f_2(x)$ следуют из монотонности логарифмической функции; остальные неравенства систем (23) — из области определения неравенства (22).

4^0. Неравенство

$$\log_{a(x)} f_1(x) < \log_{a(x)} f_2(x) \tag{25}$$

эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{(I)} \begin{cases} a(x) > 1, \\ 0 < f_1(x) < f_2(x); \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f_1(x) > f_2(x) > 0, \end{cases} \tag{26}$$

т. е. эквивалентно на множестве $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$, $a(x) > 0$ неравенству

$$[a(x) - 1] \cdot [f_1(x) - f_2(x)] < 0. \tag{27}$$

Аналогично решаются неравенства

$$\log_{a(x)} f_1(x) \geq \log_{a(x)} f_2(x),\ \log_{a(x)} f_1(x) \leq \log_{a(x)} f_2(x).$$

Доказательства указанных выше эквивалентностей рекомендуем провести читателю.

Пример 12. *Решить неравенство*

$$\log_4 \frac{2x-1}{x+1} < \cos \frac{2\pi}{3}.$$

Решение. Так как $\cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, то данное неравенство можно переписать в виде

$$\log_4 \frac{2x-1}{x+1} < -\frac{1}{2},$$

или

$$\log_4 \frac{2x-1}{x+1} < \log_4 \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующей системе:

$$0<\frac{2x-1}{x+1}<\frac{1}{2}.$$

Решением этой системы, а значит, и исходного логарифмического неравенства является множество значений $\frac{1}{2}<x<1$.

Ответ. $\frac{1}{2}<x<1$.

Пример 13. *Решить неравенство*

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1}>1.$$

Решение. Всюду в области определения $\left(0<x<\frac{1}{2},\ x>1\right)$ данное неравенство эквивалентно следующему:

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1}>\log_x x.$$

Последнее эквивалентно совокупности двух систем алгебраических неравенств

$$\begin{cases} x>1, \\ \frac{2x-1}{x-1}>x>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0<x<1, \\ 0<\frac{2x-1}{x-1}<x. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим $1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; решив вторую, находим $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1}{2}$, $1<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 14. *Решить неравенство*

$$\log_{x+4}(5x+20)\le\log_{x+4}(x+4)^2.$$

Решение. Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем алгебраических неравенств

$$\begin{cases} x+4>1, \\ 0<5x+20\le(x+4)^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0<x+4<1, \\ 5x+20\ge(x+4)^2>0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x \geq 1$; решением второй является интервал $-4 < x < -3$.

Ответ. $-4 < x < -3$, $x \geq 1$.

Пример 15. *Решить неравенство*

$$\log_{\frac{x}{6}} \log_x \sqrt{6-x} > 0.$$

Решение. Исходное неравенство в области определения (ОДЗ), т. е. на множестве

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x}{6} \neq 1 \\ \log_x \sqrt{6-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5,$$

эквивалентно неравенству

$$\left(\frac{x}{6} - 1\right)(\log_x \sqrt{6-x} - 1) > 0,$$

или

$$\log_x \sqrt{6-x} - 1 < 0.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 1 < x < 5, \\ 1 < \sqrt{6-x} < x, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 < x < 5, \\ 1 < 6 - x < x^2. \end{cases}$$

Решением последней системы, а значит, и исходного неравенства является множество $2 < x < 5$.

Ответ. $2 < x < 5$.

Пример 16. *Решить неравенство*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - \frac{4}{5}\right)} < 1.$$

Решение. Так как основание степени, входящей в неравенство, меньше единицы, то

$$\log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - \frac{4}{5}\right) > 0.$$

Полученное неравенство эквивалентно следующему:

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - \frac{4}{5}\right) > 1,$$

откуда

$$0<x^2-\frac{4}{5}<\frac{1}{5}, \text{ или } \frac{4}{5}<x^2<1, \text{ или } \frac{2}{\sqrt{5}}<|x|<1.$$

Ответ. $-1<x<-\frac{2}{\sqrt{5}}, \; \frac{2}{\sqrt{5}}<x<1.$

Пример 17. *Решить неравенство*

$$\frac{1-\sqrt{1-8(\log_2 x)^2}}{2\log_2 x}<1.$$

Решение. Применим метод подстановки. Выполнив замену неизвестного с помощью подстановки $\log_2 x=t$, получим неравенство

$$\frac{1-\sqrt{1-8t^2}}{2t}<1,$$

или

$$\frac{1-\sqrt{1-8t^2}-2t}{2t}<0.$$

Последнее неравенство эквивалентно совокупности двух систем

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-8t^2}-2t>0,\\ 2t<0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}1-\sqrt{1-8t^2}-2t<0,\\ 2t>0,\end{cases}$$

которые имеют соответственно решения

$$-\frac{1}{\sqrt{8}}\le t<0 \text{ и } 0<t<\frac{1}{3}.$$

Таким образом, исходное логарифмическое неравенство эквивалентно совокупности двух следующих систем простейших логарифмических неравенств:

$$-\frac{1}{\sqrt{8}}\le \log_2 x<0 \text{ и } 0<\log_2 x<\frac{1}{3}.$$

Отсюда (см. пример 2) находим

$$2^{-\frac{1}{\sqrt{8}}}\le x<1 \text{ и } 1<x<2^{\frac{1}{3}}.$$

Ответ. $2^{-\frac{1}{\sqrt{8}}}\le x<1, \; 1<x<2^{\frac{1}{3}}.$

Пример 18. *Решить неравенство*

$$\log_3\sqrt{5-2x}\cdot\log_x 3<1. \tag{28}$$

Р е ш е н и е. Так как $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, то неравенство (28) в его области определения

$$0 < x < 1, \quad 1 < x < \frac{5}{2} \tag{29}$$

можно переписать следующим образом:

$$\frac{\log_3 \sqrt{5-2x}}{\log_3 x} < 1,$$

или

$$\frac{\log_3 \sqrt{5-2x} - \log_3 x}{\log_3 x} < 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно на множестве (29) совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} \log_3 \sqrt{5-2x} - \log_3 x > 0, \\ \log_3 x < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_3 \sqrt{5-2x} - \log_3 x < 0, \\ \log_3 x > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \log_3 \frac{\sqrt{5-2x}}{x} > 0, \\ \log_3 x < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_3 \frac{\sqrt{5-2x}}{x} < 0, \\ \log_3 x > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{5-2x}}{x} > 1, \\ x < 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{5-2x}}{x} < 1, \\ x > 1. \end{cases}$$

Решив эти системы, получим $0 < x < 1$, $\sqrt{6} - 1 < x < \frac{5}{2}$.

О т в е т. $0 < x < 1$, $\sqrt{6} - 1 < x < \frac{5}{2}$.

П р и м е р 19. *Решить неравенство*

$$|x-2|^{\log_4(x+2) - \log_2 x} < 1. \tag{30}$$

Р е ш е н и е. В области определения данного неравенства

$$0 < x < 2, \; 2 < x < +\infty \tag{31}$$

имеем

$$\log_4(x+2) - \log_2 x = \log_4(x+2) - 2\log_4 x = \log_4 \frac{x+2}{x^2}.$$

Поэтому неравенство (30) можно записать следующим образом:

$$|x-2|^{\log_4 \frac{x+2}{x^2}} < 1.$$

Последнее неравенство в силу утверждения 4^0 п. 2 эквивалентно на множестве (31) неравенству

$$(|x-2|-1)\cdot\log_4\frac{x+2}{x^2}<0,$$

которое на указанном множестве эквивалентно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} 0<x<2, \\ (1-x)\cdot\log_4\dfrac{x+2}{x^2}<0 \end{cases} \qquad (32)$$

и

$$\begin{cases} 2<x<+\infty, \\ (x-3)\cdot\log_4\dfrac{x+2}{x^2}<0. \end{cases} \qquad (33)$$

Для решения вторых неравенств систем (32) и (33) применим «метод интервалов», не учитывая область определения исходного неравенства, но учитывая область определения множителя $\log_4\frac{x+2}{x^2}$. Этот множитель обращается в нуль при $x=-1$ и $x=2$, причем при $-1<x<0$ и $0<x<2$ он положителен, а при $-2<x<-1$ и $x>2$ — отрицателен.

Следовательно, функция $(1-x)\cdot\log_4\frac{x+2}{x^2}$ принимает отрицательные значения при $-2<x<-1$ и $1<x<2$, а значит, с учетом первого неравенства системы (32) получаем, что ее решением являются значения x из интервала $1<x<2$.

Аналогично, функция $(x-3)\cdot\log_4\frac{x+2}{x^2}$ принимает отрицательные значения при $-1<x<0$, $0<x<2$ и $x>3$, т. е. с учетом первого неравенства системы (33) получаем, что ее решением является множество $x>3$.

Итак, множества $1<x<2$ и $x>3$ являются решениями исходного неравенства (30).

Ответ. $1<x<2$, $x>3$.

Пример 20. *Решить неравенство*

$$2^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2)\geq 1.$$

Решение. Так как $2^{|x-2|} \geq 1$, то в области определения, т. е. на множестве $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$, данное неравенство эквивалентно следующему:

$$\log_2(4x-x^2-2) \geq 2^{|x-2|}.$$

Левая часть полученного неравенства не превосходит единицы, т. е.

$$\log_2(4x-x^2-2) \leq 1.$$

В самом деле, так как $(x-2)^2 \geq 0$ при всех действительных значениях x, то $x^2-4x+4 \geq 0$, т. е. $4x-x^2-2 \leq 2$. Следовательно, на множестве $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$ имеем

$$0 < 4x-x^2-2 \leq 2,$$

откуда

$$\log_2(4x-x^2-2) \leq 1.$$

Таким образом, исходное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\log_2(4x-x^2-2) = 1 \text{ и } 2^{|x-2|} = 1,$$

т. е. при $x = 2$.

Ответ. $x = 2$.

Пример 21. *Решить неравенство*

$$\log_a^2 x - 2b\log_a x + 2|\log_a x - b| + 2 < 0, \tag{34}$$

где $0 < a \neq 1$ *и* b *— действительные параметры.*

Решение. С помощью подстановки

$$t = |\log_a x - b| \quad (t \geq 0) \tag{35}$$

данное неравенство приводится к следующей системе алгебраических неравенств:

$$\begin{cases} t^2+2t+2-b^2 < 0, & (36) \\ t \geq 0. & (37) \end{cases}$$

Квадратный трехчлен в левой части неравенства (36) при $|b| \geq 1$ имеет два действительных различных корня

$$t_1 = -(\sqrt{b^2-1}+1) \text{ и } t_2 = \sqrt{b^2-1}-1,$$

причем $t_1 < 0$, $t_1 \leq t_2$. Следовательно, решением неравенства (36) является интервал

$$t_1 < t < t_2,$$

а система (36), (37) может иметь решение только в том случае, когда больший корень положителен, т. е. когда

$$\sqrt{b^2-1}-1>0.$$

Последнее неравенство выполняется при $|b|>\sqrt{2}$. При этих значениях параметра система (36), (37) имеет решение

$$0\le t<\sqrt{b^2-1}-1.$$

Воспользовавшись подстановкой (35), имеем

$$0\le\left|\log_a x-b\right|<\sqrt{b^2-1}-1\ (|b|>\sqrt{2}),$$

или

$$b-\sqrt{b^2-1}+1<\log_a x<b+\sqrt{b^2-1}-1\ \ (|b|>\sqrt{2}) \qquad (38)$$

Система неравенств (38) эквивалентна исходному неравенству (34). Решив ее (см. пример 2), получим ответ.

О т в е т. Если $|b|>\sqrt{2}$, то $a^{b+\sqrt{b^2-1}-1}<x<a^{b-\sqrt{b^2-1}+1}$ при $0<a<1$

и $a^{b-\sqrt{b^2-1}+1}<x<a^{b+\sqrt{b^2-1}-1}$ при $a>1$.

Если $|b|\le\sqrt{2}$, *то решений нет.*

З а м е ч а н и е. Для исследования смешанной системы (36), (37) можно применить КП-метод.

П р и м е р 22. *Решить неравенство*

$$\sqrt{\log_a\frac{3-2x}{1-x}}<1.$$

Р е ш е н и е. Данное неравенство эквивалентно системе

$$0\le\log_a\frac{3-2x}{1-x}<1,$$

или

$$\log_a 1\le\log_a\frac{3-2x}{1-x}<\log_a a. \qquad (39)$$

Система неравенств (39) при $a>1$ эквивалентна системе

$$1\le\frac{3-2x}{1-x}<a, \qquad (40)$$

а при $0<a<1$ — системе

$$a<\frac{3-2x}{1-x}\le 1. \qquad (41)$$

Найдем решения неравенств (40) при $a > 1$. Так как система неравенств

$$1 \le y < a$$

эквивалентна неравенству

$$\frac{y-1}{y-a} \le 0,$$

то из системы (40) получим

$$\frac{\dfrac{3-2x}{1-x}-1}{\dfrac{3-2x}{1-x}-a} \le 0, \qquad (42)$$

т. е.

$$x \ne 1, \quad \frac{2-x}{(3-a)-(2-a)x} \le 0$$

(отметим, что если $x = 1$, то не существует значений a, при которых выполняется неравенство (42)).

Рассмотрим три случая: $a = 2$, $1 < a < 2$ и $a > 2$.

1. Если $a = 2$, то неравенство (42) удовлетворяется при всех значениях

$$x \ge 2.$$

Во втором и третьем случаях для решения неравенства (42), например «методом интервалов», необходимо знать, как расположено число $\dfrac{3-a}{2-a}$ (полюс дробно-рациональной функции $\dfrac{2-x}{(3-a)-(2-a)x}$)относительно числа 2.

2. Если $1 < a < 2$, то, как нетрудно доказать,

$$\frac{3-a}{2-a} > 2.$$

Таким образом, при $1 < a < 2$ решением неравенства (42) являются все значения x из промежутка

$$2 \le x < \frac{3-a}{2-a}.$$

3. Если $a > 2$, то $\dfrac{3-a}{2-a} < 2$, и, следовательно, решением неравенства (42) являются все значения x такие, что

$$x < \frac{3-a}{2-a} \text{ или } x \ge 2.$$

Аналогично найдем решения неравенств (41) при $0<a<1$. В силу эквивалентности неравенств

$$a<y\le 1 \quad \text{и} \quad \frac{y-1}{y-a}\le 0$$

и в этом случае для нахождения решений неравенств (41) используем неравенство (42).

Если $0<a<1$, то $\frac{3-a}{2-a}<2$ и, следовательно, решением неравенства (42) являются числа x из полуинтервала

$$\frac{3-a}{2-a}<x\le 2.$$

Суммируя результаты всех рассмотренных случаев, получаем ответ.

З а м е ч а н и е. Исследование систем (40), (41) можно провести КП-методом.

О т в е т. Если $0<a<1$, то $\frac{3-a}{2-a}<x\le 2$;

если $1<a<2$, то $2\le x<\frac{3-a}{2-a}$;

если $a=2$, то $x\ge 2$;

если $a>2$, то $x<\frac{3-a}{2-a}$, $x\ge 2$.

П р и м е р 23. *Для каждого значения параметра a решить неравенство*

$$1-2a-3(a-2)\cdot 3^{-2\sqrt{2\log_{\frac{1}{3}}|x-1|}}\ge(5-7a)\cdot(x^2-2x+1)^{\sqrt{-\frac{1}{2}\log_{|x-1|}3}}.$$

Р е ш е н и е. Область допустимых значений переменного (ОДЗ) определяется условиями

$$\begin{cases}2\log_{\frac{1}{3}}|x-1|\ge 0,\\ -\frac{1}{2}\log_{|x-1|}3\ge 0,\\ x^2-2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<|x-1|<1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1,\\ 1<x<2.\end{array}\right.$$

Полагая $\frac{1}{3}=k$, $x^2-2x+1=|x-1|^2=b$, $k^{\sqrt{\log_k b}}=t$, имеем

$$3^{-2\sqrt{2\log_{\frac{1}{3}}|x-1|}}=3^{-2\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}|x-1|^2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}|x-1|^2}}=k^{2\sqrt{\log_k b}}=t^2.$$

Аналогично находим

$$(x^2-2x+1)^{\sqrt{-\frac{1}{2}\log_{|x-1|}3}}=b^{\sqrt{\log_b k}}=k^{\log_k b\sqrt{\log_b k}}=k^{\sqrt{\log_b k}}=t.$$

В ОДЗ: $0<x^2-2x+1<1$, т. е.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)>0 \text{ и } \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)}>0.$$

Следовательно,

$$0<t<1.$$

Решение исходного неравенства эквивалентно в ОДЗ нахождению решения следующей системы:

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)}}=t, & (43)\\ 3(a-2)t^2+(5-7a)t+(2a-1)\le 0, & (44)\\ 0<t<1. & (45)\end{cases}$$

Допустимыми значениями параметра a являются все действительные числа. Для каждого из этих значений параметра найдем решение системы неравенств (44), (45) и изобразим его на КП-плоскости aOt.

При $a=2$ неравенство (44) — <u>линейное</u> и имеет множество решений

$$\frac{1}{3}\le t<1. \tag{46}$$

На КП-плоскости множество (46) состоит из всех точек отрезка, за исключением точки его конца, для которой $t=1$, $a=2$ (рис. 178).

При $a\ne 2$ неравенство (44) — <u>квадратичное</u>. Для всех рассматриваемых значений параметра квадратный трехчлен в левой части неравенства имеет неотрицательный дискриминант:

$$D=(7a-5)^2-4\cdot 3\cdot(a-2)(2a-1)=(5a-1)^2\ge 0,$$

действительные (равные при $a=\frac{1}{5}$ и различные при $a\ne\frac{1}{5}$) корни

$$\left[\begin{aligned}&t=\frac{1}{3},\\ &t=\frac{2a-1}{a-2}\end{aligned}\right.$$

и, следовательно, раскладывается на линейные множители.

Таким образом, при $a \neq 2$ систему (44), (45) можно представить в виде

$$\begin{cases} F(t,\, a) = 3(a-2)\left(t-\dfrac{1}{3}\right)(t - t(a)) \le 0, & (47) \\ 0 < t < 1, & (48) \end{cases}$$

где

$$t(a) = \frac{2a-1}{a-2} = 2 + \frac{3}{a-2}. \qquad (49)$$

На КП-плоскости aOt множество (48) состоит из точек единичной полосы без ее границ.

Выражение в левой части неравенства (47), сохраняет знак в каждой из частичных областей, на которые разбивают КП-плоскость линии

$$a = 2 \text{ (прямая)},\ t = \frac{1}{3} \text{ (прямая)},\ t = t(a) \text{ (гипербола)}.$$

Нас интересуют только частичные области, на которые разбивают эти линии единичную полосу (48). На рис. 178 — это области I–VI.

Чтобы установить знак выражения $F(t,\, a)$ в каждой из этих областей, достаточно определить знак этого выражения в любой точке частичной области I–VI.

Заметим, что при переходе через границу $a = 2$ из областей III и IV соответственно в области V и VI выражение $F(t,\, a)$ сохраняет знак.

Решением системы (47), (48) являются те из областей I–VI, в которых

$$F(t,\, a) \le 0$$

(*на рис.* 178 *они заштрихованы*).

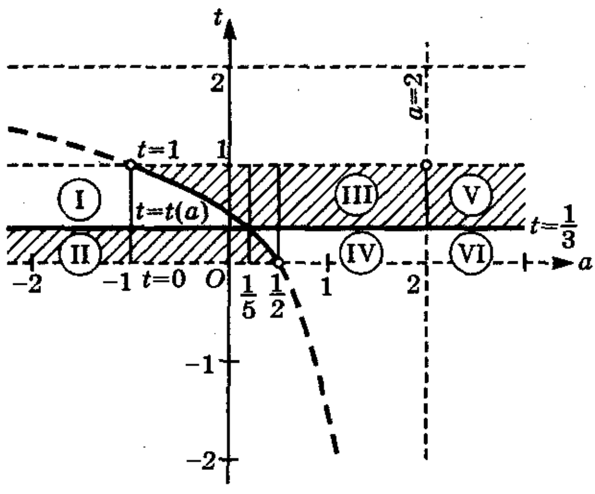


Рис. 178

Аналитически этот результат можно записать следующим образом (при записи учтем также результат, полученный при $a = 2$):

1) если $-\infty < a \le -1$, то $0 < t \le \frac{1}{3}$;

2) если $-1 < a < \frac{1}{5}$, то $\left[\begin{array}{l} 0 < t \le \frac{1}{3}, \\ t(a) \le t < 1; \end{array}\right.$

3) если $a = \frac{1}{5}$, то $0 < t < 1$;

4) если $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{2}$, то $\left[\begin{array}{l} 0 < t \le t(a), \\ \frac{1}{3} \le t < 1; \end{array}\right.$

5) если $\frac{1}{2} \le a < +\infty$, то $\frac{1}{3} \le t < 1$.

Для того чтобы получить ответ на вопрос задачи, вернемся к первоначальному переменному x, воспользовавшись подстановкой (43), и решим в ОДЗ каждое из неравенств для рассмотренных пяти случаев значений параметра.

Например, если $-\infty < a \le -1$, то

$$0 < t \le \frac{1}{3} \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)}} \le \frac{1}{3} \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)} \ge 1 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) \ge \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 0 < x^2-2x+1 \le \frac{1}{3} \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x^2-2x+\frac{2}{3} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\frac{1}{\sqrt{3}} \le x < 1, \\ 1 < x \le 1+\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$$

Аналогично решаем другие неравенства. Имеем:

$$0 < t < 1 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)}} < 1 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)} > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) > 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x^2-2x+1<1 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x^2-2x<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ 1<x<2; \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{3} \le t < 1 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)}} < 1 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 0 < \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)} \le 1 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 0 < \log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) \le 1 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} \le x^2-2x+1<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\le 1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ 1+\dfrac{1}{\sqrt{3}} \le x < 2. \end{array}\right.$$

Пусть $-1<a<\frac{1}{5}$. Решим уравнение

$$t=t(a), \text{ где } \frac{1}{3}<t(a)<1.$$

Последовательно находим:

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)}} = t(a) \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)} = \log_{\frac{1}{3}} t(a),$$

где

$$0<\log_{\frac{1}{3}} t(a) < 1,$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) = \log^2_{\frac{1}{3}} t(a) \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (x-1)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log^2_{\frac{1}{3}} t(a)} > 0,$$

где

$$\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\log^2_{\frac{1}{3}} t(a)} < 1,$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} |x-1| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\log^2_{\frac{1}{3}} t(a)}} = f(a),$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < f(a) < 1,$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 1 - f(a), \\ x = 1 + f(a). \end{array}\right.$$

Следовательно, решением неравенства $t \geq t(a)$ являются промежутки

$$0 < x \leq 1 - f(a), \quad 1 + f(a) \leq x < 2.$$

Аналогично, если $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{2}$, то $0 < t(a) < \frac{1}{3}$ и решением неравенства

$$t \leq t(a)$$

являются промежутки

$$1 - f(a) \leq x < 1 \text{ и } 1 < x \leq 1 + f(a), \text{ где } 0 < f(a) < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Теперь можно записать ответ для всех пяти рассмотренных случаев значений параметра.

Ответ.

1) Если $-\infty < a \leq -1$, то $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < 1$, $1 < x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) если $-1 < a < \frac{1}{5}$, то $0 < x \leq 1 - f(a)$, $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < 1$, $1 < x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$1 + f(a) \leq x < 2$, где $f(a) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\log^2_{\frac{1}{3}} \frac{2a-1}{a-2}}}$;

3) если $a = \frac{1}{5}$, то $0 < x < 1$, $1 < x < 2$;

4) если $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{2}$, то $0 < x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $1 - f(a) \leq x < 1$, $1 < x \leq 1 + f(a)$,

$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < 2$;

5) если $\frac{1}{2} \leq a < +\infty$, то $0 < x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < 2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что неравенство $\log_{a(x)} f(x) > 0$ эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ [a(x)-1][f(x)-1] > 0 \end{cases}$$

или эквивалентно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < f(x) < 1. \end{cases}$$

2. Доказать, что неравенство $\log_{a(x)} f(x) < 0$ эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ [a(x)-1][f(x)-1] < 0 \end{cases}$$

или эквивалентно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} a(x) > 1, \\ 0 < f(x) < 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) > 1. \end{cases}$$

Решить неравенства:

3. $\dfrac{2^x + x - 10}{2^x - 8} \le 1.$ Ответ. $2 \le x < 3.$

4. $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \le 2.$ Ответ. $\dfrac{1}{2} \le x < 1.$

5. $4^x < 2^{x+1} + 3.$ Ответ. $x < \log_2 3.$

6. $3^{x+1} < \dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}.$ Ответ. $x < -\dfrac{1}{2},\ x > \dfrac{5}{8}.$

7. $\dfrac{1}{2^x + 3} > \dfrac{1}{2^{x+2} - 1}.$ Ответ. $x < -2,\ x > \log_2 \dfrac{4}{3}.$

8. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x < 2^{3-x} + 25^{\frac{1}{\log_3 5}}.$ Ответ. $x > -2\log_2 3.$

9. $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > 0.$ Ответ. $-\dfrac{3}{2} < x < -1.$

10. $2\log_3(2x^2+x-1)>\log_3 4.$ Ответ. $-2<x<3.$

11. $\lg(x-2)+\lg(x+2)<\lg(4x+1).$ Ответ. $2<x<5.$

12. $\log_2\dfrac{x-3}{x+2}<0.$ Ответ. $x>3.$

13. $\log_4\dfrac{2x-1}{x+1}<\cos\dfrac{2\pi}{3}.$ Ответ. $\dfrac{1}{2}<x<1.$

14. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{5x+4}{x-2}>\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}.$ Ответ. $-\dfrac{10}{9}<x<-\dfrac{4}{5}.$

15. $\log_4(2x^2+x+1)-\log_2(2x-1)\le-\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}.$

Ответ. $x\ge1.$

16. $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11}\le-1.$ Ответ. $2\le x<\dfrac{11}{4},\ x\ge4.$

17. $\log_2[(x-3)(x+2)]+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}3.$

Ответ. $3<x<7.$

18. $\dfrac{x+1-\log_3(9x)}{1-\log_3 x}\ge1.$ Ответ. $2\le x<3.$

19. $\dfrac{\lg(4x^2+x)}{\lg(2x)}\ge1.$ Ответ. $0<x\le\dfrac{1}{4},\ x>\dfrac{1}{2}.$

20. $\log_4(2-\sqrt{x+3})<2\cos\dfrac{5\pi}{3}.$ Ответ. $-3\le x<1.$

21. $\log_2(\sqrt{x+3}-x-1)\le0.$ Ответ. $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\le x<1.$

22. $[\log_{\frac{1}{7}}(x^2-5x+2)]^{\frac{1}{2}}<1.$

Ответ. $\dfrac{35+\sqrt{861}}{14}<x<\dfrac{5+\sqrt{21}}{2};\ \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<x<\dfrac{35-\sqrt{861}}{14}.$

23. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+1}<\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{4-x^2}+1.$ Ответ. $\dfrac{\sqrt{61}-9}{2}<x<2.$

24. $\log_{6x^2-5x+1} 2 > \log_{\sqrt{6x^2-5x+1}} 2.$ Ответ. $0 < x < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}.$

25. $\log_x \frac{10}{x} \geq \log_x \frac{1}{2}.$ Ответ. $1 < x \leq 20.$

26. $\log_3 x - \log_3^2 x \leq \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} 4.$ Ответ. $0 < x \leq \frac{1}{3}, x \geq 9.$

27. $x^3 > 2^{15\log_{2\sqrt{2}}\sqrt{3}} \cdot 3^{\log_{\sqrt{x}} 3}.$ Ответ. $3^{-\frac{1}{3}} < x < 1, x > 9.$

28. $\frac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x} > 1, 0 < a < 1.$ Ответ. $0 < x < a, 1 < x < \frac{1}{a}.$

29. $\frac{\sqrt{\log_{0,5}^2 x - 81} + 2}{\log_{0,5} x - 1} < 1.$ Ответ. $2^{-15} < x \leq 2^{-9}, x \geq 2^9.$

30. $1 - \sqrt{1 - 8(\log_{\frac{1}{4}} x)^2} < 3\log_{\frac{1}{4}} x.$ Ответ. $2^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq x < 1.$

31. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+1)} < 1.$ Ответ. $0 < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3.$

32. $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}.$ Ответ. $x < -1, 0 < x < 1, x > 1.$

33. $\log_3 \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 0.$ Ответ. $x \leq -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$

34. $2\log_2(x-1) - \log_2(2x-4) > 1.$ Ответ. $2 < x < 3, x > 3.$

35. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_2(2-x).$

Ответ. $-1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2.$

36. $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0.$ Ответ. $x > 3.$

37. $2\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}}(4-x) \leq \log_3(x-1)^2 + 2\log_9(10-x).$

Ответ. $0<x\le\frac{5}{8},\ 2\le x<4.$

38. $\log_{3x^2+1}2<\frac{1}{2}.$ Ответ. $x<-1,\ x>1.$

39. $\log_{\frac{2x+1}{x^2-4}}2\le\frac{1}{2}\log_{\sin\frac{\pi}{3}}\frac{4}{3}.$

Ответ. $1-\sqrt{6}<x\le 2-\sqrt{10},\ 1+\sqrt{6}<x\le 2+\sqrt{10}.$

40. $\frac{1}{\log_2 x}\le\frac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}.$ Ответ. $0<x<1,\ x\ge 2.$

41. $\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2>0.$

Ответ. $-\frac{5}{2}<x<-2,\ -\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}<x<\frac{8}{3}.$

42. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\frac{x}{3}>0.$ Ответ. $1<x<\frac{3}{2},\ 2<x<\frac{5}{2},\ x>3.$

43. $\log_x\frac{4x+5}{6-5x}<-1.$ Ответ. $\frac{1}{2}<x<1.$

44. $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\frac{24-2x-x^2}{14}>1.$ Ответ. $-3<x<-1,\ 3<x<4.$

45. $\log_{x^2}(2+x)<1.$

Ответ. $-2<x<-1,\ -1<x<0,\ 0<x<1,\ x>2.$

46. $\log_{\frac{x}{2}}8+\log_{\frac{x}{4}}8<\frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}.$ Ответ. $0<x<2,\ x>4.$

47. $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\cdot\log_2(x+1)>\log_{x+2}(x+1).$ Ответ. $-1<x<0.$

48. $\log_5 x+\log_x\frac{x}{3}<\frac{2-\log_3 x}{\log_3 x}\log_5 x.$ Ответ. $0<x<\frac{1}{\sqrt{5}},\ 1<x<3.$

49. $2x^{\log_{\frac{1}{2}}x}-x^{-\log_{\frac{1}{2}}x}<-1.$ Ответ. $0<x<\frac{1}{2},\ x>2.$

50. $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x} + 3.$ Ответ. $0 < x < 10^{-\sqrt{\lg 5}}$, $x > 10^{\sqrt{\lg 5}}$.

51. $x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1.$ Ответ. $0 < x < 1$, $1 < x < \sqrt[10]{10}$.

52. $[\log_2 x - \log_4 (x+3)]^{x-4} > 1.$ Ответ. $\frac{1+\sqrt{13}}{2} < x < 4$, $x > 6$.

53. $x^{(\lg x)^2 - 3\lg x + 1} > 1000.$ Ответ. $x > 1000$.

54. $\log_{\frac{1}{2}} (4 - 2^{x^2+3x+2}) > \log_{\frac{1}{2}} 3.$ Ответ. $-3 < x < -2$, $-1 < x < 0$.

55. $\log_{\frac{1}{2}} \left[5^{1+\lg x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\lg x} \right] \ge -1 + \lg x.$ Ответ. $\frac{1}{10} < x \le \frac{1}{2}$.

56. $x^{\frac{1}{2}\log_2^3 x - \frac{15}{8}\log_2 x} \le \sqrt{2}.$ Ответ. $\frac{1}{4} \le x \le 4$.

57. $x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} \le \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$

Ответ. $0 < x \le \frac{1}{100}$, $\frac{1}{10} \le x \le 1$.

58. $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^5}{4} \right)^2 - 20 \log_2 x + 148 < 0.$

Ответ. $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8}$, $8 < x < 16$.

59. $\log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 2) > -2.$ Ответ. $\log_2 5 - 2 < x < \log_2 3$.

60. $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}.$ Ответ. $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > 32$.

61. $4^x \le 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}.$ Ответ. $0 \le x \le 4$.

62. $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x-3} < 0.$ Ответ. $3 < x < 4$, $x > 6$.

63. $\log_2 \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x-1}{x+1}$. Ответ. $x > 2$.

64. $\log_{x^2} \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geq \dfrac{1}{2}$. Ответ. $\sqrt{6}-1 \leq x < 2,\ 2 < x \leq 5$.

65. $\log_x[\log_2(4^x-6)] \leq 1$. Ответ. $\log_4 7 < x \leq \log_2 3$.

66. $(\log_{|x+6|} 2) \cdot \log_2(x^2-x-2) \geq 1$.

Ответ. $x < -7,\ -5 < x \leq -2,\ x \geq 4$.

67. $\log_x(2x) \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}$. Ответ. $0 < x \leq \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}},\ x \geq 2$.

68. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2(4x) > 1$.

Ответ. $2^{-\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{2},\ 1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.

69. $x^{\log_a x} < a$.

Ответ. Если $0 < a < 1$, то $0 < x < a$ или $x > \dfrac{1}{a}$;

если $a > 1$, то $\dfrac{1}{a} < x < a$.

70. $\dfrac{1}{\log_a x} > 1$.

Ответ. Если $0 < a < 1$, то $a < x < 1$; если $a > 1$, то $1 < x < a$.

71. $\log_a^4 x - 2\log_a^2 x - 3 < 0$.

Ответ. Если $0 < a < 1$, то $a^{\sqrt{3}} < x < a^{-\sqrt{3}}$;

если $a > 1$, то $a^{-\sqrt{3}} < x < a^{\sqrt{3}}$.

72. $\log_a \left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right| < 0$.

Ответ. Если $0 < a < 1$, то $-2 < x < -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2} < x < 0$;

если $a > 1$, то $x < -2,\ 0 < x < 1,\ x > 1$.

73. $\log_a(\sqrt{25-x^2}-1) \geq \log_a(|x|+1)$.

Ответ. Если $0<a<1$, то $-\sqrt{24}<x\le 1-\sqrt{\frac{23}{2}}$, $\sqrt{\frac{23}{2}}-1\le x<\sqrt{24}$;

$$\text{если } a>1, \text{ то } 1-\sqrt{\frac{23}{2}}\le x\le\sqrt{\frac{23}{2}}-1.$$

74. $\left|\sqrt{2}|x|-1\right|\cdot\log_2(2-2x^2)\ge 1.$

Ответ. $x=0.$

75. При каких значениях a и b имеет место неравенство

$$\log_a(a^2b)>\log_b\frac{1}{a^5}?$$

Ответ. При $a>1$ и $b>1$ или при $0<a<1$ и $0<b<1$.

76. При каких значениях y верно следующее утверждение: «для любого x неравенство

$$x^2\left(2-\log_2\frac{y}{y+1}\right)+2x\left(1+\log_2\frac{y}{y+1}\right)-2\left(1+\log_2\frac{y}{y+1}\right)>0$$

выполняется»?

Ответ. При $0<y<1$.

77. При каких значениях y верно следующее утверждение «существует хотя бы одно значение x, для которого неравенство

$$2\log_{0,5}y^2-3+2x\log_{0,5}y^2-x^2>0$$

выполняется»?

Ответ. При $y<-2\sqrt{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}<y<0$, $0<y<\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y>2\sqrt{2}$.

78. Найти все значения a, для которых неравенство

$$a\cdot 4^x-4\cdot 2^x+3a+1>0$$

будет выполнено при всех x.

Ответ. $a>1$.

79. Найти все x, для которых $|x|\le 3$ и которые при всех $a\ge 5$ удовлетворяют неравенству

$$\log_{2a-x^2}(x-2ax)>1.$$

Ответ. $-3<x<-1$.

80. Найти все $x>1$, которые при всех b, удовлетворяющих условию $0<b\le 2$, являются решениями неравенства

$$\log_{\frac{x^2+x}{b}}(x+2b-1)<1.$$

Ответ. $x>3$.

§ 4. РАЗЛИЧНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Трансцендентными уравнениями называют уравнения вида $f(x)=0$, где $f(x)$ есть элементарная трансцендентная функция (например, тригонометрическая, показательная или логарифмическая).

Как уже отмечалось, в общем случае трансцендентное уравнение нельзя решить элементарными средствами. Поэтому мы рассматривали специальные приемы решения некоторых частных видов трансцендентных уравнений (тригонометрических, показательных и логарифмических). Все сказанное в полной мере относится и к трансцендентным неравенствам.

В данном параграфе приводятся примеры трансцендентных уравнений и неравенств, при решении которых используются рассмотренные ранее приемы решения тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

При этом наиболее эффективным оказывается метод замены неизвестного (метод подстановки).

Так, например, уравнение

$$f(u(x))=0,$$

где $u(x)$ — некоторая трансцендентная функция, а $f(u)$ — алгебраическая функция аргумента u, с помощью подстановки $t=u(x)$ преобразуется в алгебраическое уравнение относительно нового неизвестного t:

$$f(t)=0.$$

Если $t_1, t_2, \ldots, t_N$ — действительные корни этого уравнения, то решение исходного уравнения сводится к решению совокупности N трансцендентных уравнений:

$$u(x)=t_1,\ u(x)=t_2, \ldots, u(x)=t_N.$$

1. Примеры решения трансцендентных уравнений

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\arcsin 2^{x+2}+\arcsin(4\sqrt{3}\cdot 2^x)=\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Введем обозначения:

$$2^{x+2}=\alpha,\ 4\sqrt{3}\cdot 2^x=\beta. \qquad (2)$$

Тогда уравнение примет вид

$$\arcsin\alpha+\arcsin\beta=\frac{\pi}{2}.$$

Воспользовавшись формулой

$$\arcsin\beta+\arccos\beta=\frac{\pi}{2},$$

получим

$$\arcsin\alpha=\arccos\beta. \qquad (3)$$

Взяв косинусы обеих частей уравнения (3) и учитывая, что

$$\cos(\arcsin\alpha)=\sqrt{1-\alpha^2} \qquad (4)$$

и

$$\cos(\arccos\beta)=\beta, \qquad (5)$$

имеем

$$\sqrt{1-\alpha^2}=\beta; \qquad (6)$$

откуда

$$1-\alpha^2=\beta^2. \qquad (7)$$

Возвращаясь к первоначальному неизвестному x, получим

$$1-(2^{x+2})^2=(4\sqrt{3}\cdot 2^x)^2,$$

или

$$2^{2x+6}=1,$$

откуда $x=-3$.

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение (1) убеждаемся в том, что найденное значение x является его корнем. В данном случае проверка логически необходима, так как уравнение (4) есть следствие уравнения (3), а уравнение (7) — следствие уравнения (6).

Ответ. $x=-3$.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$81^{(\sin 2x-1)\cos 3x}-9^{(\sin x-\cos x)^2}=0. \qquad (8)$$

Решение. Уравнивая основания показательных функций, перепишем уравнение (8) следующим образом:

$$9^{2(\sin 2x-1)\cos 3x}=9^{(\sin x-\cos x)^2},$$

откуда

$$2(\sin 2x-1)\cos 3x=(\sin x-\cos x)^2. \qquad (9)$$

Для решения полученного тригонометрического уравнения применим метод разложения на множители. Так как

$$1-\sin 2x=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=(\sin x-\cos x)^2,$$

то уравнение (9) принимает вид

$$(\sin x-\cos x)^2(1+2\cos 3x)=0.$$

Последнее уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\sin x - \cos x = 0, \text{ откуда } x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4} \ (k = 0, \pm 1, \ldots),$$

и

$$1 + 2\cos 3x = 0, \text{ откуда } x_2 = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9} \ (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$,

$x_2 = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 3. *Найти все решения уравнения*

$$2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x} - (2^{\frac{3}{2}} - 1)4^{\cos^2 x} = -(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)}. \tag{10}$$

Решение. Область определения данного уравнения есть множество

$$0 < \sqrt{2}\sin x \neq 1. \tag{11}$$

Всюду в этой области имеем

$$(2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{2}\sin x)^{\log_{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1;$$

$$2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x} = \sqrt{2}\cdot 4^{1+\cos 2x} = \sqrt{2}\cdot 4^{2\cos^2 x}.$$

Значит, исходное уравнение (10) эквивалентно на множестве (11) следующему:

$$\sqrt{2}\cdot 4^{2\cos^2 x} - (2\sqrt{2} - 1)\cdot 4^{\cos^2 x} = -(\sqrt{2} - 1).$$

Подстановкой $4^{\cos^2 x} = t$ полученное уравнение приводится к смешанной системе

$$\sqrt{2}\,t^2 - (2\sqrt{2} - 1)t + (\sqrt{2} - 1) = 0,\ 1 \le t < 4,\ t \neq 2.$$

Из двух корней квадратного уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ второй меньше единицы и не удовлетворяет неравенству системы. Следовательно, решением смешанной системы является $t = 1$.

Воспользовавшись указанной подстановкой, получим

$$4^{\cos^2 x} = 1,$$

что эквивалентно уравнению $\cos^2 x = 0$. Отсюда, учитывая условия (11), находим

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ldots).$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ldots)$.

Пример 4. *Найти все решения уравнения*

$$2\sin^2(\pi\cdot 2^{x+1})-4\sin(\pi\cdot 2^{x+1})+\sin(\pi\cdot 2^{x+2})+4\sin^2(\pi\cdot 2^{x})=0.$$

Решение. Подстановкой $\pi\cdot 2^x=t\ (t>0)$ исходное уравнение приводится к смешанной системе

$$\begin{cases}2\sin^2 2t-4\sin 2t+\sin 4t+4\sin^2 t=0,\\ t>0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}(1-\sin 2t)(1-\sin 2t-\cos 2t)=0,\\ t>0.\end{cases}$$

Последняя система эквивалентна совокупности двух систем

$$(\mathrm{I})\begin{cases}1-\sin 2t=0,\\ t>0;\end{cases}\qquad (\mathrm{II})\ \begin{cases}1-\sin 2t-\cos 2t=0,\\ t>0.\end{cases}$$

Решением системы (I) являются значения $t=\frac{\pi}{4}+k\pi$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Следовательно, $\pi\cdot 2^x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\geq 0)$, откуда

$$x=\log_2\left(\frac{1}{4}+k\right),\ \text{где}\ \ k\geq 0.$$

Система (II) имеет два решения — одно совпадает с решением системы (I), другое имеет вид $t=\pi n$, где $n=1,2,\ldots$. Ему соответствует

$$x=\log_2 n,\ \text{где}\ \ n\geq 1.$$

Ответ. $x=\log_2\left(\frac{1}{4}+k\right),\ k\geq 0;\ x=\log_2 n,\ n\geq 1$ (k, n — целые числа).

Пример 5. *Решить уравнение*

$$|\cos x|^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1.$$

Решение. Всюду в области определения, т. е. при $|\cos x|\neq 0$, рассматриваемое уравнение эквивалентно следующему.

$$a^{\left(\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}\right)\log_a|\cos x|}=a^{\log_a 1}\ (0<a\neq 1),$$

или

$$\left(\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}\right)\log_a|\cos x|=0.$$

Последнее уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений

$$\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}=0 \ \text{ и } \ \log_a|\cos x|=0.$$

Решив первое из них, получим

$$\sin x=\frac{1}{2},\ x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi\ (k=0,\ \pm 1,...)$$

и

$$\sin x=1,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2m\pi\ (m=0,\ \pm 1,...).$$

Множество значений $x_2=\dfrac{\pi}{2}+2m\pi$ (при которых $\cos x=0$) не принадлежит области определения исходного уравнения и, следовательно, не является его решением.

Решив второе уравнение, получим

$$|\cos x|=1,$$

т. е. $x_3=n\pi\ (n=0,\ \pm 1,...)$.

Ответ. $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ (k=0,\ \pm 1,...),\ x=n\pi\ (n=0,\ \pm 1,...)$.

Пример 6. *Решить уравнение*

$$\log_{\frac{4-x^2-3x}{8}}(\cos x-\cos 3x)=\log_{\frac{4-x^2-3x}{8}}\sin 2x.$$

Решение. Область определения данного уравнения находится из системы неравенств

$$\begin{cases}\cos x-\cos 3x>0,\\ \sin 2x>0,\\ 0<\dfrac{4-x^2-3x}{8}\neq 1,\end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 2\sin 2x \sin x > 0, \\ \sin 2x > 0, \\ -4 < x < 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots), \\ -4 < x < 1 \end{cases}$$

и, значит (рекомендуем воспользоваться числовой осью), состоит из двух интервалов

$$-\pi < x < -\frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < x < 1.$$

В этой области исходное уравнение эквивалентно следующим:

$$\cos x - \cos 3x = \sin 2x,$$

$$2\sin 2x \sin x = \sin 2x,$$

$$2\sin x = 1.$$

Таким образом, получаем две смешанные системы

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Первая из них не имеет решений, а вторая имеет единственное решение $x = \dfrac{\pi}{6}$, которое и является корнем исходного уравнения.

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Пример 7. *Решить уравнение*

$$\log_{\sin x}\left(\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right) = 3. \tag{12}$$

Решение. Область определения уравнения задается системой неравенств

$$0 < \sin x < 1, \tag{13}$$

$$\sin x - \frac{1}{4}\cos x > 0. \tag{14}$$

В этой области уравнение (12) можно записать в виде

$$\log_{\sin x}\left(\sin x - \frac{1}{4}\cos x\right) = \log_{\sin x} \sin^3 x.$$

На множестве (13), (14) оно эквивалентно следующим тригонометрическим уравнениям:

$$\sin x - \frac{1}{4}\cos x = \sin^3 x,$$

$$\sin x(1-\sin^2 x) - \frac{1}{4}\cos x = 0,$$

$$\cos x\left(\sin x\cos x - \frac{1}{4}\right) = 0,$$

$$\cos x\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Так как $\cos x \neq 0$ в области определения уравнения (12), то

$$\sin 2x - \frac{1}{2} = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi\ (k = 0,\ \pm 1, \ldots).$$

Условиям (13) и (14) удовлетворяют только

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi\ (k = 0,\ \pm 1, \ldots), \tag{15}$$

так как при этих значениях выполняются неравенства

$$0 < \sin x_1 < 1,\ 0 < \sin x_2 < 1$$

и

$$\sin x_1 - \frac{1}{4}\cos x_1 > 0,\ \sin x_2 - \frac{1}{4}\cos x_2 > 0.$$

Два последних неравенства следуют из того, что

$$\sin\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{12} > 0 \text{ и } \sin\frac{5\pi}{12} - \frac{1}{4}\cos\frac{5\pi}{12} > 0$$

(рекомендуем доказать эти неравенства самостоятельно, используя соотношения между тригонометрическими функциями половинного и целого угла).

Геометрическая интерпретация решения уравнения (12).

На координатной плоскости XOY, где

$$X = \cos x,\ Y = \sin x,$$

решениям (15) соответствуют точки единичной окружности

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

расположенные в области, задаваемой неравенствами

$$0 < Y < 1,\ Y - \frac{1}{4}X > 0$$

(на рис. 179 эта область заштрихована).

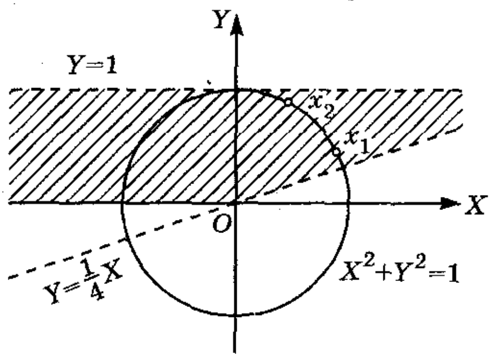


Рис. 179

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 8. *Решить уравнение*

$$\log_2\left(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy}\right) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}.$$

Решение. Так как $a + \frac{1}{a} > 2$ при $0 < a \neq 1$ и $a + \frac{1}{a} = 2$ при $a = 1$, то

$$\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy} \geq 2.$$

Поэтому

$$\log_2\left(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy}\right) \geq 1,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\cos^2 xy = 1.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{y^2 - 2y + 2} = \frac{1}{(y-1)^2 + 1} \leq 1,$$

причем равенство достигается только при $y = 1$.

Следовательно, для того чтобы исходное уравнение выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы значения x и y удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 xy = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$, $y = 1$.

Ответ. $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$, $y = 1$.

Пример 9. *Найти все решения системы*

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{\log_2 21 - 1}{\log_2 \dfrac{x-y}{21}} = \log_{\frac{x-y}{21}} 2 \cdot \log_2 (x+y), \\ \sqrt{2} \sin \dfrac{\pi(x-2)}{2} = \cos \dfrac{\pi y}{2} - \sin \dfrac{\pi y}{2}. \end{cases}$$

Решение. Область допустимых значений неизвестных x и y определяется из условий $x + y > 0$, $x - y > 0$, $x - y \neq 21$. Всюду в этой области имеем

$$\log_{\frac{x-y}{21}} 2 = \frac{1}{\log_2 \dfrac{x-y}{21}},$$

поэтому первое уравнение системы принимает вид

$$\log_2 (x - y) - 1 = \log_2 (x + y),$$

или после потенцирования

$$\frac{x-y}{2} = x + y.$$

Отсюда $x = -3y$. Второе уравнение системы приводится к виду

$$\sin \frac{\pi(x-2)}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi y}{2}\right).$$

Итак, исходная система уравнений эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x + y > 0, \\ x - y > 0, \end{aligned}\right\} & (16) \\ x - y \neq 21, & (17) \\ x = -3y, & (18) \\ \sin \dfrac{\pi(x-2)}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi y}{2}\right) & (19) \end{cases}$$

Из условий (16) и (18) следует, что

$$x > 0,\ y < 0. \tag{20}$$

Подставляя выражение x через y в уравнение (19), получим

$$\sin\frac{\pi(-3y-2)}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi y}{2}\right).$$

Из равенства синусов двух углов следует, что либо сумма углов есть нечетное кратное π, либо разность углов есть четное кратное π. Имеем:

1) $\dfrac{\pi(-3y-2)}{2} + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi y}{2} = (2n+1)\pi,$

откуда $y = -\dfrac{8n+7}{8}$, причем $y < 0$ при n целых и неотрицательных.

2) $\dfrac{\pi(-3y-2)}{2} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi y}{2} = 2k\pi,$

откуда $y = -\dfrac{8k+5}{4}$, причем условия (20) и (17) выполняются для значений k целых неотрицательных и отличных от $k = 2$.

Ответ. 1) $y_1 = -\dfrac{8n+7}{8},\ x_1 = \dfrac{24n+21}{8}\ (n \ge 0);$

2) $y_2 = -\dfrac{8k+5}{4},\ x_2 = \dfrac{24k+15}{4}\ (k \ge 0,\ k \ne 2)$

(k, n — целые).

Пример 10. *Найти целые корни уравнения*

$$(x-3)\log_4^2 x + (x^2 - 4x + 2)\log_4 x + 1 - x = 0.$$

Решение. Введя функциональный параметр

$$\log_4 x = t, \tag{21}$$

будем рассматривать данное уравнение как квадратное относительно t:

$$(x-3)t^2 + (x^2 - 4x + 2)t + 1 - x = 0. \tag{22}$$

Найдем его корни. Так как $x = 3$ не является корнем, то уравнение (22) эквивалентно следующему:

$$t^2 + \frac{x^2 - 4x + 2}{x-3}t + \frac{1-x}{x-3} = 0,$$

или

$$t^2 - \left(1 - x + \frac{1}{x-3}\right)t + \frac{1-x}{x-3} = 0. \tag{23}$$

откуда, воспользовавшись теоремой Виета, получим

$$t_1 = 1 - x,\ t_2 = \frac{1}{x-3}.$$

Поэтому левую часть уравнения (23) можно разложить на множители:

$$(t + x - 1)\left(t - \frac{1}{x-3}\right) = 0.$$

Воспользовавшись подстановкой (21), имеем

$$(\log_4 x + x - 1)\left(\log_4 x - \frac{1}{x-3}\right) = 0.$$

Полученное уравнение (эквивалентное исходному) эквивалентно совокупности уравнений

$$\log_4 x = 1 - x; \quad \log_4 x = \frac{1}{x-3}.$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x = 1$, второе — целый корень $x = 4$ (рис. 180). (Докажите, что других целых корней уравнения не имеют.)

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

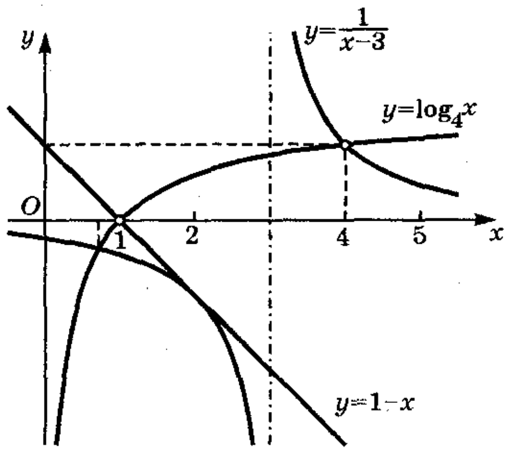


Рис. 180

Пример 11. *Для каждого действительного значения параметра a решить уравнение*

$$\log_{|\sin x|} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = a.$$

Решение. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух отрицательных множителей (так как $|\sin x| < 1$ и $\sin^2 x < 1$, то

$\log_{|\sin x|} 2 < 0$, $\log_{\sin^2 x} 3 < 0$). Следовательно, $a > 0$. Переходя к основанию логарифмов, равному 2, и учитывая, что $\sin^2 x = |\sin x|^2$, получаем систему

$$\begin{cases} \log_2^2|\sin x| = \dfrac{\log_2 3}{2a}, & (24) \\ 0 < |\sin x| < 1, & (25) \end{cases}$$

где последнее условие задает область определения исходного уравнения. На множестве (25) при $a > 0$ уравнение (24) эквивалентно уравнению

$$\left|\log_2|\sin x|\right| = \sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}. \qquad (26)$$

Так как при всех значениях x, удовлетворяющих системе неравенств (25),

$$\log_2|\sin x| < 0,$$

то $\left|\log_2|\sin x|\right| = -\log_2|\sin x|$ и уравнение (26) при $a > 0$ эквивалентно на множестве (25) следующему:

$$\log_2|\sin x| = -\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}.$$

Отсюда .

$$|\sin x| = 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}, \ \sin x = \pm 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}},$$

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin\left(\pm 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}\right) \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. Если $a > 0$, то $x = k\pi + (-1)^k \arcsin\left(\pm 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}\right)$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$; если $a \le 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример 12. *Для каждого положительного числа a ($a \ne 1$) решить уравнение*

$$(\log_a \sin x)^2 + \log_a \sin x - a = 0. \qquad (27)$$

Решение. Полагая

$$\log_a \sin x = t \qquad (28)$$

и учитывая, что всюду в области определения уравнения (27) имеют место неравенства

$$\log_a \sin x \ge 0 \text{ при } 0 < a < 1,$$

$$\log_a \sin x \le 0 \text{ при } a > 1,$$

получаем две смешанные системы:

$$t^2 + t - a = 0,\ t > 0 \text{ при } 0 < a < 1, \tag{29}$$

$$t^2 + t - a = 0,\ t < 0 \text{ при } a > 1 \tag{30}$$

(если $t = 0$, то $a = 0$, что невозможно).

При $0 < a \ne 1$ квадратное уравнение

$$t^2 + t - a = 0 \tag{31}$$

имеет два различных действительных корня

$$t_1 = -\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2} \text{ и } t_2 = \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2},$$

причем $t_1 < 0,\ t_2 > 0$.

Значит, при $0 < a < 1$ смешанная система (29) имеет решение $t = t_2$, откуда находим

$$\log_a \sin x = \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2} \ (0 < a < 1). \tag{32}$$

При $a > 1$ смешанная система (30) имеет решение $t = t_1$ и, следовательно,

$$\log_a \sin x = -\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2} \ (a > 1). \tag{33}$$

Таким образом, исходное уравнение (27) эквивалентно совокупности уравнений (32) и (33), решая которые, получим ответ.

Замечание. Системы (29), (30) можно исследовать КП-методом.

Ответ. Если $0 < a < 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a^{\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}} + k\pi,$

если $a > 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a^{-\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}} + n\pi$

$(k = 0, \pm 1, \ldots;\ n = 0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 13. *Для каждого действительного числа* $0 < a \ne 1$ *решить уравнение*

$$\log_a^2 \sin x + p \log_a \sin x + q = 0 \ (p^2 - 4q \ge 0,\ q \ne 0). \tag{34}$$

Решение. В области определения уравнения имеем $\sin x > 0$.

Сначала рассмотрим случай $a > 1$. С помощью подстановки

$$\log_a \sin x = t \ (t \le 0), \tag{35}$$

уравнение (34) сводится к смешанной системе

$$\begin{cases} t^2 + pt + q = 0, & (36) \\ t \le 0. & (37) \end{cases}$$

Пусть t_1 и t_2 — действительные корни квадратного уравнения (36), причем $t_1 \le t_2$. Так как $q \ne 0$, то ни один из этих корней не равен нулю.

Если оба корня положительны, то смешанная система (36), (37) не имеет решения, а следовательно, не имеет корней и исходное уравнение (34).

Пусть уравнение (36) имеет отрицательные корни

$$t_1 < 0 \text{ и } t_2 < 0.$$

На основании теоремы о расположении числа относительно корней квадратного уравнения это имеет место тогда и только тогда, когда

$$q > 0 \text{ и } p > 0.$$

Значит, при $q > 0$ и $p > 0$ уравнение (34) эквивалентно совокупности уравнений

$$\log_a \sin x = t_{1,2},$$

где $t_{1,2}$ — отрицательные корни квадратного уравнения (36). Тогда

$$x = (-1)^k \arcsin a^{t_{1,2}} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Пусть $t_1 < t_2$ и больший корень положителен, а меньший отрицателен. В этом случае число 0 расположено между корнями t_1 и t_2. Необходимым и достаточным условием этого является выполнение неравенства

$$q < 0.$$

Таким образом, при $q < 0$ и любом p уравнение (34) эквивалентно уравнению

$$\log_a \sin x = t_1,$$

где t_1 — отрицательный корень квадратного уравнения (36). Отсюда

$$x = (-1)^n \arcsin a^{t_1} + n\pi \ (n = 0, \pm 1, \dots).$$

Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$. Полагая $\log_a \sin x = t$ и учитывая, что $\log_a \sin x \ge 0$, получим смешанную систему

$$t^2 + pt + q = 0, \ t \ge 0.$$

Дальнейшее исследование проводится так же, как и в первом случае.

Ответ. 1) $a>1$. Если $q>0$, то при $p>0$

$$x=(-1)^k \arcsin a^{t_{1,2}}+k\pi\ (k=0,\pm 1,\ldots),$$

где $t_{1;2}$ — отрицательные корни уравнения (36), а при $p<0$ уравнение (34) корней не имеет.

Если $q<0$, то при любом p

$$x=(-1)^n \arcsin a^{t_1}+n\pi\ (n=0,\ \pm 1,\ldots),$$

где t_1 — отрицательный корень уравнения (36).

2) $0<a<1$. Если $q>0$, то при $p<0$

$$x=(-1)^k \arcsin a^{t_{1,2}}+k\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ldots),$$

где $t_{1,2}$ — положительные корни уравнения (36), а при $p>0$ уравнение (34) корней не имеет.

Если $q<0$, то при любом p

$$x=(-1)^n \arcsin a^{t_2}+n\pi\ (n=0,\ \pm 1,\ldots),$$

где t_2 — положительный корень уравнения (36).

2. Примеры решения трансцендентных неравенств

Пример 14. *Решить неравенство*

$$x^{2\sin x-\cos 2x}<\frac{1}{x}$$

при условии $x>0$.

Решение. Данное неравенство эквивалентно на множестве $x>0$ неравенству

$$x^{2\sin x-\cos 2x+1}<1,$$

или

$$x^{2\sin x+2\sin^2 x}<1. \tag{38}$$

Воспользовавшись определением обобщенно-показательной функции (см. § 1, п. 5), перепишем неравенство (38) следующим образом:

$$10^{(2\sin x+2\sin^2 x)\lg x}<10^0,$$

откуда

$$\sin x(1+\sin x)\lg x<0. \tag{39}$$

Полученное неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$\text{(I)}\ \begin{cases}\sin x>0,\\ \lg x<0;\end{cases}\quad \text{(II)}\ \begin{cases}-1<\sin x<0,\\ \lg x>0\end{cases}$$

(для всех x, удовлетворяющих неравенству (39), выполнено условие $1+\sin x>0$).

Система (I) выполняется при всех x из интервала $0<x<1$, так как при этих значениях

$$\lg x<0 \text{ и } \sin x>0.$$

Решением системы (II) являются значения

$$\pi+2n\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2n\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2n\pi<x<2\pi+2n\pi,$$

где $n=0, 1, 2, \ldots$, так как при этом $x>1$ и, следовательно, $\lg x>0$.

Ответ. $0<x<1$, $(2n+1)\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi$,

$$\frac{3\pi}{2}+2n\pi<x<(2n+1)\pi \ \ (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Пример 15. *Решить неравенство*

$$(\log_{\operatorname{tg} x} 3)^2 \le \log_{\operatorname{tg} x}(3\operatorname{tg}^2 x).$$

Решение. Всюду в области определения

$$0<\operatorname{tg} x\ne 1$$

данное неравенство эквивалентно следующему:

$$(\log_{\operatorname{tg} x} 3)^2 \le \log_{\operatorname{tg} x} 3+2,$$

т. е. системе неравенств

$$-1\le \log_{\operatorname{tg} x} 3\le 2.$$

Последняя эквивалентна совокупности двух систем (см. § 3, п. 3):

$$\text{(I)}\ \begin{cases}\operatorname{tg} x>1,\\ \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\le 3\le \operatorname{tg}^2 x;\end{cases} \quad \text{(II)}\ \begin{cases}0<\operatorname{tg} x<1,\\ \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\ge 3\ge \operatorname{tg}^2 x.\end{cases}$$

Система (I) преобразуется к виду

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x>1,\\ \operatorname{tg} x\ge \dfrac{1}{3},\\ \operatorname{tg} x\ge \sqrt{3},\end{cases}$$

т. е. она эквивалентна неравенству

$$\operatorname{tg} x\ge \sqrt{3},$$

откуда получим

$$\frac{\pi}{3}+k\pi \le x < \frac{\pi}{2}+k\pi \ (k=0, \pm 1, \ldots).$$

Система (II) принимает вид

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{tg} x \le \dfrac{1}{3}, \\ \operatorname{tg} x \le \sqrt{3}, \end{cases}$$

т. е. она эквивалентна системе

$$0 < \operatorname{tg} x \le \frac{1}{3},$$

откуда имеем

$$k\pi < x \le \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi \ (k=0, \pm 1, \ldots).$$

Ответ. $\frac{\pi}{3}+k\pi \le x < \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\pi < x \le \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 16. *Решить неравенство*

$$\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin^2 x-\frac{5}{12}} < -1.$$

Решение. Всюду в области определения

$$0 < \operatorname{tg} x \ne 1$$

данное неравенство можно записать так:

$$\log_{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin^2 x-\frac{5}{12}} < \log_{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

В этой области оно эквивалентно совокупности двух систем:

$$\text{(I)} \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ 0 < \sqrt{\sin^2 x-\dfrac{5}{12}} < \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}; \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \sqrt{\sin^2 x-\dfrac{5}{12}} > \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}. \end{cases}$$

Система неравенств (I) эквивалентна следующим системам:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ 0 < \sin^2 x-\dfrac{5}{12} < \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ 0 < \dfrac{7}{12}-\cos^2 x < \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ 0 < \dfrac{7}{12} - \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} < \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ \operatorname{tg}^2 x > \dfrac{5}{7}, \\ \left(\operatorname{tg}^2 x + \dfrac{4}{7}\right)(\operatorname{tg}^2 x - 3) < 0. \end{cases}$$

Последняя система эквивалентна системе

$$1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}.$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Аналогично, система неравенств (II) эквивалентна системам

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \left(\operatorname{tg}^2 x + \dfrac{4}{7}\right)(\operatorname{tg}^2 x - 3) > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{tg}^2 x > 3 \end{cases}$$

и, следовательно, не имеет решения.

Ответ. $\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi \ (k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 17. *Решить неравенство*

$$\log_{\sin x - \cos x}(\sin x - 5\cos x) \geq 1.$$

Решение. Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$0 < \sin x - 5\cos x \leq \sin x - \cos x < 1 \qquad (40)$$

и

$$1 < \sin x - \cos x \leq \sin x - 5\cos x. \qquad (41)$$

Полагая

$$\cos x = X, \ \sin x = Y \qquad (42)$$

и учитывая, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получаем смешанные алгебраические системы

$$\text{(I)} \begin{cases} 0 < Y - 5X \leq Y - X < 1, \\ X^2 + Y^2 = 1; \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} 1 < Y - X \leq Y - 5X, \\ X^2 + Y^2 = 1. \end{cases}$$

Зная решения этих систем и воспользовавшись подстановкой (42), можно получить решение исходного неравенства.

Геометрически решение смешанной алгебраической системы (I), а следовательно, и тригонометрической системы (40) можно трактовать как отыскание дуг единичной окружности, принадлежащих области

$$0 < Y - 5X \le Y - X < 1$$

(рис. 181).

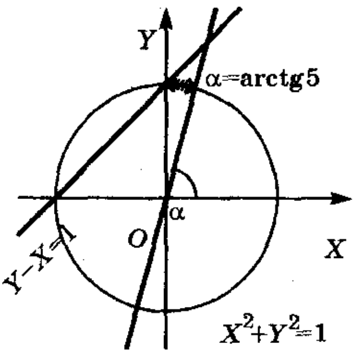


Рис. 181

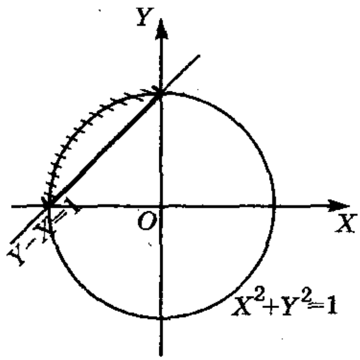


Рис. 182

Решение смешанной алгебраической системы (II), а значит, и тригонометрической системы (41) можно трактовать как отыскание дуг единичной окружности, принадлежащих области

$$1 < Y - X \le Y - 5X$$

(рис. 182).

Ответ. $2k\pi + \operatorname{arctg} 5 < x < (2k+1)\pi,\ x \ne \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ \ (k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Пример 18. *Решить неравенство*

$$\cos^2(x+1)\lg(9 - 2x - x^2) \ge 1.$$

Решение. Левая часть неравенства представляет собой произведение двух множителей. Так как при любом x выполняются неравенства

$$0 \le \cos^2(x+1) \le 1,$$

то это произведение равно единице или превосходит единицу, когда

$$\lg(9 - 2x - x^2) \ge 1.$$

Последнее условие эквивалентно неравенству

$$9 - 2x - x^2 \ge 10,$$

или

$$(x+1)^2 \le 0.$$

Отсюда $x = -1$. Проверкой убеждаемся, что $x = -1$ является решением исходного неравенства.

Ответ. $x = -1$.

Пример 19. *Решить неравенство*

$$\sqrt{4\sin^2 x - 1} \cdot \log_{\sin x} \frac{x-5}{2x-1} \geq 0. \qquad (43)$$

Решение. Область определения данного неравенства находится из условий

$$4\sin^2 x - 1 \geq 0,\ 0 < \sin x < 1,\ \frac{x-5}{2x-1} > 0,$$

т. е. представляет собой множество значений x, для которых

$$\frac{1}{2} \leq \sin x < 1,\ x < \frac{1}{2},\ x > 5. \qquad (44)$$

Исходное неравенство (43) может выполняться в двух случаях: 1) когда первый множитель равен нулю; 2) когда второй множитель больше или равен нулю.

1. Равенство $\sqrt{4\sin^2 x - 1} = 0$ выполняется на множестве (44), когда

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ и } x < \frac{1}{2} \text{ или } x > 5.$$

Следовательно, решением неравенства (43) являются все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, кроме $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$ (эти значения x не входят в область определения исходного неравенства).

2. Неравенство

$$\log_{\sin x} \frac{x-5}{2x-1} \geq 0$$

эквивалентно на множестве (44) следующему:

$$\frac{x-5}{2x-1} \leq 1$$

и имеет решение $x \leq -4$ и $x \geq \frac{1}{2}$. Из этих значений x в область определения исходного неравенства (43) входят только значения

$$x \leq -4 \text{ и } x > 5. \qquad (45)$$

Решением системы неравенств

$$\frac{1}{2} \leq \sin x < 1$$

являются значения x из промежутков

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ x \ne \frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k=0, \pm 1, ...).$$

Условиям (45) удовлетворяют только значения

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ x \ne \frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

где k — любое целое число, кроме 0 и -1, и значения

$$-\frac{11\pi}{6} \le x \le -4,\ x \ne -\frac{3\pi}{2}.$$

Объединяя результаты двух рассмотренных случаев, получим ответ.

Ответ. $\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ x \ne \frac{\pi}{2}+2k\pi,$

где k — любое целое число, кроме 0 и -1,

$-\frac{11\pi}{6} \le x \le -4,\ x \ne -\frac{3\pi}{2}$, а также $x = -\frac{7\pi}{6}$.

3. Модифицированный метод интервалов при решении трансцендентных неравенств

Идея метода интервалов (см. гл. III, § 2, пп. 5 и 6, § 3, п.3) используется также при решении неравенств вида

$$f(x) > 0 \ \text{ и } \ f(x) < 0,$$

где $f(x)$ — любая элементарная трансцендентная функция.

Вопрос о решении трансцендентных неравенств можно свести к вопросу о решении трансцендентных уравнений и установлении знака функции $f(x)$ в промежутках (интервалах), на которые разбивают область определения функции (ОДЗ переменной x) нули этой функции (нули числителя дроби) и (или) изолированные точки, в которых функция не определена (нули знаменателя дроби — полюсы).

Теоретическую основу составляет (доказываемое в курсе математического анализа) свойство сохранения знака элементарной трансцендентной (непрерывной) функции: *если элементарная трансцендентная функция определена при всех значениях аргумента из некоторого промежутка и не обращается на нем в нуль, то при всех этих значениях аргумента она сохраняет знак.*

Алгоритм метода интервалов состоит из трех этапов.

1^0. Находят область определения функции $D(f)$ и изолированные точки, в которых функция не определена (нули знаменателя — полюсы).

2^0. Находят нули функции как корни уравнения $f(x)=0$ (нули числителя дроби).

Найденными нулями и изолированными точками, в которых функция не определена, разбивают множество $D(f)$ на ряд промежутков (интервалов, полуинтервалов, полусегментов).

3^0. Исследуют знак функции $f(x)$ в каждом из полученных промежутков знакопостоянства этой функции.

При установлении знака функции $f(x)$ *в промежутках разбиения* множества $D(f)$ руководствуются следующим.

1. Достаточно установить знак функции при каком-либо значении аргумента из каждого рассматриваемого промежутка и воспользоваться свойством сохранения ее знака в этом промежутке.

2. При переходе в соседний промежуток через нуль функции или полюс нечетной кратности функция меняет знак на противоположный, а при переходе через нуль или полюс четной кратности — сохраняет знак.

Следует заметить, что определение кратности корня или полюса трансцендентной функции может быть связано с определеннными трудностями.

3. Можно применить модифицированный метод интервалов. Предположим, что функция $f(x)$ представима в виде частного и (или) произведения определенных на множестве $D(f)$ функций $\varphi_i(x)(i=1, 2,\dots,n)$, знаки которых в рассматриваемых промежутках разбиения достаточно просто устанавливаются (например, при решении типовых неравенств $\varphi_i(x)>0$ и $\varphi_i(x)<0;\ i=1,2,\dots,n$), т. е.

$$f(x)=\frac{\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\dots\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}(x)\dots\varphi_n(x)},\ x\in D(f).$$

Составим таблицу, в которой укажем знак каждой функции $\varphi_i(x)(i= =1, 2,\dots,n)$ в каждом из промежутков разбиения множества $D(f)$.

По этой таблице определим промежутки, в которых функция $f(x)$ принимает положительные или отрицательные значения.

Пример 20. *Решить неравенство*

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot\log_{13-3\cdot2^x}4\le1. \qquad (46)$$

Решение. Задача сводится к нахождению множества всех значений x, при которых функция

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot\log_{13-3\cdot2^x}4-1=\frac{(2-x)-\log_2(13-3\cdot2^x)}{\log_2(13-3\cdot2^x)}\le0.$$

1^0. Найдем область определения функции $f(x)$ из условий

$$0<13-3\cdot 2^x\neq 1 \Leftrightarrow 4\neq 2^x<\frac{13}{3}\Leftrightarrow 2\neq x<\log_2\frac{13}{3}\ \text{(ОДЗ)}$$

и полюс $x=2$ — изолированную точку, в которой функция не определена.

2^0. Найдем нули числителя функции $f(x)$, для чего решим трансцендентное уравнение

$$(2-x)-\log_2(13-3\cdot 2^x)=0\Leftrightarrow \log_2 2^{2-x}=\log_2(13-3\cdot 2^x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2^x-\frac{1}{3}\right)\cdot(2^x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_2\frac{1}{3},\\ x=2.\end{array}\right.$$

Найденные значения разбивают область определения функции на интервалы

$$\left(-\infty,\log_2\frac{1}{3}\right),\left(\log_2\frac{1}{3},\ 2\right),\left(2,\ \log_2\frac{13}{3}\right).$$

3^0. Исследуем знак функции $f(x)$ в каждом из этих интервалов.

Пусть, например, $x=0\in\left(\log_2\frac{1}{3},\ 2\right)$. Так как при $x=0$ значение функции

$$f(0)=\frac{2-\log_2 10}{\log_2 10}=\frac{\log_2\frac{2}{5}}{\log_2 10}<0,$$

то при всех значениях x из интервала $\left(\log_2\frac{1}{3},\ 2\right)$ функция $f(x)<0$.

При переходе через нуль $x=\log_2\frac{1}{3}$ (нечетной кратности) функция $f(x)$ меняет знак на противоположный и, следовательно, для всех значений x из интервала $\left(-\infty,\ \log_2\frac{1}{3}\right)$ функция $f(x)>0$.

При переходе в интервал $\left(2,\ \log_2\frac{13}{3}\right)$ функция $f(x)$ сохраняет знак, так как точка перехода $x=2$ является одновременно полюсом нечетной кратности и нулем числителя также нечетной кратности. При всех значениях x из этого интервала $f(x)<0$.

Для исследования знака рассматриваемой функции $f(x)$ в интервалах разбиения множества $D(f)$ можно применить также модифицированный метод интервалов.

Воспользуемся представлением функции в виде

$$f(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},$$

где

$$\varphi_1(x)=(2-x)-\log_2(13-3\cdot 2^x),$$

$$\varphi_2(x)=\log_2(13-3\cdot 2^x).$$

Знаки этих функций в каждом из интервалов разбиения можно установить, например решая типовые трансцендентные неравенства сведением их к алгебраическим.

Заполним следующую таблицу:

№	1	2	3
Интервал	$\left(-\infty,\ \log_2\frac{1}{3}\right)$	$\left(\log_2\frac{1}{3},\ 2\right)$	$\left(2,\ \log_2\frac{13}{3}\right)$
Знак $\varphi_1(x)$	+	–	+
Знак $\varphi_2(x)$	+	+	–
Знак $f(x)$	+	–	–

Таким образом, решением исходного нестрогого неравенства являются второй и третий из рассматриваемых интервалов, а также нуль функции, т. е. значение $x=\log_2\frac{1}{3}$.

Ответ. $\left[\log_2\frac{1}{3},\ 2\right)\cup\left(2,\ \log_2\frac{13}{3}\right)$.

Замечание. Неравенство (46) можно было решить, используя рекомендации, изложенные в п. 3 § 3, а именно — сведя его сначала к показательному, а затем методом подстановки к алгебраическому неравенству.

В п. 4 данного параграфа будет предложен еще один метод решения подобного типа трансцендентных неравенств.

Пример 21. *Решить неравенство*

$$\log_{84-2x-2x^2}\cos x\le\log_{x+19}\cos x. \tag{47}$$

Решение. Сведем задачу к нахождению множества значений x, при которых функция

$$f(x)=\log_{84-2x-2x^2}\cos x-\log_{x+19}\cos x\le 0.$$

1^0. Найдем область определения функции. Имеем

$$D(f):\begin{cases}0<84-2x-2x^2\ne 1\\ 0<x+19\ne 1,\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-7<x<x_1,\\ x_1<x<-\dfrac{3\pi}{2},\\ -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{3\pi}{2}<x<x_2,\\ x_2<x<6,\end{array}\right.$$

где $x_1=-\dfrac{1+\sqrt{167}}{2}$ и $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}$ — изолированные точки, в которых функция $f(x)$ не определена.

2^0. Найдем нули функции, решив уравнение $f(x)=0$. В области определения $D(f)$ это уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ 84-2x-2x^2=x+19\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\pi,\\ x=0,\\ x=-\dfrac{13}{2},\\ x=5.\end{array}\right.$$

3^0. Исследуем знак функции $f(x)$ в каждом из девяти указанных в таблице промежутков (интервалов), на которые разбивают область ее определения $D(f)$ найденные нули функции и изолированные точки x_1 и x_2, где эта функция не определена.

В рассматриваемых интервалах

$$0<\cos x<1$$

и функцию можно представить в виде дроби:

$$f(x)=\frac{\log_{\cos x}(x+19)-\log_{\cos x}(84-2x-2x^2)}{\log_{\cos x}(84-2x-2x^2)\cdot\log_{\cos x}(x+19)},$$

или в виде

$$f(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)\cdot\varphi_3(x)},$$

где

$$\varphi_1(x)=\log_{\cos x}(x+19)-\log_{\cos x}(84-2x-2x^2),$$

$$\varphi_2(x)=\log_{\cos x}(84-2x-2x^2),$$

$$\varphi_3(x)=\log_{\cos x}(x+19).$$

Установим знак этих функций в каждом из рассматриваемых интервалов, например, решая типовые неравенства

$$\varphi_i(x)>0 \text{ и } \varphi_i(x)<0 \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Заполним следующую таблицу:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Интервал	$(-7,\ x_1)$	$\left(x_1,-\frac{13}{2}\right)$	$\left(-\frac{13}{2},-2\pi\right)$	$\left(-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2},5\right)$	$(5,x_2)$	$(x_2,6)$
Знак $\varphi_1(x)$	−	−	+	+	+	+	+	−	−
Знак $\varphi_2(x)$	+	−	−	−	−	−	−	−	+
Знак $\varphi_3(x)$	−	−	−	−	−	−	−	−	−
Знак $f(x)$	+	−	+	+	+	+	+	−	+

Функция $\varphi_1(x)$ в первом и втором интервалах принимает отрицательные значения, в интервалах с третьего по седьмой — положительные, а в восьмом и девятом — отрицательные.

Функция $\varphi_2(x)$ в первом и девятом интервалах положительна, а в остальных отрицательна.

Функция $\varphi_3(x)$ отрицательна во всех интервалах.

Следовательно, функция $f(x)$ принимает отрицательные значения только во втором и восьмом интервалах.

Добавив к этим интервалам нули функции, получим решение исходного нестрогого неравенства.

Ответ. $\left(-\frac{1+\sqrt{167}}{2},-\frac{13}{2}\right]\cup\left[5,\frac{-1+\sqrt{167}}{2}\right)\cup\{-2\pi\}\cup\{0\}$.

Замечание. Неравенство (47) можно привести к виду

$$\log_{x+19}\cos x\cdot(\log_{84-2x-2x^2}(x+19)-1)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\underset{D(f)}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \log_{84-2x-2x^2}(x+19)-1\geq 0\end{array}\right.$$

Последнее неравенство — типовое.

4. Метод декомпозиции при решении трансцендентных неравенств

Рассмотрим неравенство в каноническом виде

$$F\vee 0, \tag{48}$$

где выражение в левой части содержит трансцендентные функции и, возможно, числовые параметры, а $\vee$ означает любой из знаков $>,\geq,<,\leq$. В качестве конкретных трансцендентных функций возьмем логарифмическую или сложно-показательную функцию.

В § 3 были рассмотрены следующие логические схемы эквивалентных высказываний:

1^0. $\mathrm{F}=\log_a f_1-\log_a f_2\vee 0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}P=(a-1)\cdot(f_1-f_2)\vee 0$, где

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}0<a\neq 1,\\ f_1>0,\\ f_2>0,\end{cases}$$

$f_1=f_1(x,p)$, $f_2=f_2(x,p)$, $a=a(x,p)$, x — переменная, p — параметр.

В частности,

а) $\log_a f\vee 0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}(a-1)\cdot(f-1)\vee 0$, где ОДЗ: $\begin{cases}0<a\neq 1,\\ f>0;\end{cases}$

б) $\log_a f-1\vee 0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}(a-1)\cdot(f-a)\vee 0$, где ОДЗ: $\begin{cases}0<a\neq 1,\\ f>0.\end{cases}$

2^0. $\Phi=b^{\varphi_1}-b^{\varphi_2}\vee 0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}Q=(b-1)\cdot(\varphi_1-\varphi_2)\vee 0$, где ОДЗ: $b>0$,

$\varphi_1=\varphi_1(x,p)$, $\varphi_2=\varphi_2(x,p)$, $b=b(x,p)$, x — переменная, p — параметр.

Полагая $\varphi_1=\varphi$, $\varphi_2=0$, получим

$$b^{\varphi}-1\vee 0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}(b-1)\cdot\varphi\vee 0,\text{ где ОДЗ: } b>0.$$

3^0. $\Psi={a_1}^{\varphi}-{a_2}^{\varphi}\vee 0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}G=(a_1-a_2)\cdot\varphi\vee 0$, где ОДЗ: $\begin{cases}a_1>0,\\ a_2>0,\end{cases}$

$a_1=a_1(x,p)$, $a_2=a_2(x,p)$, $\varphi=\varphi(x,p)$, x — переменная, p — параметр.

Типовые неравенства 1^0–3^0 назовем ***базовыми***, а трансцендентные функции F, Φ, Ψ — ***базовыми функциями.***

Представление левой части неравенства (48) в виде произведения и (или) частного базовых функций будем называть ***декомпозицией***.

Пусть левая часть неравенства (48) представляет собой декомпозицию двух базовых функций типа 1^0–3^0.

Тогда в случае произведения имеет место следующая эквивалентность в ОДЗ переменной и параметров функции F на множестве M из этой области:

$$F = \mathrm{F}\cdot\Phi \geq 0 \underset{\text{ОДЗ}(M)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \mathrm{F} = 0, \\ \Phi = 0, \\ \begin{cases} \mathrm{F} > 0, \\ \Phi > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{F} < 0, \\ \Phi < 0 \end{cases} \end{array}\right. \underset{\text{ОДЗ}(M)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} P = 0, \\ Q = 0, \\ \begin{cases} P > 0, \\ Q > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} P < 0, \\ Q < 0 \end{cases} \end{array}\right. \underset{\text{ОДЗ}(M)}{\Leftrightarrow} R = P\cdot Q \geq 0. \quad (49)$$

Аналогично рассматривается неравенство $F = \mathrm{F}\cdot\Phi \leq 0$ и случай частного базовых функций.

Логические схемы

$$F = \mathrm{F}\cdot\Phi \vee 0 \underset{\text{ОДЗ}(M)}{\Leftrightarrow} R = P\cdot Q \vee 0 \text{ и } F = \frac{\mathrm{F}}{\Phi} \vee 0 \underset{\text{ОДЗ}(M)}{\Leftrightarrow} R = \frac{P}{Q} \vee 0 \quad (50)$$

наиболее эффективны, когда функции P и Q — рациональные алгебраические. В этом случае функция R будет также рациональной алгебраической и для решения полученных неравенств можно применить метод интервалов, а для неравенств с параметрами — координатно-параметрический метод.

Предположим, что в результате декомпозиции мы приходим к неравенству

$$F = \frac{\mathrm{F}\cdot\Phi}{\Psi} \vee 0,$$

где F, Φ, Ψ — базовые функции (типа 1^0–3^0).

Если в области допустимых значений переменной и параметров (ОДЗ) функции F или на некотором множестве (M) из этой области базовые неравенства

$$\mathrm{F} \vee 0,\ \Phi \vee 0,\ \begin{cases} \Psi \vee 0, \\ \Psi \neq 0 \end{cases}$$

можно заменить соответствующими эквивалентными неравенствами

$$P \vee 0,\ Q \vee 0,\ \begin{cases} G \vee 0, \\ G \neq 0, \end{cases}$$

то в рассматриваемой области (на множестве)

$$F = \frac{\mathrm{F}\cdot\Phi}{\Psi} \vee 0 \underset{\text{ОДЗ}(M)}{\Leftrightarrow} R = \frac{P\cdot Q}{G} \vee 0. \qquad (51)$$

Как и в предыдущем случае, логическая схема (51) эффективна, когда полученное эквивалентное неравенство оказывается более удобным для применения «метода интервалов» или КП-метода (например, когда функция R является рациональной алгебраической).

Указанный метод обобщается на произведение и частное любого числа базовых функций.

Рассмотрим некоторые примеры использования метода декомпозиции.

Докажем справедливость логической схемы, утверждающей эквивалентность в области допустимых значений переменной и параметров следующего высказывания:

$$\log_{a_1} f - \log_{a_2} f \geq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (f-1)\cdot(a_1-1)(a_2-1)(a_2-a_1) \geq 0, \qquad (52)$$

$$\text{где ОДЗ: } \begin{cases} 0 < a_1 \neq 1, \\ 0 < a_2 \neq 1, \\ f > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Случай $f = 1$ дает решение неравенства при выполнении условий, определяющих ОДЗ.

Пусть $f \neq 1$. Следуя методу декомпозиции, представим на множестве

$$M\text{: } \begin{cases} 0 < a_1 \neq 1, \\ 0 < a_2 \neq 1, \\ 0 < f \neq 1 \end{cases}$$

левую часть исходного неравенства в виде произведения и частного базовых функций:

$$\log_{a_1} f - \log_{a_2} f = \frac{1}{\log_f a_1} - \frac{1}{\log_f a_2} = \frac{\log_f a_2 - \log_f a_1}{\log_f a_1 \cdot \log_f a_2} \geq 0.$$

Тогда

$$\log_{a_1} f - \log_{a_2} f \geq 0 \underset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{M}{\Leftrightarrow} \frac{(f-1)(a_2-a_1)}{(f-1)(a_1-1)\cdot(f-1)(a_2-1)} \geq 0 \underset{M}{\Leftrightarrow} \frac{(f-1)(a_2-a_1)}{(a_1-1)\cdot(a_2-1)} \geq 0 \underset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{M}{\Leftrightarrow} (f-1)(a_1-1)(a_2-1)(a_2-a_1) \geq 0.$$

Объединяя результаты обоих случаев, получим требуемое.

Аналогично,

$$\log_{a_1} f - \log_{a_2} f \leq 0 \underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (f-1)(a_1-1)(a_2-1)(a_2-a_1) \leq 0, \qquad (53)$$

$$\text{где ОДЗ: } \begin{cases} 0 < a_1 \neq 1, \\ 0 < a_2 \neq 1, \\ f > 0. \end{cases}$$

Метод декомпозиции позволяет на основе логических схем эквивалентности типовых неравенств решать более сложные неравенства, содержащие различные трансцендентные функции.

Например, воспользовавшись логической схемой решения неравенства, содержащего функции под знаком модуля, получим

$$\frac{|\log_a f_1| - |\log_a f_2|}{a^{\varphi_1} - a^{\varphi_2}} \vee 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_a f_1 - \log_a f_2) \cdot (\log_a f_1 + \log_a f_2)}{a^{\varphi_1} - a^{\varphi_2}} \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{(a-1)(f_1 - f_2) \cdot (f_1 - f_2^{-1})}{\varphi_1 - \varphi_2} \vee 0, \tag{54}$$

$$\text{где ОДЗ: } \begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ f_1 > 0, \\ f_2 > 0. \end{cases}$$

Пример 22. *Решить неравенство*

$$\frac{2\log_{1-3|x|}(42x^2 - 14|x| + 1)}{\log_{1-3|x|}\left(x - \dfrac{5}{6}\right)^2} \leq 1.$$

Решение. Записав неравенство в каноническом виде, представим левую часть полученного неравенства как частное базовых функций:

$$\frac{\log_{1-3|x|}(42x^2 - 14|x| + 1) - \log_{1-3|x|}\left|x - \dfrac{5}{6}\right|}{\log_{1-3|x|}\left|x - \dfrac{5}{6}\right|} \leq 0.$$

Область допустимых значений переменной определяется условиями

$$\begin{cases} 0 < 1 - 3|x| \neq 1, \\ 42x^2 - 14|x| + 1 > 0, \\ 0 < \left|x - \dfrac{5}{6}\right| \neq 1. \end{cases}$$

В этой области рассматриваемое трансцендентное неравенство заменяем эквивалентным ему рациональным алгебраическим:

$$\frac{(42x^2-14|x|+1)-\left|x-\frac{5}{6}\right|}{\left|x-\frac{5}{6}-1\right|}\le 0.$$

Решая его и учитывая ОДЗ, получаем ответ.

Ответ.

$$\left(-\frac{1}{3},\frac{-7-\sqrt{7}}{42}\right)\cup\left[\frac{-15+\sqrt{197}}{84},0\right)\cup\left(0,\frac{13-\sqrt{141}}{84}\right]\cup\left[\frac{13+\sqrt{141}}{84},\frac{1}{3}\right).$$

Пример 23. *Для любого допустимого значения a решить неравенство*

$$\log_{2a}(\log_3 x^2)>1$$

и найти, при каком значении a множество точек x, не являющихся решениями неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

Решение. Взяв в качестве базовой функции разность логарифмических функций и дважды применив метод декомпозиции, получим

$$\log_{2a}(\log_3 x^2)-1>0\Leftrightarrow\log_{2a}(\log_3 x^2)-\log_{2a}(2a)>0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}(2a-1)(\log_3 x^2-2a)>0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}(2a-1)(\log_3 x^2-\log_3 3^{2a})>0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}(2a-1)(x^2-3^{2a})>0\underset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\left(a-\frac{1}{2}\right)(x-3^a)(x+3^a)>0,$$

$$\text{где ОДЗ: }\begin{cases}0<a\ne\frac{1}{2},\\ |x|>1.\end{cases}$$

На КП-плоскости aOx (рис. 183) решение заштриховано (достаточно изобразить множество решений при $x>0$ и воспользоваться симметрией относительно параметрической оси).

Ответ. 1) Если $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, то $x\in(-3^a,-1)\cup(1,3^a)$;

если $a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, то $x\in(-\infty,-3^a)\cup(3^a,+\infty)$.

2) Множество точек x, не являющихся решениями (включая промежуток $|x| \le 1$, не входящий в ОДЗ), образует промежуток $[-3^a, 3^a]$, имеющий конечную длину. Длина этого промежутка равна 6 при $a = 1$, что является *ответом на второй вопрос.*

Пример 24. *Для каждого значения параметра p из интервала* $0 < p < \frac{1}{4}$ *решить неравенство*

$$\log_{x+p} 2 < \log_x 4.$$

Решение. Исходное неравенство определено на множестве

$$M: \begin{cases} 0 < p < \frac{1}{4}, \\ 0 < x \ne 1, \\ 0 < x + p \ne 1, \end{cases}$$

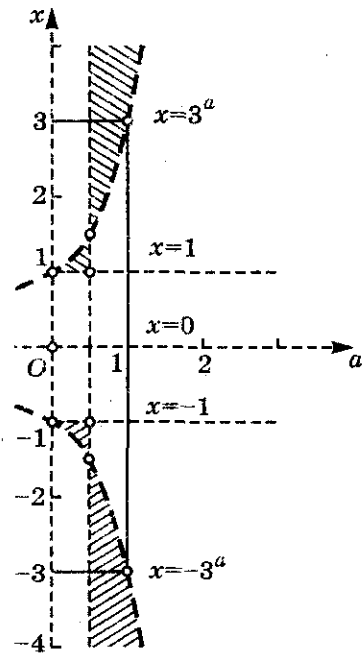


Рис. 183

принадлежащем области допустимых значений переменной x и параметра p. Применяя метод декомпозиции, запишем это неравенство в каноническом виде и, представив левую часть неравенства как произведение двух базовых функций, заменим его эквивалентным на множестве M рациональным алгебраическим неравенством:

$$\log_{x+p} 2 - 2\log_x 2 < 0 \underset{M}{\Leftrightarrow} \log_{(x+p)^2} 2 - \log_x 2 < 0 \underset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{M}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\log_2(x+p)^2} - \frac{1}{\log_2 x} < 0 \underset{M}{\Leftrightarrow} \frac{\log_2 x - \log_2(x+p)^2}{2\log_2(x+p)\log_2 x} < 0 \underset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{M}{\Leftrightarrow} \frac{x-(x+p)^2}{(x+p-1)(x-1)} < 0 \underset{M}{\Leftrightarrow} \frac{x^2-(1-2p)x+p^2}{[x-(1-p)](x-1)} > 0 \underset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{M}{\Leftrightarrow} [x - x_1(p)][x - x_2(p)][x-(1-p)](x-1) > 0,$$

где $x_1(p) = \frac{1}{2} - p - \sqrt{\frac{1}{4} - p}$, $x_2(p) = \frac{1}{2} - p + \sqrt{\frac{1}{4} - p}$, причем $x_1(p) < x_2(p)$ и $x_1(p) = x_2(p)$ при $p = \frac{1}{4}$.

Так как при $0 < p < \dfrac{1}{4}$ имеют место неравенства $0 < x_1(p) < \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4} < x_2(p) < 1 - p < 1$ $(0 < x_1(p) + x_2(p) = 1 - 2p < 1 - p)$, то с помощью метода интервалов получим решение рационального алгебраического неравенства. На КП-плоскости pOx (рис. 184) дана геометрическая интерпретация этого решения.

Ответ. $\left(0, \dfrac{1}{2} - p - \sqrt{\dfrac{1}{4} - p}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2} - p + \sqrt{\dfrac{1}{4} - p}, 1 - p\right) \cup (1, +\infty)$.

Пример 25. *Для каждого значения параметра a найти решения неравенства*

$$x^{\sin x} \log_a x + x^a \log_a \frac{a}{x} < x^{\sin x},$$

удовлетворяющие условию $x < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. На множестве M из области определения допустимых значений переменной x и параметра a, удовлетворяющих условиям

$$M: \begin{cases} 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 < a \neq 1, \end{cases}$$

запишем исходное неравенство в каноническом виде и представим его левую часть как произведение двух базовых функций:

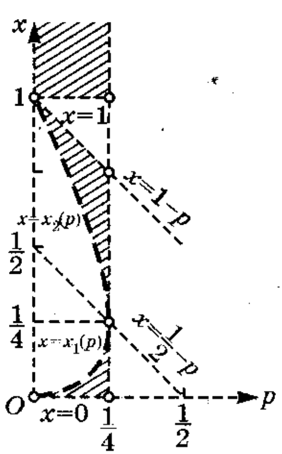


Рис. 184

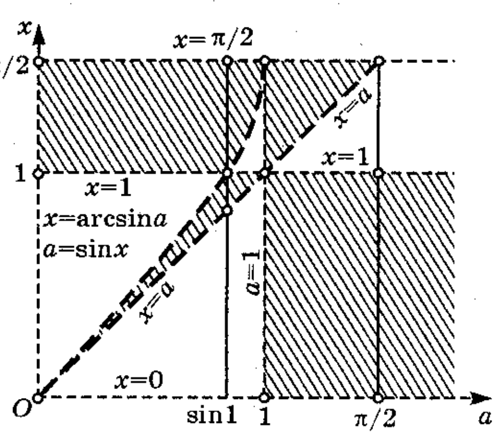


Рис. 185

$$(\log_a x - \log_a a)(x^{\sin x} - x^a) < 0 \underset{M}{\Leftrightarrow} (a-1)(x-a)(x-1)(\sin x - a) < 0 \underset{M}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{M}{\Leftrightarrow} (a-1)(x-a)(x-1)(x - \arcsin a) < 0.$$

На КП-плоскости aOx (рис. 185) решение рассматриваемой задачи изображено в виде заштрихованных областей.

Ответ. Если $0 < a \le \sin 1$, то $x \in (a, \arcsin a) \cup \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$;

если $\sin 1 < a < 1$, то $x \in (a, 1) \cup \left(\arcsin a, \frac{\pi}{2}\right)$;

если $1 < a < \frac{\pi}{2}$, то $x \in (0, 1) \cup \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$;

если $a \ge \frac{\pi}{2}$, то $x \in (0, 1)$.

УПРАЖНЕНИЯ

Установить, сколько корней имеют уравнения:

1. $\log_{\frac{1}{2}} x = \cos x$. Ответ. Один.

2. $\log_{\frac{1}{32}} x = \cos x$. Ответ. Одиннадцать.

Решить уравнения:

3. $x^2 + 1 = \cos x$. Ответ. $x = 0$.

4. $\log_\pi \cos x = x^2$. Ответ. $x = 0$.

5. $\sin x = \lg \sin x$. Ответ. Уравнение корней не имеет.

6. $2^{|x|(x-\pi)^2} = |\cos x|$. Ответ. $x_1 = 0$, $x_1 = \pi$.

7. $\log_a (x+1) = x \, (0 < a \ne 1)$. Ответ. $x = 0$.

8. $2\cos\frac{x}{3} = 2^x + 2^{-x}$. Ответ. $x = 0$.

9. $x^2 + (x+1)\sin\frac{\pi x}{6} = \frac{3+x}{2}$, $-2 \le x \le 0$.

Ответ. $x = -1$.

10. $\log_a(\sin x+\cos x)=2$, где a — положительное число, не равное 1, причем $a^2\le\sqrt{2}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\pm\arccos\dfrac{a^2}{\sqrt{2}}$ $(k=0,\ \pm1,\dots)$.

11. $3^{\sin 2x+2\cos^2 x}+3^{1-\sin 2x+2\sin^2 x}=28$.

Ответ. $x_1=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

12. $2^{1+2\cos 5x}+16^{\sin^2\frac{5x}{2}}=9$.

Ответ. $x_1=\dfrac{2k\pi}{5}+k\pi,\ x_2=\pm\dfrac{2\pi}{15}+\dfrac{2k\pi}{5}$.

13. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$.

Ответ. $x_1=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ x_2=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

14. $\left|\cos\dfrac{x}{2}+2-\dfrac{3}{4\cos\dfrac{x}{2}}\right|^{\sqrt{x^2+3x-10}}=1$.

Ответ. $x_1=2,\ x_2=-5,\ x_3=\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi,\ x_4=-\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi,$

$x_5=2\arccos\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}+4k\pi,\ x_6=-2\arccos\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}+4k\pi\ (k\ne0)$.

15. $|\sin x|^{\operatorname{ctg}2x}=1$. Ответ. $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$.

16. $(\operatorname{tg}x)^{\sin x}=(\operatorname{ctg}x)^{\cos x}$. Ответ. $x=\dfrac{\pi}{4}(4k+1)$.

17. $(0{,}5)^{\cos 2x}-\dfrac{1}{4^{\sin^2 x}}=\dfrac{1}{2}$. Ответ. $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$.

18. $\dfrac{1}{2}+16^{\sin x}=\dfrac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}$.

Ответ. $x_1 = k\pi,\ x_2 = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + k\pi.$

19. $1 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\cos x}}.$ Ответ. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

20. $\lg(\arcsin x) = 0.$ Ответ. $x = \sin 1.$

21. $\arcsin(\lg x) = 0.$ Ответ. $x = 1.$

22. $\arccos(2\log_3 \operatorname{tg} x) = 0.$ Ответ. $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

23. $\arcsin(\lg x^2) + \arcsin \lg x = \dfrac{\pi}{3}.$ Ответ. $x = 10^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}}.$

24. $\operatorname{arctg} 3^x - \operatorname{arctg} 3^{-x} = \dfrac{\pi}{6}.$ Ответ. $x = \dfrac{1}{2}.$

25. $\sqrt[3]{1 + \lg \operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{1 - \lg \operatorname{tg} x} = 2.$ Ответ. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

26. $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = \dfrac{10}{3}.$

Ответ. $x = k\pi \pm \arcsin \dfrac{\lg 3}{\lg(\sqrt{2} + \sqrt{3})}.$

27. $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2.$

Ответ. $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi.$

28. $\log_2 \cos 2x - \log_2 \sin x - \log_2 \cos x = 1.$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{8} + 2k\pi.$

29. $\log_2 \sin x - \log_2 \cos x - \log_2(1 - \operatorname{tg} x) - \log_2(1 + \operatorname{tg} x) = 1.$

Ответ. $x = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 4 + 2k\pi.$

30. $\lg \sin \dfrac{x}{2} = \lg(\cos x - \sin x) + \lg(\cos x + \sin x).$

Ответ. $x_1 = \dfrac{\pi}{5} + 4k\pi,\ x_2 = \dfrac{9\pi}{5} + 4k\pi.$

31. $\lg\sin 2x-\lg\sin x=\lg\cos 2x-\lg\cos x+2\lg 2.$

Ответ. $x=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+2k\pi.$

32. $\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}(\sin 3x+\sin x)=\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}\sin 2x.$

Ответ. $x=-\frac{5\pi}{3}.$

33. $\log_{\frac{9x-x^2-14}{7}}(\sin 3x-\sin x)=\log_{\frac{9x-x^2-14}{7}}\cos 2x.$

Ответ. $x_1=\frac{5\pi}{6},\ x_2=\frac{13\pi}{6}.$

34. $\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos x-\cos 3x)=\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 2x).$

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{3},\ x_2=\frac{5\pi}{3}.$

35. $\log_{\sin x}\frac{4}{3}=-2.$

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x_2=\frac{2\pi}{3}+2k\pi.$

36. $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2.$

Ответ. $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi.$

37. $\log_{\sin x}2\cdot\log_{\sin^2 x}3=1.$

Ответ. $x=(-1)^k\arcsin 2^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}}+k\pi.$

38. $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}}\sin x=\frac{1}{2}.$

Ответ. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{8}+k\pi,\ x_2=(-1)^k\frac{3\pi}{8}+k\pi.$

39. $2\cos^2(\pi\cdot 4^x)-\sin(\pi\cdot 4^{x+1})+\sin(\pi\cdot 4^{x+\frac{1}{2}})-2\cos(\pi\cdot 4^{x+\frac{1}{2}})=0.$

Ответ. $x_1=\log_4 p,\ x_2=\log_4(4p-1)-1,$

$$x_3=\log_4(4p-3)-\frac{3}{2}\ (p=1,2,\ldots).$$

40. $\cos(\pi\cdot 3^x)-2\cos^2(\pi\cdot 3^x)+2\cos(4\pi\cdot 3^x)-\cos(7\pi\cdot 3^x)=\sin(\pi\cdot 3^x)+$

$+2\sin^2(\pi\cdot 3^x)-2\sin(4\pi\cdot 3^x)+2\sin(\pi\cdot 3^{x+1})-\sin(7\pi\cdot 3^x).$

Ответ. $x_1=\log_3\left(-\frac{1}{6}+\frac{2k}{3}\right)$ $(k=1,2,...)$;

$$x_2=\log_3\frac{n}{2}\ (n=1,2,...);\ x_3=\log_3\left(\frac{1}{8}+\frac{m}{2}\right)\ (m=0,1,2,...);$$

41. $\sin(5\pi\cdot 2^x)+\sin(\pi\cdot 2^x)-2\sin(3\pi\cdot 2^x)=8\sin^2(\pi\cdot 2^x)+$

$+2\cos(3\pi\cdot 2^x)-\cos(\pi\cdot 2^x)-\cos(5\pi\cdot 2^x).$

Ответ. $x=\log_2 p$, где $p=1, 2,...$

42. $2\cos^2 x+\log_{\sqrt{3}}(27^{\cos^2 x}-3^{\sin^2 x})=\frac{2}{\log_{12}3}+\log_9(3^{0,5+\cos 2x}-1)^4.$

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi.$

43. $4^{\mathrm{tg}^2 x}-4^{\frac{1}{1+\cos 2x}}\log_{2\sqrt[3]{2}}4=-\log_{\sin x}\frac{1-\cos 2x}{2}.$

Ответ. $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi.$

44. $\frac{|\mathrm{ctg}\,xy|}{\cos^2 xy}=\log_{\frac{1}{3}}(9y^2-18y+10)+2.$

Ответ. $x=(2k+1)\frac{\pi}{4},\ y=1.$

45. $\log_3|\pi x|+\log_{|\pi x|}3=\frac{2}{\sin^2(x+y)-2\sin(x+y)+2}.$

Ответ. $x=\pm\frac{3}{\pi},\ y=(4k+1)\frac{\pi}{2}\mp\frac{3}{\pi}.$

46. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^y=a, \\ \mathrm{arctg}\, x=\frac{\pi}{4}+y \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ. При $a=1$.

47. Найти решения системы

$$\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_y 2 + 1 = 0, \\ \sin x \cdot \cos y = 1 - \cos x \cdot \sin y, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $x + y < 8$.

Ответ. $y_1 = \frac{5\pi}{4} + \sqrt{\frac{25\pi^2}{16} - 1}$, $x_1 = \frac{1}{y_1}$;

$$y_2 = \frac{5\pi}{4} - \sqrt{\frac{25\pi^2}{16} - 1},\ x_2 = \frac{1}{y_2}.$$

48. Найти все решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x^2 + xy}{x + y} = 2 - y, \\ \log_{2^{1-y}} 2^{x^2} = 1 + y. \end{cases}$$

Ответ. $x = 1, y = 0$.

49. Найти решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(1 - y + x^2)\cos 2x = \cos(y - 1 - x^2)\sin x \cos x, \\ \log_{2^x} \dfrac{2^{y+2x}}{2^{1+x^2}} = 2 - x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $y - 1 - x^2 + 2x \geq 0$.

Ответ. $x = 2, y = 1$.

50. При каких действительных значениях m из интервала $-1 < m < 1$ уравнение

$$4^{\sin x} + m \cdot 2^{\sin x} + m^2 - 1 = 0$$

имеет решения? Найти эти решения.

Ответ. $-1 < m \leq \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$; $x = (-1)^k \arcsin \log_2 \frac{-m + \sqrt{4 - 3m^2}}{2} + k\pi$.

51. Исследовать решения уравнения

$$\log_a^2 \sin x + \log_a \sin x - a = 0$$

в зависимости от значений a, где $0 < a \neq 1$.

Ответ. Если $0 < a < 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a^{\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}} + k\pi$;

если $a > 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a^{\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}} + k\pi$.

52. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$\lg^2 \sin x - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 = 0.$$

Ответ.

Если $a < -\sqrt{2}$, или $a \geq \sqrt{2}$, то $x = k\pi + (-1)^k \arcsin 10^{a-\sqrt{2(a^2-1)}}$;

если $-\sqrt{2} \leq a \leq -1$, то $x_{1,2} = k\pi + (-1)^k \arcsin 10^{a\pm\sqrt{2(a^2-1)}}$;

если $-1 < a < \sqrt{2}$, то корней нет.

53. Для каждого действительного α решить уравнение

$$\sqrt{1+|\lg\ \mathrm{tg}\, x|} - \sqrt{|\lg \mathrm{tg}\, x|} = \sin\alpha.$$

Ответ. Если $2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ или $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi$, то

$$x_{1,2} = \mathrm{arctg}\, 10^{\pm\frac{1}{4}\cos^2\alpha\, \mathrm{ctg}^2\alpha} + n\pi;$$

если $\alpha = k\pi$, то $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots;\ n = 0, \pm 1, \ldots)$;

при всех остальных α уравнение не имеет корней.

54. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$\log^2_{\frac{1}{2}} \sin x = 1 - a.$$

Ответ. Если $a \leq 1$, то $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-a}} + k\pi$;

если $a > 1$, то корней нет.

55. Для каждого действительного числа m и $0 < a \neq 1$ решить уравнение

$$\log^2_a \cos x + |\log_a \cos x| + m = 0.$$

Ответ. Если $m > 0$, то уравнение корней не имеет;

если $m = 0$, то при $0 < a \neq 1$ $x = 2k\pi$;

если $m < 0$, то при $0 < a < 1$

$$x = \pm \arccos a^{\frac{-1+\sqrt{1-4m}}{2}} + 2k\pi,$$

а при $a > 1$

$$x = \pm \arccos a^{\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2}} + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

56. Исследовать, при каких действительных значениях параметров m и $0 < a \neq 1$ уравнение

$$4\log_a^2 \sin x+(m-2)\log_a \sin x+(m-5)=0$$
имеет корни, и найти эти корни.

Ответ. Если $m<5$, то при $0<a<1$ $x=(-1)^k \arcsin a^{t_2}+k\pi$,

а при $a>1$ $x=(-1)^k \arcsin a^{t_1}+k\pi$;

если $m=5$, то при $0<a\neq 1$ $x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$x_2=(-1)^k \arcsin a^{-\frac{3}{4}}+k\pi$;

если $5<m\le 6$ или $14\le m<+\infty$, то при $0<a<1$ корней нет,

а при $a>1$ $x_{1,2}=(-1)^k \arcsin a^{t_{1,2}}+k\pi$;

при всех остальных значениях m уравнение корней не имеет;

$t_{1,2}$ — корни уравнения $4t^2+(m-2)t+(m-5)=0$.

Решить неравенства:

57. $\log_{\frac{1}{2}} \sin x>1,\ 0<x<\pi$.

Ответ. $0<x<\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}<x<\pi$.

58. $\log_{\frac{1}{2}} \sin x>3,\ 0\le x\le 2\pi$.

Ответ. $0<x<\arcsin\frac{1}{8},\ \pi-\arcsin\frac{1}{8}<x<\pi$.

59. $\log_2 \cos x>\log_2 \operatorname{tg} x,\ 0\le x\le \pi$.

Ответ. $0<x<\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

60. $\log_{\cos x} \sin x<1$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

61. $\log_{\operatorname{tg} x} \frac{\sin x}{2}<2$.

Ответ. $2k\pi<x<2k\pi+\arcsin(\sqrt{2}-1);\ 2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$.

62. $\log_{2\sin x} \operatorname{ctg} x>-\frac{1}{2}$.

Ответ. $2k\pi+\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}$.

63. $\log_{\sin x} \operatorname{tg} x < 2\log_{\operatorname{tg} x} \sin x + 1.$

Ответ. $2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ 2k\pi + \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

64. $\log_{2\sin x}(2\cos x) + 2\log_{2\cos x}(2\sin x) > 3.$

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

65. $\log_{2\sin\frac{x}{2}} 16 + \log_2 \sin\frac{x}{2} \le 3.$

Ответ. $4k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 4k\pi; \frac{5\pi}{3} + 4k\pi < x < 2\pi + 4k\pi.$

66. $\log_{\frac{1}{2}}(\sin 4x + 2) + \log_2 5 \ge 2 - \log_{\frac{1}{2}} \sin 4x.$

Ответ. $\frac{k\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2};\ \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \le x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$

67. $4\log_{16}\cos 2x + 2\log_4 \sin x + \log_2 \cos x + 3 < 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{4}.$

Ответ. $0 < x < \frac{\pi}{24},\ \frac{5\pi}{24} < x < \frac{\pi}{4}.$

68. $\log_5 \sin x > \log_{125}(3\sin x - 2).$

Ответ. $\arcsin\frac{2}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2k\pi.$

69. $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(\sin x + 2\sqrt{2}\cos x)] > 0.$

Ответ. $\arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi - \varphi < x < \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi - \varphi,\ \varphi = \arccos\frac{1}{3}.$

70. $\log_{\sin x + \sqrt{3}\cos x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3\right) \ge 0.$

Ответ. $-\frac{\pi}{6} < x \le 1;\ \frac{\pi}{2} < x < 2;\ -\frac{\pi}{6} + 2p\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2p\pi\ (p = \pm 1, \ldots).$

71. $\sin|\lg x| + \cos|\lg x| > \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Ответ. $10^{2p\pi - \frac{\pi}{12}} < x < 10^{2p\pi + \frac{7\pi}{12}};\ 10^{-2p\pi - \frac{7\pi}{12}} < x < 10^{-2p\pi + \frac{\pi}{12}};$

$10^{-\frac{7\pi}{12}} < x < 10^{\frac{7\pi}{12}}\ (p = 1, 2, 3, \ldots).$

72. $x^{\lg \sin x} \geq 1 \ (x > 0)$.

Ответ. $0 < x \leq 1,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2p\pi \ (p = 0, 1, 2, \ldots)$.

73. $2^{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} x - 1}} < 1$.

Ответ. $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{2} + k\pi < x \leq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

74. $\log_{|\sin x|}(x^2 - 8x + 23) > \dfrac{3}{\log_2 |\sin x|}$.

Ответ. $3 < x < \pi;\ \pi < x < \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2} < x < 5$.

75. $\log_a \cos x > 0$, где $a = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{tg} x$.

Ответ. $2k\pi + \dfrac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}$.

76. $\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}} \sqrt{1 + 2\cos 2x} < 1$.

Ответ. $-\arccos \dfrac{\sqrt{6}}{4} + 2k\pi < x < -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi;$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \arccos \frac{\sqrt{6}}{4} + 2k\pi.$$

77. $\log_{2\sin x} \sqrt{1 + 2\cos 2x} < \dfrac{1}{2}$.

Ответ. $2k\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi;\ 2k\pi + \dfrac{5\pi}{6} < x < \pi + 2k\pi;$

$$2k\pi + \arcsin \frac{\sqrt{13} - 1}{4} < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi;$$

$$(2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} < x < (2k+1)\pi - \arcsin \frac{\sqrt{13} - 1}{4}.$$

78. $\log_{\operatorname{ctg} x} \dfrac{1 + \sin x}{1 - \cos x} < 1$.

Ответ. $-\pi + 2k\pi < x < -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

79. $\left|3^{\operatorname{tg} \pi x} - 3^{1 - \operatorname{tg} \pi x}\right| \geq 2$.

Ответ. $k+\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}+k,\ \frac{1}{2}+k < x \le k+1.$

80. $(\log_{\sin x} 2)^2 < \log_{\sin x}(4\sin^3 x).$

Ответ. $2k\pi < x < \frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi < x < (2k+1)\pi.$

81. $\log_{\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}} \frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{2} \le 2.$

Ответ. $x = k\pi.$

82. $(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) \ge 1.$

Ответ. $x = 2.$

83. $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}[\log_{\operatorname{tg} x}(2+4\cos^2 x) - 2] \ge 0.$

Ответ. $\frac{\pi}{4}+k\pi < x \le \frac{\pi}{3}+k\pi.$

84. Для каждых допустимых действительных чисел α и a решить неравенство

$$\operatorname{tg} x \cdot \log_a \alpha > \operatorname{ctg} x.$$

Ответ. Если $a > 1$ и $0 < \alpha \le 1$ или $0 < a < 1$ и $\alpha \ge 1$, то

$$\frac{\pi}{2}+k\pi < x < (k+1)\pi;$$

если $a > 1$ и $\alpha > 1$ или $0 < a < 1$ и $\alpha < 1$, то

$$k\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\log_a \alpha}} < x < k\pi,$$

$$k\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\log_a \alpha}} < x < \frac{\pi}{2}+k\pi\ (k = 0, \pm 1, ...).$$

85. При каких действительных значениях параметра a неравенство

$$9^{\operatorname{tg} x} + 2(a-2)\cdot 3^{\operatorname{tg} x} + a^2 > 1$$

выполняется для всех x из сегмента $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$?

Ответ. $a < -3-\sqrt{13};\ a > \sqrt{5}-1.$

86. Найти все значения a, при которых неравенство

$$(a^2+a-2)\log^2_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x - (a+5)\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x - 2 \le 0$$

будет выполнено для всех x из отрезка $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}.$

Ответ. $-3 \le a \le 3.$

ГЛАВА VI

ПЛАНИМЕТРИЯ

В данной главе мы рассмотрим некоторые геометрические задачи на плоскости. В § 1 содержатся задачи на вычисление, в § 2 — задачи на построение и доказательство. Отметим, что такое деление несколько условно: задача на вычисление часто является и задачей на доказательство, так как требует обоснования; задача на построение всегда связана с доказательством, которое иногда представляет существенную часть решения. Во многих задачах сочетается построение, измерение и вычисление.

§ 1. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

Среди множества различных задач по планиметрии преобладают задачи, в которых требуется вычислить тот или иной элемент геометрической фигуры. В данном параграфе мы подробно рассмотрим зависимости между элементами треугольника и четырехугольника. Перечислим главные свойства элементов этих фигур. Известные из школьного курса геометрии теоремы мы приведем без доказательства. Будут рассмотрены также основные задачи на решение прямоугольных и косоугольных треугольников. В заключение параграфа напомним наиболее важные геометрические свойства окружности, круга и их частей. В качестве примеров рассмотрим в основном задачи, предлагавшиеся на конкурсных экзаменах по математике в МГУ.

1. Элементы треугольника и их свойства

Решение многих задач по геометрии основано, как правило, на свойствах элементов геометрических фигур, в частности треугольника. Можно рассматривать различные элементы треугольника: стороны, углы, высоты, биссектрисы, медианы, площади и т. д. Стороны и углы треугольника будем называть его ***основными элементами***. Внутренние углы (и их величины) будем обозначать буквами A, B и C, а противолежащие им стороны (и длины сторон) — буквами a, b и c соответственно.

Условия существования треугольника

$$\begin{gathered} 0<a<b+c,\ 0<b<a+c,\ 0<c<a+b, \\ A>0,\ B>0,\ C>0,\ A+B+C=180^\circ \end{gathered} \tag{1}$$

определяют допустимые значения основных элементов.

Признаки равенства треугольников следуют из равенства некоторых основных элементов этих треугольников. А именно, два треугольника равны, если выполнено одно из следующих условий:

1^0. Два угла и заключенная между ними сторона одного треугольника равны двум углам и заключенной между ними стороне другого треугольника.

2^0. Две стороны и заключенный между ними угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и заключенному между ними углу другого треугольника.

3^0. Три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.

4^0. Два угла и противолежащая одному из них сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и противолежащей одному из них стороне другого треугольника.

Треугольник, один из углов которого прямой, называется ***прямоугольным.*** Сторона, противолежащая прямому углу, называется ***гипотенузой,*** а две другие стороны — ***катетами.***

Сформулируем ***признаки равенства прямоугольных треугольников.***

Два прямоугольных треугольника равны, если выполнено одно из следующих условий:

1^0. Катеты одного треугольника равны катетам другого треугольника.

2°. Катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника равны катету и прилежащему к нему углу другого треугольника.

3^0. Катет и гипотенуза одного треугольника равны катету и гипотенузе другого треугольника.

4^0. Гипотенуза и острый угол одного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого треугольника.

$5.^0$ Катет и противолежащий ему острый угол одного треугольника равны катету и противолежащему ему острому углу другого треугольника.

Подобными треугольниками называют такие треугольники, у которых соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. Отношение сходственных сторон двух подобных треугольников называют ***коэффициентом подобия*** (и обозначают буквой μ).

Сформулируем ***признаки подобия треугольников.***

Два треугольника подобны, если выполнено одно из следующих условий:

1^0. Два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого.

2^0. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между этими сторонами, равны.

3^0. Три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

Из этих признаков вытекают ***признаки подобия прямоугольных треугольников.***

Два прямоугольных треугольника подобны, если выполнено одно из следующих условий:

1^0. Острый угол одного треугольника равен острому углу другого.

2^0. Катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого.

3^0. Катеты и гипотенуза одного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого.

Основные неравенства, связывающие стороны и углы треугольников, устанавливают следующие теоремы.

Во всяком треугольнике против большей стороны лежит и больший угол. Обратно: *против большего угла лежит и бóльшая сторона.*

Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.

Приведем определения и основные свойства ряда других элементов треугольника.

Отрезок, равный сумме сторон треугольника, называют его ***периметром*** и обозначают $2p$:

$$a+b+c=2p. \tag{2}$$

Отрезок прямой, проходящий через вершину треугольника перпендикулярно противоположной стороне и заключенный между вершиной и точкой пересечения с этой стороной (или ее продолжением) называют ***высотой*** треугольника. Сторону, на которую опущена высота, называют ***основанием.***

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту:

$$S=\frac{1}{2}ah_a,\ S=\frac{1}{2}bh_b,\ S=\frac{1}{2}ch_c, \tag{3}$$

где через h_a, h_b и h_c обозначены высоты треугольника, опущенные соответственно на стороны a, b и c.

Отрезок прямой, делящий угол треугольника пополам и заключенный между вершиной и точкой пересечения этой прямой с противоположной стороной, называют ***биссектрисой*** треугольника. Биссектрисы треугольника, соответствующие его углам A, B и C, будем обозначать через l_a, l_b и l_c.

Отрезок, заключенный между вершиной треугольника и серединой противоположной стороны, называют ***медианой*** треугольника. Медианы треугольника, соответствующие его вершинам A, B и C, будем обозначать через m_a, m_b и m_c.

Перпендикуляры, проведенные через середины сторон треугольника, называют ***медиатрисами*** сторон треугольника (или ***серединными перпендикулярами***).

Окружность называют ***описанной около треугольника,*** если она проходит через три его вершины.

Имеет место теорема: *около всякого треугольника всегда можно описать окружность и притом только одну.* Отсюда следует, что *три медиатрисы сторон треугольника пересекаются в одной точке — центре* *описанной около треугольника окружности.* Будем обозначать центр этой окружности через O, а радиус — через R.

Окружность, касающуюся всех сторон треугольника, называют ***вписанной в треугольник***. Окружность, касающуюся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, называют ***вневписанной***.

Справедлива следующая теорема: *всегда существует одна и только одна окружность, вписанная в треугольник, и три вневписанные окружности.*

Из этой теоремы следует, что *три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке — центре окружности, вписанной в треугольник.* Эта точка (I) называется ***инцентром*** треугольника. Будем обозначать радиус вписанной в треугольник окружности через r, радиусы вневписанных окружностей через r_a, r_b и r_c, а их центры — соответственно через I_a, I_b и I_c.

Биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Биссектриса угла треугольника и биссектрисы двух внешних не смежных с ним углов пересекаются в одной точке.

Остановимся на свойствах высот и медиан треугольника. Имеют место следующие теоремы.

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Точку пересечения высот называют ***ортоцентром*** треугольника.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении 2 : 1 (считая от вершины до противоположной стороны).

Точку пересечения медиан треугольника называют его ***центром тяжести***. Центр тяжести .треугольника отстоит от вершины вдвое дальше, чем от середины основания.

Треугольник, две стороны которого равны, называется ***равнобедренным***. Равные стороны называют ***боковыми сторонами***, третью сторону — ***основанием***.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Обратно: *если углы при основании равны, то треугольник равнобедренный.*

В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, исходящие из вершины, противолежащей основанию, равны между собой.

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон треугольника.

Свойства средней линии характеризует следующая теорема: *средняя линия треугольника параллельна основанию и равна половине основания.*

Мы коснулись свойств различных линейных элементов треугольника: сторон, периметра, высот, медиан, биссектрис, радиусов описанной, вписанной и вневписанных окружностей, средней линии.

Отношение любых сходственных линейных элементов подобных треугольников постоянно и равно коэффициенту подобия.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{p}{p'}=\frac{h_i}{h_i'}=\frac{l_i}{l_i'}=\frac{m_i}{m_i'}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\frac{r_i}{r_i'}=\mu. \qquad (4)$$

Отношение любых сходственных квадратичных элементов подобных треугольников (например, площадей) *постоянно и равно квадрату коэффициента подобия* (т. е. μ^2).

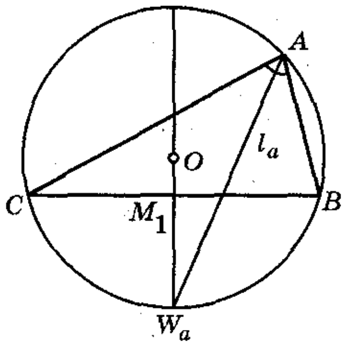


Рис. 186

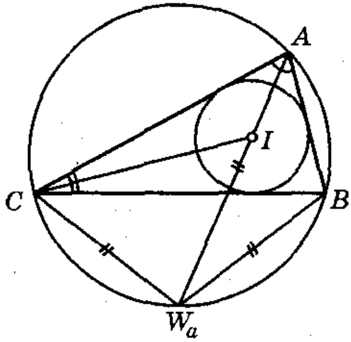


Рис. 187

В заключение рассмотрим три теоремы о некоторых свойствах треугольника.

Точку пересечения медиатрисы стороны треугольника ABC и биссектрисы угла, лежащего против этой стороны, условимся обозначать через W_i, где $i = a, b, c$.

Теорема 1. *Медиатриса стороны треугольника и биссектриса его угла, противолежащего этой стороне, пересекаются в точке, лежащей на описанной около треугольника окружности.*

Доказательство. Пусть биссектриса l_a пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W_a (рис. 186). Эта точка делит дугу BC пополам.

Центр описанной около треугольника окружности лежит на медиатрисе его стороны, значит, согласно свойству диаметра, перпендикулярного хорде, медиатриса стороны BC делит и дугу BC пополам, т. е. проходит через точку W_a.

Имеет место и обратная теорема: *диаметр описанной около треугольника окружности, проходящий через точку пересечения биссектрисы угла треугольника с окружностью, принадлежит медиатрисе стороны треугольника, лежащей против того же угла.*

Теорема 2. *Расстояния от точки W_i до концов соответствующей стороны треугольника равны расстоянию от этой точки до инцентра I треугольника.*

Доказательство. Действительно (рис. 187),

$$\angle W_a IC = \angle ICA + \angle CAI = \frac{1}{2}(C + A),$$

$$\angle ICW_a = \frac{1}{2}C + \angle BCW_a = \frac{1}{2}(C + A),$$

где A и C — углы треугольника ABC.

Отсюда $\angle W_a IC = \angle ICW_a$, следовательно,

$$W_a I = W_a C = W_a B.$$

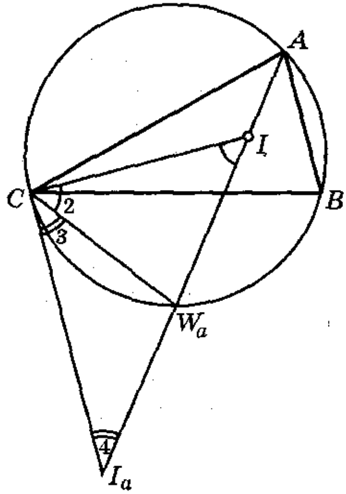


Рис. 188

Теорема 3. *Расстояния между центрами вписанной в треугольник и вневписанных окружностей делятся пополам окружностью, описанной около треугольника* (рис. 188).

Доказательство. Пусть I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны a треугольника ABC. Соединим точки W_a и C. Согласно теореме 2, $W_a I = W_a C$, откуда $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$. Так как $IC \perp I_a C$, то $\angle 3 = 90° - \alpha$ и $\angle 4 = 90° - \alpha$.

Значит, $\angle 3 = \angle 4$, тогда $W_a C = W_a I_a$ и, наконец, $W_a I = W_a C = W_a I_a$, что и требовалось доказать.

2. Основные соотношения между элементами прямоугольного треугольника

Пусть в треугольнике ABC один из его углов, например угол C, — прямой.

Соотношение между гипотенузой и катетами устанавливает ***теорема Пифагора.*** *Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:*

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{5}$$

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

С помощью тригонометрических функций устанавливаются зависимости между сторонами и углами прямоугольного треугольника:

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c},\ \operatorname{tg}A=\frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}A=\frac{b}{a},$$
$$\sin B=\frac{b}{c},\ \cos B=\frac{a}{c},\ \operatorname{tg}B=\frac{b}{a},\ \operatorname{ctg}B=\frac{a}{b}. \qquad (6)$$

Будем обозначать проекции катетов a и b на гипотенузу c соответственно через a_c и b_c.

В школьном курсе геометрии получен ряд соотношений, в которые входят указанные проекции:

1^0. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу, т. е.

$$h_c^2=a_c\cdot b_c. \qquad (7)$$

2^0. В прямоугольном треугольнике катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу, т. е.

$$a^2=c\cdot a_c,\ b^2=c\cdot b_c. \qquad (8)$$

3^0. В прямоугольном треугольнике квадраты катетов относятся как их проекции на гипотенузу, т. е.

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a_c}{b_c}. \qquad (9)$$

Решение многих задач планиметрии сводится к решению прямоугольных треугольников. Поэтому мы остановимся на этом вопросе подробнее.

Решить треугольник — это значит по значениям некоторых заданных элементов найти остальные. Нас будут интересовать в первую очередь соотношения между основными элементами треугольника. В прямоугольном треугольнике один из основных элементов всегда задан — это прямой угол.

Поэтому для решения прямоугольного треугольника достаточно задать лишь два основных элемента: две стороны или угол и сторону. Таким образом, мы имеем четыре основные задачи на вычисление основных элементов прямоугольного треугольника по заданной допустимой системе значений двух других его элементов.

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза и один из острых углов* (например, угол A). *Вычислить катеты и другой острый угол B.*

Решение.

$$a=c\sin A,\ b=c\cos A,\ B=90^\circ-A.$$

Задача 2. *В прямоугольном треугольнике даны катет и один из острых углов. Вычислить другой катет, другой острый угол и гипотенузу.*

Пусть, например, известны катет a и острый угол A; требуется найти катет b, острый угол B и гипотенузу c.

Решение.

$$B = 90° - A,\ b = a \operatorname{ctg} A,\ c = \frac{a}{\sin A}.$$

Задача 3. *В прямоугольном треугольнике даны один из катетов* (например, *a*) *и гипотенуза c. Вычислить другой катет b и острые углы этого треугольника.*

Решение. Так как $\sin A = \frac{a}{c}$, то $A = \arcsin\frac{a}{c}$; $B = 90° - A$; по теореме Пифагора $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Задача 4. *В прямоугольном треугольнике даны катеты a и b. Вычислить острые углы и гипотенузу треугольника.*

Решение. Так как $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, то $A = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$; $B = 90° - A$; по теореме Пифагора $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Замечание. При рассмотрении четырех основных задач мы привели один из возможных вариантов их решения. Эти задачи допускают и иное решение.

3. Соотношения между элементами косоугольного треугольника

Теорема 4. *Площадь любого треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла, заключенного между ними:*

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,\ S = \frac{1}{2}ac\sin B,\ S = \frac{1}{2}bc\sin A. \qquad (10)$$

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC с вершиной C в начале координат и стороной CA, направленной вдоль оси Ox (рис. 189).

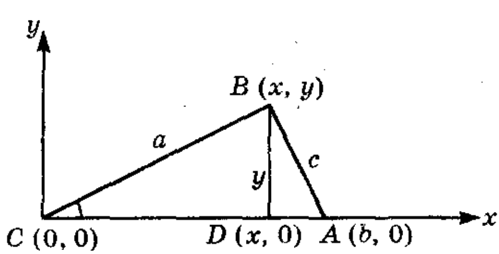


Рис. 189

Проведем $BD \perp CA$. Тогда для любого угла C по определению синуса имеем

$$\frac{y}{a} = \sin C,$$

откуда

$$y = a \sin C.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} by = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются две остальные формулы.

Теорема 5 (***теорема синусов***). *Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{11}$$

Доказательство. Площадь любого треугольника можно вычислить по формулам (10).

Из условия равенства правых частей первой и второй формул имеем соотношение

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

а из условия равенства правых частей второй и третьей формул — соотношение

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

откуда следует доказываемая теорема.

Теорема синусов позволяет представить формулу для площади треугольника в несколько ином виде. Подставив выражение

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

в первую из формул (10), получим

$$S = a^2 \frac{\sin B \sin C}{2 \sin A}. \tag{12}$$

Теорема 6 (***теорема косинусов***). *Квадрат стороны любого треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения их на косинус угла, заключенного между ними:*

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Докажем, например, первую из этих формул. Рассмотрим треугольник ABC с вершиной C в начале координат и со стороной CA, направленной вдоль оси Ox (см. рис. 189). Пусть $D\,(x,\,0)$ — проекция вершины $B\,(x,\,y)$ на ось Ox.

Из прямоугольных треугольников ADB и CDB по теореме Пифагора получим

$$c^2 = (b-x)^2 + y^2,$$

откуда

$$c^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2,$$

и

$$y^2 = a^2 - x^2,$$

причем последние соотношения имеют место для любых углов A, B и C данного треугольника.

Следовательно,

$$c^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2 - x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{x}{a} = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

так как $\cos C = \dfrac{x}{a}$ по определению косинуса любого угла.

Остальные две формулы доказываются аналогично.

Замечание 1. Для учащихся, знакомых с понятием скалярного произведения векторов, приведем еще одно доказательство теоремы косинусов.

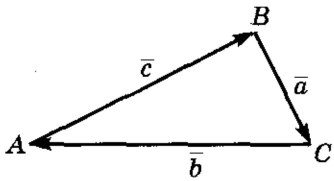


Рис. 190

Рассмотрим векторы $\bar{a} = \overline{BC}$, $\bar{b} = \overline{CA}$ и $\bar{c} = \overline{AB}$ (рис. 190). Их сумма

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}.$$

Взяв скалярный квадрат, получим

$$\bar{a}^2 = (\bar{b} + \bar{c})^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\widehat{\bar{b},\bar{c}}).$$

Так как косинус угла между векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$ связан с косинусом угла между сторонами b и c треугольника соотношением

$$\cos\widehat{(\bar{b},\ \bar{c})} = -\cos A,$$

то

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

и аналогично

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается ***теорема косинусов для произвольного многоугольника***: *квадрат стороны n-угольника* ($n \geq 3$) *равен сумме квадратов остальных $n-1$ сторон без удвоенных произведений этих сторон, взятых попарно, на косинусы углов между ними.*

З а м е ч а н и е 2. Теорему синусов можно получить как следствие теоремы косинусов. В самом деле, по теореме косинусов

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Поэтому

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)} =$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{[(b+c)^2-a^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]} =$$

$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = \frac{a}{K},$$

где

$$K = \frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}} \qquad (14)$$

и представляет собой симметрическую функцию от a, b и c.

Аналогично имеем

$$\sin B = \frac{b}{K},\ \sin C = \frac{c}{K}.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=K, \tag{15}$$

т. е. отношение стороны треугольника к синусу угла, противолежащего этой стороне, есть величина постоянная. Мы получили выражение этой постоянной величины через стороны треугольника.

Формула Герона. Подставляя выражение

$$\sin C=\frac{c}{K}$$

в формулу для площади треугольника

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

получим

$$S=\frac{1}{2}\frac{abc}{K}.$$

Воспользовавшись выражением (14) для K, имеем

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

Так как

$$a+b+c=2p,$$
$$b+c-a=(a+b+c)-2a=2(p-a),$$
$$c+a-b=(a+b+c)-2b=2(p-b),$$
$$a+b-c=(a+b+c)-2c=2(p-c),$$

то

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)},$$

или

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{16}$$

Полученная формула выражает площадь любого треугольника через его стороны и называется ***формулой Герона***.

Замечание. Из формулы Герона следует, что площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон. Действительно, при замене в этой формуле a, b и c на ta, tb и tc подкоренное выражение будет содержать множитель t^4, а S — множитель t^2.

В школьном курсе геометрии доказывается следующая лемма. *Сторона любого треугольника равна произведению диаметра описанной около треугольника окружности на синус противолежащего угла:*

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C. \tag{17}$$

Эта лемма позволяет дать такую формулировку теоремы синусов:

Отношение сторон всякого треугольника к синусам противолежащих углов постоянно и равно диаметру описанной около этого треугольника окружности:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \tag{18}$$

Подставляя в формулу $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ выражения

$$a = 2R \sin A \text{ и } b = 2R \sin B,$$

получим для площади треугольника следующую формулу:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C. \tag{19}$$

Вычисление высот треугольника. Из прямоугольных треугольников AHB и AHC (рис. 191) имеем

$$h_a = c \sin B = b \sin C.$$

Так как $c = 2R \sin C$, а $b = 2R \sin B$, то

$$h_a = 2R \sin B \sin C. \tag{20}$$

Аналогично,

$$h_b = 2R \sin C \sin A, \tag{21}$$

$$h_c = 2R \sin A \sin B. \tag{22}$$

Вычисление биссектрис треугольника. Из треугольника BAD (рис. 192) по теореме синусов имеем

$$\frac{l_a}{\sin B} = \frac{c}{\sin \angle ADB}.$$

Так как

$$\angle ADB = 180° - B - \frac{A}{2} = 180° - B - \frac{180° - (B + C)}{2} = 90° - \frac{B - C}{2},$$

то

$$l_a = \frac{c \sin B}{\cos \frac{B - C}{2}}.$$

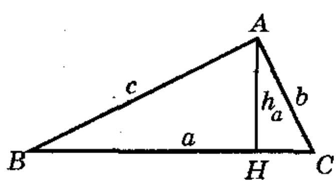


Рис. 191

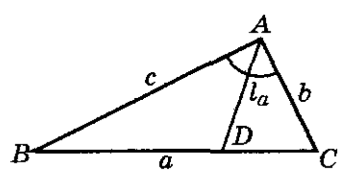


Рис. 192

Отсюда, используя приведенную выше лемму, получим

$$l_a = 2R\frac{\sin B \sin C}{\cos\dfrac{B-C}{2}}. \tag{23}$$

Аналогично,

$$l_b = 2R\frac{\sin C \sin A}{\cos\dfrac{C-A}{2}}, \tag{24}$$

$$l_c = 2R\frac{\sin A \sin B}{\cos\dfrac{A-B}{2}}. \tag{25}$$

Вычисление медиан треугольника. В треугольнике ABC продолжим медиану AM на расстояние MA', равное AM (рис. 193). Полученный четырехугольник $A'BAC$ — параллелограмм. Следовательно, сумма квадратов его сторон равна сумме квадратов диагоналей:

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2,$$

откуда

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Аналогично,

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

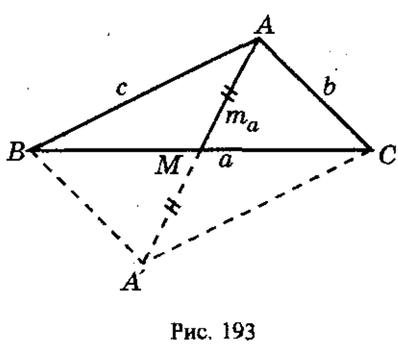


Рис. 193

Так как $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, то

$$m_a = R\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}, \tag{26}$$

$$m_b = R\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 C - \sin^2 B}, \tag{27}$$

$$m_c = R\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C}. \tag{28}$$

Вычисление радиуса описанной окружности. Используя теорему синусов, выразим радиус описанной около треугольника окружности:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}. \tag{29}$$

Отсюда

$$R = \frac{a+b+c}{2(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

или, учитывая, что

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

получим

$$R = \frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}. \tag{30}$$

Воспользовавшись формулой

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,$$

имеем

$$\sin C = \frac{2S}{ab},$$

откуда находим

$$R = \frac{abc}{4S}. \tag{31}$$

Следовательно, *радиус описанной около треугольника окружности равен отношению произведения всех сторон к учетверенной площади треугольника.*

Воспользовавшись формулой Герона, получаем выражение радиуса описанной около треугольника окружности через стороны этого треугольника:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}. \tag{32}$$

Из соотношений (20)–(28) получим формулы, выражающие радиус описанной около треугольника окружности через высоты h_a, h_b, h_c, биссектрисы l_a, l_b, l_c и медианы m_a, m_b, m_c этого треугольника:

$$R=\frac{h_a}{2\sin B\sin C}=\frac{h_b}{2\sin C\sin A}=\frac{h_c}{2\sin A\sin B};\tag{33}$$

$$R=\frac{l_a\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin B\sin C}=\frac{l_b\cos\frac{C-A}{2}}{2\sin C\sin A}=\frac{l_c\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin A\sin B};\tag{34}$$

$$R=\frac{m_a}{\sqrt{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}}=\frac{m_b}{\sqrt{2\sin^2 A+2\sin^2 C-\sin^2 B}}=$$

$$=\frac{m_c}{\sqrt{2\sin^2 A+2\sin^2 B-\sin^2 C}}.\tag{35}$$

Вычисление радиуса вписанной окружности. Соединим инцентр I треугольника ABC с каждой из его вершин и рассмотрим треугольники BIC, AIC и AIB. Обозначим площади этих треугольников соответственно через S_1, S_2 и S_3. Имеем

$$S_1=\frac{1}{2}ar,\ S_2=\frac{1}{2}br,\ S_3=\frac{1}{2}cr.$$

Так как $S=S_1+S_2+S_3$, то

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{a+b+c}{2}\cdot r,$$

или

$$S=pr,\tag{36}$$

откуда

$$r=\frac{S}{p}.\tag{37}$$

Следовательно, *радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади треугольника к его полупериметру.*

Воспользовавшись формулой Герона, получим выражение искомого радиуса через стороны треугольника:

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.\tag{38}$$

Используя соотношения (19), (30) и (36), а также тригонометрические тождества

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},\ \sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2},\ \sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

получим формулу, связывающую радиусы вписанной и описанной окружностей:

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \tag{39}$$

Воспользовавшись соотношением (39) и формулами (33)–(35), найдем выражения радиуса вписанной в треугольник окружности через высоты h_a, h_b, h_c, биссектрисы l_a, l_b, l_c и медианы m_a, m_b, m_c этого треугольника:

$$r = h_a\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = h_b\frac{\sin\frac{B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}} = h_c\frac{\sin\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}; \tag{40}$$

$$r = l_a\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = l_b\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} = l_c\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}; \tag{41}$$

$$r = m_a\frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}} = m_b\frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 C - \sin^2 B}} =$$

$$= m_c\frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sqrt{2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C}}. \tag{42}$$

Вычисление радиусов вневписанных окружностей. Пусть I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC (рис. 194). Соединим I_a с каждой из вершин треугольника ABC и рассмотрим треугольники I_aAC, I_aAB и I_aBC. Обозначим площади этих треугольников соответственно через S_1, S_2 и S_3. Высоты указанных треугольников равны радиусу r_a вневписанной окружности. Значит,

$$S_1 = \frac{1}{2}br_a,\ S_2 = \frac{1}{2}cr_a,\ S_3 = \frac{1}{2}ar_a.$$

Отсюда для площади S треугольника ABC получаем следующее выражение:

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = \frac{1}{2}br_a + \frac{1}{2}cr_a - \frac{1}{2}ar_a =$$

$$= \frac{1}{2}(b+c-a)r_a = \frac{1}{2}\cdot 2(p-a)r_a = (p-a)r_a.$$

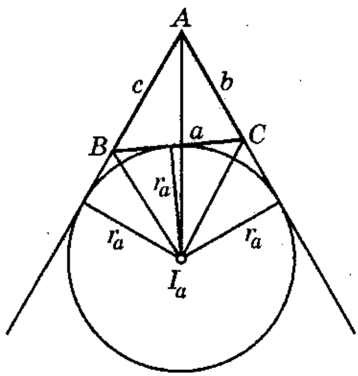


Рис. 194

Таким образом,

$$r_a = \frac{S}{p-a}. \tag{43}$$

Аналогично,

$$r_b = \frac{S}{p-b}, \tag{44}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c}. \tag{45}$$

<u>Формула, связывающая радиусы вневписанных окружностей с радиусом вписанной окружности</u>. Сложив равенства

$$\frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S},\ \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S},\ \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S},$$

находим

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p}{S}.$$

Так как $\frac{p}{S} = \frac{1}{r}$, то получим

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}. \tag{46}$$

Значит, *сумма величин, обратных радиусам вневписанных окружностей, равна величине, обратной радиусу вписанной в треугольник окружности.*

Выражение тангенса половинного угла через стороны треугольника и радиус вписанной окружности. Обозначим через x, y и z длины отрезков, на которые стороны треугольника ABC (рис. 195) делятся точками касания окружности, вписанной в этот треугольник. В силу свойства касательных к окружности имеем

$$a=y+z,\ \ b=z+x,\ \ c=x+y. \tag{47}$$

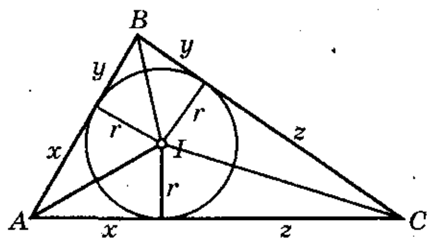


Рис. 195

Сложив эти равенства, получим

$$x+y+z=p\ .$$

Теперь, вычитая последовательно каждое из равенств (47), находим

$$x=p-a,\ y=p-b,\ z=p-c.$$

Для тангенсов половинных углов получаем следующие выражения:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{x},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{y},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{z},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}. \tag{48}$$

Таким образом, *тангенс половинного угла треугольника равен частному от деления радиуса вписанной в треугольник окружности на разность между полупериметром и стороной, противолежащей данному углу.*

Расстояние между центром описанной около треугольника окружности и инцентром можно вычислить по теореме Эйлера.

Теорема 7 (*теорема Эйлера*). *В любом треугольнике радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности связаны с расстоянием l между центрами этих окружностей соотношением*

$$l^2=R^2-2Rr. \tag{49}$$

Доказательство. I способ. Пусть O и I — центры описанной и вписанной в треугольник ABC окружностей и D — середина дуги BC (рис. 196). Каждый из углов, $\angle IBD$ и $\angle BID$, равен половине суммы углов при вершинах A и B треугольника ABC. Отсюда следует, что $BD = ID$.

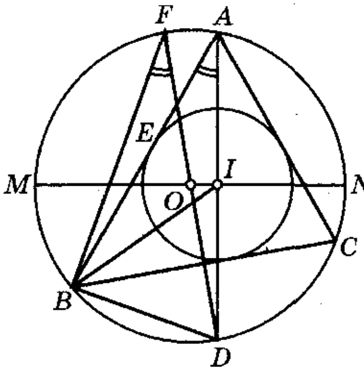


Рис. 196

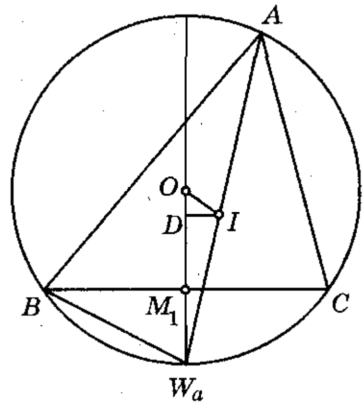


Рис. 197

Согласно свойству хорд, пересекающихся внутри окружности, имеем

$$MI \cdot IN = AI \cdot ID.$$

Далее, если $IE \perp AB$ и FD — диаметр, то треугольники AIE и ADB подобны, откуда $AI : IE = FD : BD$, т. е. $AI \cdot BD = IE \cdot FD$, или, так как $BD = ID$, то $AI \cdot ID = IE \cdot FD$. Следовательно,

$$MI \cdot IN = IE \cdot FD.$$

Подставив в это равенство значения $MI = R + l$, $IN = R - l$, $IE = r$, $FD = 2R$, получим $R^2 - l^2 = 2Rr$, что и требовалось доказать.

II способ. Пусть в треугольнике ABC отрезок $ID \perp OW_a$, где W_a — точка пересечения медиатрисы стороны BC и биссектрисы угла A (как известно, эта точка лежит на окружности, описанной около треугольника ABC; рис. 197). В треугольнике OIW_a имеем

$$OI^2 = OW_a^2 + IW_a^2 - 2OW_a \cdot IW_a \cos \angle IW_aO = OW_a^2 + IW_a^2 - 2OW_a \cdot W_aD;$$

$$OI^2 = R^2 + IW_a^2 - 2R(r + M_1W_a) = R^2 - 2Rr + IW_a^2 - 2R \cdot M_1W_a.$$

Так как $2R \cdot M_1W_a = BW_a^2$ и $BW_a = IW_a$ (расстояния от точки W_a до концов стороны BC равны расстоянию от этой точки до инцентра треугольника; см. теорему 2), то $OI^2 = R^2 - 2Rr$, что и требовалось доказать.

4. Задачи на вычисление основных элементов косоугольного треугольника

Как известно, треугольник определяется заданием трех его основных элементов, из которых хотя бы один является его стороной.

Между шестью основными элементами существует три независимых соотношения. В качестве таких соотношений можно, например, взять следующие:

$$A+B+C=180°, \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \text{ (теорема синусов)}$$

и исходя из них получить различные соотношения между элементами треугольника. Ряд соотношений был получен в предыдущем пункте данного параграфа.

Рассмотрим вычисление основных элементов косоугольного треугольника по заданным трем основным элементам. К основным случаям решения треугольников относятся следующие задачи:

Задача 1. *Даны три стороны треугольника. Вычислить его углы.*

Решение. Пусть даны величины сторон a, b и c треугольника. По трем данным сторонам можно постоить единственный треугольник, если

$$0<a<b+c,\ 0<b<a+c,\ 0<c<a+b.$$

Если же a, b и c этим условиям не удовлетворяют, то треугольник с данными сторонами не существует. Будем считать, что эти условия выполнены.

Согласно теореме косинусов для вычисления углов A, B и C имеем простейшие тригонометрические уравнения:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Решением задачи являются те значения A, B и C, которые удовлетворяют смешанной системе

$$A>0,\ B>0,\ C>0,\ A+B+C=180°.$$

Задача 2. *Даны три угла треугольника. Вычислить его стороны.*

Задача не имеет решений, так как в число данных не входит сторона.

Задача 3. *Даны две стороны треугольника и угол между ними. Вычислить третью сторону и два остальных угла.*

Пусть, например, даны a, b и C; требуется вычислить c, A и B.

Решение. Используя теорему косинусов, находим

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C},\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Следовательно,

$$A=\arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ B=180°-(A+C).$$

З а д а ч а 4. *Даны два угла треугольника и прилежащая к ним сторона. Вычислить третий угол и две другие стороны.*

Пусть, например, даны a, B и C; требуется вычислить A, b и c.

Р е ш е н и е. Имеем $A = 180° - (B + C)$. Воспользовавшись теоремой синусов, находим

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \ c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

З а д а ч а 5. *Даны два угла и сторона, противолежащая одному из них. Вычислить третий угол и две другие стороны.*

Пусть, например, в треугольнике известны допустимые значения элементов A, B и a, для которых этот треугольник может быть построен. Требуется вычислить b, c и C.

Р е ш е н и е. Определив угол $C = 180° - (A + B)$, решаем эту задачу аналогично предыдущей.

З а д а ч а 6. *Даны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Вычислить третью сторону и два остальных угла.*

Пусть, например, даны величины a, b и A, при которых треугольник может быть построен; требуется вычислить B, C и c.

Р е ш е н и е. Используя теорему синусов, находим

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Если $a > b$, то $0 < \frac{b \sin A}{a} < 1$ и, поскольку искомый угол B противолежит не наибольшей стороне треугольника, B является острым углом. Следовательно,

$$B = \arcsin \frac{b \sin A}{a}.$$

Если $a = b$, то $B = A$ и данный в условии угол A может быть в этом случае только острым.

Если $a < b$, то данный в условии угол A противолежит не наибольшей стороне треугольника, и, значит, является острым. При этом возможны два случая: если $\frac{b \sin A}{a} = 1$, т. е. $\sin B = 1$, то $B = 90°$; если же $0 < \frac{b \sin A}{a} < 1$, то, поскольку искомый угол B может быть как острым, так и тупым, задача имеет два решения:

$$B = \arcsin \frac{b \sin A}{a} \ \text{ и } \ B = 180° - \arcsin \frac{b \sin A}{a},$$

$$C = 180° - (A + B).$$

Искомую сторону треугольника находим по теореме синусов:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Замечание. Мы привели одно из возможных решений каждой из рассмотренных шести задач. Безусловно, существуют и другие решения этих задач.

5. Элементы четырехугольника и их свойства

Можно рассматривать различные элементы четырехугольника, например стороны, углы, диагонали, площадь и т. д. Так же как и в треугольнике, будем называть стороны и внутренние углы ***основными элементами*** четырехугольника; углы (и их величины) четырехугольника $ABCD$ будем обозначать буквами A, B, C и D, а стороны (и их длины) — буквами a, b, c и d.

Отрезки AC и BD, соединяющие две вершины четырехугольника, не принадлежащие одной стороне, будем называть ***диагоналями*** четырехугольника и обозначать соответственно буквами e и f.

Четырехугольник называют ***выпуклым***, если он расположен по одну сторону от любой из своих четырех сторон. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие четырехугольники.

Одной из своих диагоналей четырехугольник может быть разбит на два треугольника и, поскольку сумма углов треугольника равна 180°, отсюда следует, что *сумма углов четырехугольника равна* 360°:

$$A + B + C + D = 360°. \tag{50}$$

Подобными четырехугольниками (и вообще многоугольниками) называются такие, все углы которых соответственно равны, а сходственные стороны пропорциональны (сходственными сторонами называются такие, которые заключены между соответственно равными углами). Подобные четырехугольники разбиваются диагоналями, исходящими из соответствующих вершин, на два подобных треугольника. Так же как и для треугольников, *отношение любых сходственных линейных элементов подобных четырехугольников* (сторон, периметров, диагоналей и т. д.) *одно и то же и называется коэффициентом подобия:*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{p}{p'} = \frac{e}{e'} = \frac{f}{f'} = \ldots = \mu. \tag{51}$$

Отношение любых сходственных квадратичных элементов подобных четырехугольников (например, площадей) *одно и то же и равно квадрату коэффициента подобия* (т. е. μ^2.)

Четырехугольник называют ***вписанным в окружность*** (а ***окружность — описанной около четырехугольника***), если все его вершины расположены на этой окружности. Если все стороны четырехугольника касаются окружности, то четырехугольник называют ***описанным около окружности*** (а ***окружность — вписанной в четырехугольник***).

Следующие две теоремы устанавливают основные свойства вписанных в окружность четырехугольников и описанных около нее.

Для того чтобы выпуклый четырехугольник можно было вписать в окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов были равны 180°:

$$A + C = B + D = 180°. \qquad (52)$$

Для того чтобы выпуклый четырехугольник можно было описать около окружности, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны между собой:

$$a + c = b + d. \qquad (53)$$

Рассмотрим вопрос о вычислении площади четырехугольника.

Теорема 8. *Площадь S любого выпуклого четырехугольника ABCD равна половине произведения его диагоналей на синус угла, заключенного между ними:*

$$S = \frac{1}{2} ef \sin \alpha. \qquad (54)$$

Доказательство. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника и пусть $\angle AOB = \alpha$ (рис. 198). Четырехугольник $ABCD$ состоит из треугольников AOB, BOC, COD и AOD, поэтому

$$S = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD}.$$

Запишем выражения для площадей этих треугольников:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \alpha,$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} CO \cdot BO \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} CO \cdot BO \cdot \sin \alpha,$$

$$S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin \alpha,$$

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot DO \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} AO \cdot DO \cdot \sin \alpha.$$

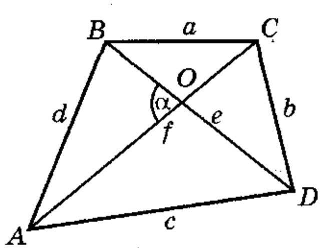


Рис. 198

Сложив эти равенства, имеем

$$S = \frac{1}{2}[(AO + CO)BO + DO(AO + CO)] \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}[(AO + CO)(BO + DO)] \cdot \sin\alpha.$$

Замечая, что $AO + CO = AC$, $BO + DO = BD$, получим

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 9. *Площадь выпуклого четырехугольника ABCD можно вычислить по формуле*

$$S = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{BK \cdot CE}{OF}, \tag{55}$$

где AD — сторона, BK, CE, OF — перпендикуляры, опущенные на нее из точек B, C и точки O пересечения диагоналей (рис. 199).

Доказательство. Учитывая, что треугольники CAD и OAD имеют одно и то же основание AD, а треугольники BAC и BAO — одну и ту же высоту, опущенную из вершины B, можно записать, что

$$\frac{CE}{OF} = \frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta OAD}} = \frac{AC}{AO} = \frac{S_{\Delta BAC}}{S_{\Delta BAO}}.$$

Составим производную пропорцию:

$$\frac{S_{\Delta CAD} + S_{\Delta BAC}}{S_{\Delta OAD} + S_{\Delta BAO}} = \frac{CE}{OF}, \text{ т. е. } \frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta DAB}} = \frac{CE}{OF},$$

откуда

$$S_{ABCD} = \frac{CE}{OF} \cdot S_{\Delta DAB} = \frac{CE}{OF} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BK,$$

что и требовалось доказать.

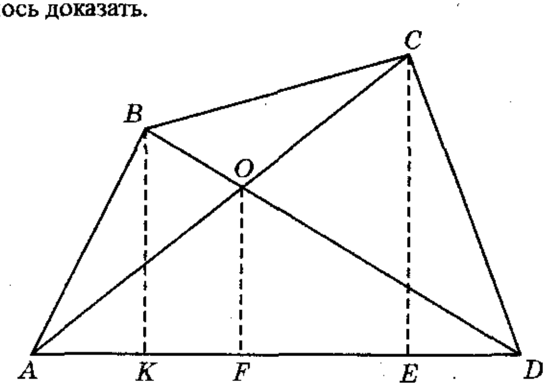


Рис. 199

Заметим, что *площадь четырехугольника (и вообще многоугольника), описанного около окружности, равна произведению его полупериметра на радиус этой окружности*:

$$S = pr. \tag{56}$$

Доказательство проводится так же, как и при выводе аналогичной формулы (36) для треугольника.

Теорема 10. *Площадь описанного четырехугольника выражается формулой*

$$S = \sqrt{abcd} \cdot \sin\frac{A+C}{2}, \tag{57}$$

где a, b, c, d — длины сторон четырехугольника, A и C — величины его противоположных углов.

Доказательство. Пусть S — площадь четырехугольника $ABCD$ (рис. 200); тогда

$$S = \frac{1}{2}(ab\sin C + cd\sin A). \tag{58}$$

Используя теорему косинусов, из треугольников BCD и ABD можно записать

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2 + d^2 - 2cd\cos A,$$

откуда

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos C - 2cd\cos A. \tag{59}$$

Возведем равенства (58) и (59) в квадрат и почленно сложим:

$$4S^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos(C + A),$$

$$16S^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\frac{C+A}{2}.$$

Но для описанного четырехугольника $ABCD$ имеем $a - b = d - c$, поэтому

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab - 2cd.$$

Следовательно,

$$16S^2 = (2ab + 2cd)^2 - (2ab - 2cd)^2 - 16abcd\cos^2\frac{C+A}{2},$$

откуда

$$S^2 = abcd\sin^2\frac{C+A}{2},$$

т.е.

$$S = \sqrt{abcd}\sin\frac{C+A}{2},$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы в силу равенства (52) получаем следствие: *если в четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность, то его площадь выражается формулой*

$$S=\sqrt{abcd}. \tag{60}$$

Рассмотрим теперь некоторые зависимости между элементами вписанного в окружность четырехугольника.

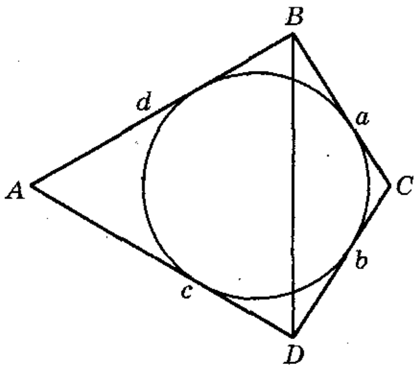


Рис. 200

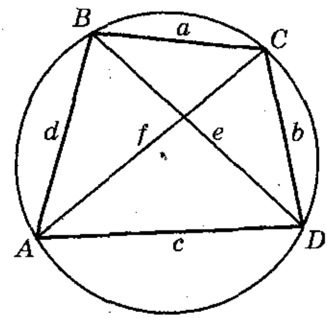


Рис. 201

Теорема косинусов для вписанного четырехугольника устанавливает зависимость между его сторонами и углами.

Пусть a, b, c, d — длины сторон и e, f — длины диагоналей вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ (рис. 201). Выразив из треугольников BCD и ABD по теореме косинусов квадрат диагонали BD, имеем

$$e^2=a^2+b^2-2ab\cos C,\ \ e^2=c^2+d^2-2cd\cos A. \tag{61}$$

Так как $\cos C=-\cos A$, то

$$a^2+b^2+2ab\cos A=c^2+d^2-2cd\cos A,$$

откуда

$$\cos A=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(ab+cd)}, \tag{62}$$

$$a^2+b^2=c^2+d^2-2(ab+cd)\cos A. \tag{63}$$

Аналогично,

$$\cos B=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}, \tag{64}$$

$$b^2+c^2=a^2+d^2-2(bc+ad)\cos B. \tag{65}$$

Формулы (63) и (65) выражают теорему косинусов для вписанного в окружность четырехугольника. Формулы (62) и (64) позволяют находить углы вписанного четырехугольника, если известны его стороны.

Теорема синусов для вписанного четырехугольника получается применением теоремы синусов к треугольникам ABD и ABC (см. рис. 201).

$$\frac{e}{\sin A}=\frac{f}{\sin B}=2R. \tag{66}$$

Выражение диагонали вписанного четырехугольника через его стороны получим, если подставим выражение для $\cos A$ в формулу (66):

$$e^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}. \tag{67}$$

Аналогично,

$$f^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}. \tag{68}$$

Перемножая эти равенства, получаем ***теорему Птолемея***: *произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон*:

$$ef=ac+bd. \tag{69}$$

Предоставляем учащемуся доказать самостоятельно формулу для вычисления площади вписанного в окружность четырехугольника:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \tag{70}$$

(p — полупериметр четырехугольника), являющуюся аналогом формулы Герона для треугольника.

При решении задач используется следующее свойство вписанного в окружность четырехугольника:

Теорема 11. *Произведения расстояний любой точки окружности до противоположных сторон (или их продолжений) вписанного в нее выпуклого четырехугольника равны между собой.*

Доказательство. Пусть S — произвольная точка дуги AD окружности, не содержащей вершин B и C вписанного в эту окружность четырехугольника $ABCD$ (рис. 202). Точками M, N, P и Q обозначим основания перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны AB, CD, BC и AD (или их продолжения). Длины этих перпендикуляров обозначим соответственно через a, b, c и d.

Имеем $\angle SAD=\angle SCD$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу SD), $\angle BAD+\angle BCD=180°$ (сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника).

Поэтому

$$\angle MAD=180°-\angle BAD=\angle BCD,$$

$$\angle SAM=\angle MAD-\angle SAD=\angle BCD-\angle SCD=\angle PCS.$$

Итак, $\angle SAD = \angle SCD$, $\angle SAM = \angle PCS$, т. е. в силу равенства острых углов получаем две пары подобных прямоугольных треугольников:

$$\Delta SPC \sim \Delta SMA, \text{ откуда } \frac{c}{a} = \frac{CS}{AS};$$

$$\Delta SNC \sim \Delta SQA, \text{ откуда } \frac{b}{d} = \frac{CS}{AS}.$$

Следовательно, $\frac{c}{a} = \frac{b}{d}$, т. е. $ab = cd$, что и требовалось доказать.

Особый интерес представляет рассмотрение четырехугольников частного вида: параллелограмма, трапеции, прямоугольника, ромба и т. д.

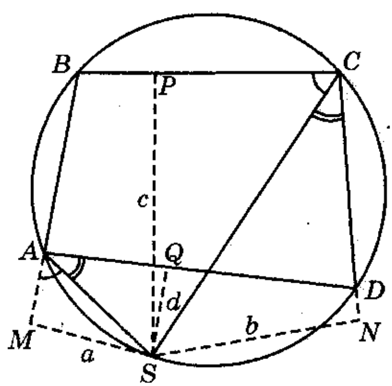


Рис. 202

Параллелограммом называют четырехугольник, в котором обе пары противоположных сторон параллельны (противоположными называют стороны четырехугольника, не имеющие общих вершин).

Свойства элементов параллелограмма:

1°. Противоположные стороны попарно равны.

2°. Противоположные стороны параллельны.

3°. Противоположные углы попарно равны.

4°. Сумма соседних углов равна 180°.

5°. Диагональ параллелограмма образует с двумя парами прилегающих к ней сторон два равных треугольника.

6°. Диагонали в точке их пересечения делятся пополам.

7°. Отрезок прямой, проходящий через точку пересечения диагоналей параллелограмма и заключенный между противоположными сторонами параллелограмма, делится этой точкой пополам.

Доказательство этих свойств основано на признаках равенства треугольников.

Сформулируем теперь признаки того, что выпуклый четырехугольник, им удовлетворяющий, является параллелограммом.

Четырехугольник представляет собой параллелограмм, если в нем выполняется одно из следующих условий:

1°. *Противоположные стороны попарно равны.*

2°. Две противоположные стороны равны и параллельны.

3°. Противоположные углы попарно равны.

4°. Диагонали в точке их пересечения делятся пополам.

Метрическое соотношение в параллелограмме устанавливает следующая теорема: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырех сторон*:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2. \qquad (71)$$

Доказательство этой теоремы провести несложно, если найти по теореме косинусов выражения для квадратов диагоналей параллелограмма и сложить их.

Формулу для площади параллелограмма можно получить как следствие формулы площади треугольника (10). В самом деле, проведем в параллелограмме $ABCD$ диагональ DB. Она разделит его на два равных треугольника ABD и DBC. Так как $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin A$, то площадь параллелограмма

$$S = AB \cdot AD \cdot \sin A, \qquad (72)$$

т. е. *площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла, заключенного между ними.*

Учитывая, что произведение $AB \cdot \sin A = h$, т. е. высоте параллелограмма, и приняв сторону $AD = a$ за его основание, получим, что *площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту:*

$$S = ah. \qquad (73)$$

Заметим, что тот же результат получается и из формулы (55) для произвольного четырехугольника. Площадь параллелограмма через его диагонали и угол между ними вычисляется по формуле (54).

Параллелограмм, смежные стороны которого взаимно перпендикулярны, называют ***прямоугольником.***

Диагонали прямоугольника равны между собой.

Параллелограмм представляет собой прямоугольник, если в нем выполнено одно из условий:

1°. Один из углов прямой.

2°. Диагонали равны между собой.

Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон.

Из формулы (54) следует также, что *площадь прямоугольника равна половине произведения квадрата длины диагоналей на синус угла между ними:*

$$S = \frac{d^2}{2} \cdot \sin\alpha. \tag{74}$$

Параллелограмм, все стороны которого равны, называют ***ромбом***.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Параллелограмм представляет собой ромб, если в нем выполнено одно из следующих условий:

1°. Две какие-либо смежные стороны равны.

2°. Диагонали взаимно перпендикулярны.

3°. Диагонали являются биссектрисами углов.

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2, \tag{75}$$

что следует из формулы (54).

Площадь ромба можно вычислить также как произведение квадрата стороны на синус угла ромба.

Четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны, называют ***трапецией***. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ сторона BC параллельна стороне AD. Эти стороны называют соответственно ***верхним*** и ***нижним основаниями*** трапеции, расстояние между основаниями называют ***высотой*** трапеции. Непараллельные стороны AB и CD называют ***боковыми сторонами***, отрезки AC и BD — ***диагоналями*** трапеции.

Если одна из боковых сторон трапеции перпендикулярна основаниям, то такую трапецию называют ***прямоугольной***.

Если боковые стороны трапеции равны, то ее называют ***равнобочной*** (или ***равнобедренной***). В равнобочной трапеции боковые стороны наклонены под одинаковыми углами к основанию.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называют ***средней линией*** трапеции.

Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна полусумме этих оснований.

Площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h вычисляется по формуле

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h. \tag{76}$$

Иначе говоря, *площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.*

6. Свойства окружности, круга и их частей

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную окружность.

Отрезок, соединяющий две какие-либо точки окружности, называют ***хордой***. Хорду, проходящую через центр, называют ***диаметром***. Часть окружности, ограниченную хордой, называют ***дугой***.

Центр окружности лежит на перпендикуляре к каждой хорде, проходящем через ее середину, т. е. на медиатрисе хорды.

Перечислим некоторые свойства хорд, диаметра и дуг окружности:

1°. Равные хорды одинаково удалены от центра и, наоборот, хорды, одинаково удаленные от центра, равны.

2°. Бо́льшая из двух хорд менее удалена от центра и, наоборот, та из двух хорд больше, которая менее удалена от центра.

3°. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит пополам эту хорду и две стягивающие ее дуги.

4°. Диаметр, проведенный через середину хорды, перпендикулярен хорде и делит пополам дугу, стягивающую эту хорду.

5°. Диаметр, проведенный через середину дуги, перпендикулярен хорде, стягивающей эту дугу, и делит ее пополам.

6°. Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны между собой.

7°. Равные дуги стягиваются равными хордами и, наоборот, равные хорды стягивают равные дуги.

8°. Бо́льшая дуга, которая не превышает 180°, стягивается большей хордой и, наоборот, бо́льшая хорда стягивает бо́льшую дугу.

Рассмотрим взаимное расположение прямой и окружности.

Пусть даны прямая l и окружность с центром в точке O. Опустим из точки O на прямую l перпендикуляр. Обозначим буквой M точку пересечения этого перпендикуляра с прямой l.

Пусть R — радиус окружности, а d — длина перпендикуляра OM.

Возможны следующие три случая взаимного расположения прямой l и окружности:

1°. Если $d > R$, то окружность и прямая l не имеют общих точек.

2°. Если $d = R$, то окружность и прямая l имеют лишь одну общую точку. Прямую, имеющую с окружностью лишь одну общую точку, называют ***касательной*** к окружности.

3°. Если $d < R$, то окружность и прямая l имеют две общие точки. Прямую, имеющую с окружностью две общие точки, называют ***секущей***.

Прямая, проходящая через точку окружности, является касательной к этой окружности тогда и только тогда, когда она перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.

Отметим следующие свойства касательных к окружности:

1°. Если из одной и той же точки проведены две касательные к окружности, то отрезки этих касательных от точек касания до данной точки равны между собой, а прямая, проведенная через данную точку и центр окружности, делит пополам угол между этими касательными.

2°. Если касательная параллельна хорде окружности, то точка касания делит пополам дугу, стягивающую хорду.

Рассмотрим взаимное расположение двух окружностей.

Так как через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести лишь одну окружность, то две окружности не могут иметь больше двух общих точек.

Прямую, проходящую через центры двух окружностей, называют ***линией центров***.

Обозначим через R_1 и R_2 радиусы двух окружностей, а через D — расстояние между центрами этих окружностей.

Возможны три случая взаимного расположения двух окружностей:

1°. Если $D > R_1 + R_2$ или $D < |R_1 - R_2|$ или $D = 0$, то две окружности не имеют общих точек. В последнем случае окружности имеют общий центр и называются ***концентрическими***.

2°. Если $D = R_1 + R_2$ или $D = |R_1 - R_2|$, то две окружности имеют одну общую точку и называются ***касающимися*** (соответственно ***внешним*** или ***внутренним образом***).

3°. Если $|R_1 - R_2| < D < R_1 + R_2$, то две окружности имеют две общие точки и называются ***пересекающимися***. ***Углом между двумя*** пересекающимися ***окружностями*** называют угол между их касательными в точке пересечения. Окружности, пересекающиеся под прямым углом, называют ***ортогональными***.

Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров и делится этой линией пополам.

Из свойств подобных треугольников следуют свойства пропорциональных линий в круге.

1°. Произведение отрезков хорд, проходящих через одну точку внутри окружности, от этой точки до концов хорды есть величина постоянная (рис. 203):

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = \ldots = \text{const}. \qquad (77)$$

2°. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены секущая и касательная, то произведение отрезков секущей от ее точки пересечения с касательной до ее точек пересечения с окружностью равно квадрату отрезка касательной (рис. 204):

$$MA \cdot MB = MT^2. \qquad (78)$$

Отсюда, в частности, следует, что произведение отрезков каждой секущей, проходящей через точку вне окружности, от этой точки до точек пересечения секущей с окружностью есть величина постоянная (рис. 205):

$$MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = \ldots = \text{const}. \qquad (79)$$

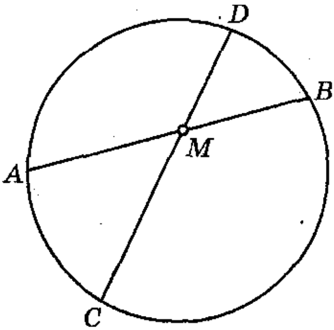


Рис. 203

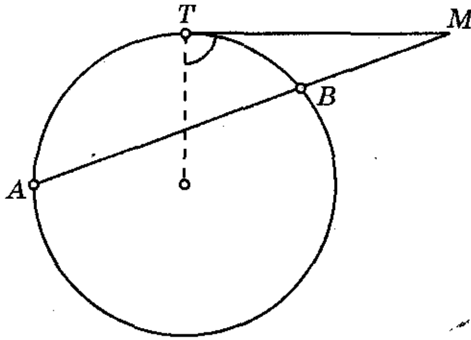


Рис. 204

Рассмотрим свойства окружности, связанные с угловыми соотношениями.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны направлены по двум хордам, называют ***вписанным*** в окружность.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Отсюда, в частности, следует, что:

1°. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (хорду), равны между собой.

2°. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (на диаметр),— прямой.

Угол, образованный касательной и хордой, исходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами.

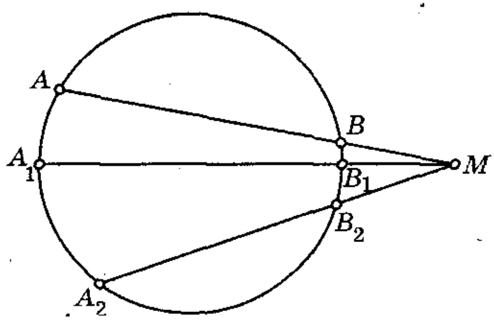


Рис. 205

Угол с вершиной внутри окружности, образованный двумя секущими, измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями.

Угол с вершиной вне окружности, образованный двумя секущими, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

Угол, образованный касательной и секущей, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

Угол, образованный двумя касательными к окружности, называют ***описанным***.

Описанный угол измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

Определение длины окружности и площади круга основано на понятии предела последовательности.

Длина С окружности радиуса R есть предел последовательности

$$P_3, P_4, P_5, \ldots, P_n, \ldots$$

периметров правильных треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т. д., вписанных в эту окружность:

$$C = \lim_{n \to \infty} P_n.$$

Доказывается, что этот предел существует (по признаку Вейерштрасса), является единственным и равен $2\pi R$. Таким образом, *длина окружности равна произведению ее диаметра на число* π:

$$C = 2\pi R. \tag{80}$$

Площадь S круга есть предел последовательности

$$S_3, S_4, S_5, \ldots, S_n, \ldots$$

площадей правильных треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т. д., вписанных в эту окружность:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Доказывается, что этот предел существует, является единственным и равен πR^2. Итак, *площадь круга радиуса R равна произведению числа* π *на квадрат радиуса этого круга:*

$$S = \pi R^2. \tag{81}$$

Угол, вершина которого находится в центре окружности, называют ***центральным***.

Центральный угол AOB измеряется дугой AmB, на которую он опирается (рис. 206).

Если α — число радианов в центральном угле, а R — радиус окружности, то:

длина l дуги AmB, на которую опирается центральный угол α, равна произведению радиуса на центральный угол:

$$l = R\alpha; \tag{82}$$

площадь S сектора $OAmB$ равна произведению половины длины дуги сектора на радиус:

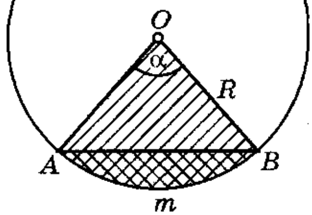


Рис. 206

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha; \qquad (83)$$

площадь S сегмента определяется как разность площади сектора $OAmB$ и площади треугольника OAB:

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha). \qquad (84)$$

7. Примеры решения задач

Пример 1. *Пусть в треугольнике ABC угол между высотой BD и стороной BC равен α, а угол между этой высотой и стороной AB равен β. Доказать, что*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad (85)$$

Доказательство. Площадь треугольника ABC (рис. 207) составляет

$$S = \frac{1}{2} ac\sin(\alpha + \beta);$$

площади треугольников BDC и BDA равны соответственно

$$S_1 = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} a\sin\alpha \cdot c\cos\beta,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(b - x)\,y = \frac{1}{2} c\sin\beta \cdot a\cos\alpha.$$

Так как

$$S = S_1 + S_2,$$

то имеет место равенство

$$\frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}a\sin\alpha\cdot c\cos\beta+\frac{1}{2}c\sin\beta\cdot a\cos\alpha,$$

откуда и следует доказываемая формула.

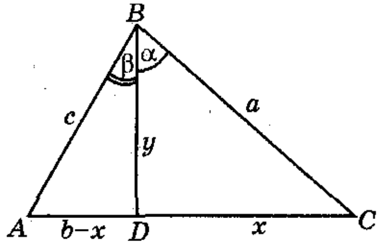


Рис. 207

Замечание. Мы рассмотрели одну из возможных интерпретаций формулы синуса суммы двух углов. Эта формула справедлива для любых углов α и β.

Заменяя в формуле (85) β на $-\beta$, находим

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (86)$$

Если в последней формуле заменить α на $90° - \alpha$, то получим

$$\sin[90°-(\alpha+\beta)]=\sin(90°-\alpha)\cos\beta-\cos(90°-\alpha)\sin\beta,$$

или

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (87)$$

Заменяя в этой формуле β на $-\beta$, получим

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (88)$$

Формулы (85)–(88) имеют место для произвольных углов α и β и являются основным аппаратом тригонометрии.

Полагая в формулах (85) и (87) $\alpha=\beta$, находим

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (89)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \qquad (90)$$

Если A, B и C — углы треугольника, т. е. $A+B+C=180°$, то

$$\sin C = \sin(A+B)$$

и по формуле синуса суммы двух углов имеем

$$\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B. \qquad (91)$$

Пример 2. *Вывести теорему косинусов как следствие теоремы синусов.*

Р е ш е н и е. Возводя обе части соотношения (91) в квадрат, имеем

$$\sin^2 C = \sin^2 A\cos^2 B + \sin^2 B\cos^2 A + 2\sin A\sin B\cos A\cos B =$$

$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) + \sin^2 B(1-\sin^2 A) + 2\sin A\sin B\cos A\cos B =$$

$$= \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A\sin B(\cos A\cos B - \sin A\sin B) =$$

$$= \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A\sin B\cos(A+B).$$

Так как

$$\cos(A+B) = \cos[180^\circ - (A+B)] = -\cos C,$$

то получим соотношение

$$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B\cos C,$$

или в силу теоремы синусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

что и требовалось доказать.

П р и м е р 3. *В круг радиуса R вписан правильный многоугольник, число сторон которого равно* $n\,(n \ge 3)$. *Найти периметр этого многоугольника.*

Р е ш е н и е. Пусть AB — сторона многоугольника (рис. 208). Из прямоугольного треугольника BCO, в котором гипотенуза $BO = R$ и $\angle BOC = \dfrac{180^\circ}{n}$, найдем

$$CB = OB\sin\angle BOC = R\sin\frac{180^\circ}{n},$$

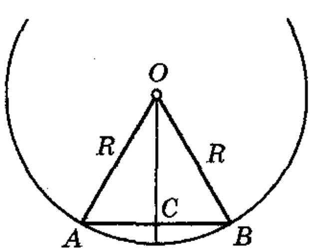


Рис. 208

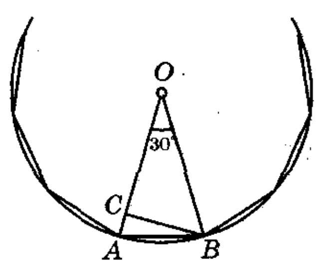


Рис. 209

откуда

$$AB = 2CB = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

и искомый периметр составляет

$$P = AB \cdot n = 2Rn\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Ответ. $2Rn\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Пример 4. *Найти площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в круг радиуса R.*

Решение. Пусть AB — сторона двенадцатиугольника, $AO = OB = R$ (рис. 209). Угол AOB равен $\frac{1}{12}$ части полного угла, т. е.

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

Высота BC треугольника AOB равна $\frac{R}{2}$ (катет, противолежащий углу в 30°, равен половине гипотенузы). Следовательно, площадь треугольника AOB равна половине произведения основания OA на высоту BC, т. е. равна $\frac{R^2}{4}$.

Правильный двенадцатиугольник состоит из 12 треугольников площади $\frac{R^2}{4}$ с общей вершиной O. Поэтому искомая площадь

$$S = 12S_{\Delta AOB} = 12 \cdot \frac{R^2}{4} = 3R^2.$$

Ответ. $3R^2$.

Пример 5. *Вычислить длины сторон прямоугольного треугольника, если известно, что его периметр равен* 12, *а радиус вписанной в него окружности равен* 1.

Решение. Пусть периметр треугольника ABC равен 12, а радиус r вписанной в него окружности равен 1; O — центр этой окружности; K, L, M — точки касания (рис. 210). Найдем стороны x, y, z треугольника.

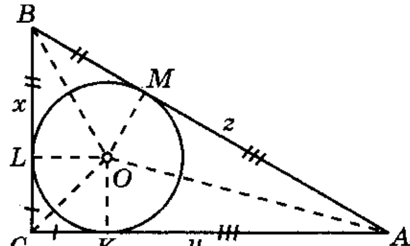


Рис. 210

Р е ш е н и е. I способ. Воспользовавшись равенством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки, имеем

$$AM = AK,\ BM = BL,\ CK = CL = 1.$$

Таким образом,

$$AB = BM + AM = BL + AK,$$

т. е.

$$AB = (BC - CL) + (AC - CK) = (BC - 1) + (AC - 1).$$

Для определения x, y, z получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} z = (x-1)+(y-1), & (92)\\ x+y+z = 12, & (93)\\ x^2 + y^2 = z^2. & (94) \end{cases}$$

Из уравнения (93) следует, что

$$x + y = 12 - z.$$

Подставляя это выражение в уравнение (92), получим

$$z = (x + y) - 2 = 10 - z,$$

откуда $z = 5$. Следовательно, уравнения (93) и (34) образуют систему

$$\begin{cases} x + y = 7,\\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases}$$

решением которой является пара чисел (3, 4), либо (4, 3). Геометрически решение этой системы можно интерпретировать как отыскание координат точек пересечения прямой $x + y = 7$ и окружности $x^2 + y^2 = 25$ радиуса 5 с центром в начале координат.

II способ. Площадь S треугольника ABC равна

$$S = pr,$$

где $p = 6$ — его полупериметр, $r = 1$, т. е. $S = 6$. Следовательно, для определения сторон x, y, и z треугольника имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 6,\\ x^2 + y^2 = z^2,\\ x + y + z = 12, \end{cases}$$

решив которую находим ответ.

О т в е т. Стороны треугольника равны 3, 4 и 5.

П р и м е р 6. *Какими должны быть острые углы в прямоугольном треугольнике, чтобы отношение гипотенузы к высоте, опущенной из вершины прямого угла, было*: а) *равным* $\frac{4}{\sqrt{3}}$; б) *минимальным*?

Р е ш е н и е. а) Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B$ — прямой) отношение гипотенузы AC к высоте $BD = h$ равно k:

$$k = \frac{AC}{BD}. \tag{95}$$

Обозначим через x и y искомые острые углы: $\angle BAC = x$, $\angle BCA = y$ (рис. 211).

Из соотношения (95) имеем

$$AC = kh. \tag{96}$$

С другой стороны,

$$AC = AD + DC. \tag{97}$$

Углы BAC и DBC равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому из прямоугольных треугольников ADB и BDC следует, что

$$AD = \frac{h}{\operatorname{tg} x}, \ DC = h \operatorname{tg} x.$$

В силу соотношений (96) и (97) имеем уравнение

$$\frac{h}{\operatorname{tg} x} + h \operatorname{tg} x = kh,$$

или

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = k, \tag{98}$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x - k \operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

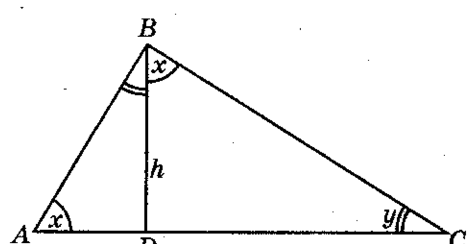


Рис. 211

откуда

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}.$$

По условию, $k=\frac{4}{\sqrt{3}}$. Значит,

$$(\operatorname{tg} x)_1=\sqrt{3},\ (\operatorname{tg} x)_2=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

откуда $x_1=60°$, $x_2=30°$, $y_1=30°$, $y_2=60°$.

б) Выясним, какими должны быть острые углы x и y прямоугольного треугольника ABC, чтобы отношение гипотенузы AC к высоте BD было минимальным.

Аналитическое решение. Воспользовавшись формулой (98), установим, при каком $x<90°$ отношение k минимально. Положим

$$\operatorname{tg} x=t\ (t>0)$$

и решим задачу об отыскании минимума функции

$$k=\frac{1}{t}+t \tag{99}$$

на множестве $t>0$.

Эту задачу можно решить различными способами: 1) с помощью выделения полного квадрата; 2) применением следствия из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом; 3) исследованием множества значений функции; 4) исследованием на монотонность функции $\frac{1}{t}+t$ на множестве $t>0$.

I способ. *С помощью выделения полного квадрата представим выражение (99) на множестве $t>0$ следующим образом:*

$$k=\frac{1}{t}+t=\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}=\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)^2+2.$$

Отсюда заключаем, что k минимально при условии

$$\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}=0,$$

т. е. при $t=1$.

II способ. Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом следует, что

$$\frac{1}{t}+t\geq 2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot t}=2\ (t>0).$$

Значит, сумма двух взаимно обратных положительных величин принимает наименьшее значение, равное 2, при равенстве этих величин, т. е. при

$$\frac{1}{t} = t,$$

откуда $t = 1$.

В данном случае $\frac{1}{t} \cdot t = \text{const}$. Следовательно, $k = \frac{1}{t} + t$ минимально на множестве $t > 0$ при условии $\frac{1}{t} = t$, т. е. при $t = 1$.

<u>III способ</u>. Если множество всех значений функции (99) известно, то наибольшее и наименьшее значения этой функции (при условии, что они существуют) находятся непосредственно.

Для отыскания множества значений функции $k = \frac{1}{t} + t$ аргумент t выразим аналитически через функцию k и найдем область существования полученной обратной функции. Эта область и будет множеством значений заданной функции.

Поскольку t определяется из квадратного уравнения

$$t^2 - kt + 1 = 0 \ (t > 0), \tag{100}$$

данный способ отыскания множества значений функции $k(t)$ на множестве $t > 0$ оказывается эквивалентным нахождению множества всех значений параметра k, при которых квадратное уравнение (100) имеет действительные положительные корни. Для этого необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) дискриминант квадратного уравнения (100) должен быть неотрицательным; 2) сумма и произведение корней, выражаемых через коэффициенты уравнения (100) по формулам Виета, должны быть положительны, т. е.

$$D = k^2 - 4 \geq 0, \ t_1 + t_2 = k > 0, \ t_1 t_2 = 1 > 0.$$

Отсюда находим $k \geq 2$, т. е.

$$k_{\min} = 2 \ \text{ при } t = 1.$$

<u>IV способ</u>. Найдем минимум функции $k = \frac{1}{t} + t$ при $t > 0$ с помощью исследования ее на монотонность.

Составим разность

$$k(t_2) - k(t_1) = \left(\frac{1}{t_2} + t_2\right) - \left(\frac{1}{t_1} + t_1\right) = (t_2 - t_1)\left(1 - \frac{1}{t_1 t_2}\right).$$

Следовательно,

$$k(t_2)-k(t_1)<0, \text{ если } 0<t_1<t_2\le 1,$$
$$k(t_2)-k(t_1)>0, \text{ если } 1\le t_1<t_2.$$

Значит, функция $k(t)$ убывает при $0<t<1$ и возрастает при $1<t<+\infty$. Минимум достигается при $t=1$ (рис. 212).

Итак, функция $k=\frac{1}{t}+t$ достигает минимума при $t=1$, т.е. когда $\operatorname{tg}x = 1$, откуда $x=45°$. Поэтому отношение гипотенузы к высоте будет минимальным, если острые углы треугольника одинаковы и равны 45°.

Геометрическое решение. Середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC (точка O) является центром окружности, описанной около этого треугольника (рис. 213). Отношение гипотенузы к высоте, опущенной на нее из вершины прямого угла, очевидно, будет минимальным, когда эта высота максимальна. (Заметим, что при этом площадь треугольника будет максимальна.) Максимальная высота равна радиусу описанной около прямоугольного треугольника окружности, когда треугольник становится равнобедренным с острыми углами $x=y=45°$.

Ответ. а) 30° и 60°; б) 45° и 45°.

Пример 7. *На продолжении стороны AB треугольника ABC отложен отрезок AD так, что $\frac{AD}{AB}=\alpha$, а на продолжении медианы BE — отрезок EF так, что $\frac{EF}{BE}=\beta$. Найти отношение площадей треугольников BDF и ABC.*

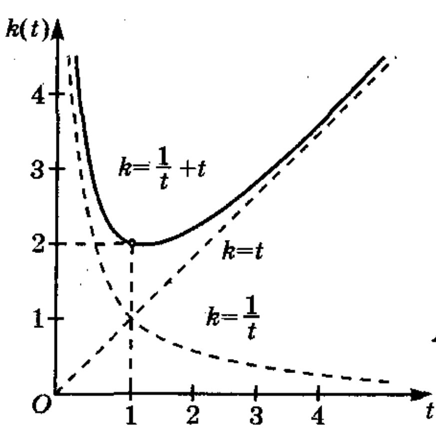


Рис. 212

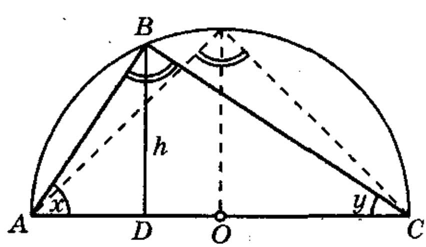


Рис. 213

Решение. Пусть $AB = x$, $BE = y$, $AE = EC = z$, $AD = x_\alpha$, $EF = y_\beta$, $\angle ABE = \varphi$, $\angle AEB = \psi$ (рис. 214).

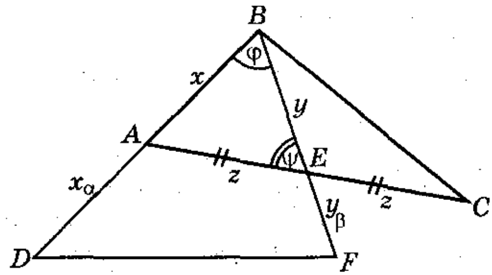


Рис. 214

Треугольники ABE и BEC равновелики, так как высота у них общая общая, а основания равны. Учитывая, что

$$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} xy \sin\varphi,$$

имеем

$$S_{\Delta ABC} = xy \sin\varphi.$$

По условию

$$\frac{x_\alpha}{x} = \alpha, \frac{y_\beta}{y} = \beta,$$

откуда

$$x_\alpha = \alpha x, \; y_\beta = \beta y,$$

$$BD = x + x_\alpha = x(1+\alpha), \; BF = y + y_\beta = y(1+\beta).$$

Следовательно,

$$S_{\Delta BDF} = \frac{1}{2} BD \cdot BF \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} x(1+\alpha) y(1+\beta) \sin\varphi.$$

Теперь найдем отношение площадей треугольников BDF и ABC:

$$\frac{S_{\Delta BDF}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} x(1+\alpha) y(1+\beta)\sin\varphi}{xy\sin\varphi} = \frac{1}{2}(1+\alpha)(1+\beta).$$

Ответ. $\frac{1}{2}(1+\alpha)(1+\beta)$.

П р и м е р 8. *В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что DA = DB. Найти длину стороны BC.*

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике ABC (рис. 215) $BC = x$, $DA = DB = y$.

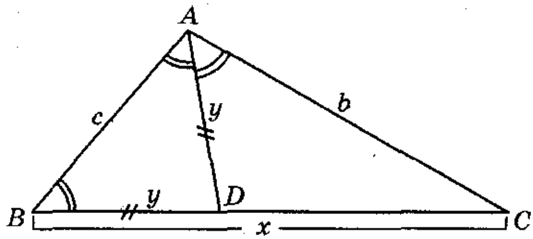


Рис. 215

Треугольники ABC и ADC подобны (угол BCA у них общий, а $\angle ABD = \angle BAD = \angle DAC$). Следовательно, имеют место пропорции

$$\frac{x-y}{y}=\frac{b}{c},\quad \frac{b}{y}=\frac{x}{c},$$

откуда находим $x=\sqrt{b(b+c)}$.

О т в е т. $\sqrt{b(b+c)}$.

П р и м е р 9. *В треугольнике ABC дано:* $\angle ACB = 60°$, $\angle ABC = 45°$. *На продолжении AC за вершину C взята точка K так, что AC = CK, а на продолжении BC за вершину C — точка M так, что треугольник с вершинами C, M и K подобен исходному. Найти BC: MK, если известно, что* $CM : MK < 1$.

Р е ш е н и е. Заметим, что если не учитывать условие $CM : MK < 1$, то треугольник CMK можно построить двумя различными способами по стороне CK и двум прилежащим углам, один из которых ($\angle MCK$) фиксирован. Дополнительное условие $CM : MK < 1$ позволяет установить единственное соответствие между сторонами и углами треугольников ABC и CMK, которые по условию подобны. Предположим, что $\angle ABC = \angle CMK$ (рис. 216).

Тогда из подобия треугольников ABC и CMK следует равенство

$$\frac{BC}{AB}=\frac{CM}{MK}.$$

Так как $CM : MK < 1$, то отсюда получаем $BC : AB < 1$, т. е. $BC < AB$, что является неверным (в любом треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона и поэтому в треугольнике ABC имеем $BC > AB$). Полученное противоречие показывает, что предположение о равенстве углов ABC и CMK неверно.

Значит, чтобы выполнялось условие $CM : MK < 1$, должно быть $\angle ABC = \angle CKM$ и $\angle CAB = \angle CMK$ (как это изображено на рис. 216).

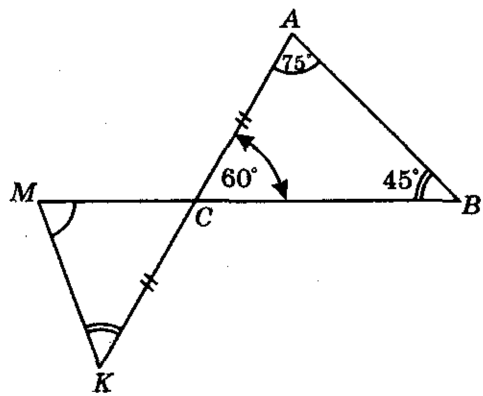


Рис. 216

Теперь треугольник CMK определен однозначно. Из подобия треугольников CMK и ABC имеем

$$\frac{BC}{CK} = \frac{AB}{MK}.$$

Так как по условию $CK = AC$, то из последнего равенства находим

$$MK = \frac{AC \cdot AB}{BC}. \qquad (101)$$

Применяя к треугольнику ABC теорему синусов:

$$\frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ} = m$$

(здесь через m обозначены равные отношения), найдем выражения его сторон через синусы углов:

$$AB = m\frac{\sqrt{3}}{2},\ AC = m\frac{\sqrt{2}}{2},\ BC = m\sin 75^\circ. \qquad (102)$$

Из равенств (101) и (102) находим искомое отношение

$$\frac{BC}{MK}=\frac{BC^2}{AC\cdot AB}=\frac{4}{\sqrt{6}}\sin^2 75^\circ.$$

Ответ. $\frac{BC}{MK}=\frac{4}{\sqrt{6}}\sin^2 75^\circ.$

Замечание. Ответ можно записать в другой форме, если вычислить $2\sin^2 75^\circ$. Воспользовавшись формулой $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$, получим

$$2\sin^2 75^\circ=1-\cos 150^\circ=1+\cos 30^\circ=1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{BC}{MK}=\frac{2}{\sqrt{6}}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}.$$

Пример 10. *В прямоугольном треугольнике ABC (угол C — прямой) известны катеты $BC=a$, $AC=b$. Вычислить длину биссектрисы CL прямого угла.*

Решение. Опустим перпендикуляр LE на AC (рис. 217). Так как $\angle LCE=45^\circ$, то $CE=EL=\frac{l}{\sqrt{2}}$, где $l=CL$ — искомая длина.

Из подобия треугольников ACB и AEL имеем

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{EL},\ \text{или}\ \frac{b}{a}=\frac{b-\frac{l}{\sqrt{2}}}{\frac{l}{\sqrt{2}}},$$

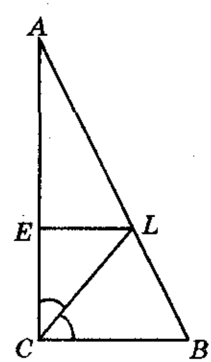


Рис. 217

откуда находим $l=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Ответ. $l=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Пример 11. *В прямоугольном треугольнике ABC высота, опущенная на гипотенузу, равна h, а биссектриса прямого угла равна l. Найти площадь треугольника ABC.*

Решение. Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза треугольника ABC, S — искомая площадь. Имеем

$$S=\frac{ab}{2}=\frac{hc}{2}.$$

Отсюда $ab = 2S$, $c = \frac{2S}{h}$. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, т. е.

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab,$$

и, значит,

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab = \frac{4S^2}{h^2} + 4S = \frac{4S(S+h^2)}{h^2}.$$

Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, находим

$$l^2 = \frac{(ab)^2 \cdot 2}{(a+b)^2} = \frac{S \cdot 2h^2}{S+h^2}, \text{ т. е. } S = \frac{l^2h^2}{2h^2 - l^2}.$$

Ответ. $S = \frac{l^2h^2}{2h^2 - l^2}$.

Пример 12. *Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ и $AD = 10$ такова, что в нее можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Определить, где находится центр описанной (около трапеции $ABCD$) окружности, т. е. расположен ли он внутри или вне, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найти также отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности.*

Решение. Трапеция $ABCD$ — равнобедренная (докажите это); центры вписанной в нее и описанной около нее окружностей (соответственно точки O' и O) лежат на линии LP, где P — середина стороны BC трапеции, а L — середина стороны AD (рис. 218). Обозначим через M проекцию точки C на сторону AD, через F — проекцию точки O на сторону CD. Точку пересечения перпендикуляра OF со стороной AD обозначим через K, радиус описанной окружности — через R, вписанной — через r.

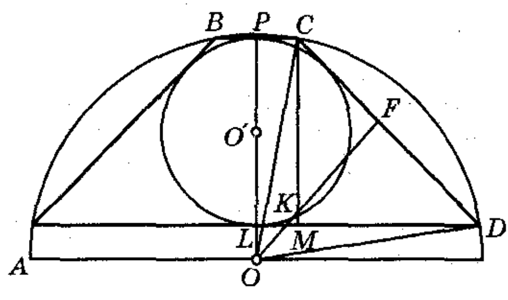


Рис. 218

В равнобедренной трапеции сумма боковых ребер равна сумме оснований, поэтому $AB = CD = 6$.

Из треугольника CMD имеем

$$CM = \sqrt{CD^2 - MD^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20},$$

откуда

$$r = O'P = \frac{CM}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}.$$

Определим, где лежит центр описанной окружности, т. е. установим, что больше: KD или $LD = 5$. В равнобедренном треугольнике OCD высота OF делит CD пополам, т. е.

$$CF = FD = 3.$$

Треугольники KFD и CMD подобны (как треугольники со взаимно перпендикулярными сторонами); следовательно,

$$\frac{KD}{FD} = \frac{CD}{MD}, \text{ т. е. } \frac{KD}{3} = \frac{6}{4},$$

откуда

$$KD = \frac{18}{4} < 5.$$

Таким образом, $KD < LD$, т. е. центр описанной окружности лежит вне трапеции $ABCD$.

Вычислим радиус R описанной окружности. Из прямоугольных треугольников OLD и OPC по теореме Пифагора имеем

$$\begin{cases} R^2 = OL^2 + LD^2, \\ R^2 = PC^2 + (CM + OL)^2. \end{cases}$$

Подставляя значения $LD = 5$, $PC = 1$, $CM = \sqrt{20}$ и исключая из системы уравнений OL, получим

$$R^2 = \frac{126}{5},$$

откуда

$$R = \sqrt{\frac{126}{5}}, \text{ т. е. } \frac{R}{r} = \frac{3}{5}\sqrt{14}.$$

Ответ. Вне трапеции; $\frac{R}{r} = \frac{3}{5}\sqrt{14}$.

Пример 13. *Дана окружность радиуса R. Из ее центра O проведены радиусы OA и OB, образующие угол α. В меньший сегмент круга, отсе-*

каемого хордой AB, вписан равносторонний треугольник, одна из сторон которого перпендикулярна хорде AB. Найти сторону этого треугольника.

Решение. Пусть угол AOB равен α, причем $\alpha < 180°$. Обозначим сторону равностороннего треугольника DCE, вписанного в меньший сегмент AEB круга, через a. Сторона CE этого треугольника перпендикулярна хорде AB (рис. 219).

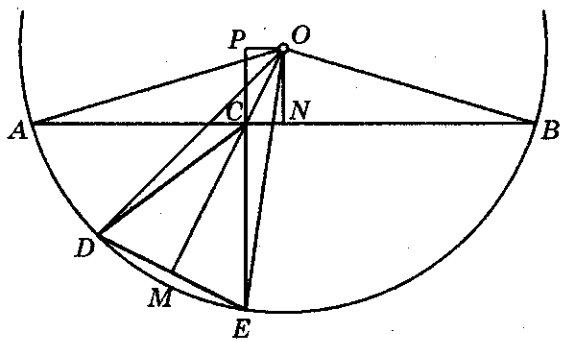


Рис. 219

Соединим центр O круга с вершинами D и E треугольника отрезками OD и OE. Построенный треугольник ODE — равнобедренный с вершиной в точке O. Его высота OM является одновременно и биссектрисой угла DOE. Отсюда следует, что вершина C правильного треугольника CDE лежит на этой биссектрисе. Значит, $\angle MCE = 30°$; $\angle CON = \angle MCE = 30°$ (как односторонние при параллельных прямых CE и ON).

В равнобедренном треугольнике AOB высота ON делит угол α при вершине пополам, т. е. $\angle AON = \frac{\alpha}{2}$. Поэтому из треугольника ANO следует, что

$$ON = R\cos\frac{\alpha}{2},$$

а из треугольника CNO — что

$$CN = ON\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{R}{\sqrt{3}}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Через точку O проведем прямую, параллельную хорде AB, и продолжим EC до пересечения с этой прямой. Построенный треугольник EPO — прямоугольный. По теореме Пифагора имеем

$$PE = a + PC = \sqrt{OE^2 - OP^2}\ ,$$

или

$$a+ON=\sqrt{R^2-CN^2},$$

откуда

$$a=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}-R\cos\frac{\alpha}{2}=R\left(\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ. $R\left(\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Пример 14. *Секущая делит окружность на две дуги, длины которых относятся как* 1 : 5. *В каком отношении эта секущая разделит площадь круга, ограниченного данной окружностью?*

Решение. Известно, что центральный угол измеряется длиной дуги, на которую он опирается. Следовательно, если α и β — центральные углы, опирающиеся на дуги окружности, длины которых относятся как 1 : 5, то

$$\alpha:\beta=1:5,\ \text{т.е.}\ \beta=5\alpha.$$

С другой стороны, $\alpha+\beta=2\pi$, откуда $6\alpha=2\pi$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Значит, треугольник OAB (рис. 220) — равносторонний. Его площадь

$$S=\frac{r^2\sqrt{3}}{4},$$

где r — радиус данной окружности.

Секущая разделит круг на два сегмента, отношение площадей которых $S_1:S_2$ требуется определить. Площадь первого сегмента найдем как разность площадей сектора $OAmB$ и треугольника OAB:

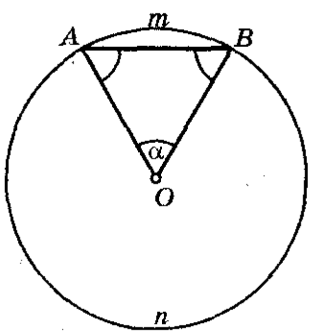


Рис. 220

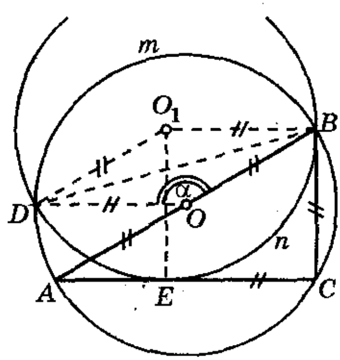


Рис. 221

$$S_1 = \frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Площадь второго сегмента найдем как сумму площадей сектора $OAnB$ и треугольника OAB:

$$S_2 = \frac{r^2}{12}(10\pi + 3\sqrt{3}).$$

Итак, искомое отношение есть $\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$.

Ответ. $\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$.

Пример 15. *Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность того же радиуса касается катетов треугольника так, что одной из точек касания является вершина треугольника. Найти отношение площади треугольника к площади общей части двух данных кругов.*

Решение. Пусть около прямоугольного треугольника ABC описана окружность радиуса R. Центр O этой окружности лежит на середине гипотенузы AB. Пусть другая окружность того же радиуса касается катетов треугольника ABC в точках E и B (рис. 221). Центр второй окружности — точка O_1. Соединим точки пересечения двух окружностей отрезком DB. Соединим также O с D, а O_1 с точками B, D и E.

Найдем отношение площади треугольника ABC (S_1) к площади общей части двух данных кругов $DmBn$ (S_2) (рис. 221).

Катеты BC и AC касаются второй окружности в точках B и E. Значит, отрезки O_1B и O_1E, перпендикулярные этим катетам, равны R. Следовательно, четырехугольник EO_1BC — квадрат, т. е. $BC = R$. Так как O — середина AB, то $BC = \dfrac{AB}{2}$. Отсюда следует, что

$$\angle BAC = 30°, \ \angle ABC = 60°.$$

Найдем площадь треугольника ABC:

$$S_1 = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Площадь S_2 общей части кругов равна удвоенной площади сегмента DmB. Площадь этого сегмента определяется как разность площадей сектора $ODmB$ и треугольника ODB. Четырехугольник DO_1BO — ромб, острые углы которого равны 30°, а тупые равны 150° (докажите это). Находим

$$S_{ODmB} = \frac{5\pi R^2}{12}, \ S_{\Delta ODB} = \frac{1}{2} S_{DO_1BO} = \frac{1}{2} R^2 \sin 30° = \frac{R^2}{4}.$$

Следовательно,

$$S_{DmB} = \frac{R^2(5\pi - 3)}{12},$$

откуда

$$S_2 = \frac{R^2(5\pi - 3)}{6}.$$

Искомое отношение равно

$$S_1 : S_2 = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} : \frac{R^2(5\pi - 3)}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{5\pi - 3}.$$

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi - 3}$.

Пример 16. *Из точки A проведены секущая и касательная к окружности радиуса R. Пусть B — точка касания, а D и C— точки пересечения секущей с окружностью, причем точка D лежит между A и C. Известно, что BD — биссектриса угла B треугольника ABC и ее длина равна R. Найти растояние от точки A до центра окружности.*

Решение. Поскольку угол ABD, образованный касательной к окружности и хордой, измеряется половиной дуги BmD (рис. 222), он равен 30° (дуга BmD, стягиваемая хордой $BD = R$, составляет 60°). Тогда $\angle ABC = 60°$. Далее, $\angle ACB = 30°$, так как он измеряется половиной дуги BmD. Следовательно, угол A — прямой и треугольник BAC — прямоугольный.

Учитывая, что $BD = R$ (по условию), $AB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, по теореме Пифагора из треугольника OBA находим

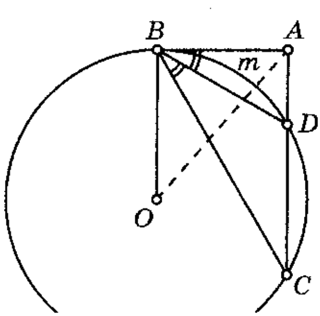


Рис. 222

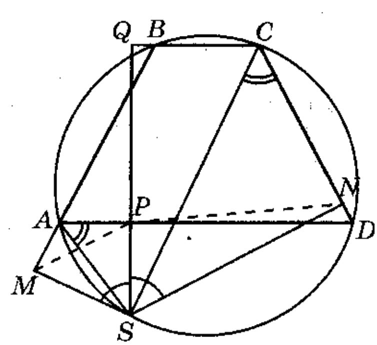


Рис. 223

$$OA=\sqrt{OB^2+AB^2}=\sqrt{R^2+\frac{3R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ. $\frac{R\sqrt{7}}{2}$.

Пример 17. *В окружность вписана трапеция ABCD ($AD\|BC$, $AD>BC$). На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки M, Q, N и P являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны AB, BC, CD и AD (или на продолжения этих сторон). Известно, что $SP=b$, $SQ=a$, а отношение площади треугольника MPS к площади треугольника PNS равно k. Найти длину отрезка SM.*

Решение. Углы SAD и SCD равны, так как они опираются на одну и ту же дугу SD (рис. 223):

$$\angle SAD=\angle SCD.$$

Углы BCD и BAD в сумме составляют $180°$ как углы вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$:

$$\angle BCD+\angle BAD=180°.$$

Поэтому

$$\angle MAD=180°-\angle BAD=180°-(180°-\angle BCD)=\angle BCD,$$

откуда

$$\angle MAS=\angle MAD-\angle SAD=\angle BCD-\angle SCD=\angle QCS, \text{ т. е. } \angle MAS=\angle QCS.$$

Итак, вследствие равенства острых углов подобны две пары прямоугольных треугольников:

$$\Delta AMS\sim\Delta CQS, \text{ откуда } \frac{MS}{QS}=\frac{AS}{CS},$$

$$\Delta APS\sim\Delta CNS, \text{ откуда } \frac{PS}{NS}=\frac{AS}{CS}.$$

Таким образом, $\frac{MS}{QS}=\frac{PS}{NS}$, т. е. $\frac{MS}{a}=\frac{b}{NS}$.

Далее имеем

$$\angle MSP=360°-180°-(\angle MAS+\angle SAD)=$$
$$=360°-180°-(\angle QCS+\angle SCD)=\angle PSN,$$

т. е.

$$\angle MSP=\angle PSN,$$

Следовательно,

$$k = \frac{S_{\Delta MPS}}{S_{\Delta PNS}} = \frac{\frac{1}{2} MS \cdot PS \cdot \sin \angle MSP}{\frac{1}{2} NS \cdot PS \cdot \sin \angle PSN} = \frac{MS}{NS}.$$

Итак, получаем систему уравнений

$$\frac{MS}{a} = \frac{b}{NS}, \ k = \frac{MS}{NS},$$

решив которую находим $MS^2 = abk$, откуда $MS = \sqrt{abk}$.

Ответ. $\sqrt{abk}$.

Пример 18. *В трапеции $ABCD$ угол A равен α, угол D равен β. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание BC трапеции в точке E. Найти отношение $BE : EC$.*

Решение. Положим $BE = x$, $EC = y$ (рис. 224). Пусть F и G — точки, в которых продолжение основания BC пересекается с окружностями (O_1) и (O_2). Используя свойство пропорциональных отрезков в круге, имеем

$$\begin{cases} (BF + x) \cdot y = NE \cdot ME, \\ (CG + y) \cdot x = NE \cdot ME, \end{cases}$$

откуда

$$BF \cdot y = CG \cdot x.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{y} = \frac{BF}{CG}.$$

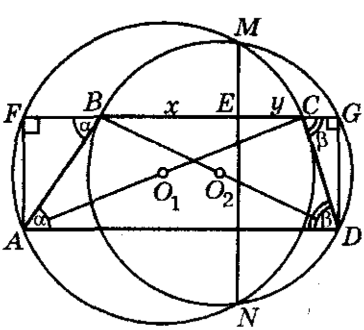


Рис. 224

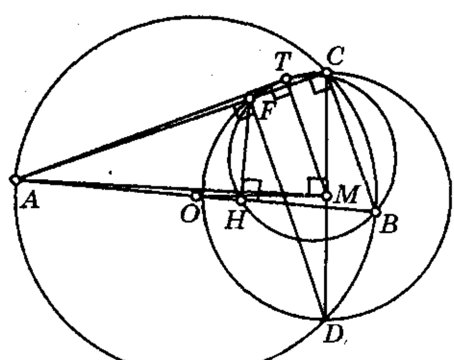


Рис. 225

Пусть H — высота трапеции $ABCD$. Тогда из прямоугольных треугольников AFB и DGC имеем

$$BF = H \operatorname{ctg}\alpha,\ CG = H \operatorname{ctg}\beta,$$

т. е.

$$\frac{x}{y} = \frac{H\operatorname{ctg}\alpha}{H\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}.$$

Ответ: $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$.

Пример 19. *Дан круг с центром O. Через точку внутри круга проведены диаметр AB и хорда CD. Из точки D опущен перпендикуляр DF на хорду AC (F лежит между A и C), а из точки F опущен перпендикуляр FH на AB. Точка M — середина хорды CD. Известно, что $AM = 2MO$, $8AH = 5AB$. Найти угол AMO.*

Решение. Угол CFD — прямой, поэтому через точки C, F и D проходит окружность с диаметром CD и центром M (рис. 225). Если AC — секущая, а AT — касательная к этой окружности, то

$$AF \cdot AC = AT^2 \tag{103}$$

и

$$AT^2 = AM^2 - MT^2 = AM^2 - MC^2, \tag{104}$$

поскольку $MT = MC$.

Около четырехугольника $CFHB$ можно описать окружность, так как углы ACB и FHB — прямые. В этой окружности AC и AB — секущие, поэтому

$$AF \cdot AC = AH \cdot AB. \tag{105}$$

Общая хорда CD двух пересекающихся окружностей с центрами в точках O и M перпендикулярна линии центров OM. Следовательно, из прямоугольного треугольника OMC по теореме Пифагора имеем

$$OM^2 + MC^2 = \frac{1}{4}AB^2. \tag{106}$$

Сложив равенства (104) и (106) и воспользовавшись соотношениями (103), (105) и условием $AH \cdot AB = \frac{5}{8}AB^2$, получим

$$AM^2 + OM^2 = \frac{1}{4}AB^2 + AT^2 = \frac{1}{4}AB^2 + AF \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{4}AB^2 + AH \cdot AB = \frac{1}{4}AB^2 + \frac{5}{8}AB^2 = \frac{7}{8}AB^2. \tag{107}$$

В треугольнике AMO по теореме косинусов имеем

$$AO^2 = AM^2 + OM^2 - 2AM \cdot OM \cdot \cos\alpha, \text{ где } \alpha = \angle AMO. \tag{108}$$

Так как $AO^2 = \frac{1}{4}AB^2$ и по условию $AM = 2OM$, то перепишем равенство (108) следующим образом:

$$\frac{1}{4}AB^2 = 5OM^2 - 4OM^2 \cdot \cos\alpha. \qquad (109)$$

Из равенства (107), учитывая, что $AM = 2OM$, получим

$$5OM^2 = \frac{7}{8}AB^2,$$

откуда

$$AB^2 = \frac{40}{7} \cdot OM^2.$$

Подставив найденное для AB^2 выражение в соотношение (109), имеем

$$\frac{10}{7} \cdot OM^2 = 5OM^2 - 4OM^2 \cdot \cos\alpha,$$

откуда, сокращая на OM^2, находим $\cos\alpha = \frac{25}{28}$.

Ответ. $\arccos\frac{25}{28}$.

Пример 20. *В треугольнике ABC сторона BC служит основанием полукруга, площадь которого равна площади треугольника ABC. Угол A равен α. Найти углы B и C, считая, что $B \geq C$. Исследовать, при каких значениях угла α задача имеет решение.*

Решение. Обозначим стороны треугольника ABC, противолежащие углам A, B и C, через a, b и c соответственно. Из условия равенства площадей треугольника и полукруга имеем

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{\pi a^2}{8}. \qquad (110)$$

По теореме синусов

$$b = a\frac{\sin B}{\sin\alpha},\ c = a\frac{\sin C}{\sin\alpha}.$$

Следовательно, уравнение (110) (после умножения на $\sin\alpha$ и сокращения на $\frac{a^2}{2}$) примет вид

$$\sin B \cdot \sin C = \frac{\pi}{4}\sin\alpha,$$

или

$$\cos(B-C)-\cos(B+C)=\frac{\pi}{2}\sin\alpha.$$

Учитывая, что $A+B+C=\pi$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases}\cos(B-C)=\dfrac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha,\\ B+C=\pi-\alpha,\end{cases}$$

или, так как $0\le B-C<\pi$, к системе

$$\begin{cases}B-C=\arccos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right),\\ B+C=\pi-\alpha,\end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{aligned}B&=\frac{\pi-\alpha}{2}+\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right),\\ C&=\frac{\pi-\alpha}{2}-\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right).\end{aligned}\tag{111}$$

Таким образом,для всех значений α, при которых существует треугольник ABC, удовлетворяющий всем условиям задачи, величины углов B и C вычисляются по формулам (111).

Исследуем, при каких значениях угла α задача имеет решение. Допустимыми являются все значения угла α из интервала $0<\alpha<\pi$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\frac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right|\le 1,$$

т. е.

$$0<\alpha\le 2\operatorname{arctg}\frac{2}{\pi}.\tag{112}$$

При найденных значениях α величины B и C, определяемые по формулам (111), положительны и в сумме с α равны π (чтобы доказать это, достаточно проверить условие $C>0$).

Для треугольника с этими углами A, B и C в силу формул (111) справедливо равенство (110) и выполняется условие $B\ge C$. Таким образом, при всех α из промежутка (112) существует треугольник, удовлетворяющий всем условиям задачи.

Ответ. $B=\dfrac{\pi-\alpha}{2}+\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right),$

$$C=\frac{\pi-\alpha}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha-\cos\alpha\right),$$

где $0<\alpha\leq 2\operatorname{arctg}\frac{2}{\pi}$.

Замечание. Мы рассмотрели пример решения геометрической задачи с исследованием. Часто при решении геометрических задач с исследованием допускают грубую логическую ошибку: область определения формулы, дающей ответ, принимают за область определения задачи. На самом деле область определения формулы-ответа может оказаться шире области определения задачи, т. е. все вычисления по формуле могут быть выполненными, а геометрическая фигура данного вида может не существовать.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Около круга описана трапеция с углами α и β при основании. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

Ответ. $\frac{2}{\pi}\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.

2. Даны две концентрические окружности. Касательная к меньшей окружности делит длину дуги большей окружности в отношении 1 : 5. Найти отношение площадей кругов, ограниченных этими окружностями.

Ответ. 4 : 3.

3. Дан ромб с острым углом α. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

Ответ. $\frac{\pi}{4}\sin\alpha$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся стороны BC. Найти длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

Ответ. $\frac{11}{10}$.

5. Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части и через четыре точки деления этих сторон проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найти отношение площадей треугольников ABC и BDE, если $AB = BC = 3$ и $AC = 4$.

Ответ. $\sqrt{2}:1$.

6. В равнобедренном треугольнике ABC угол B — прямой, а $AB = BC = 2$. Окружность касается обоих катетов в их серединах и высекает на гипотенузе хорду DE. Найти площадь треугольника BDE.

Ответ. $\sqrt{2}$.

7. В окружность радиуса 1 вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в 2 раза больше основания. В этот треугольник вписана окружность. Найти ее радиус.

Ответ. $\frac{3}{8}$.

8. В равнобедренную трапецию, верхнее основание которой равно 1, вписана окружность радиуса 1. Найти площадь трапеции.

Ответ. 5.

9. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании равен α ($\alpha > 45°$), а площадь равна S. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот треугольника ABC.

Ответ. $-2S\cos^2\alpha\cos 2\alpha$.

10. В параллелограмме со сторонами a и b ($a > b$) и углом α проведены биссектрисы четырех внутренних углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

Ответ. $S = (a-b)^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

11. Найти отношение радиусов вписанного и описанного кругов для равнобедренного треугольника с углом α при основании.

Ответ. $\sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

12. Около окружности радиуса r описана равнобедренная трапеция $ABCD$; E и K — точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен 60°. Доказать, что EK параллельна AB, и найти площадь трапеции $ABEK$.

Ответ. $\frac{9\sqrt{3}}{4}r^2$.

13. В прямоугольный треугольник ABC с углом A, равным 30°, вписана окружность радиуса r. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны BC и продолжений двух других сторон. Найти расстояние между центрами окружностей.

Ответ. $2\sqrt{2}r$.

14. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине C, равным 120°. Точка D — середина меньшей из дуг, соединяющих A и C, точка E — середина меньшей из дуг, соединяющих C и B. Доказать, что DE параллельна AB, и найти площадь трапеции $ABED$.

Ответ. $\dfrac{R^2}{2}$.

15. В параллелограмме $ABCD$ с углом A, равным 60°, проведена биссектриса угла B, пересекающая сторону CD в точке E. В треугольник ECB вписана окружность радиуса r. Другая окружность вписана в трапецию $ABED$. Найти расстояние между центрами окружностей.

Ответ. $r\sqrt{7}$.

16. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, сторона которого лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если известно, что центры тяжести треугольника и квадрата совпадают (центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан).

Ответ. $\dfrac{9}{4}$.

17. В треугольнике ABC, площадь которого равна 1, на медиане BK взята точка M так, что $MK = \dfrac{1}{4}BK$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке L. Найти площадь треугольника ALC.

Ответ. $\dfrac{2}{5}$.

18. Вне прямого угла с вершиной C на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC = \sqrt{2}$. Построена окружность радиуса 2 с центром в точке O. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

Ответ. $\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$.

19. Дан угол в 120° с вершиной C. Вне угла на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Построена окружность радиуса 1 с центром в точке O. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

Ответ. $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

20. Внутри прямого угла с вершиной C на его биссектрисе взята точка O так, что $OC = \sqrt{2}$. Построена окружность радиуса 2 с центром в точке O. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

Ответ. $\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}+1.$

21. Внутри угла в 120° с вершиной C на его биссектрисе взята точка O так, что $OC=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Построена окружность радиуса 1 с центром в точке O. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

Ответ. $2\left(\frac{7\pi}{24}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\right)$

22. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C—острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся как 1 : 8. Найти углы треугольника ABC.

Ответ. 45°, 45°, 90°.

23. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 90°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN : BC = 2 : 3$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN параллельна боковой стороне AB и делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $AB : BC$.

Ответ. 4 : 3.

24. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN : NC = 2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найти отношение $AM : MD$.

Ответ. 3 : 4.

25. В треугольнике ABC угол C равен 30°, а угол A — острый. Перпендикулярно стороне BC проведена прямая, отсекающая от треугольника ABC треугольник CNM (точка N лежит между вершинами B и C). Площади треугольников CNM и ABC относятся как 3 : 16. Длина отрезка NM равна половине длины высоты BH треугольника ABC. Найти отношение $AH : HC$.

Ответ. 1 : 3

26. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 39$ см, $BC = 26$ см и боковые стороны $AB = 5$ см и $CD = 12$ см. Найти радиус окружности, которая проходит через точки A и B, а также касается стороны DC или ее продолжения.

Ответ. 12,5 см.

27. Дана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB которой перпендикулярна основаниям. В трапецию вписана окружность с центром в точке O. Через точки A, B, C проведена окружность с центром в точке O_1. Найти диагональ AC, если $OO_1 = 1$ см, а меньшее основание $BC = 10$ см.

Ответ. 13 см.

28. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B. Определить радиус r, если $AB = 12$ см, $R = 8$ см.

Ответ. 24 см.

29. В равнобедренный треугольник ABC вписан ромб $DECF$ так, что вершина E лежит на отрезке BC, вершина F — на отрезке AC и вершина D — на отрезке AB. Найти длину стороны ромба, если $AB = BC = 12$ см, $AC = 6$ см.

Ответ. 4 см.

30. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается изнутри третьей окружности радиуса R в точках A и B. Определить радиус R, если $AB = 11$ см, $r = 5$ см.

Ответ. 55 см.

31. На каждой стороне ромба находится по одной вершине квадрата, стороны которого параллельны диагоналям ромба. Найти длину стороны квадрата, если диагонали ромба имеют длины 8 см и 12 см.

Ответ. 4,8 см.

32. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найти площадь треугольника ABC, зная, что $\angle ABC = \beta$, $\angle CAB = \alpha$.

Ответ. $\dfrac{2R^2 \sin^3\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

33. Окружность радиуса R с центром в точке O проходит через вершины A и B треугольника ABC, пересекает отрезок BC в точке M и касается прямой AC в точке A. Найти длину отрезка CM, зная, что $\angle ACO = \alpha$, $\angle ACO = \alpha$, $\angle MAB = \beta$.

Ответ. $R(\sqrt{\sin^2\beta + \mathrm{ctg}^2\alpha} - \sin\beta)$.

34. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K и сторону AC в точке E. Найти AE, зная, что $AK = KB = a$, $\angle BCK = \alpha$, $\angle CBE = \beta$.

Ответ. $\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} + 8} - \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$

35. Дан треугольник ABC. Окружность радиуса R касается стороны AC в точке M и стороны BC в точке P. Сторона AB пересекает эту окружность в точках K и E (точка E лежит на отрезке BK). Найти BE, зная, что $BC = a$, $CM = b < a$, $\angle KME = \alpha$.

Ответ. $\sqrt{R^2 \sin^2 \alpha + (a-b)^2} - R\sin\alpha$.

36. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них касается двух других внешним образом. Две из них имеют радиус, равный 3, а третья — радиус, равный 1. Найти площадь треугольника ABC, где A, B и C — точки касания трех окружностей.

Ответ. $\dfrac{9\sqrt{7}}{16}$.

37. Вычислить площадь общей части двух ромбов, у первого из которых диагонали равны 2 и 3, а второй получается поворотом первого на 90° около его центра.

Ответ. $\dfrac{12}{5}$.

38. В круг радиуса 1 вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

Ответ. $\dfrac{7}{4} - 2\,\mathrm{tg}\,15°$.

39. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle B = \alpha$, $AB = a$, AH — высота, BE — биссектриса (точка H лежит на стороне BC, точка E — на AC). Точки B и E соединены отрезком. Найти площадь треугольника CHE.

Ответ. $\dfrac{a^2(1-2\cos^2\alpha)\sin 2\alpha}{8\cos^2\alpha(1+2\cos\alpha)}$.

40. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. В каком отношении делит площадь этого треугольника прямая, делящая его основание в отношении 2 : 1 и составляющая острый угол β с меньшей частью основания?

Ответ. $\dfrac{2\cos\alpha\cos\beta}{9\sin(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\sin\beta}$.

41. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 30°, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD.

Ответ. 2,4 см^2.

42. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $BD = 4$ см, $DC = 6$ см. Определить площадь треугольника ADC.

Ответ. $12\sqrt{5}$ см^2.

43. Дан треугольник *ABC*, в котором $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 5$ см. Биссектриса угла *C* пересекает сторону *AB* в точке *D*. Определить площадь треугольника *ADC*.

Ответ. $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ см^2.

44. В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *A* биссектриса угла *B* пересекает сторону *AC* в точке *D*. Известно, что $AB = 6$ см, $BC = 10$ см. Определить площадь треугольника *DBC*.

Ответ. 15 см^2.

45. Около трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* описана окружность радиуса 6 см. Центр описанной окружности лежит на основании *AD*. Основание *BC* равно 4 см. Определить площадь трапеции.

Ответ. $32\sqrt{2}$ см^2.

46. Трапеция *KLMN* с основаниями *KN* и *LM* вписана в окружность, центр которой лежит на основании *KN*. Диагональ *KM* трапеции равна 4 см, а боковая сторона *KL* равна 3 см. Определить длину основания *LM*.

Ответ. 1,4 см.

47. Около трапеции *ABCD* и основаниями *AD* и *BC* описана окружность радиуса 5 см. Центр описанной окружности лежит на основании *AD*. Основание *BC* равно 6 см. Определить диагональ *AC* трапеции.

Ответ. $4\sqrt{5}$ см.

48. Трапеция *KLMN* с основаниями *LM* и *KN* вписана в окружность, центр которой лежит на основании *KN*. Диагональ *LN* трапеции равна 4 см, а угол MNK равен 60°. Определить длину основания *LM* трапеции.

Ответ. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ см.

49. Дана трапеция *ABCD*, причем $BC = a$, $AD = b$. Параллельно основаниям трапеции *BC* и *AD* проведена прямая, пересекающая сторону *AB* в точке *P*, диагональ *AC* — в точке *L*, диагональ *BD* — в точке *R* и сторону *CD* — в точке *Q*. Известно, что $PL = LR$. Найти *PQ*.

Ответ. $\dfrac{3ab}{2a+b}$.

50. На сторонах выпуклого четырехугольника *ABCD*, площадь которого равна 1, взяты точки: *K* на *AB*, *L* на *BC*, *M* на *CD* и *N* на *AD*. При этом $AK : KB = 2$, $BL : LC = 1 : 3$, $CM : MD = 1$, $DN : NA = 1 : 5$. Найти площадь шестиугольника *AKLCMN*.

Ответ. $\frac{11}{12}$.

51. Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найти длины хорд BD и CD.

Ответ. $\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$.

52. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна стороне BC, диагональ AC равна стороне CD, а угол ABC равен углу ACD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD, относятся как 3:4. Найти отношение площадей этих треугольников.

Ответ. 16 : 9.

53. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC (угол B — прямой), площадь которого равна $4+2\sqrt{2}$, вписан в окружность. Точка D лежит на этой окружности, причем длина хорды BD равна 2. Найти длины хорд AD и CD.

Ответ. 2 и $2(1+\sqrt{2})$ или $2(1+\sqrt{2})$ и 2.

54. Биссектриса AE угла A рассекает четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD, в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE. Найти отношение периметров этих треугольников.

Ответ. 3.

55. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведена биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найти площадь четырехугольника $ADOE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$.

Ответ. $\frac{Sb(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}$.

56. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает боковую сторону BC в точке E. Найти площадь треугольника ABE, если известно, что площадь трапеции равна S, ее основание $AB = a$, $AD = b$, $CD = c$, $c < a$.

Ответ. $\frac{a^2S}{(a+c)(a+b-c)}$.

57. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Ответ. $\frac{(a+c)(b+c)(a+b+c)}{ab(a+b+2c)}$.

58. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD, биссектриса угла ABC пересекает отрезок AE в точке O. Найти площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.

Ответ. $\dfrac{ab(3a-b)}{2(a+b)}\sin 2\alpha$.

59. Дан треугольник, сторона основания которого равна a, а угол при вершине равен α. Построена окружность, проходящая через центр вписанного в этот треугольник круга и концы основания. Найти ее радиус.

Ответ. $\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

60. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 1$, $BC = 2$ и угол ABC — тупой. Через каждую из точек B и D проведено по две прямые, одна из которых перпендикулярна стороне AB, а другая перпендикулярна стороне BC. В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ. $\dfrac{6}{5}$.

61. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M, а перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону BC, пересекает BC в точке N так, что $BN = NC$ и $AM = 2MD$. Найти стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5+\sqrt{3}$, $\angle BAD = 90°$ и $\angle ABC = 60°$.

Ответ. $AB = BC = 2$; $AD = \sqrt{3}$; $DC = 1$; $S = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.

62. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону AD в точке N так, что $BM = MC$, $2AN = ND$ и $AM \perp BN$. Найти стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен 14, а $\angle BAD = 60°$.

Ответ. $AB = CD = 2$; $BC = 4$; $AD = 6$; $S = 5\sqrt{3}$.

63. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

64. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$. Найти площадь параллелограмма, если известно, что диагональ AC перпендикулярна отрезку BE, соединяющему вершину B с серединой E стороны AD.

Ответ. $\sqrt{35}$.

65. В треугольнике ABC угол C равен 60°, а радиус круга, описанного около этого треугольника, равен $2\sqrt{3}$. На стороне AB взята точка D так, что $AD = 2DB$ и при этом $CD = 2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ. $3\sqrt{2}$.

66. Найти площадь треугольника ABC, если $AC = 3$, $BC = 4$, а медианы AK и BL взаимно перпендикулярны.

Ответ. $\sqrt{11}$.

67. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, лежащей между точками B и C, причем $BD : BC = \alpha$ $(\alpha < 1)$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке E. Найти отношение площадей треугольников ABD и ECD.

Ответ. $4(1-\alpha)$.

68. Выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C, пересекают диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Отрезок BC равен 1 см. Найти EF.

Ответ. 1 см.

69. В треугольнике KLM проведены KN и LP, пересекающиеся в точке Q. Отрезок PN имеет длину 1 м, а вершина M лежит на окружности, проходящей через точки N, P, Q. Найти стороны и углы треугольника PNQ.

Ответ. $QP = QN = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ м, $PN = 1$ м;

$$\angle NPQ = \angle PNQ = 30°,\ \angle PQN = 120°.$$

70. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найти BC, если известно, что $AC = 1$ м, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E, F.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ м.

71. Выпуклый четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Перпендикуляры, опущенные из вершин K и N на сторону LM, пересекают диагонали LN и KM соответственно в точках P и Q, расстояние между которыми равно 2 м. Найти KN, если известно, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

Ответ. 2 м.

72. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что отрезок OE имеет длину 1 м, а вершина C

лежит на окружности, проходящей через точки E, D, O. Найти стороны и углы треугольника EDO.

Ответ. $EO = OD = 1$ м, $ED = \sqrt{3}$ м;

$\angle DEO = \angle EDO = 30°$, $\angle EOD = 120°$.

73. В равнобедренном треугольнике KLM ($KL = KM$) проведены биссектрисы KN, LP, MQ. Известно, что вершина K лежит на окружности, проведенной через точки N, P, Q. Найти KM, если $KP = 2$ м.

Ответ. $1+\sqrt{17}$ м.

74. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 1$ и $AD = 3$ такова, что в нее можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Определить, где находится центр описанной (около трапеции $ABCD$) окружности, т. е. расположен ли он внутри или вне, или же на одной из сторон трапеции $ABCD$. Найти также площадь описанного круга.

Ответ. Внутри трапеции; $S = \frac{7}{3}\pi$.

75. В равнобедренном треугольнике ABC угол A между равными сторонами AB и AC равен $\frac{\pi}{4}$. Из вершин треугольника ABC на его стороны опущены высоты AA', BB' и CC'. Через точки A, B' и C' проведена окружность O, а через точки B, A' и C' — окружность O'. Найти отношение площади круга O к площади общей части кругов O и O'.

Ответ. $\frac{8\pi}{\pi(3-\sqrt{2})-4}$.

76. В треугольнике ABC заданы углы A и B. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Окружность касается сторон угла A и отсекает на продолжении биссектрисы этого угла за точку D отрезок DE, равный AD. Центр окружности лежит на отрезке AE. Определить отношение площади круга к площади треугольника AEC.

Ответ. $\dfrac{4\pi\sin\frac{A}{2}\sin(A+B)}{\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)^2\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}$.

77. Даны два одинаковых пересекающихся круга. Отношение расстояния между их центрами к радиусу равно $2m$. Третий круг касается внешним образом первых двух и их общей касательной. Определить отношение площади общей части первых двух кругов к площади третьего круга.

Ответ. $\frac{32}{\pi m^4}(\arccos m - m\sqrt{1-m^2})$.

78. В параллелограмме со сторонами 2 и 4 проведена диагональ длиной 3. В каждый из полученных треугольников вписано по окружности. Найти расстояние между центрами окружностей.

Ответ. $\sqrt{\frac{17}{3}}$.

79. В треугольнике ABC с заданными углами A и B из вершины A опущена высота AD. Точка P делит сторону AB пополам. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Определить радиус окружности, если длина стороны BC равна a.

Ответ. $\frac{a}{4\sin^2 B[\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg}(A+B)]}$.

80. В треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = 2a$ и углом $C = 120°$ вписана окружность. Через точки касания этой окружности со сторонами AC и BC, а также через вершину B проведена вторая окружность. Найти ее радиус.

Ответ. $\sqrt{\frac{13-4\sqrt{7}}{2}}$.

81. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 20$ м, $AC = 24$ м. Известно, что вершина C, центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Ответ. $R = 12{,}5$м.

82. В треугольнике KLM угол L — тупой, а длина стороны KM равна 6 м. Найти радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM.

Ответ. $2\sqrt{3}$ м.

83. В треугольнике ABC угол C — тупой; биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки $AE = 3$ м и $EC = 2$ м. Известно, что точка K, лежащая на продолжении стороны BC за вершину C, является центром окружности, проходящей через точки C, E и точку пересечения биссектрисы угла B с биссектрисой угла ACK. Определить расстояние от точки E до стороны AB.

Ответ. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ м.

84. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1 м. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найти длину стороны AC.

Ответ. $\sqrt{3}$ м.

85. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги AB, дуги OC и прямой OA, а окружность S_2 касается дуги AB, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

Ответ. $\frac{4}{3}(2+\sqrt{3})$.

86. В прямоугольном секторе AOB проведена хорда AB и в образовавшийся сегмент вписан квадрат. Найти отношение стороны квадрата к радиусу окружности, которая касается хорды AB, дуги AB и стороны квадрата, перпендикулярной хорде AB.

Ответ. $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(3+\sqrt{5})}{6\sqrt{2}}$.

87. В прямоугольном секторе AOB из точки B как из центра проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги AB, дуги OC и прямой OA, а окружность S_2 касается дуги OC, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

Ответ. $\frac{7+2\sqrt{6}}{6}$.

88. В прямоугольном секторе AOB проведена хорда AB. Окружность S_1 с центром на биссектрисе центрального угла сектора касается хорды AB и дуги AB. Окружность S_2 касается хорды AB, дуги AB и окружности S_1. *Окружность S_3, отличная от S_1, касается хорды AB, дуги AB и окружности* S_2. Найти отношение радиуса окружности S_2 к радиусу окружности S_3.

Ответ. $\frac{50-31\sqrt{2}}{4}$.

89. Даны углы α, β, γ треугольника ABC. Пусть A', B', C' — точки пересечения биссектрис внутренних углов треугольника ABC с окружностью, описанной около этого треугольника. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A'B'C'$.

Ответ. $8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

90. Даны длины высот $AA' = h_a$ и $BB' = h_b$ треугольника ABC и длина $CD = l$ биссектрисы угла C. Найти угол C.

Ответ. $2\arcsin\dfrac{h_a h_b}{l(h_a+h_b)}$.

91. В круговой сектор, ограниченный радиусами OA и OB с центральным углом $\alpha\left(\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, вписан квадрат так, что две его соседние вершины лежат на радиусе OA, третья вершина — на радиусе OB, а четвертая вершина — на дуге AB. Найти отношение площадей квадрата и сектора.

Ответ. $\dfrac{2\sin^2\alpha}{\alpha(1+\sin 2\alpha+\sin^2\alpha)}$, где α — мера угла AOB в радианах.

92. Даны две концентрические окружности, радиусы которых равны r и R, $r<R$. Через некоторую точку P меньшей окружности проведена прямая, не проходящая через центр окружностей и пересекающая большую окружность в точках B и C. Пусть перпендикуляр к BC, проходящий через точку P, пересекает меньшую окружность в точке A. Найти сумму $PA^2 + PB^2 + PC^2$.

Ответ. $2(R^2+r^2)$.

93. Дан угол AOB, равный $\alpha\,(\alpha<\pi)$. На стороне OA взята точка C, а на стороне OB — точка D, причем $OC=a\neq 0$, $OD=b\neq 0$. Построена окружность, касающаяся стороны OA в точке C и проходящая через точку D. Пусть эта окружность вторично пересекает сторону OB в точке E. Вычислить радиус построенной окружности и длину хорды DE.

Ответ. $\dfrac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2b\sin\alpha}$, $DE=\dfrac{|a^2-b^2|}{b}$.

94. В треугольнике ABC даны углы B, C и длина a стороны BC. Через середину O стороны AB и вершину A проведена окружность, касающаяся стороны BC. Вычислить радиус этой окружности.

Ответ. $\dfrac{a\sin C(3-2\sqrt{2}\cos B)}{4\sin B\sin(B+C)}$.

95. Около равнобедренного треугольника ABC описана окружность. Через вершину A проведена хорда длины m, пересекающая основание BC в точке D. Дано отношение $\dfrac{BD}{DC}=k$ и угол $A\left(A<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Найти радиус окружности.

Ответ. $\dfrac{m}{2}\sqrt{(1-2k)^2\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}+1}$.

96. Внутри острого угла, равного α, взята точка M, отстоящая от сторон угла на расстояния a и $2a$. Найти радиус окружности, проходящей через точку M и касающейся сторон угла.

Ответ. $\dfrac{3a \pm a\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

97. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности лежит на отрезке, соединяющем вершину A с серединой F стороны CD, а центр второй окружности — на отрезке, соединяющем вершину C с серединой E стороны AB. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD; вторая — сторон AB, BC и CD. Найти AC.

Ответ. $2\sqrt{5}$.

98. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ заключены две окружности одинакового радиуса r, касающиеся друг друга внешним образом. Центр первой окружности лежит на отрезке, соединяющем вершину D с серединой E стороны AB, а центр второй окружности — на отрезке CE. Первая окружность касается сторон AB, AD и CD, а вторая — сторон AB, BC и CD. Найти синус угла между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

Ответ. $\dfrac{4}{5}$.

99. Точка E стороны BC и точка F стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ расположены так, что $BE = 2EC$ и $AF = 2FD$. На отрезке AE лежит центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, BC и CD, а на отрезке BF — центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон AB, AD и CD. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

Ответ. $8r^2$.

100. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ лежит центр окружности радиуса r, касающейся сторон AB, AD и BC, а на диагонали BD — центр окружности такого же радиуса r, касающейся сторон BC, CD и AD. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, зная, что указанные окружности касаются друг друга внешним образом.

Ответ. $4(\sqrt{2}+1)r^2$.

101. В остроугольный треугольник ABC вписан полукруг так, что его диаметр лежит на стороне AB, а дуга касается сторон AC и BC. Найти радиус окружности, касающейся дуги этого полукруга и сторон AC и BC треугольника, если $AC = b$, $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$.

Ответ. $\dfrac{ab}{a+b}\sin\alpha\dfrac{1-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1+\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

102. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D — прямые, сторона AB параллельна стороне CD, известны длины трех ее сторон: $AD = 5$, $AB = 1$, $CD = 4$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA. В каком отношении точка M делит сторону AD?

Ответ. 2 : 3.

103. Прямоугольные треугольники ACB и ADB лежат по одну сторону от их общей гипотенузы AB. Угол CAB равен α, угол ABD равен β, причем и α, и β больше $\dfrac{\pi}{4}$. На AD взята точка M, а на CB — точка N так, что отрезок MN параллелен AB. Найти отношение площадей треугольников ACM и BDN.

Ответ. $\cos^2\alpha : \cos^2\beta$.

104. Центры трех окружностей различных радиусов расположены на одной прямой, а центр четвертой находится на расстоянии d от этой прямой. Найти радиус четвертой окружности, если известно, что каждая из этих окружностей касается трех других.

Ответ. $\dfrac{d}{2}$.

105. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AB равна C, а угол при вершине A равен α. На продолжении гипотенузы AB за точку B взята точка M, а на продолжении катета AC за точку C взята точка N так, что $BM = CN$. Найти длину общей хорды окружностей, описанных около треугольников ABC и AMN.

Ответ. $c\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

106. В окружности радиуса R проведены две хорды AB и AC. На хорде AB или на ее продолжении за точку B взята точка M, расстояние от которой до прямой AC равно длине хорды AC; на хорде AC или на ее продолжении за точку C взята точка N, расстояние от которой до прямой AB равно длине хорды AB. Найти длину отрезка MN.

Ответ. $2R$.

107. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, а угол при вершине A равен α. На стороне AB взята точка D так, что $BD = AC$. Пусть E — середина отрезка AD, а F — середина отрезка BC. Найти угол BEF.

Ответ. $\frac{\alpha}{2}$.

108. В окружность вписана трапеция $ABCD$ $(AD \| BC,\ AD > BC)$. На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны AD, BC, AB и CD (или на продолжения этих сторон). Известно, что $SP = a$, $SQ = b$, $SN = c$. Найти отношение площади треугольника MQS к площади треугольника NQS.

Ответ. $ab : c^2$.

109. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны AD, BC, AB и CD (или на продолжения этих сторон). Известно, что $SP = d$, а отношение площади треугольника NQS к площади треугольника MPS равно m. Найти длину отрезка SN.

Ответ. $d\sqrt{m}$.

110. В окружность вписана трапеция $ABCD$ $(AD \| BC,\ AD > BC)$. На дуге CD, не содержащей вершин A и B, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из S соответственно на стороны CD, AB, AD и BC (или на продолжения этих сторон). Известно, что $SM = a$, $SN = b$, $SP = c$. Найти отношение площади треугольника MQS к площади треугольника MPS.

Ответ. $ab : c^2$.

111. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от вершины E до сторон AB, BC и CD (или их продолжений) соответственно равны a, b и c. Найти расстояние от вершины E до диагонали AD.

Ответ. $\frac{ac}{b}$.

112. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Точки M, Q, N и P являются основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины E соответственно на стороны AB, BC, CD (или их продолжения) и диагональ AD. Известно, что $EP = d$, а отношение площади треугольника MQE к площади треугольника PNE равно. k. Найти длину отрезка EM.

Ответ. $d\sqrt{k}$.

113. В треугольнике ABC угол B равен $\frac{\pi}{4}$, угол C равен $\frac{\pi}{3}$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F. Найти отношение длины отрезка NF к длине отрезка FM.

Ответ. $\sqrt{3}$.

114. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $\frac{\pi}{4}$, угол D равен $\frac{\pi}{3}$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найти отношение длины отрезка AE к длине отрезка ED.

Ответ. $\sqrt{3}$.

115. В треугольнике ABC угол B равен $\frac{\pi}{4}$, угол C равен $\frac{\pi}{6}$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D. Найти отношение длины отрезка BD к длине отрезка DC.

Ответ. $1:\sqrt{3}$.

116. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $\frac{\pi}{4}$, угол D равен $\frac{\pi}{6}$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание BC в точке F. Найти отношение длины отрезка BF к длине отрезка FC.

Ответ. $1:\sqrt{3}$.

117. В остроугольном треугольнике ABC угол C равен $\frac{\pi}{3}$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает сторону BC в точке D такой, что $BD:DC=\sqrt{3}$. Найти угол B.

Ответ. $\frac{\pi}{4}$.

118. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $\frac{\pi}{6}$, угол D равен $\frac{\pi}{3}$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках K и L. Найти отношение площадей четырехугольников, на которые хорда KL разбивает трапецию $ABCD$.

Ответ. 3:1.

119. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и около него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB = 2BC$.

Ответ. $\frac{8R^2}{5}$.

120. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R и описан около другой окружности, которая касается сторон четырехугольника в точках K, L, M, N. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что она в 3 раза больше площади четырехугольника $KLMN$, а угол между диагоналями AC и BD равен γ.

Ответ. $\frac{4}{3}R^2 \sin\gamma$.

121. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и около него можно описать окружность. Диагональ AC делит площадь четырехугольника пополам. Найти длину диагонали BD, если радиус вписанной окружности равен r, а периметр четырехугольника равен P.

Ответ. $\frac{2Pr}{\sqrt{P^2 - 4Pr}}$.

122. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие четырехугольник, который также можно вписать в окружность. Найти площадь четырехугольника $KLMN$, если его периметр равен P и $NM = 2ML = 8LK$.

Ответ. $\frac{9P^2}{200}$.

§ 2. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Как правило, решение геометрической задачи на построение выполняется в четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Однако может быть использована и двухэтапная схема, состоящая из анализа и синтеза (построения с доказательством).

Среди школьных методов решения задач на построение с помощью циркуля и линейки отметим следующие:

1) метод геометрических преобразований;

2) алгебраический метод;

3) метод геометрических мест точек.

При решении задач на построение и доказательство используются различные геометрические преобразования: симметрия, вращение, параллельный перенос, подобие, инверсия и другие. Например, построив фигуры, подобные искомой, выбирают из них ту, которая удовлетворяет всем условиям поставленной задачи. В этом состоит ***метод подобия*** решения задач на построение.

Алгебраический метод решения задач на построение заключается в построении линейных элементов искомой геометрической фигуры по алгебраическим формулам. Эти формулы, как правило, получаются из алгебраических или тригонометрических уравнений, связывающих неизвестные элементы с данными элементами.

Зная построение отрезков, выражаемых четырьмя основными формулами:

$$x = \frac{ab}{c},\ x = \sqrt{ab},\ x = \sqrt{a^2 + b^2},\ x = \sqrt{a^2 - b^2},$$

можно построить отрезок, который определяется любой формулой первого измерения относительно входящих в нее букв, представляющей собой комбинацию этих четырех формул.

Например, отрезок, определяемый формулой

$$x = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\,ab}{a^2 - b^2}},$$

строим следующим образом. Построив отрезки

$$u = \sqrt{a^2 + b^2},\ v = \sqrt{ab},\ w = \sqrt{a^2 - b^2},$$

получим $x = \dfrac{uv}{w}$.

Иногда бывает удобно ввести вспомогательный отрезок.

Метод геометрических место точек решения задач на построение состоит в следующем. Отбрасывая одно из условий задачи, находят геометрическое место точек, удовлетворяющих всем, кроме одного, условиям задачи. Поступив аналогично с каким-либо другим условием задачи, находят второе геометрическое место точек, также удовлетворяющих всем условиям задачи, кроме отброшенного. Точки пересечения найденных двух геометрических место являются искомыми, так как они уже удовлетворяют всем условиям исходной задачи.

Из множества геометрических мест точек укажем следующие:

I. Геометрическое место точек, отстоящих на данное расстояние a от данной точки M, есть окружность, проведенная из центра M радиусом a.

II. Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек M и N, есть перпендикуляр, восставленный к отрезку MN в его середине.

III. Геометрическое место точек, отстоящих на данное расстояние a от прямой AB, составляют две прямые CD и MN, отстоящие от AB на расстояние a.

IV. Геометрическое место точек, делящих в данном отношении параллельные отрезки прямых, проведенных внутри данного угла, есть прямая, проходящая через вершину этого угла и одну из таких точек.

V. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, составляют две дуги, опирающиеся на данный отрезк и вмещающие данный угол.

VI. Геометрическое место середин равных хорд, проведенных в данной окружности O, есть концентрическая окружность, касательная к одной из этих равных хорд

VII. Точки, из которых данная окружность O видна под данным углом, составляют концентрическую окружность определенного радиуса.

VIII. Геометрическое место точек таких, что касательные, проведенные из них к данной окружности радиуса r, равны данному отрезку a, есть концентрическая окружность радиуса, равного $\sqrt{a^2+r^2}$.

IX. Геометрическое место вершин треугольников, равновеликих данному треугольнику ABC и имеющих общее с ним основание AC, составляют две прямые, проведенные от AC на расстоянии, равном высоте BD треугольника ABC.

X. Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна a^2, есть окружность определенного центра и радиуса.

XI. Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек M и N равна a^2, есть перпендикуляр к MN в точке E, определяемой равенством $EM^2 - EN^2 = a^2$.

XII. Геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных точек A и B находятся в данном отношении $m : n$, есть окружность определенного центра и радиуса.

XIII. Геометрическое место точек таких, что касательные, проведенные из них к данным двум окружностям, равны, есть прямая, перпендикулярная линии центров в определенной точке.

XIV. Геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и пересекающих данную окружность под определенным углом, есть окружность, концентрическая данной.

УПРАЖНЕНИЯ

1. С помощью циркуля и линейки выполнить следующие простейшие построения:

а) разделить пополам данный отрезок;

б) провести перпендикуляр к прямой через точку, лежащую наней;

в) провести перпендикуляр к прямой через точку, не лежащую на ней;

г) построить угол, равный данному;

д) разделить данный угол пополам (построить биссектрису данного угла).

2. Построить прямоугольный треугольник:

а) по катету и сумме гипотенузы с другим катетом;

б) по двум катетам;

в) по катету и острому углу, прилежащему к данному катету;

г) по катету и гипотенузе;

д) по гипотенузе и острому углу;

е) по гипотенузе и отношению катетов;

ж) по катету и разности между гипотенузой и другим катетом;

з) по катету и отношению другого катета к гипотенузе;

и) по гипотенузе и сумме катетов;

к) по сумме катетов и острому углу.

3. Построить равнобедренный треугольник:

а) по основанию и высоте;

б) по основанию и углу при основании;

в) по углу при основании и боковой стороне;

г) по боковой стороне и углу при вершине;

д) по основанию и высоте, проведенной к боковой стороне;

е) по основанию и боковой стороне;

ж) у которого основанием служит данный отрезок, а вершина находится на данном расстоянии от данной точки.

4. Построить треугольник:

а) по двум углам и прилежащей к ним стороне;

б) по двум сторонам и заключенному между ними углу;

в) ло стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон;

г) по двум углам и высоте, опущенной из вершины третьего угла;

д) по стороне, противолежащему ей углу и высоте, опущенной на эту сторону;

е) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них;

ж) по стороне, высоте и медиане, проведенными к другой стороне;

з) по трем медианам;

и) по отрезкам, отсекаемым биссектрисой на его основании, и длине биссектрисы;

к) по данному основанию, медиане и высоте, проведенными к основанию.

5. Методом геометрических мест точек построить:

а) треугольник по трем его сторонам;

б) равносторонний треугольник по его стороне;

в) окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки;

г) окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности;

д) окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей;

е) окружность, проходящую через три данные точки;

ж) окружность, касающуюся трех равных окружностей;

з) окружность, касающуюся трех данных прямых;

и) окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой;

к) окружность данного радиуса, касающуюся данной окружности и отсекающую от данной прямой хорду данной длины;

л) треугольник, зная угол и две высоты, опущенные на стороны, которые образуют данный угол;

м) окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и проходящую через данную точку;

н) окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и третьей прямой, их пересекающей.

6. Методом геометрических преобразований построить:

а) четырехугольник по трем сторонам и двум углам, которые образует четвертая сторона с первой и третьей;

б) треугольник по высоте, углу при основании и отношению боковых сторон;

в) треугольник по углу при основании, отношению боковых сторон и радиусу вписанной окружности;

г) параллелограмм по углу, отношению сторон и сумме диагоналей;

д) ромб по отношению диагоналей и высоте;

е) прямоугольник по углу между диагоналями и периметру.

7. Для решения следующих задач применить алгебраический метод. Считая отрезки a, b, c, d заданными, построить отрезки, выражаемые формулами:

а) $\sqrt{\dfrac{abc}{d}}$; б) $\dfrac{a^2b}{cd}$; в) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; г) $\dfrac{\sqrt{a^4-b^4}}{a}$;

д) $\dfrac{\sqrt{(a^3+ab^2)c}}{b}$; е) $\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2)ab}{a^2-b^2}}$; ж) $\sqrt{\dfrac{a^3bc}{d^3}}$.

8. Дана окружность. С помощью циркуля и линейки построить ее центр.

9. Провести через точку, находящуюся вне круга, прямую, на которой окружность высекает отрезок заданной длины.

10. Построить треугольник по его периметру и двум углам.

11. Провести через точку внутри круга хорду заданной длины.

12. Дана окружность и точка вне ее. Провести через эту точку секущую так, чтобы отрезок секущей вне окружности был бы равен отрезку внутри нее.

13. Данный треугольник разделить на три треугольника, площади которых относятся как 2 : 3 : 5.

14. Построить окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через фиксированную точку внутри угла.

15. Заданы отрезки длиной *a*, *b*, *c* и *d*. Построить отрезки, выражаемые следующими формулами:

а) $\sqrt{a^2+ab+bc}$; б) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

в) $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{3a^2+5b^2}$; д) $a\sqrt[4]{2}$; е) $\sqrt{ab+cd}$;

ж) $\sqrt[4]{abcd}$; з) $\sqrt[4]{a^3b+ab^3}$; и) $\sqrt{\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{c^3}{d}}$; к) $\dfrac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$.

16. Даны отрезки *a*, *b*, *c* и *d*. Построить отрезок *x* такой, что

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

17. Даны отрезки *a* и *b*. Построить отрезок *x* такой, что

$$\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}.$$

18. Вписать в данный сегмент квадрат.

19. Построить треугольник по трем его высотам.

20. Даны прямая и две точки по одну сторону от нее. Построить окружность, проходящую через данные точки и касающуюся данной прямой.

21. Построить трапецию, если известны ее нижнее основание, высота и отрезок, соединяющий середины верхнего и нижнего оснований, при условии, что сумма углов при ее нижнем основании равна 90°.

22. С помощью циркуля разделить окружность на четыре равные части.

23. Найти геометрическое место середин хорд данной окружности, параллельных данной прямой.

Ответ. Диаметр данной окружности, перпендикулярный данной прямой.

24. Найти геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку внутри окружности.

Ответ. Окружность.

25. Даны окружность и точка *C* вне ее. Рассматривается множество лучей, исходящих из точки *C* и пересекающих данную окружность. Найти геометрическое место середин хорд.

Ответ. Дуга, проходящая через центр окружности; концами дуги являются точки касания лучей с окружностью.

26. Найти на плоскости геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных пересекающихся прямых постоянна.

Ответ. Контур прямоугольника.

27. Найти на плоскости геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из заданной точки A на произвольные прямые, проходящие через данную точку B.

Ответ. Окружность с диаметром AB.

28. Какую линию описывает середина отрезка единичной длины, концы которого скользят по двум сторонам данного прямого угла?

Ответ. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в вершине данного прямого угла.

29. Какую фигуру образуют в пересечении биссектрисы внутренних углов параллелограмма?

Ответ. Прямоугольник.

30. Где находится центр тяжести треугольника, сделанного из однородной проволоки?

Ответ. В центре окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника.

31. Найти геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок виден под острым углом.

Ответ. Все точки плоскости вне окружности, диаметром которой служит данный отрезок.

32. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под углом α.

Ответ. Пара дуг, вмещающих угол α и опирающихся на хорду AB (причем концы указанных дуг окружностей исключаются).

33. Найти геометрическое место точек касания двух окружностей, касающихся данной прямой в двух данных фиксированных точках A и B.

Ответ. Окружность с диаметром AB, кроме самих точек A и B.

34. На плоскости даны два отрезка AB и CD. Найти геометрическое место середин отрезков, у которых один конец лежит на отрезке AB, а другой — на отрезке CD.

Ответ. Параллелограмм со сторонами, параллельными данным отрезкам AB и CD.

35. Через данную точку, лежащую внутри данного угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

Указание. Отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится данной точкой пополам.

36. Доказать, что треугольник является прямоугольным, если его медиана равна половине стороны, к которой она проведена.

37. Доказать, что биссектрисы двух смежных углов пересекаются под прямым углом.

38. Один из внешних углов треугольника вдвое больше внутреннего угла, не смежного с ним. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.

39. Доказать, что в равнобедренном треугольнике внешний угол при вершине в 2 раза больше каждого внутреннего угла при основании.

40. В треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Доказать, что треугольники DBE и ABC подобны.

41. Доказать, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

42. Доказать, что высота h_a треугольника ABC, опущенная из вершины A на сторону BC, и прямая, проходящая через эту вершину и центр окружности, описанной около данного треугольника, образуют одинаковые углы с боковыми сторонами AB и AC.

43. В окружности проведены равные хорды. Доказать, что соответствующие части этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения, равны.

44. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанного и описанного кругов.

45. Доказать, что трапеция, около которой можно описать окружность,— равнобедренная.

46. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD перпендикулярны. Доказать, что $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

47. Окружность высекает на всех сторонах четырехугольника равные хорды. Доказать, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

48. Доказать, что если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

49. Доказать, что если соединить середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, то получится параллелограмм.

50. Доказать, что если углы выпуклого пятиугольника составляют арифметическую прогрессию, то каждый из них больше 36°.

51. Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, у которой сумма углов при основании равна 90°, равен полуразности оснований.

52. Доказать, что если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

53. Доказать, что если точка пересечения диагоналей трапеции находится на одинаковом расстоянии от боковых сторон, то трапеция равнобедренная.

54. Доказать, что если каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника делит его на равновеликие треугольники, то этот четырехугольник — параллелограмм.

55. Доказать, что точка M пересечения диагоналей трапеции делит пополам отрезок прямой, проходящей через точку M и параллельной основанию.

56. Доказать, что если окружности, построенные на боковых сторонах трапеции как на диаметрах, касаются, то в эту трапецию можно вписать окружность.

57. Доказать, что сумма расстояний от точки, взятой произвольно внутри равностороннего треугольника, до его сторон постоянна и равна высоте треугольника.

58. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

59. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная другой диагонали. Эти прямые пересекаются в точке O. Доказать, что отрезки, соединяющие точку O с серединами сторон четырехугольника, делят его площадь на равные части.

60. Доказать, что отрезки, соединяющие основания высот данного треугольника, образуют треугольник, для которого высоты данного треугольника являются биссектрисами.

61. Доказать, что в треугольнике сумма медиан меньше его периметра.

62. Доказать, что сумма высот всякого треугольника меньше его периметра.

63. Доказать, что полусумма двух сторон треугольника больше медианы, лежащей между этими сторонами.

64. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ угол A — острый, а остальные три угла — тупые. Доказать, что $AC > BD$.

65. Доказать неравенство $ab+bc+ca<2c^2$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC.

66. Доказать, что для прямоугольного треугольника выполняется неравенство $\frac{p}{h_c} \geq 1+\sqrt{2}$, где p — его полупериметр, h_c — высота, опущенная на гипотенузу.

67. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а S — его площадь. Доказать, что $a^4+b^4+c^4 \geq 16S^2$.

68. Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Пусть S — площадь трапеции, S_1 и S_2 — площади двух треугольников, которые примыкают к основаниям трапеции. Доказать, что $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$.

69. Площадь выпуклого четырехугольника равна S, его диагонали пересекаются в точке M. Доказать, что если площади S_1 и S_2 треугольников MAB и MCD удовлетворяют условию $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$, то данный четырехугольник есть трапеция.

70. Доказать, что если m_a, m_b, m_c — медианы треугольника, причем $m_a : m_b : m_c = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$, то треугольник — прямоугольный.

71. Доказать, что для того чтобы треугольник был тупоугольным, необходимо и достаточно, чтобы его ортоцентр (точка пересечения высот) лежал вне окружности, описанной около этого треугольника.

72. Доказать, что окружность, проходящая через середины сторон треугольника, касается окружности, вписанной в этот треугольник.

73. Доказать, что точки пересечения биссектрис внутренних углов выпуклого четырехугольника лежат на одной окружности.

74. Медиана CD треугольника ABC, в котором $AC > BC$, касается окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, соответственно в точках E и F. Доказать, что $2EF = AC - BC$.

75. Доказать, что множество точек, отношение расстояний которых до двух данных точек известно, представляет собой окружность.

76. Из произвольной точки, лежащей на окружности, на два ее диаметра опущены перпендикуляры. Доказать, что длина отрезка, соединяющего их основания, не зависит от положения точки.

77. Доказать, что сумма квадратов обратных величин диагоналей вписанного в окружность четырехугольника не превосходит среднего арифметического квадратов обратных величин его сторон.

78. Доказать, что $3 < \pi < 4$.

79. Дан параллелограмм $ABCD$. В треугольники ABC, ACD, ABD, BCD вписаны окружности. Доказать, что точки касания этих окружностей и диагоналей параллелограмма являются вершинами прямоугольника.

80. Дан выпуклый четырехугольник. На каждой его стороне как на диаметре построен круг. Доказать, что эти круги покрывают четырехугольник.

81. Доказать, что длины трех сторон прямоугольного треугольника не могут быть выражены простыми числами.

82. Доказать, что если в прямоугольном треугольнике все стороны выражаются целыми числами, то и его площадь выражается целым числом.

83. Дан треугольник со сторонами a, b, c, причем $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доказать, что медианы, проведенные к сторонам a и b, взаимно перпендикулярны.

84. В круговой сектор с углом 60° вписан квадрат $ABCD$, вершины A и B которого лежат на дуге. Доказать, что эти вершины делят дугу сектора в отношении 1 : 2 : 1.

85. На сторонах равнобедренного треугольника внешним образом построены квадраты. Доказать, что расстояние между центрами квадратов, построенных на боковых сторонах, равно расстоянию от центра квадрата, построенного на основании, до противоположной вершины треугольника.

86. На сторонах параллелограмма построены квадраты, лежащие вне его. Доказать, что их центры являются вершинами некоторого квадрата.

87. Через центр правильного треугольника проведена в плоскости треугольника произвольная прямая. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершины треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

88. Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника.

89. Доказать, что треугольник с двумя равными биссектрисами равнобедренный.

90. Внутри прямоугольника $ABCD$ с диагоналями AC и BD взята произвольная точка O и соединена с вершинами прямоугольника. Доказать, что площади треугольников AOC и BOD относятся как тангенсы углов AOC и BOD.

91. В окружность вписан треугольник ABC. Касательные к окружности, проходящие через точки A и B, пересекаются в точке S. Прямая CS пересекает AB в точке M. Доказать, что $AM : MB = b^2 : a^2$, где $a = BC$, $b = AC$.

92. В окружности радиуса R проведены три диаметра, образующие между собой последовательно углы α, β и γ. Из произвольной точки M, расположенной на окружности, опущены на диаметры перпендикуляры MA, MB и MC. Доказать, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

93. Окружности C_1 и C_2 радиусов R_1 и R_2 касаются друг друга внешним образом. Доказать, что радиус окружности, касающейся данных окружностей и их общей внешней касательной, равен $\frac{R_1R_2}{(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})^2}$.

94. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол $A = 90°$, а угол $C \le 90°$. Из вершин B и D на диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Известно, что $AE = CF$. Доказать, что угол C — прямой.

95. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C — прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Доказать, что $CE = FA$.

96. Внутри отрезка AB взята точка C. По одну сторону от прямой AB построены равнобедренные треугольники ADC и CEB, причем $AD = DC = CE = EB$. Точка F находится на расстоянии, равном AD, от вершин D и E и не совпадает с точкой C. Доказать, что $AF = FB$.

97. Даны две окружности одинакового радиуса, которые пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена их общая секущая, пересекающая окружности еще в точках C и D. Через точку B проведена прямая, перпендикулярная этой секущей. Она пересекает окружности еще в точках E и F. Доказать, что точки C, E, D и F являются вершинами ромба.

ГЛАВА VII

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

При классификации задач по стереометрии (и вообще по геометрии) мы сталкиваемся с рядом трудностей. А именно, классифицировать стереометрические задачи по виду фигур (многогранники, круглые тела и т. д.) вряд ли целесообразно; по методу их решения — также нецелесообразно, поскольку одну и ту же задачу по стереометрии часто можно решить многими различными методами; классифицировать по типу задач (задачи на вычисление, доказательство и построение) снова не хорошо, так как в одной задаче могут встретиться вопросы, связанные и с вычислением, и с доказательством, и с построением, с применением тригонометрии и без ее применения, с применением алгебры и арифметики.

Следует отметить, что даже разделение геометрических задач на планиметрические и стереометрические не всегда возможно, так как имеются задачи, где эти разделы геометрии органически слиты.

Таким образом, всякое деление задач по геометрии несколько условно. *Каждый из трех упомянутых возможных способов классификации геометрических задач (по виду фигур, по методу решения, по типу задач) не является универсальным.*

В § 1 рассмотрены в основном задачи на вычисление — точнее, задачи, при решении которых применяются вычислительные методы; § 2 посвящен специально вычислению основных элементов трехгранного угла; в § 3 включены задачи, существенно связанные с доказательством и построением (в частности, с построением сечений и т. д.). Будут рассмотрены *некоторые методы решения стереометрических задач (алгебраический метод, метод геометрических мест, метод проекций и т. д.).*

§ 1. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

1. Методические указания к решению задач по стереометрии

Задача по стереометрии, как правило, является наиболее трудоемкой частью письменной экзаменационной работы по математике. Особые трудности стереометрия вызывает у абитуриентов прежде всего из-за отсутствия четкого пространственного воображения, неумения хорошо представлять себе геометрический объект, о котором идет речь в условии задачи.

Именно правильное представление пространственного геометрического объекта является иногда ключевым моментом в решении стереометрической задачи.

Другим важным моментом при решении задачи является построение чертежа. Необходимо соблюдать ряд требований, предъявляемых к стереометрическим чертежам. А именно, всякий стереометрический чертеж должен являться определенной проекцией данной пространственной фигуры. Проекции всех элементов геометрического объекта должны быть построены с помощью одного и того же способа проектирования. Только такой чертеж может считаться верным. Изображение должно быть наглядным, а построение достаточно простым, чтобы его можно было выполнить за сравнительно короткое время. Отметим, что параллельные проекции лучше других удовлетворяют этим требованиям.

Чертеж следует выполнить аккуратно («от руки»), а все построения нужно объяснять в тексте.

Часто оказывается целесообразным дать еще один чертеж, на котором выделяют наиболее существенные детали на данном этапе решения задачи.

Необходимо помнить, что плоский чертеж пространственных конфигураций дает искажения реальных взаимоположений тел. При любом методе проектирования изображение теряет некоторые свойства оригинала.

При решении задачи ссылаться на какие-либо особенности чертежа нельзя, так как чертеж не заменяет логического доказательства геометрического факта, а является лишь иллюстрацией к доказательству.

Доказательство и вычисление присущи почти каждой задаче по стереометрии. Доказательство необходимо для обоснования вычислений. Неполнота доказательства является самой распространенной ошибкой абитуриентов. Объяснение должно быть достаточно полным, но не многословным. Необходимо делать ссылки на все применяемые при доказательстве теоремы и определения. От поступающего требуется умение выделять в задаче основные, узловые моменты и аккуратно их доказывать.

Ответ в стереометрической задаче может иметь различные формы записи. Это зависит как от идеи, положенной в основу решения задачи, так и от избранного пути преобразований. Форма, в которой дан ответ, — не существенна, хотя и желательно, чтобы она была наиболее простой. Приводить ответ к виду, удобному для логарифмирования, не обязательно, если это не требуется по условию задачи.

Остановимся на двух постановках вопроса при толковании условия стереометрической (и вообще геометрической) задачи.

Решение стереометрической задачи с буквенными данными можно выполнить двояко: без исследования и с исследованием. Это соответствует двум различным интерпретациям условия данной стереометрической задачи.

Решение задачи без исследования соответствует следующей постановке вопроса. По заданным известным элементам некоторой существующей фигуры требуется вычислить указанные в условии задачи неизвестные элементы. При такой постановке вопроса необходимость доказательства существования геометрической фигуры, о которой идет речь в условии, отпадает.

Решение задачи с исследованием соответствует следующей постановке вопроса. Требуется не только получить формулы для искомых элементов, но и провести исследование, т. е. установить необходимые и достаточные условия существования фигуры, а уже затем произвести вычисления.

Возникает естественный вопрос: как абитуриент должен проводить решение — без исследования или с исследованием? На это можно ответить следующим образом.

Если в условии задачи ничего не говорится о необходимости проведения исследования, то достаточно лишь провести вычисления, предполагая, что геометрическая фигура, о которой идет речь в задаче, существует.

Исследование — гораздо более сложная задача, рассмотрение которой от абитуриентов не требуется.

Если в условии задачи требуется провести исследование, то необходимо установить способ вычисления неизвестных элементов для произвольной фигуры семейства, т. е. установить область определения задачи и число решений для каждой допустимой системы значений данных буквенных величин.

При этом часто допускают грубую логическую ошибку: область определения окончательной формулы принимают за область определения задачи. Необходимо помнить, что не при всех значениях буквенных величин, входящих в область определения окончательной формулы, геометрическая фигура существует. Иными словами, область определения задачи может быть более узкой, чем область определения формулы, дающей окончательный ответ.

2. Алгебраический метод

С алгебраической точки зрения, любая стереометрическая задача — это задача на составление уравнений (и неравенств), но только со специфическим геометрическим содержанием. Поэтому и ее решение можно проводить по обычной схеме решения текстовых задач. Безусловно, ввиду большого многообразия стереометрических задач, решаемых алгебраическим методом, т. е. методом составления уравнений (и неравенств), нельзя дать общего способа решения этих задач. Каждая из них требует индивидуального подхода. Однако основные этапы решения любой текстовой задачи: составление уравнений (неравенств), их решение, проверка и исследование присутствуют также и при решении стереометрической задачи алгебраическим методом.

Главным и, пожалуй, наиболее трудным этапом решения стереометрической задачи алгебраическим методом является удачный выбор неизвестных величин, обозначаемых буквами, а также выбор независимых соотношений, на основании которых составляются уравнения (и неравенства), так как от них в первую очередь зависит характер уравнения или системы уравнений (неравенств), при решении которых находятся неизвестные величины.

При выборе неизвестных величин необходимо иметь в виду следующее:

1. Естественно принять в качестве неизвестных искомые величины. Указанный выбор неизвестных величин широко применяется в школьной практике. Однако во многих задачах по стереометрии получение уравнений (неравенств), связывающих эти величины, сопряжено со значительными трудностями.

2. Иногда уравнения (неравенства) получаются значительно проще, *если в качестве неизвестных ввести не искомые величины*, а те, *зная которые*, мы сможем определить искомые.

3. Наконец, процесс составления уравнений (неравенств) часто сильно упрощается, если в качестве неизвестных наряду с искомыми ввести также другие величины, которые не нужно находить по условию задачи. Этот способ выбора неизвестных величин будет нами в дальнейшем часто использоваться при составлении системы уравнений (неравенств) и получении из нее необходимых соотношений для определения искомых величин.

При выборе независимых соотношений, на основании которых для неизвестных величин составляют из геометрических соображений уравнения (или неравенства), особенно часто используют подобие треугольников, выражение одного и того же элемента какой-либо фигуры (например, площади или объема) через различные элементы этой фигуры и т. д. Полученные при этом уравнения (или неравенства) решают обычными алгебраическими методами.

Отметим, что при решении некоторых стереометрических задач алгебраический метод оказывается более эффективным, чем геометрический.

Пример 1. *Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковую грань опущен перпендикуляр, равный a. Определить объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α.*

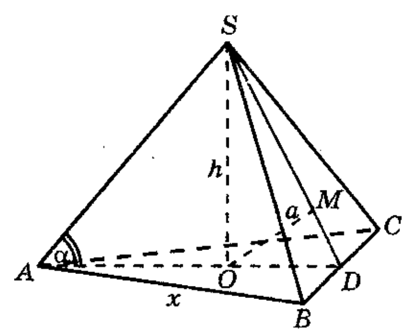


Рис. 226

Решение. Пусть правильная треугольная пирамида $SABC$ удовлетворяет условию задачи. Ребро BC перпендикулярно медиане AD и апофеме SD (рис. 226). Отсюда следует, что отрезок BC перпендикулярен плоскости SAD и что плоскости SCB и SAD взаимно перпендикулярны. Значит, перпендикуляр OM к плоскости грани SBC лежит в плоскости SAD.

Искомой величиной является объем V пирамиды. Воспользуемся вторым способом введения неизвестных.

Пусть h — высота пирамиды, x — сторона ее основания. Тогда

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h, \text{ где } S_{\text{осн}} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4},$$

т. е. искомая величина V выражается через неизвестные h и x. Из треугольников ABC и SOD следует, что

$$OD = \frac{x}{2\sqrt{3}}, \; SD = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{12}}.$$

Составим систему двух уравнений, связывающих неизвестные величины h и x. Записав площадь треугольника SOD двумя способами, получим первое уравнение:

$$\frac{hx}{2\sqrt{3}} = a\sqrt{h^2 + \frac{x^2}{12}},$$

или после возведения в квадрат,

$$\frac{h^2x^2}{12} = a^2\left(h^2 + \frac{x^2}{12}\right). \qquad (1)$$

Из треугольника SOA имеем второе уравнение:

$$h = \frac{x}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2), находим

$$x^2 = \frac{3a^2(4\operatorname{tg}^2\alpha + 1)}{\operatorname{tg}^2\alpha}, \; h = a\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha + 1}.$$

Теперь определим искомый объем:

$$V = \frac{hx^2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a^3(4\operatorname{tg}^2\alpha + 1)^{\frac{3}{2}}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}a^3(4\operatorname{tg}^2\alpha + 1)^{\frac{3}{2}}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Пример 2. *Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b ($b > a$). Сфера лежит над плоскостью основания ABC, касается этой плоскости в точке A и,* *кроме того, касается бокового ребра SB. Найти радиус этой сферы* (рис. 227).

Решение. Соединим центр O сферы с центром треугольника ABC — точкой L, а также с вершинами S и B пирамиды. Так как плоскость треугольника ABC касается сферы, то отрезок $OA = R$ (R — радиус сферы) перпендикулярен плоскости ABC; следовательно, $OA \perp AL$. Поскольку ребро SB касается сферы в точке K, отрезок $OK = R$ перпендикулярен ребру SB. В силу того, что $OA \perp AL$ и $SL \perp AL$ (как высота пирамиды), OA параллельно SL и, значит, через OA и SL можно провести плоскость. Трапеция $AOSL$ лежит в этой плоскости; AS — диагональ этой трапеции. Применим для решения данной задачи алгебраический метод. Составим уравнение для определения искомого радиуса R.

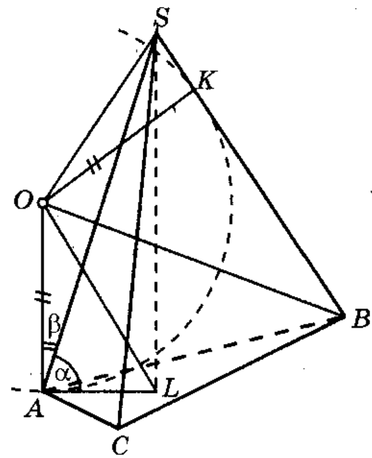


Рис. 227

Треугольники OAB и OKB равны, так как они прямоугольные ($OA \perp AL$, $OK \perp SB$), $OA = OK = R$ и OB — общая сторона. Поэтому

$$AB = KB = a,\ SK = b - a.$$

Из прямоугольного треугольника OKS находим

$$OS^2 = OK^2 + SK^2,$$

т. е.

$$OS^2 = R^2 + b^2 - 2ba + a^2. \tag{3}$$

В треугольнике ALS имеем $AL = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (как радиус окружности, описанной около треугольника ABC); $\cos \angle SAL = \dfrac{a\sqrt{3}}{3b}$, откуда

$$\alpha = \angle SAL = \arccos \frac{a\sqrt{3}}{3b}.$$

В треугольнике OAS имеем

$$\beta = \angle OAS = \angle OAL - \angle SAL = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$OS^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\cos\beta. \tag{4}$$

Следовательно, приравнивая выражения (3) и (4), получим уравнение для нахождения радиуса сферы:

$$R^2+b^2-2ba+a^2=R^2+b^2-2Rb\cos\beta.$$

Отсюда

$$R=\frac{2ab-a^2}{2b\cos\beta},\ \text{где}\ \cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,$$

$$\sin\alpha=\sin\left(\arccos\frac{a\sqrt{3}}{3b}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3b}\right)^2}=\frac{\sqrt{3b^2-a^2}}{b\sqrt{3}}.$$

Ответ. $R=\dfrac{a(2b-a)\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.

3. Метод геометрических мест точек

Геометрическим местом точек (плоскости или пространства), обладающих некоторым свойством, называется множество тех и только тех точек, которые обладают этим свойством.

Таким образом, для того чтобы установить, является ли некоторое множество точек, обладающих некоторым свойством, геометрическим местом, необходимо доказать следующее:

1°. Все точки данного множества обладают указанным свойством.

2°. Вне данного множества нет точек, обладающих этим свойством.

Можно также поступить иначе: исследуя все точки плоскости или пространства, выяснить, принадлежат ли они искомому геометрическому месту или нет.

Приведем примеры простейших геометрических мест точек пространства.

I. Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, является плоскость, проведенная через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная к нему.

II. Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от одной и той же фиксированной точки, является сфера с центром в данной точке.

III. Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от сторон треугольника, является перпендикуляр к плоскости треугольника, проведенный через центр вписанной в этот треугольник окружности.

IV. Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от вершин треугольника, является перпендикуляр к плоскости треугольника, проведенный через центр окружности, описанной около этого треугольника.

Понятие геометрического места точек широко используется при решении различных задач стереометрии, в частности при решении задач, связанных с вычислением элементов геометрических фигур. Основанный на этом понятии метод решения задач будем называть ***методом геометрических мест точек.***

Пусть, например, известно, что некоторая точка M расположена на перпендикуляре к плоскости треугольника ABC, проведенном через центр описанной около этого треугольника окружности. Значит, эта точка принадлежит геометрическому месту точек пространства, равноудаленных от вершин треугольника ABC. Из определения геометрического места точек следует, что точка M обладает указанным свойством, т. е. находится на одинаковом расстоянии от вершин треугольника ABC.

Аналогично методом геометрических мест точек можно доказать, что если точка M одинакова удалена от вершин треугольника ABC, то она лежит на перпендикуляре к плоскости треугольника ABC, проведенном через центр окружности, описанной около этого треугольника.

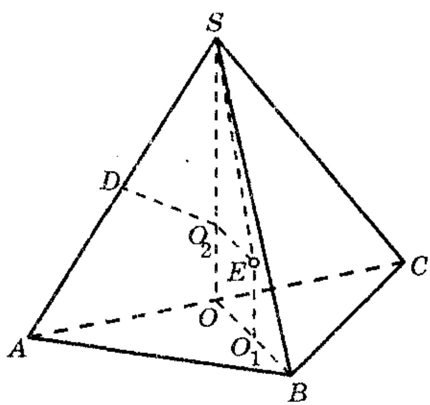


Рис. 228

П р и м е р 3. *В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и равна* $\frac{3}{2}a$. *Найти радиус шара, описанного около пирамиды.*

Р е ш е н и е. Пусть в основании пирамиды $SABC$ (рис. 228) лежит равносторонний треугольник ABC со стороной a и высота SO этой пирамиды проходит через середину ребра AC ее основания. Тогда SO перпендикулярна плоскости треугольника ABC и расположена в плоскости грани ASC; отрезок BO перпендикулярен AC.

По определению, центр шара, описанного около пирамиды, есть точка, равноудаленная от всех четырех вершин пирамиды.

Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от трех данных точек M_1, M_2, M_3, является перпендикуляр к плоскости, проведенной через эти точки и проходящий через центр окружности, описанной около треугольника $M_1M_2M_3$.

Следовательно, точки пространства, равноудаленные от вершин A, B и C треугольника, лежат на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через центр O_1 данного треугольника. Этот перпендикуляр O_1E лежит в плоскости BSO, так как плоскость BSO перпендикулярна плоскости ABC (линейный угол AOS двугранного угла между указанными плоскостями — прямой).

Аналогично, геометрическим местом точек, равноудаленных от точек A, S и C, является перпендикуляр к плоскости ASC, проходящий через центр O_2 окружности, описанной около треугольника ASC (точка O_2 расположена на SO). Этот перпендикуляр O_2E также лежит в плоскости BSO, так как плоскость ASC перпендикулярна плоскости BSO (линейный угол AOB двугранного угла между ними — прямой).

Точка E пересечения этих перпендикуляров есть, очевидно, центр описанного шара. Для его построения достаточно в плоскости прямоугольного треугольника SOB через точки O_1 и O_2 провести перпендикуляры к сторонам BO и SO. Так как по условию треугольник ABC — правильный, то

$$OO_1 = O_2E = \frac{1}{3}BO = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Точка O_2 лежит на пересечении перпендикуляров OS и DO_2, проведенных через середины сторон AC и AS равнобедренного треугольника ASC.

Из подобия прямоугольных треугольников SOA и SDO_2 следует

$$\frac{AS}{SO_2} = \frac{SO}{DS},$$

откуда

$$SO_2 = \frac{AS \cdot DS}{SO}.$$

Из треугольника SOA найдем

$$AS = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}a,\ DS = \frac{1}{2}AS.$$

Значит,

$$SO_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{5}{6}a.$$

Искомый радиус R описанного шара определяем из прямоугольного треугольника SO_2E:

$$R = SE = \sqrt{SO_2^2 + O_2E^2} = a\sqrt{\frac{25}{36} + \frac{3}{36}} = \frac{a\sqrt{28}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3}a.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{7}}{3}a$.

4. Комбинации геометрических тел

Одним из распространенных типов стереометрических задач, предлагаемых на вступительных экзаменах, являются задачи на комбинации геометрических тел, в особенности — на комбинации тел вращения с многогранниками.

1^0. Комбинации шара и пирамиды.

Шар называется ***вписанным в пирамиду***, если он касается основания пирамиды и всех ее боковых граней.

Теорема 1. *Если в пирамиду вписан шар, то его центр является точкой пересечения биссектральных плоскостей всех двугранных углов пирамиды.*

Доказательство. Известно, что геометрическим местом точек, равноудаленных от обеих граней двугранного угла, является биссектральная плоскость этого двугранного угла. Поэтому центр шара, вписанного в пирамиду, будучи равноудален от всех граней пирамиды, находится в каждой из биссектральных плоскостей, т. е. является точкой пересечения биссектральных плоскостей всех двугранных углов пирамиды.

Замечание 1. Не во всякую пирамиду можно вписать шар. Это можно сделать, например, для любой треугольной, правильной n-угольной пирамиды или пирамиды, у которой двугранные углы при сторонах основания равны.

Замечание 2. Так как все точки биссектральной плоскости расположены между гранями двугранного угла, то центр шара, вписанного в пирамиду, всегда находится внутри пирамиды.

Пример 4. *В правильной треугольной пирамиде двугранный угол между плоскостью основания и боковой гранью равен α. Найти отношение объемов вписанного в пирамиду шара и самой пирамиды.*

Решение. Так как треугольная пирамида является правильной, то ее основание — правильный треугольник, а высота проходит через центр основания.

Пусть $SABC$ — данная правильная пирамида (рис. 229), S — ее вершина, треугольник ABC — основание, D — центр этого основания, являющийся точкой пересечения высот AE, BN и CM правильного треугольника ABC.

По теореме о трех перпендикулярах $SE \perp BC$, $SM \perp AB$ и $SN \perp AC$. Следовательно, $\angle SEA$ —

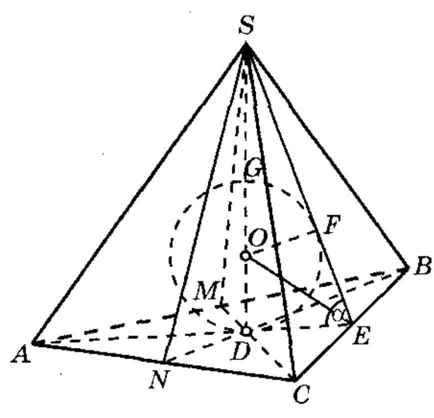


Рис. 229

линейный угол двугранного угла при ребре BC. Аналогично строим линейные углы при других сторонах основания пирамиды.

Из равенства прямоугольных треугольников SDE, SDM и SDN следует, что $\angle SEA = \angle SMC = \angle SNB = \alpha$.

По условию задачи в данную пирамиду вписан шар. Докажем, что его центр лежит на высоте SD пирамиды.

Впишем в треугольник SDE полукруг DFG, центр O которого лежит на катете SD, а дуга касается сторон DE и SE. Треугольник SED вместе с полукругом DFG будем вращать вокруг SD. Катет DE опишет круг, вписанный в треугольник ABC, поэтому гипотенуза SE при вращении останется внутри пирамиды, за исключением трех положений, когда SE будет совпадать с высотами боковых граней. Следовательно, шар, образованный вращением полукруга DFG, будет иметь единственную общую точку с каждой из боковых граней. Этот шар касается и основания пирамиды в точке D.

Итак, центр вписанного в пирамиду $SABC$ шара лежит на высоте SD.

Объемы шара и пирамиды соответственно равны

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}Sh,$$

где r — радиус шара, h — высота пирамиды, S — площадь основания пирамиды.

Центр шара одинаково удален от граней BSC и ABC, поэтому OE — биссектриса угла SEA, т. е. $\angle OED = \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника SDE находим

$$r = DE \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad h = DE \operatorname{tg}\alpha.$$

Площадь правильного треугольника ABC выражается через его сторону a и радиус DE вписанной окружности по формулам

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad S = \frac{3a}{2}DE,$$

откуда

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a}{2}DE,$$

т. е. $a = \frac{6}{\sqrt{3}}DE$. Таким образом,

$$S = 3\sqrt{3}DE^2.$$

Теперь находим искомое отношение:

$$\frac{V_{\text{шара}}}{V_{пир}}=\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot DE^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}DE^2\cdot DE\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

Ответ. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

Шар называется ***описанным около пирамиды***, если все вершины пирамиды лежат на его поверхности.

Теорема 2. *Если около пирамиды описан шар, то его центр является точкой пересечения всех плоскостей, проведенных через середины ребер пирамиды перпендикулярно этим ребрам.*

Доказательство. Известно, что геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проведенная через его середину. Поэтому центр шара, описанного около пирамиды, будучи равноудален от всех вершин пирамиды, находится в каждой из плоскостей, проведенных через середины ребер пирамиды перпендикулярно этим ребрам, т. е. он является точкой пересечения указанных плоскостей.

Заметим, что не около всякой пирамиды можно описать шар.

Теорема 3. *Для того чтобы около пирамиды можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы около ее основания можно было описать окружность.*

Доказательство. Достаточность. Пусть около основания ABC пирамиды $SABC$ (для определенности — треугольной) описана окружность ω. Нетрудно показать, что через точку S и окружность ω проходит единственная сфера σ, которая является описанной около данной пирамиды.

Необходимость. Пусть существует сфера σ, описанная около пирамиды $SABC$. Тогда плоскость основания пирамиды пересекает сферу по окружности ω, описанной около этого основания.

Замечание. Можно доказать, что центр описанного около пирамиды шара лежит на перпендикуляре, проведенном через центр окружности ω.

Таким образом, мы рассмотрели комбинации пирамиды со вписанным и описанным шаром. Эти комбинации не исчерпывают всего многообразия различных возможных взаимных положений шара и пирамиды. Предусмотреть их общей теорией не представляется возможным.

Рассмотрим также примеры некоторых комбинаций других геометрических тел. Доказательство приводимых ниже утверждений рекомендуем выполнить самостоятельно.

2^0. Комбинации шара и призмы.

Шар называется ***вписанным в*** (произвольную) ***призму****, если он касается всех граней призмы.

Если в призму (не обязательно прямую) вписан шар, то должны выполняться следующие условия:

1) высота призмы равна диаметру шара;

2) точки касания шара с боковыми гранями принадлежат сечению призмы плоскостью, проходящей через середину высоты призмы (центр шара) перпендикулярно боковым ребрам.

Окружность, полученную при пересечении сферы плоскостью, проходящей через центр шара, называют ***большой окружностью*** шара. Следовательно, точки касания вписанного в призму шара с ее боковыми гранями расположены на большой окружности этого шара.

Шар называется ***описанным около призмы***, если все ее вершины лежат на его поверхности.

Заметим, что не около всякой призмы можно описать шар. Имеет место теорема: для того чтобы около призмы можно было описать шар (сферу), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) призма была прямой;

2) около ее основания можно было описать окружность.

Если около призмы описан шар, то центр шара расположен на середине высоты призмы, проведенной через центр описанной около ее основания окружности.

3^0. Комбинации шара и конуса.

Шар называется ***вписанным в*** прямой круговой ***конус***, если он касается основания конуса и его боковой поверхности. Можно доказать, что центр такого шара лежит на высоте конуса. Этот шар касается боковой поверхности конуса по окружности, плоскость которой параллельна плоскости основания. Точкой касания шара с плоскостью основания конуса является центр этого основания.

Шар называется ***описанным около*** прямого кругового ***конуса***, если вершина конуса и окружность его основания лежат на поверхности шара. В этом случае центр шара лежит на высоте конуса; основание конуса является малым (или большим) кругом шара.

4^0. Комбинации шара и цилиндра.

Шар называется ***вписанным в*** прямой круговой ***цилиндр***, если он касается оснований цилиндра и его боковой поверхности. Можно доказать, что центр такого шара лежит на оси цилиндра; диаметр основания цилиндра равен диаметру шара и равен высоте цилиндра. Этот шар касается боковой поверхности цилиндра по окружности большого круга шара, плоскость

---

* ***Призмой*** мы называем геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью, направляющей которой является выпуклый многоугольник, и двумя параллельными секущими плоскостями.

которой параллельна плоскостям оснований цилиндра. Точками касания шара с основаниями цилиндра являются центры этих оснований.

Шар называется ***описанным около*** прямого кругового ***цилиндра***, если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности этого шара. Тогда центр шара совпадает с серединой оси цилиндра. Основания цилиндра являются малыми кругами шара.

5^0. Комбинации конуса и пирамиды.

Прямой круговой ***конус*** называется ***вписанным в пирамиду***, если вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды, а основание пирамиды представляет собой многоугольник, описанный около окружности основания конуса. Тогда в этот многоугольник можно также вписать окружность. Высоты пирамиды и конуса совпадают и проходят через центр этой окружности.

Прямой круговой ***конус*** называется ***описанным около пирамиды***, если вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды, а основанием пирамиды является многоугольник, вписанный в окружность основания конуса. В этом случае высоты пирамиды и конуса совпадают. Боковые ребра пирамиды лежат на боковой поверхности конуса.

6^0. Комбинации конуса и призмы.

Прямой круговой ***конус*** называется ***вписанным в призму***, если его вершина лежит на верхнем основании призмы, а его основание — круг, вписанный в нижнее основание призмы. Можно доказать, что основаниями призмы являются многоугольники, в каждый из которых можно вписать окружность. Прямая, перпендикулярная нижнему основанию и проходящая через центр круга, вписанного в нижнее основание, пересекает верхнее основание призмы. Высота конуса равна высоте призмы.

Прямой круговой ***конус*** называется ***описанным около призмы***, если все вершины верхнего основания призмы лежат на боковой поверхности конуса, а нижнее основание призмы лежит на основании конуса. Тогда основанием призмы является многоугольник, около которого можно описать окружность.

7^0. Комбинации конуса и цилиндра.

Прямой круговой ***конус*** называется ***вписанным в цилиндр***, если его вершина лежит на верхнем основании цилиндра, а основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра. В этом случае высота конуса совпадает с осью цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Высота конуса равна высоте цилиндра.

Прямой круговой ***конус*** называется ***описанным около цилиндра***, если окружность одного из оснований цилиндра лежит на боковой поверхности конуса, а другое основание цилиндра лежит на основании конуса. Тогда ось цилиндра лежит на высоте конуса. Около каждого цилиндра можно описать бесконечное множество конусов.

8^0. Комбинации цилиндра и пирамиды.

Прямой круговой ***цилиндр*** называется ***вписанным в пирамиду***, если окружность одного его основания касается всех боковых граней пирамиды, а другое его основание лежит на основании пирамиды. Если цилиндр вписан в пирамиду (не обязательно правильную), то должны выполняться следующие условия:

1) основание высоты пирамиды лежит внутри (или на стороне) многоугольника, служащего основанием пирамиды;

2) основанием пирамиды является многоугольник, в который можно вписать окружность (однако основание цилиндра, лежащее на основании пирамиды, не является кругом, вписанным в основание пирамиды!).

Прямой круговой ***цилиндр*** называется ***описанным около пирамиды***, если вершина пирамиды лежит на одном из оснований цилиндра, а основание пирамиды представляет собой многоугольник, вписанный в другое основание цилиндра. В этом случае высота цилиндра равна высоте пирамиды.

9^0. Комбинации цилиндра и призмы.

Прямой круговой ***цилиндр*** называется ***вписанным в призму***, если его боковая поверхность касается боковых граней призмы, а основания представляют собой круги, вписанные в многоугольники — основания призмы. Можно доказать, что если прямой круговой цилиндр вписан в призму, то такая призма — прямая. Боковая поверхность цилиндра касается боковых граней призмы по прямым, перпендикулярным основаниям призмы.

Прямой круговой ***цилиндр*** называется ***описанным около призмы***, если ее основания — многоугольники, вписанные в окружности оснований цилиндра. Можно доказать, что такая призма является прямой и ее высота равна высоте цилиндра. Основанием призмы служит многоугольник, около которого можно описать окружность.

5. Метод проекций

Использование метода проекций позволяет решать независимо от вида пространственной фигуры задачи, связанные с нахождением длин отрезков, вычислением плоских и двугранных углов, вычислением кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве,а также определением положения точек,в которых общий перпендикуляр к двум данным скрещивающимся прямым пересекает эти прямые, и другие задачи по стереометрии.

Пример 5. *Пусть $SABC$ — трехгранный угол с вершиной S, в котором $\angle BSC = \alpha$, $\angle CSA = \beta$, $\angle ASB = \gamma$; через A, B и C будем обозначать внутренние двугранные углы и их величины при ребрах SA, SB и SC соответственно.*

Доказать, что имеют место формулы:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \tag{5}$$

$$\cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}, \tag{6}$$

$$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \tag{7}$$

(***теорема косинусов для трехгранного угла***).

Доказательство. Докажем, например, формулу (7). Отложим на ребрах данного трехгранного угла отрезки единичной длины:

$$SA = SB = SC = 1.$$

Введем оси, на которых лежат эти отрезки, принимая за их положительные направления следующие: от S к A, от S к B и от S к C.

Пусть M — проекция точки A на плоскость SBC; P и Q — проекции точки M соответственно на оси $\overline{SC}$ и $\overline{SB}$ (рис. 230); K — проекция точки M на ось $\overline{SC}$ по направлению оси $\overline{SB}$, а L — проекция точки M на ось $\overline{SB}$ по направлению оси $\overline{SC}$ (рис. 231). Пусть, далее, $SK = x$, $SL = y$.

Так как точка P является (по теореме о трех перпендикулярах) проекцией точки A на ось $\overline{SC}$, то $SP = \cos\beta$; аналогично, $SQ = \cos\gamma$. Кроме того, $PA = \sin\beta$, $QA = \sin\gamma$.

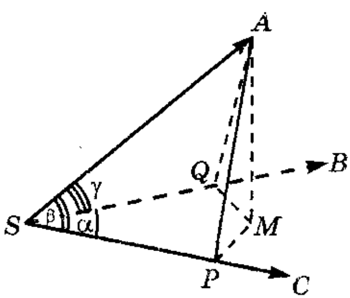


Рис. 230

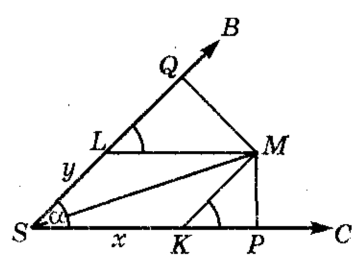


Рис. 231

Проектируя ломаную $\overline{SKM}$ и ее замыкающую $\overline{SM}$ на ось $\overline{SC}$, а затем на ось $\overline{SB}$, получим

$$x + y\cos\alpha = SP = \cos\beta,$$
$$x\cos\alpha + y = SQ = \cos\gamma,$$

откуда

$$y = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha}$$

(значение x для вычисления $\cos C$ не понадобится).

Возможны три случая:

1°. Точки M и A лежат по одну сторону от прямой SC; это будет тогда и только тогда, когда угол C — острый.

2°. Точки M и A лежат по разные стороны от прямой SC; это будет тогда и только тогда, когда угол C — тупой.

3°. Точка M лежит на прямой SC; это будет тогда и только тогда, когда угол C — прямой.

Рассмотрим случай 1°. Пусть $0 < C < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$PM = y\sin\alpha = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha},$$

а потому

$$\cos C = \frac{PM}{PA} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Случаи 2° и 3° предоставляется рассмотреть самостоятельно.

Формула (7) доказана. Аналогично выводятся формулы для $\cos A$ и $\cos B$.

Формулы (5)—(7) справедливы для любых углов A, B и C. С их помощью можно успешно решить ряд стереометрических задач вычислительного характера, связанных с нахождением угловых элементов трехгранных и многогранных углов, доказать ряд теорем, устанавливающих соотношения между плоскими и двугранными углами трехгранного угла (см. § 2). Эти формулы находят широкое применение в сферической геометрии и тригонометрии, в геодезии и астрономии.

Пример 6. *Даны длины $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ребер OA, OB и OC параллелепипеда и плоские углы между этими ребрами при вершине O: $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Вычислить длину OD его диагонали и углы, образуемые лучом OD с лучами OA, OB и OC.*

Решение. Рассмотрим грань $OAPB$ данного параллелепипеда (рис. 232). Тогда

$$\overline{OA} + \overline{AP} + \overline{PD} = \overline{OD},$$

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

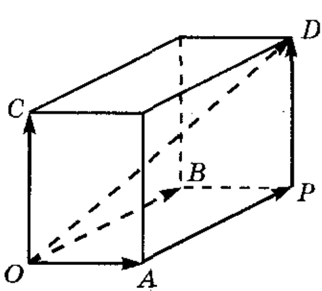


Рис. 232

Будем считать, что производится ортогональное проектирование последовательно на оси $\overline{OA}$, $\overline{AP}$, $\overline{PD}$ и $\overline{OD}$. Обозначая углы, образуемые $\overline{OD}$ с $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, соответственно через φ_1, φ_2, φ_3, а через d длину диагонали OD, получим

$$d\cos\varphi_1 = a + b\cos\gamma + c\cos\beta, \qquad (8)$$

$$d\cos\varphi_2 = a\cos\gamma + b + c\cos\alpha, \tag{9}$$

$$d\cos\varphi_3 = a\cos\beta + b\cos\alpha + c, \tag{10}$$

$$d = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2 + c\cos\varphi_3.$$

Отсюда

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2ab\cos\gamma}.$$

Из формул (8)—(10) находим

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{d}(a + b\cos\gamma + c\cos\beta),$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{d}(a\cos\gamma + b + c\cos\alpha),$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{1}{d}(a\cos\beta + b\cos\alpha + c).$$

Пример 7. *Вычислить объем V параллелепипеда, зная длины его ребер $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, выходящих из одной вершины O, и плоские углы между ними:* $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$.

Решение. Проведем через точку O луч l, перпендикулярный плоскости OAB и образующий с лучом OC острый угол ϑ (в частности, возможно, что $\vartheta = 0$, если $OC \perp OAB$). Пусть луч l пересекает грань, параллельную грани OAB, в точке H. Обозначим через h длину отрезка OH (это высота данного параллелепипеда). Проведем через точку H плоскости, параллельные граням BOC, COA и OAB, и обозначим через A', B' и C' точки, в которых эти плоскости пересекают соответственно оси $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ $(C' = C)$.

Положим $OA' = a'$, $OB' = b'$ $(OC' = c)$. Тогда OH — диагональ параллелепипеда (возможно, вырожденного) с ребрами OA', OB' и OC'.

Пусть P' — конец диагонали OP' параллелограмма с ребрами OA' и OB'. Следовательно,

$$\overline{OA'} + \overline{A'P'} + \overline{P'H} = \overline{OH}$$

или

$$\overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'} = \overline{OH}.$$

Углы, образуемые $\overline{OH}$ с лучами $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, соответственно равны $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ и ϑ. Выполнив ортогональное проектирование последовательно на оси $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OH}$, получим

$$a'+b'\cos\gamma+c\cos\beta=0,$$

$$a'\cos\gamma+b'+c\cos\alpha=0,$$

$$a'\cos\beta+b'\cos\alpha+c=h\cos\vartheta,$$

$$c\cos\vartheta=h.$$

Из первых двух уравнений находим

$$a'=c\frac{\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta}{\sin^2\gamma},\ b'=c\frac{\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha}{\sin^2\gamma}.$$

Поэтому третье соотношение принимает вид

$$c\frac{\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta}{\sin^2\gamma}\cos\beta+c\frac{\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha}{\sin^2\gamma}\cos\alpha+c=h\cos\vartheta=\frac{h^2}{c}.$$

Отсюда получаем

$$h=\frac{c}{\sin\gamma}\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$$

и объем параллелепипеда

$$V=hab\sin\gamma=abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}.$$

Выражение

$$\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$$

называют ***синусом трехгранного угла*** $OABC$ и обозначают так: $\sin\omega$.

Таким образом,

$$V=abc\sin\omega.$$

Из полученных выше формул следует, что

$$\cos\vartheta=\frac{\sin\omega}{\sin\gamma}.$$

Пример 8. *Даны плоские углы трехгранного угла $SABC$: $\angle BSC=\alpha$, $\angle CSA=\beta$, $\angle ASB=\gamma$. Из точки S выходят два луча p и q. Луч p образует с ребрами трехгранного угла $SABC$ углы φ_1, φ_2, φ_3, луч q — углы ψ_1, ψ_2, ψ_3. Вычислить угол Ω между лучами p и q.*

Решение. Возьмем на лучах p и q точки P и Q такие, что $SP=SQ=1$. Проведем через точку P плоскости, параллельные плоскостям BSC, CSA и ASB; пусть A, B, C — соответственно точки пересечения этих плоскостей с ребрами SA, SB и SC. Тогда SP — диагональ параллелепипеда с ребрами SA, SB и SC. Положим $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$. Пусть K — четвертая вершина параллелограмма со сторонами SA и SB. Отсюда

$$\overline{SA}+\overline{AK}+\overline{KP}=\overline{SP}.$$

Выполнив ортогональное проектирование на ось $\overline{SQ}$, приходим к уравнению

$$a\cos\psi_1+b\cos\psi_2+c\cos\psi_3=\cos\Omega. \qquad (11)$$

Решим теперь относительно *a*, *b*, *c* систему уравнений (8)—(10) при $d=1$ (см. пример 6). Имеем

$$a+b\cos\gamma+c\cos\beta=\cos\varphi_1,$$

$$a\cos\gamma+b+c\cos\alpha=\cos\varphi_2,$$

$$a\cos\beta+b\cos\alpha+c=\cos\varphi_3,$$

откуда

$$a=\frac{1}{\sin^2\omega}[\cos\varphi_1(1-\cos^2\alpha)+\cos\varphi_2(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)+$$

$$+\cos\varphi_3(\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta)],$$

$$b=\frac{1}{\sin^2\omega}[\cos\varphi_1(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)+\cos\varphi_2(1-\cos^2\beta)+$$

$$+\cos\varphi_3(\cos\gamma\cos\beta-\cos\alpha)],$$

$$c=\frac{1}{\sin^2\omega}[\cos\varphi_1(\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta)+\cos\varphi_2(\cos\gamma\cos\beta-\cos\alpha)+$$

$$+\cos\varphi_3(1-\cos^2\gamma)],$$

где

$$\sin^2\omega=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma.$$

Подставляя выражения для *a*, *b* и *c* в формулу (11), получим

$$\cos\Omega=\frac{1}{\sin^2\omega}[\cos\varphi_1\cos\psi_1\sin^2\alpha+\cos\varphi_2\cos\psi_2\sin^2\beta+$$

$$+\cos\varphi_3\cos\psi_3\sin^2\gamma+(\cos\varphi_2\cos\psi_3+\cos\varphi_3\cos\psi_2)\times$$

$$\times(\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha)+(\cos\varphi_3\cos\psi_1+\cos\varphi_1\cos\psi_3)\times \qquad (12)$$

$$\times(\cos\gamma\cos\alpha-\cos\beta)+(\cos\varphi_1\cos\psi_2+\cos\varphi_2\cos\psi_1)\cdot(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)],$$

Пример 9. *Даны плоские углы* α, β, γ *трехгранного угла SABC:* $\angle BSC=\alpha$, $\angle CSA=\beta$, $\angle ASB=\gamma$. *Найти косинусы внутренних двугранных углов этого трехгранного угла.*

Решение*. Пусть *p* — луч, перпендикулярный плоскости *SAB* и образующий с лучом *SC* острый угол ϑ (возможно, что $\vartheta=0$), а *q* — луч,

* Здесь дается иной вариант решения задачи, рассмотренной в примере 5.

перпендикулярный плоскости ASC и образующий с лучом SB острый угол ψ. Тогда двугранный угол A (при ребре SA) является дополнением до π угла между лучами p и q. Луч p образует с ребрами SA, SB, SC углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ такие, что

$$\cos\varphi_1 = 0, \cos\varphi_2 = 0, \cos\varphi_3 = \cos\vartheta = \frac{\sin\omega}{\sin\gamma},$$

а луч q — углы ψ_1, ψ_2, ψ_3 такие, что

$$\cos\psi_1 = 0, \cos\psi_2 = \frac{\sin\omega}{\sin\beta}, \cos\psi_3 = 0.$$

Подставляя значения $\cos\varphi_k$ и $\cos\psi_k$ ($k = 1, 2, 3$) в формулу (12) (см. пример 8), имеем

$$\cos(\pi - A) = \frac{\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma},$$

откуда

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Аналогично,

$$\cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}, \cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Рассмотрим ортогональную проекцию плоского многоугольника на плоскость.

Теорема 4. *Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника равна площади этого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.*

Доказательство. Докажем, что если S — площадь многоугольника, а S_1 — площадь его проекции на некоторую плоскость, составляющую угол φ с плоскостью этого многоугольника, то справедлива формула

$$S_1 = S\cos\varphi, \tag{13}$$

Так как всякий многоугольник можно разбить на треугольники, то, очевидно, достаточно доказать, что сформулированная теорема верна для треугольника.

Обозначим через $A_1B_1C_1$ проекцию треугольника ABC, лежащего в плоскости P, на плоскость Q (рис. 233).

Если плоскость P параллельна или перпендикулярна плоскости Q, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть плоскость P не параллельна и не перпендикулярна плоскости Q и пересекает ее по некоторой прямой l. В этом случае угол φ между плоскостями P и Q заключен в промежутке $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

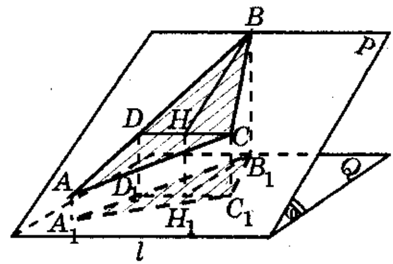


Рис. 233

Проведем через вершину D треугольника ABC прямую DC, параллельную прямой l (рис. 233). Она разбивает треугольник ABC на два треугольника — ADC и BDC с общим основанием DC, параллельным l. Это основание проектируется на плоскость Q в отрезок $D_1C_1 = DC$.

Высота BH треугольника BDC проектируется в отрезок B_1H_1, служащий высотой в треугольнике $B_1H_1C_1$. Отрезки BH и B_1H_1 перпендикулярны прямой l, а угол между ними равен углу φ между плоскостями P и Q. Следовательно,

$$B_1H_1 = BH\cos\varphi,$$

а площади треугольников $B_1D_1C_1$ и BDC связаны соотношением

$$S_{\Delta B_1D_1C_1} = \frac{1}{2}D_1C_1 \cdot B_1H_1 = \frac{1}{2}DC \cdot BH \cdot \cos\varphi = S_{\Delta BDC} \cdot \cos\varphi.$$

Аналогично,

$$S_{\Delta A_1D_1C_1} = S_{\Delta ADC} \cdot \cos\varphi.$$

Сложив полученные равенства, находим

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Формула (13) справедлива не только для многоугольника, но и для произвольной квадрируемой фигуры (т. е. такой фигуры, для которой может быть введено понятие площади). А именно, имеет место следующая теорема:

Площадь проекции некоторой фигуры равна площади этой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.

Пример 10. *Доказать, что если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то:*

1) *высоты всех граней равны;*

2) *в основание пирамиды можно вписать окружность;*

3) *высота пирамиды проходит через центр этой окружности,*

4) *площадь основания* $S_{\text{осн}}$ *связана с площадью боковой поверхности пирамиды* ($S_{\text{бок}}$) *соотношением*

$$S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cdot \cos\alpha. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть все боковые грани пирамиды $SABC$ (для определенности — треугольной) наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом α; SO — высота пирамиды (рис. 234).

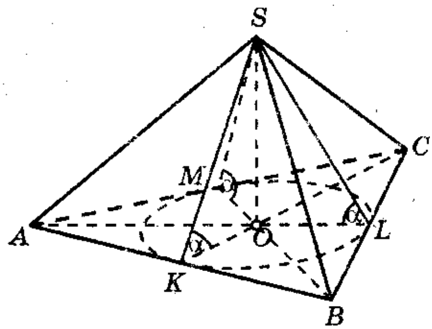


Рис. 234

1. Проведем высоту SL боковой грани BSC и соединим L с O. Проекция OL перпендикулярна BC (на основании теоремы о трех перпендикулярах), значит, $\angle OLS$ — линейный угол двугранного угла α. Из прямоугольного треугольника OLS находим

$$SL = \frac{OS}{\sin\alpha},\ OL = OS\operatorname{ctg}\alpha.$$

Аналогично, для высот других граней имеем

$$SK = SM = \frac{OS}{\sin\alpha},\ OK = OM = OS\operatorname{ctg}\alpha.$$

2. Отрезки OL, OM и OK равны $OS\operatorname{ctg}\alpha$ и перпендикулярны сторонам BC, AC и AB. Значит, если провести окружность радиуса $OS\operatorname{ctg}\alpha$ с центром в точке O, то она будет вписана в основание ABC пирамиды.

3. Точка O — основание высоты пирамиды, по доказанному, есть центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

4. Имеем

$$S_{\text{осн}} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC},\ S_{\text{бок}} = S_{\Delta ASB} + S_{\Delta BSC} + S_{\Delta ASC}.$$

В силу формулы (13) находим

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ASB}\cos\alpha,\ S_{\Delta BOC} = S_{\Delta BSC}\cos\alpha,\ S_{\Delta AOC} = S_{\Delta ASC}\cos\alpha.$$

Следовательно, $S_{осн} = S_{бок} \cdot \cos\alpha$, что и требовалось установить.

Замечание. Площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, все боковые грани которой наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом α, выражается формулой

$$S_{бок} = \frac{S_2 - S_1}{\cos\alpha},$$

где S_1 и S_2 — площади соответственно меньшего и большего оснований.

Пример 11. *Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противоположной грани. Найти площади полученного сечения, если высота пирамиды равна h, а отношение площади боковой поверхности к площади основания равно* $\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, т. е. такая пирамида, основанием которой является квадрат $ABCD$, а высота SO проходит через центр основания (рис. 235).

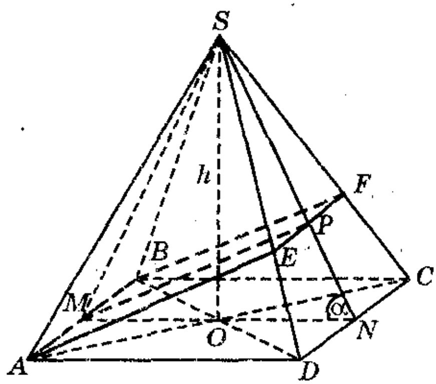


Рис. 235

Искомое сечение представляет собой трапецию $ABFE$ (докажите это), площадь которой

$$S_{сеч} = \frac{1}{2}(AB + EF) \cdot MP.$$

В правильной пирамиде все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом. В силу формулы (14) площади основания и боковой поверхности пирамиды связаны соотношением

$$S_{осн} = S_{бок} \cos\alpha,$$

где α — угол наклона боковой грани к плоскости основания. Поэтому, согласно условию, имеем $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного треугольника SON находим сторону основания пирамиды $a = h\sqrt{2}$, а также $SN = \dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{h}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}} = h\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Высоту MP трапеции определяем из прямоугольного треугольника MPN:

$$MP = a\sin\alpha = h\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного треугольника MPS получим

$$SP = \sqrt{\frac{3}{2}h^2 - \frac{4}{3}h^2} = \frac{h}{\sqrt{6}}.$$

Треугольники DSC и ESF подобны. Следовательно, $DC : EF = SN : SP$, откуда

$$EF = \frac{DC\cdot SP}{SN} = \frac{h\sqrt{2}\cdot h\sqrt{2}}{\sqrt{6}h\sqrt{3}} = h\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Итак, искомая площадь сечения

$$S_{\text{сеч}} = \frac{h\sqrt{2} + h\dfrac{\sqrt{2}}{3}}{2}\cdot\frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}h^2 \text{ кв. ед.}$$

Ответ. $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}h^2$ кв. ед.

Пример 12. *В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S являются острыми, причем $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Известны боковые ребра: $SA = a$, $SB = b$. Вычислить площадь проекции грани ASB на плоскость грани ASC.*

Решение. Площадь S_1 проекции грани ASB на плоскость грани ASC связана с площадью грани ASB соотношением

$$S_1 = S_{\Delta ASB}\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\cos\varphi,$$

где φ — внутренний двугранный угол при ребре $SA\left(\varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Косинус этого угла выражается через плоские углы α, β и γ трехгранного угла $SABC$ по формуле (5):

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Следовательно,

$$S_1 = \frac{1}{2}ab\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}ab\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta}$.

Пример 13. *Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со стороной 1. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон имеет длину* $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Решение. Пусть $ABCD$ — указанный в условии задачи четырехугольник, $AB_1C_1D_1$ — его проекция на одну (горизонтальную) из взаимно перпендикулярных плоскостей. Обозначим через l линию пересечения этих плоскостей (рис. 236). По условию, $AB_1C_1D_1$ — квадрат со стороной 1.

Данный четырехугольник $ABCD$ можно рассматривать как сечение плоскостью прямой призмы $AB_1C_1D_1A'B'C'D'$. На основании теоремы о линиях пересечения двух параллельных плоскостей третьей имеем $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм:

$$AB = CD,\ AD = BC = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

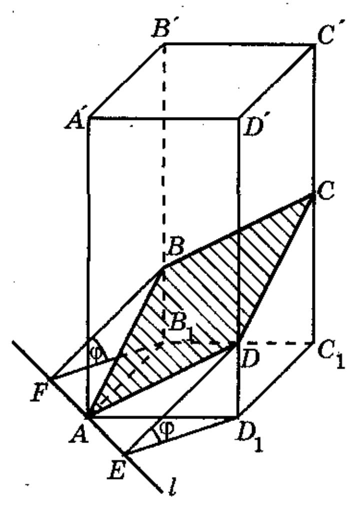


Рис. 236

Опустим из точки D в плоскости сечения перпендикуляр DE на прямую l и соединим полученную точку E с точкой D_1. По теореме о трех перпендикулярах отрезок ED_1 перпендикулярен прямой l, поэтому $\angle DED_1 = \varphi$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью четырехугольника $ABCD$ и горизонтальной плоскостью.

Применяя формулу (13), получим

$$S_{ABCD} \cdot \cos\varphi = 1.$$

Проектируя на вертикальную плоскость, аналогично находим

$$S_{ABCD}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=1.$$

Из последних равенств следует, что

$$\cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

т. е. $\operatorname{tg}\varphi=1$, откуда $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Теперь нетрудно доказать, что данный четырехугольник является ромбом. Так как $\angle B_1AD_1=\dfrac{\pi}{2}$, то $\angle B_1AF=\dfrac{\pi}{4}$ и, значит, $FA=AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Так как $\angle BFB_1=\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, то $BB_1=DD_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и, следовательно, $AB=AD$. Итак, периметр ромба $ABCD$ равен $4\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Ответ. $4\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

6. Векторы. Скалярное произведение векторов

Используя понятие скалярного произведения векторов, дадим решение задачи, рассмотренной в примерах 5 и 9 (см. п. 5).

Пример 14. *Пусть* α, β *и* γ *— острые плоские углы трехгранного угла* $SABC$ *с вершиной* S; A, B *и* C *— внутренние двугранные углы, противолежащие соответственно углам* α, β *и* γ. *Тогда*

$$\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma};\ \cos B=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma};$$

$$\cos C=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

(*теорема косинусов для трехгранного угла*).

Доказательство. Докажем первую из формул. Через точку A_1 ребра SA, отстоящую от вершины S на расстояние 1, проведем плоскость, перпендикулярную этому ребру. Пусть эта плоскость пересечет ребра SB и SC соответственно в точках B_1 и C_1. В сечении получится треугольник

$A_1B_1C_1$ (рис. 237). Угол при вершине A_1 в этом треугольнике является линейным углом внутреннего двугранного угла при ребре SA и, следовательно, равен A, т. е. $\angle C_1A_1B_1 = A$.

Используя определение скалярного произведения векторов $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_1C_1}$, имеем

$$\cos A = \frac{\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1}}{\left|\overline{A_1B_1}\right| \cdot \left|\overline{A_1C_1}\right|},$$

$$\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1} = (\overline{SB_1} - \overline{SA_1})(\overline{SC_1} - \overline{SA_1}) =$$

$$= \overline{SB_1} \cdot \overline{SC_1} - \overline{SA_1} \cdot \overline{SC_1} - \overline{SA_1} \cdot \overline{SB_1} + \overline{SA_1}^2 =$$

$$= \left|\overline{SB_1}\right| \cdot \left|\overline{SC_1}\right| \cos\alpha - \left|\overline{SA_1}\right| \cdot \left|\overline{SC_1}\right| \cos\beta - \left|\overline{SA_1}\right| \cdot \left|\overline{SB_1}\right| \cos\gamma + \overline{SA_1}^2.$$

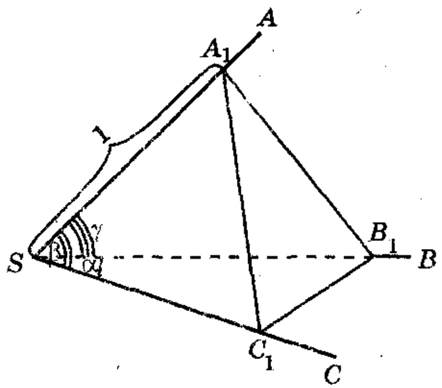


Рис. 237

Так как

$$\left|\overline{SA_1}\right| = 1, \quad \left|\overline{SC_1}\right| = \frac{1}{\cos\beta}, \quad \left|\overline{SB_1}\right| = \frac{1}{\cos\gamma},$$

то

$$\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1C_1} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma} - 1 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

Далее,

$$\left|\overline{A_1B_1}\right| = \left|\overline{SA_1}\right| \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma, \quad \left|\overline{A_1C_1}\right| = \left|\overline{SA_1}\right| \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно,

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta\ \cos\gamma}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются и две остальные формулы.

Пример 15. *Пусть CS — наклонная, AS — ее проекция на плоскость P* (рис. 238). *На плоскости P через точку S проведена прямая l, образующая с проекцией AS угол, не превосходящий прямого угла. Пусть*:

$$\angle CSB = \alpha,\ \angle ASC = \beta,\ \angle ASB = \gamma\ \left(0 < \gamma \le \frac{\pi}{2}\right)$$

Доказать, что $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$.

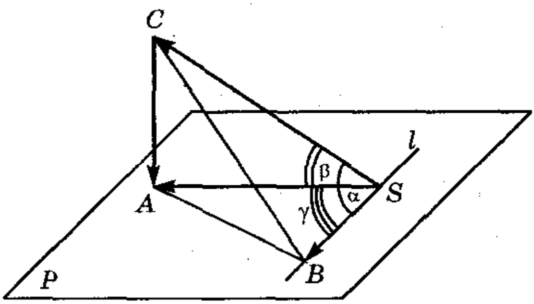


Рис. 238

Доказательство. Рассмотрим векторы $\vec{a} = \overline{SA}$, $\vec{b} = \overline{SB}$, $\vec{c} = \overline{SC}$, $\vec{d} = \overline{CA}$. В силу определения скалярного произведения векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеем

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}.$$

Так как прямая AC перпендикулярна плоскости P, то AC перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, в частности прямой SB. Следовательно, $\vec{d}\cdot\vec{b} = 0$. Учитывая, что $\vec{d} = \vec{a} - \vec{c}$, получим $(\vec{a} - \vec{c})\cdot\vec{b} = 0$, откуда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Поэтому

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}.$$

или, так как $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma$, то

$$\cos\alpha=\frac{|\overline{a}|}{|\overline{c}|}\cos\gamma=\frac{SA}{SC}\cos\gamma=\cos\beta\cos\gamma,$$

что и требовалось доказать.

7. Координатный метод

Пример 16. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $|AA_1|=a$. Точка E — середина ребра C_1D_1, точка F — середина ребра B_1C_1. Найти радиус сферы, проходящей через точки E, F, A, C.*

Решение. Введем декартову систему координат с центром в точке A, направив оси Ax, Ay, Az вдоль ребер AB, AD и AA_1 соответственно (рис. 239).

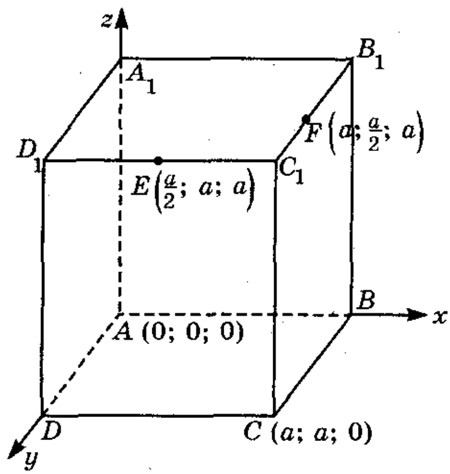


Рис. 239

Координаты точек

$$A(0;0;0),\ C(a;a;0),\ F\left(a;\frac{a}{2};a\right),\ E\left(\frac{a}{2};a;a\right)$$

должны удовлетворять уравнению сферы

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

с центром в точке $O(x_0,y_0,z_0)$ и радиусом R. Это дает систему четырех уравнений с четырьмя переменными x_0,y_0,z_0, R.

В силу симметрии имеем $x_0 = y_0$. Поэтому достаточно рассмотреть только три уравнения:

$$2x_0^2 + z_0^2 = R^2, \tag{15}$$

$$2(a - x_0)^2 + z_0^2 = R^2, \tag{16}$$

$$(a - x_0)^2 + \left(\frac{a}{2} - x_0\right)^2 + (a - z_0)^2 = R^2. \tag{17}$$

Из уравнений (15) и (16) находим, что

$$x_0 = \frac{a}{2},$$

а из уравнений (15) и (17) — что

$$z_0 = \frac{3a}{8}.$$

Подставив эти значения в уравнение (15), получим $R = \frac{a\sqrt{41}}{8}$.

Ответ. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны длины $AB = a$ и $CD = b$ двух скрещивающихся ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Известны кратчайшее расстояние c между прямыми AB и CD, а также угол φ между ними. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{6}abc\sin\varphi$.

Замечание. С помощью этой формулы иногда удобно определять кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

2. Доказать, что в параллелепипеде сумма квадратов всех его диагоналей равна сумме квадратов всех ребер.

Указание. Воспользоваться тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. Доказать, что косинус угла между противоположными ребрами AB и CD тетраэдра $ABCD$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \left|\frac{AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2}{2AB \cdot CD}\right|.$$

Рассмотреть случай, когда все ребра тетраэдра равны между собой.

4. Отрезки двух прямых, заключенные между параллельными плоскостями, относятся как 2 : 3, а их углы с одной из плоскостей — соответственно как 2 : 1. Определить эти углы.

Ответ. $2\arccos\frac{3}{4}$; $\arccos\frac{3}{4}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через середины сторон основания AB и AD проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA. Найти площадь сечения, зная сторону основания a и боковое ребро b.

Ответ. $\frac{5\sqrt{2}ab}{16}$.

6. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Найти радиус сферы, проходящей через вершину A, середины ребер CD и BD и центр грани ABC.

Ответ. $\frac{a}{2}$.

7. В шар радиуса R вписан прямой круговой конус. Найти боковую поверхность конуса, если его высота равна h.

Ответ. $\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$.

8. В правильной треугольной пирамиде высота равна 1, а отношение квадрата длины бокового ребра к квадрату длины стороны основания равно x. Найти зависимость объема пирамиды от x и изобразить ее графически.

Ответ. $V=\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{3}}$, $x>\frac{1}{3}$.

9. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 1, а отношение квадрата длины апофемы боковой грани к квадрату длины стороны основания равно x. Найти зависимость объема пирамиды от x и изобразить ее графически.

Ответ. $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{4}}$, $x>\frac{1}{4}$.

10. Определить синус угла между двумя высотами, опущенными из двух вершин правильного тетраэдра на противоположные грани.

Ответ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

11. Определить объем параллелепипеда, у которого все ребра равны 1, а плоские углы при одной из вершин равны $\varphi < 90°$.

Ответ. $2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}}$.

12. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды со стороной основания a в 5 раз больше площади основания. Найти объем конуса, вписанного в пирамиду.

Ответ. $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{36}$.

13. Высота конуса в 4 раза больше радиуса шара, вписанного в этот конус. Образующая конуса равна l. Найти боковую поверхность конуса и радиус шара, описанного около конуса.

Ответ. $S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2}{3}$, $R = \frac{3l}{4\sqrt{2}}$.

14. Внутри сферы расположены четыре шара радиуса r. Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы. Определить радиус сферы.

Ответ. $r\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

15. На основании прямого кругового конуса лежат три шара радиуса r, а на них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найти высоту конуса.

Ответ. $r\left(1+\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$

16. Три шара радиуса r лежат на нижнем основании прямого кругового цилиндра, причем каждый из них касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Четвертый шар лежит на этих трех шарах, касаясь боковой поверхности цилиндра и его верхнего основания. Определить высоту цилиндра.

Ответ. $\frac{2(3+\sqrt{3}+\sqrt{9+6\sqrt{3}})}{3}r$.

17. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, в которой боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α, точка K — середина ребра BS. Найти величину угла φ между прямыми AK и SC.

Ответ. $\varphi = \arccos \dfrac{|1-3\cos^2\alpha|}{\sqrt{1+4\cos^2\alpha}}$.

18. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A'B'C'D'$; $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$. Точка E' — середина ребра $B'C'$. Найти радиус сферы, проходящей через точки A', E', C', C, если ребро куба равно a.

Ответ. $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

19. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 60°. Точка A лежит на одной прямой, а точка B — на другой, причем расстояния от каждой из этих точек до общего перпендикуляра скрещивающихся прямых одинаковы и равны расстоянию между прямыми. Найти угол между общим перпендикуляром и прямой AB. Обратить внимание на возможность неоднозначного решения задачи.

Ответ. 45° или 60°.

20. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, все ее боковые ребра равны между собой, а ее высота равна $\sqrt{2}$ см. По ребрам пирамиды со скоростью 1 см/с ползет жук. Хватит ли ему 2 с на то, чтобы спуститься с вершины пирамиды по боковому ребру до вершины основания, если известно, что периметр основания он проползет за 8 с?

Ответ. Не всегда. Хватит, если в основании пирамиды лежит квадрат.

21. Отрезок AB находится на ребре двугранного угла; M — точка одной из граней этого угла, удаленная от ребра на расстояние l. Перпендикуляр, опущенный из точки M на другую грань двугранного угла, виден из точки A под углом α, а из точки B — под углом β. Расстояние от центра тяжести треугольника ABM до второй грани двугранного угла равно m. Найти длину отрезка AB. Обратить внимание на возможность неоднозначного решения задачи.

Ответ. $\sqrt{9m^2\operatorname{cosec}^2\alpha - l^2} + \sqrt{9m^2\operatorname{cosec}^2\beta - l^2}$, если углы треугольника ABM при стороне AB оба острые;

$\left|\sqrt{9m^2\operatorname{cosec}^2\alpha - l^2} - \sqrt{9m^2\operatorname{cosec}^2\beta - l^2}\right|$, если один из этих углов тупой.

22. Поверхность шара радиуса r проходит через вершину правильной шестиугольной пирамиды. Ребра пирамиды пересекают поверхность шара на расстоянии l от вершины. Найти угол между соседними ребрами, выходящими из вершины пирамиды.

Ответ. $\arccos\dfrac{4r^2+l^2}{8r^2}$.

23. В шаре проведены диаметр AB и две равные хорды AM и AN, каждая под углом α к диаметру. Найти угол между хордами, если отрезок MN виден из центра шара под углом β.

Ответ. $2\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sec\alpha\right)$.

24. В шаре радиуса r проведены диаметр AB и три равные хорды AC, AD и AF под углом α друг к другу. Найти объем тела, ограниченного плоскостями треугольников ACD, ADF, ACF, BCD, BDF и BCF.

Ответ. $\dfrac{8r^3}{\sqrt{3}}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\left(3-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$

25. Внутренняя точка A шара радиуса r соединена с поверхностью шара тремя отрезками прямых, имеющими длину l и проведенными под углом α друг к другу. Найти расстояние точки A от центра шара.

Ответ. $l\sqrt{1-\dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}-\sqrt{r^2-\dfrac{4}{3}l^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

26. В куб с ребром a вписан шар. Определить радиус другого шара, касающегося трех граней куба и первого шара.

Ответ. $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2(\sqrt{3}+1)}a$.

27. Ребра треугольной пирамиды, выходящие из вершины O, попарно перпендикулярны, и их длины равны a, b, c. Найти объем куба, вписанного в эту пирамиду так, что одна его вершина совпадает с вершиной O.

Ответ. $a^3b^3c^3(ab+bc+ca)^{-3}$.

28. В цилиндре высота h равна диаметру окружности основания. Точка верхней окружности соединена с точкой нижней окружности; проходящая через эти точки прямая образует с плоскостью основания цилиндра угол α. Определить кратчайшее расстояние между этой прямой и осью цилиндра.

Ответ. $\dfrac{h}{2}\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

29. Плоскость, проходящая через одно из ребер правильного тетраэдра, делит его объем в отношении 3 : 5. Найти тангенсы углов, на которые эта плоскость делит двугранный угол тетраэдра.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ и $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$.

30. Объем правильной n-угольной пирамиды равен V, а сторона ее основания равна a. Определить угол наклона бокового ребра пирамиды к основанию.

О т в е т. $\operatorname{arctg}\left(24Va^{-3}n^{-1}\sin^2\dfrac{\pi}{n}\sec\dfrac{\pi}{n}\right)$.

31. На сфере радиуса R взята точка M и из нее проведены три равные между собой хорды MP, MQ и MR так, что $\angle PMQ = \angle QMR = \angle RMP = \alpha$. Найти длину хорд.

О т в е т. $\dfrac{2}{3}R\sqrt{3+6\cos\alpha}$.

32. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания один и тот же угол φ. Определить расстояние от центра описанного шара до плоскости основания пирамиды и объем этой пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R.

О т в е т. $-R\cos 2\varphi$; $\dfrac{4}{3}R^3\sin^2 2\varphi\sin^2\varphi\sin\alpha$ $(0<\varphi<90°)$.

33. Радиус шара равен R. Из точки A, удаленной от центра шара на расстояние l, проведены n касательных к шару так, что все плоские углы многогранного угла при вершине A равны между собой. Определить расстояние между точками касания двух соседних лучей и угол между этими лучами.

О т в е т. $\dfrac{2R}{l}\sqrt{l^2-R^2}\sin\dfrac{\pi}{n}$; $2\arcsin\left(\dfrac{R}{l}\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$.

34. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b; соответствующие им боковые грани перпендикулярны плоскости основания и образуют между собой угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

О т в е т. $b\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{4}$.

35. В правильной треугольной пирамиде отношение радиусов описанного и вписанного шаров равно 3. Найти отношение объема этой пирамиды к объему вписанного шара.

О т в е т. $\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}$.

36. Отрезки AB и CD, длины которых равны соответственно a и b, лежат на скрещивающихся прямых, угол между которыми равен α. Основания O и O' общего перпендикуляра длины c к отрезкам AB и CD делят эти отрезки так, что $AO : OB = 2 : 3$, а $CO' : O'D = 3 : 2$. Найти длины отрезков BD и BC.

Ответ. $BD=\sqrt{c^2+\frac{1}{25}(9a^2+4b^2-12ab\cos\alpha)}$;

$$BC=\sqrt{c^2+\frac{9}{25}(a^2+b^2+2ab\cos\alpha)}.$$

37. Ребро куба равно a. Сфера с центром O пересекает три ребра, сходящиеся в вершине A, в их серединах. Из точки B пересечения сферы с одним из ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину A, причем угол между этим перпендикуляром и радиусом OB делится ребром куба пополам. Найти радиус сферы.

Ответ. $a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

38. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности и остальных четырех шаров. Определить объем конуса, если радиус каждого шара равен R.

Ответ. $\frac{1}{3}(1+2\sqrt{2})^3\pi R^3$.

39. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Найти плоский угол при вершине боковой грани, если площадь поверхности шара относится к площади основания пирамиды как $4:\sqrt{3}$.

Ответ. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(\pi-3)}{\pi+3}$.

40. Одна из граней правильного тетраэдра лежит в плоскости P. Шар радиуса R, расположенный вне тетраэдра, касается плоскости P и другой грани тетраэдра в ее центре. Найти ребро тетраэдра.

Ответ. $R\sqrt{6}$.

41. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — прямой параллелепипед ($ABCD$ и $A'B'C'D'$ — параллелограммы, а боковые ребра $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ и перпендикулярны плоскостям этих параллелограммов). Известно, что $AD'=A'D=a$, $BA'=AB'=b$, $AC=c$, $BD=d$. Вычислить двугранный угол между гранями $AA'B'B$ и $AA'D'D$.

Ответ. $\arccos\dfrac{c^2-d^2}{\sqrt{(c^2+d^2)^2-4(a^2-b^2)^2}}$.

42. В плоскости P дан равносторонний треугольник ABC со стороной a. На перпендикулярах к плоскости P, проведенных в точках B и C, по одну сторону от этой плоскости отложены отрезки $BD=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и $CE=a\sqrt{2}$. Доказать, что треугольник DAE прямоугольный. Вычислить его площадь и найти косинус двугранного угла, который плоскость DAE образует с плоскостью P.

Ответ. $\dfrac{3a^2}{4}$; $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

43. В плоскости P задан равносторонний треугольник ABC со стороной a. На перпендикуляре к плоскости P, проведенном в точке A, отложен отрезок $AS=a$. Найти тангенс острого угла между прямыми AB и SC и кратчайшее расстояние между ними.

Ответ. $\sqrt{7}$, $a\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

44. Правильная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной a, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину пирамиды параллельно одной из сторон основания. Вычислить объем тела вращения, если плоский угол при вершине пирамиды равен α.

Ответ. $\dfrac{\pi a^3}{12}\left(1+2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$

45. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=b$, а $\angle BAC=\alpha$. Этот треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину A так, что угол между этой осью и плоскостью треугольника равен β, а основание треугольника перпендикулярно оси. Вычислить объем тела, полученного при вращении треугольника ABC.

Ответ. $\dfrac{1}{3}\pi b^3\cos\beta\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

46. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в его вершинах и попарно между собой. Найти радиусы шаров, если известны длина c стороны AB и прилежащие к ней углы A и B.

Указание. Выразить стороны треугольника через радиусы сфер.

Ответ. $\dfrac{1}{2}c\sin B\operatorname{cosec}A$; $\dfrac{1}{2}c\sin A\operatorname{cosec}B$; $\dfrac{1}{2}c\sin A\sin B\operatorname{cosec}^2(A+B)$.

47. Равные сферы касаются друг друга и граней двугранного угла. Третья сфера меньшего радиуса также касается граней этого двугранного угла и обеих данных сфер. Известно отношение m радиуса меньшей сферы к радиусу одной из равных сфер. Найти величину двугранного угла. В каких пределах может изменяться m?

Ответ. $2\arcsin\dfrac{1-m}{\sqrt{m^2+2m}}$; $\dfrac{1}{4}<m<1$.

48. Две равные сферы радиуса r касаются друг друга и граней двугранного угла, величина которого равна α. Найти радиус сферы, которая касается граней двугранного угла и обеих данных сфер.

Ответ. Условию задачи удовлетворяют две сферы с радиусами

$$r\left(1+2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$$

49. Даны три прямых круговых конуса с углом $\alpha\left(\alpha<\dfrac{2\pi}{3}\right)$ в осевом сечении и радиусом основания, равным r. Основания этих конусов расположены в одной плоскости и попарно касаются друг друга внешним образом. Найти радиус сферы, касающейся всех трех конусов и плоскости, проходящей через их вершины.

Ответ. $\dfrac{2r}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\dfrac{\pi-\alpha}{4}$.

50. В пирамиде $SABC$ (S — вершина, ABC — основание) дано: $AB = AC = a$, $BC = b$, высота пирамиды проходит через середину высоты AD основания; двугранный угол τ, образованный гранями SBC и ABC, равен $\dfrac{\pi}{4}$. Цилиндр, высота которого равна диаметру основания, вписан в эту пирамиду так, что одно его основание касается граней двугранного угла τ, другое — граней трехгранного угла A, а ось цилиндра параллельна AD. Найти радиус основания цилиндра.

Ответ. $\dfrac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4a+10b}$.

51. Сфера касается всех боковых ребер правильной прямой шестиугольной призмы, основания которой лежат вне сферы. Найти отношение площади боковой поверхности призмы, заключенной внутри сферы, к площади поверхности сферы, находящейся вне призмы.

Ответ. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

52. Из конца диаметра шара проведена хорда так, что поверхность, образуемая ее вращением вокруг этого диаметра, делит объем шара на две равновеликие части. Определить угол между хордой и диаметром.

Ответ. $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

53. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одно из боковых ребер пирамиды также равно a, а два других равны b. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

Ответ. $\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{4a^2b^2-a^4-b^4}}$.

54. В прямом круговом конусе расположены три одинаковых шара радиуса r, касающиеся изнутри боковой поверхности конуса, плоскости основания конуса и попарно друг друга. Найти площадь боковой поверхности другого конуса с теми же вершиной, высотой и плоскостью основания, которого данные шары касаются внешним образом.

Ответ. $\frac{26\pi r^2}{27}$.

55. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A'B'C'D'$; $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$. Ребро куба равно 1. Пусть E — середина ребра DC, F — середина ребра BB'. Точки A, D', E и F попарно соединены отрезками прямых. Найти объем пирамиды $AD'EF$.

Ответ. $\frac{5}{24}$.

56. Пусть S — вершина правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны a. Через точку A и точку E ребра SC проведена плоскость перпендикулярно плоскости треугольника SAC, причем $SE = b$. Определить объем четырехугольной пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от данной пирамиды.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}a^2b^2}{3(a+b)}$.

57. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC (угол C — прямой). Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. В пирамиду вписан шар, радиус которого равен $\frac{1}{3}$ SA. Через вершину S и точку касания шара с основанием пирамиды проходит плоскость, параллельная ребру BC. Эта плоскость делит поверхность шара в отношении 1:4. Найти $\angle BAC$.

Ответ. $2\operatorname{arctg}\frac{4}{9}$.

58. Треугольная пирамида $ABCD$, все ребра которой равны a, вложена в прямой круговой конус так, что вершина A лежит на окружности основания конуса, ребро AD лежит в плоскости основания конуса, ребро BC параллельно этой плоскости, а вершины B и C лежат на боковой поверхности конуса. Угол между высотой конуса и его образующей равен $\alpha(\alpha<\frac{\pi}{6})$. Определить высоту конуса.

Ответ. $\dfrac{a\operatorname{tg}2\alpha}{1-\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}$.

59. Основанием треугольной пирамиды служит равносторонний треугольник. Три другие грани образуют с ним двугранные углы, равные α, β и γ, каждый из которых меньше $\frac{\pi}{2}$. В пирамиду вписан шар. Определить отношение радиуса шара к высоте пирамиды.

Ответ. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$.

60. Два равных прямых круговых конуса с общей вершиной S, высотой h и радиусом основания R $(R<h)$ касаются друг друга и плоскости P. Пусть l — прямая, по которой пересекаются плоскости оснований конусов. Вычислить угол между прямой l и плоскостью P.

Ответ. $\arccos\frac{R}{h}$.

61. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости грани ABC, двугранный угол при ребре SC равен $\frac{\pi}{4}$, $SA=BC=a$ и угол ABC — прямой. Найти длину ребра AB.

Ответ. $a\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

62. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро BC равно a, $AB=AC$, ребро SA перпендикулярно основанию ABC пирамиды, двугранный угол при ребре SA равен α, а при ребре BC равен β. Найти радиус описанного шара.

Ответ. $\dfrac{a}{2\sin\alpha\cos\beta}\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$.

63. В правильный тетраэдр, ребро которого равно 1, вписано полушарие так, что три грани тетраэдра касаются его сферической поверхности, а четвертая служит ему диаметральной плоскостью. Определить полную поверхность этого полушария.

Ответ. $\dfrac{4\pi}{27}$.

64. Сторона правильного тетраэдра равна a. Определить радиус шара, касающегося боковых ребер тетраэдра в вершинах основания.

Ответ. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

65. Сторона правильного тетраэдра равна a. Определить радиус шара, касающегося боковых граней тетраэдра в точках, лежащих на сторонах основания.

Ответ. $a\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.

66. В усеченный конус, объем которого V, вписан шар, касающийся как боковой поверхности, так и обоих оснований. Радиус шара равен R. Какой угол составляет образующая конуса с бо́льшим основанием?

Ответ. $\arccos\sqrt{\dfrac{4V-2\pi R^3}{3V+2\pi R^3}}$.

67. В треугольной пирамиде две грани — равносторонние треугольники со стороной a, а две другие грани — равнобедренные прямоугольные треугольники. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

Ответ. $\dfrac{a\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2}$.

68. На плоскости стоят прямой круговой конус и вертикальный штатив (отрезок). Радиус основания конуса равен 1 м, а высота конуса равна 2 м. Основание штатива отстоит от центра основания конуса на 2 м, высота штатива составляет 4 м. На вершине штатива помещен точечный источник света. Найти площадь тени, отбрасываемой на плоскость конусом (не считая площади его основания).

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$ м^2.

69. В прямой круговой конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. В каком отношении боковая поверхность конуса делится линией касания шара и конуса?

Ответ. 4 : 21.

70. Около прямого кругового конуса, высота которого равна радиусу основания, описана пятиугольная пирамида. Ее полная поверхность в 2 раза больше полной поверхности конуса. Найти объем пирамиды, если боковая поверхность конуса равна $\pi\sqrt{2}$.

Ответ. $\frac{2}{3}\pi$.

71. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют с основанием углы 30° и 60°. Около пирамиды описан прямой круговой конус. Найти объем конуса, если высота пирамиды равна h.

Ответ. $\frac{10}{9}\pi h^3$.

72. В шар вписан прямой круговой цилиндр. Во сколько раз объем шара больше объема цилиндра, если известно, что отношение радиуса шара к радиусу основания цилиндра вдвое меньше, чем отношение поверхности шара к боковой поверхности цилиндра?

Ответ. 16 : 9.

73. В шар радиуса a вписан правильный тетраэдр. Найти объем этого тетраэдра.

Ответ. $\frac{8\sqrt{3}}{27}a^3$.

74. Высота треугольной пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D, проходит через точку пересечения высот треугольника ABC. Кроме того, известно, что $DB = b$, $DC = c$, $\angle BDC = 90°$. Найти отношение площадей граней ADB и ADC.

Ответ. $\frac{b}{c}$.

75. Известно, что две взаимно перпендикулярные образующие прямого кругового конуса делят окружность основания на две дуги, одна из которых вдвое короче другой. Найти объем конуса, если его высота равна h.

Ответ. $\frac{2}{3}\pi h^3$.

76. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b, угол между боковыми гранями равен φ. Найти сторону основания.

Ответ. $\dfrac{2b}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$; $\frac{\pi}{3} < \varphi < \pi$.

77. Середина высоты прямого конуса с образующей l и углом α при вершине принята за центр шара, проходящего через вершину. Определить радиус круга, полученного в результате пересечения поверхностей конуса и шара.

Ответ. $l\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

78. Найти объем правильной треугольной пирамиды, зная радиус r вписанного в нее шара и угол наклона α ее боковой грани к основанию.

Ответ. $\dfrac{r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}$.

79. В четырехугольную пирамиду $PABCD$ вписан шар, касающийся всех ее граней. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция $ABCD$ с боковой стороной $AB = l$ и острым углом φ, а боковые грани APD и BPC — равнобедренные треугольники ($AP = PD$, $BP = PC$), образующие с основанием пирамиды один и тот же угол α. Найти радиус вписанного шара.

Ответ. $\frac{l}{2}\sin\varphi\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

80. В шаровой сектор вписан шар. Радиус окружности, по которой шар касается сектора, равен r. Диаметральная плоскость шарового сектора высекает из него круговой сектор с центральным углом 2φ. Определить радиус шарового сектора.

Ответ. $r\dfrac{1+\sin\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$.

81. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{8}p^3\operatorname{ctg}^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha+4)^{\frac{3}{2}}$.

82. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A и B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Указание. Доказать, что секущая плоскость пересекается с боковой гранью DSC по средней линии.

Ответ. 3 : 5.

83. Высота правильной треугольной пирамиды равна h. Точки пересечения высот каждой из боковых граней и вершина пирамиды лежат на поверхности шара радиуса r. Найти объем пирамиды.

Указание. Доказать, что центр шара лежит на высоте пирамиды.

Ответ. $\frac{1}{2}\sqrt{3}h^2(h-2r)$.

84. Шар радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти высоту пирамиды.

Ответ. $\frac{4}{3}r\sqrt{3}$.

85. Шар радиуса r касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот. Сумма трех плоских углов при вершине пирамиды равна 3α. Доказать, что пирамида правильная. Найти длину бокового ребра пирамиды.

Указание. Показать, что у данной пирамиды все боковые ребра равны, а в основании лежит правильный треугольник и что при этом выполняются все требования определения правильной треугольной пирамиды.

Для вычисления длины бокового ребра использовать тот факт, что центр шара, касающегося боковых граней правильной треугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды.

Ответ. $\frac{r\sqrt{1+2\cos\alpha}}{\cos\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

86. В четырехугольной пирамиде $OABCD$ основанием является трапеция $ABCD$, а боковые грани OAD и OBC перпендикулярны плоскости основания. Зная, что $AB = 3$, $CD = 5$, площадь грани OAB равна 9 и площадь грани OCD равна 20, найти объем пирамиды.

Ответ. $6\sqrt{7}$.

87. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b ($b > a$). Сфера с центром в точке O лежит над плоскостью основания $ABCD$, касается этой плоскости в точке A и, кроме того, касается бокового ребра SB. Найти объем пирамиды $OABCD$.

Ответ. $\frac{a^3(2b-a)\sqrt{2}}{6\sqrt{2b^2-a^2}}$.

88. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b. Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAD и SBC в точках A и B, а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAB и SCD в точках B и C. Найти объем пирамиды ABO_1O_2.

Ответ. $\frac{a^4\sqrt{2}}{48\sqrt{2b^2-a^2}}$.

89. Дана правильная пирамида $SABC$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром b. Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAB и SAC в точках B и C, а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAC и SBC в точках A и B. Найти объем пирамиды SBO_1O_2.

Ответ. $\dfrac{a^2b^2}{12\sqrt{3b^2-a^2}}$.

90. Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найти периметр треугольника ABC, если известно, что $AB=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

91. Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются равнобедренными прямоугольными треугольниками $A'B'C'$ и $A''B''C''$ с гипотенузами $A'C'=A''C''=4$. Найти BC, зная, что $AB=\sqrt{10}$.

Ответ. $\sqrt{14}$.

92. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами, равными 2. Одна из диагоналей четырехугольника равна $\sqrt{14}$. Найти другую диагональ.

Ответ. $\sqrt{10}$.

93. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами, равными 2. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон равна $\sqrt{5}$.

Ответ. $2(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

94. В правильную треугольную пирамиду помещены три шара так, что первый шар касается всех боковых граней пирамиды и второго шара, второй шар касается боковых граней и третьего шара, а третий шар касается боковых граней, основания пирамиды и второго шара. Какую часть объема пирамиды занимают три шара, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом α?

Ответ. $\dfrac{4}{9}\sqrt{3}\pi\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\left(\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^9\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^{15}\dfrac{\alpha}{2}\right)$

95. В прямой круговой усеченный конус помещены два шара так, что первый шар касается верхнего основания конуса, его боковой поверхности и второго шара, а второй шар касается нижнего основания, боковой поверхности и первого шара. Какую часть объема конуса занимают оба шара, если образующая конуса наклонена к нижнему основанию под углом α?

Ответ. $\dfrac{2\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}^6\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^4\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^8\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

96. В правильную усеченную треугольную пирамиду помещены два шара так, что первый касается верхнего основания пирамиды, всех ее боковых граней и второго шара, а второй шар касается нижнего основания, боковых граней и первого шара. Какую часть объема пирамиды занимают оба шара, если ее боковые грани наклонены к основанию под углом α?

Ответ. $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1+\operatorname{tg}^6\dfrac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}^4\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^8\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

97. В прямой круговой конус, у которого образующая составляет с осью угол α, помещены три шара так, что первый шар касается боковой поверхности конуса и второго шара, второй шар касается боковой поверхности первого и третьего шаров, а третий шар касается боковой поверхности, основания конуса и второго шара. Какую часть объема конуса занимают все три шара?

Ответ. $\dfrac{4\left(\operatorname{tg}^{15}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^9\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\alpha}$.

98. Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1; BD — высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

Ответ. $\dfrac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{6}\sin\varphi}$.

99. Отрезок AB единичной длины, являющийся хордой сферы радиуса 1, расположен под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра до ближайшего к нему конца A хорды AB равно $\sqrt{2}$. Определить величину отрезка BD.

Ответ. 1.

100. Основание AC и вершина B равнобедренного треугольника ABC находятся на различных гранях прямого двугранного угла с ребром l. Точки A и B удалены от l на расстояние a, а проекция C на ребро l равноудалена от проекций A и B на это ребро. Найти расстояние от точки C до l, если AB образует с l угол, равный 60°.

Ответ. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

101. Шар радиуса r касается плоскости P в точке A. Прямая l образует с плоскостью P угол φ, пересекает эту плоскость в точке C и касается шара в точке B. Найти длину отрезка AB, если $AC = 2r$.

Ответ. $2r\sqrt{\sin\varphi}$.

102. В правильный тетраэдр $ABCD$ вписан шар K. Из точки D на грань ABC тетраэдра $ABCD$ опущена высота DE. Точка P является серединой отрезка DE. Через точку P проведена плоскость M перпендикулярно DE. Из всех точек, которые принадлежат одновременно шару K и плоскости M, взята точка O, являющаяся ближайшей к точке A. Найти расстояние точки O от грани ABD, если объем шара K равен 1.

Ответ. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{6}{\pi}}$.

103. В правильный тетраэдр $ABCD$ вписана призма $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ такая, что лежащий в ее основании треугольник $A_1B_1C_1$ является равносторонним, его центр совпадает с центром треугольника ABC, при этом $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Боковые ребра A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 призмы перпендикулярны плоскости, в которой лежит треугольник ABC. Точка P пересечения диагоналей B_1C_2 и C_1B_2 четырехугольника $B_1B_2C_2C_1$ соединена с точкой A и отрезок AP в точке O делится пополам. Найти сумму расстояний от точки O до граней ABD, ACD и BCD тетраэдра $ABCD$, если объем призмы $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ равен 1, а площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ относятся как 2 : 1.

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{3}\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}$.

104. Около шара радиуса 1 описаны куб и правильная четырехугольная пирамида, объем которой в $\dfrac{4}{3}$ раза больше, чем объем куба. Одна из граней куба лежит на основании пирамиды, и ее стороны параллельны сторонам основания пирамиды. Найти объем общей части пирамиды и куба.

Ответ. $\frac{44-16\sqrt{2}}{3}$.

105. Высота пирамиды *SABCD*, в основании которой лежит прямоугольник *ABCD*, проходит через точку пересечения его диагоналей. Шар с центром в точке *S* касается основания пирамиды, причем внутри пирамиды находится $\frac{1}{5}$ его поверхности. Найти двугранный угол, образованный плоскостями *SAB* и *SBC*.

Ответ. $\frac{7\pi}{10}$.

106. Прямоугольник *ABCD* служит основанием пирамиды *SABCD*, высота которой проходит через точку пересечения диагоналей основания и больше 1, а двугранный угол, образованный плоскостями *SAB* и *SBC*, равен $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Найти часть объема пирамиды, содержащуюся в шаре радиуса 1 с центром в точке *S*.

Ответ. $\frac{2}{3}\pi(\sqrt{2}-1)$.

107. Найти отношение полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды к поверхности шара, центр которого расположен в вершине пирамиды и который касается ее основания, зная, что вне пирамиды находится $\frac{5}{7}$ поверхности шара.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{\cos\frac{3\pi}{14}}}{\pi\left(1-\sqrt{\cos\frac{3\pi}{14}}\right)}$.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕХГРАННОГО УГЛА

В данном параграфе дается общая методика решения стереометрических задач, связанных с вычислением величин плоских и двугранных углов трехгранного угла. Будет получен ряд формул, достаточно эффективных при решении многих задач стереометрии.

Отметим, что эти формулы не доказываются в школьных учебниках по геометрии, поэтому, используя их при решении экзаменационных задач, абитуриент, безусловно, должен приводить доказательство этих формул.

Для иллюстрации эффективности полученных в этом параграфе общих формул будут рассмотрены примеры конкурсных экзаменационных задач, которые можно решить также другими различными способами без применения этих формул (предоставляем выполнить это самостоятельно).

1. Основные элементы трехгранного угла

В стереометрии рассматриваются элементы трехгранного угла: плоские углы, двугранные углы, биссектральные плоскости двугранных углов, биссектриса, высотная прямая, биссекторная прямая и т. п.

Плоские и внутренние двугранные углы трехгранного угла будем называть его ***основными элементами***.

Биссектральной плоскостью двугранного угла называется плоскость, делящая этот угол пополам. Три биссектральные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой. Эта прямая называется ***биссектрисой*** трехгранного угла.

Прямая, по которой пересекаются плоскости, проходящие через каждое ребро трехгранного угла перпендикулярно противоположной грани, называется ***высотной прямой*** трехгранного угла.

Биссекторной прямой трехгранного угла называется прямая, по которой пересекаются плоскости, проходящие через биссектрисы плоских углов соответствующих граней перпендикулярно граням трехгранного угла.

В дальнейшем, при получении соотношений между основными элементами трехгранного угла примем следующие обозначения. Буквами α, β и γ будем обозначать плоские углы (и их величины) трехгранного угла; буквами A, B и C — внутренние двугранные углы (и их величины), противолежащие углам α, β и γ соответственно (рис. 240). Так, например, если в трехгранном угле $SABC$ $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$, то через A, B и C будем обозначать двугранные углы (и их величины) при ребрах SA, SB и SC соответственно.

Трехгранный угол, имеющий хотя бы один прямой двугранный угол, назовем ***прямоугольным***. Прямой двугранный угол всегда будем обозначать A.

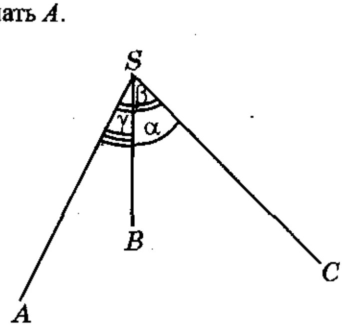


Рис. 240

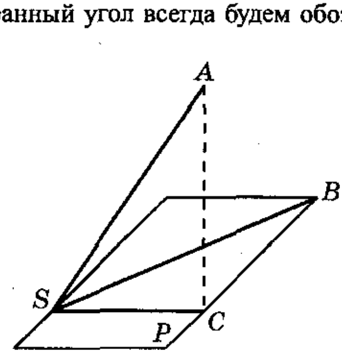


Рис. 241

Трухгранный угол, образованный равными плоскими углами, будем называть ***правильным***.

Величина каждого из основных элементов трехгранного угла заключена в интервале от 0 до π.

Введем понятие полярного трехгранного угла. Возьмем внутри трехгранного угла $SABC$ точку S' и опустим из нее перпендикуляры на грани; получим новый трехгранный угол $S'A'B'C'$, плоские углы которого

$$\alpha' = \pi - A,\ \beta' = \pi - B,\ \gamma' = \pi - C, \tag{1}$$

а двугранные углы

$$A' = \pi - \alpha,\ B' = \pi - \beta,\ C' = \pi - \gamma. \tag{2}$$

Полученный трехгранный угол $S'A'B'C'$ будем называть ***полярным*** относительно трехгранного угла $SABC$.

Допустимые значения основных элементов трехгранного угла $SABC$ должны удовлетворять следующим условиям:

1°. *Каждый плоский угол трехгранного угла меньше* суммы двух других плоских углов*:

$$\alpha < \beta + \gamma,\ \beta < \alpha + \gamma,\ \gamma < \alpha + \beta. \tag{3}$$

Каждый плоский угол больше разности двух других плоских углов

2°. *Сумма плоских углов трехгранного угла положительна и меньше* 2π:

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < 2\pi. \tag{4}$$

(Доказательство соотношений 1°–2° см. в школьном учебнике.)

3°. *Сумма внутренних двугранных углов трехгранного угла больше* π *и меньше* 3π:

$$\pi < A + B + C < 3\pi. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол $S'A'B'C'$, полярный относительно данного трехгранного угла $SABC$. Согласно свойству 2°, имеем

$$0 < \alpha' + \beta' + \gamma' < 2\pi,$$

или в силу соотношений (1),

$$0 < \pi - A + \pi - B + \pi - C < 2\pi,$$

откуда следует доказываемое соотношение (5).

4°. *В трехгранном угле против большего плоского угла лежит больший двугранный угол; против большего двугранного угла лежит больший плоский угол. Против равных плоских углов лежат равные двугранные углы, и наоборот, против равных двугранных углов лежат равные плоские углы.*

---

* Равенства $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta = \alpha + \gamma$ или $\gamma = \alpha + \beta$ возможны только в случае совпадения всех трех плоскостей.

5°. *Внутренние двугранные углы трехгранного угла удовлетворяют неравенствам*

$$A+B-C<\pi,\ A-B+C<\pi,\ B+C-A<\pi. \qquad (6)$$

Доказательство. Применяя свойство 1° к плоским углам полярного трехгранного угла $S'A'B'C'$, имеем

$$\gamma'<\alpha'+\beta',$$

или в силу соотношений (1),

$$\pi-C<\pi-A+\pi-B,$$

откуда следует неравенство

$$A+B-C<\pi.$$

Остальные два неравенства доказываются аналогично.

В задачах на вычисление элементов трехгранного угла указанные соотношения 1°–5° позволяют установить существование и число решений задачи.

Пример 1. *Доказать, что из всех углов, которые образует наклонная с прямыми, принадлежащими данной плоскости, наименьшим является угол между наклонной и ее проекцией.*

Доказательство. Пусть $\angle ASC$ — угол между наклонной AS и ее проекцией CS на плоскость P, а BS — некоторая произвольная прямая этой плоскости P (рис. 241).

Согласно свойству 1° трехгранного угла,

$$\angle ASB \ge \angle ASC - \angle BSC,$$

причем знак равенства достигается лишь, если все три ребра лежат в одной плоскости. Значит, угол ASB принимает наименьшее значение, когда $\angle BSC=0$, т. е. когда $\angle ASB=\angle ASC$, что и требовалось доказать.

Пример 2. *Доказать, что сумма углов пространственного четырехугольника не превышает* 360°.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — произвольный пространственный четырехугольник; BD — его диагональ (рис. 242). Сравним сумму углов четырехугольника $ABCD$ с суммой углов треугольников ABD и BCD, которая составляет 360°. Рассcмотрим трехгранные углы $DABC$ и $BACD$ соответственно с вершинами D и B. Согласно свойству 1° трехгранного угла,

$$\angle ADC \le \angle ADB + \angle BDC$$

(причем равенство достигается только в случае совпадения всех трех плоскостей ADB, ADC и BCD),

$$\angle ABC \le \angle ABD + \angle DBC.$$

Отсюда

$$\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB \le$$

$$\le \angle ABD+\angle DBC+\angle BCD+\angle BDC+\angle ADB+\angle DAB=360°,$$

что и требовалось доказать.

24 Математика

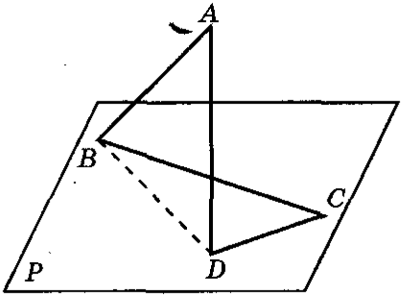


Рис. 242

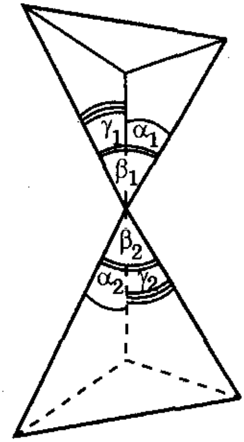


Рис. 243

Равенство двух трехгранных углов. Если основные элементы трехгранного угла $S_1A_1B_1C_1$ равны соответственно основным элементам трехгранного угла $S_2A_2B_2C_2$:

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2,$$

$$A_1 = A_2,\ B_1 = B_2,\ C_1 = C_2,$$

то такие трехгранные углы равны (могут быть вложены друг в друга движением в пространстве), либо зеркально равны.

Два зеркально-равных трехгранных угла движением в пространстве нельзя вложить друг в друга, а можно привести в положение, указанное на рис. 243.

Задачи на построение трехгранных углов. Единственное решение допускают следующие шесть задач на построение трехгранных углов:

1°. По трем плоским углам.

2°. По трем двугранным углам.

3°. По двум плоским углам и двугранному углу между ними.

4°. По двум двугранным углам и плоскому углу между ними.

5°. По двум плоским углам и двугранному углу, противолежащему одному из них.

6°. По двум двугранным углам и плоскому углу, противолежащему одному из них.

При этом равные и зеркально-равные трехгранные углы не рассматриваются как различные решения задачи.

В общем случае задача построения трехгранного угла по трем произвольно заданным элементам может либо вообще не иметь решения, либо иметь не единственное решение. Поэтому мы будем рассматривать шесть основных задач на вычисление основных элементов трехгранного угла только по заданной допустимой системе трех его основных элементов.

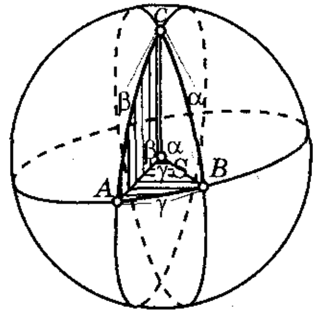


Рис. 244

Замечание. Рассмотрим сферу с центром S, радиус которой примем за масштабный отрезок. Пусть A, B и C — точки, в которых ребра данного трехгранного угла $SABC$ пересекают эту сферу (рис. 244). Грани BSC, CSA и ASB рассматриваемого трехгранного угла пересекают эту сферу по дугам BC, CA и AB ее больших кругов; фигура, образованная этими дугами, называется ***сферическим треугольником.*** Так как радиус сферы равен 1, то длины дуг BC, CA и AB равны соответственно α, β и γ. Лучи, касательные к дугам AB и AC и направленные от A к B и от A к C, образуют линейный угол внутреннего двугранного угла A данного трехгранного угла. Таким образом, α, β и γ — это длины сторон сферического треугольника ABC, а углы A, B и C — его углы (углом между двумя дугами, выходящими из данной точки, называется угол с вершиной в этой точке, сторонами которого являются лучи, касательные к этим дугам и идущие в направлении дуг.

Всякому трехгранному углу с вершиной в центре сферы соответствует сферический треугольник, который высекает этот угол на поверхности сферы.

Обратно, всякому сферическому треугольнику соответствует трехгранный угол, вершина которого находится в центре сферы, а ребрами служат радиусы, соединяющие центр сферы с вершинами треугольника.

Таким образом, *всякое соотношение между элементами трехгранного угла* (сферического треугольника) *можно интерпретировать как соотношение между элементами сферического треугольника* (трехгранного угла). При этом плоские и двугранные углы α, β, γ и A, B, C равны по величине (соответственно) сторонам и углам сферического треугольника.

2. Соотношения между основными элементами трехгранного угла

Выведем соотношения между основными элементами произвольного трехгранного угла, применяемые в стереометрии при вычислении элементов трехгранного угла.

1^0. Выражение двугранных углов через плоские:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},\ \cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

$$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (7)$$

Доказательство. Убедимся в справедливости первой из формул (7). Пусть A, B и C — внутренние двугранные углы, противолежащие плоским углам α, β и γ соответственно (рис. 245). Проведем через какую-либо точку A_1 ребра SA плоскость, перпендикулярную рассматриваемому ребру. Эта плоскость может пересекать либо сами ребра SB и SC (каждое), либо может не пересекать (хотя бы одно их них). Поэтому следует рассмотреть все возможные случаи.

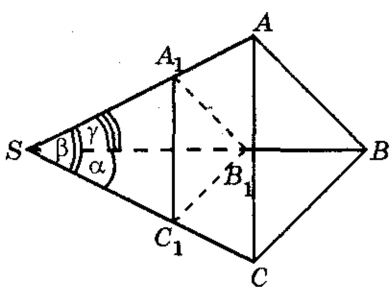


Рис. 245

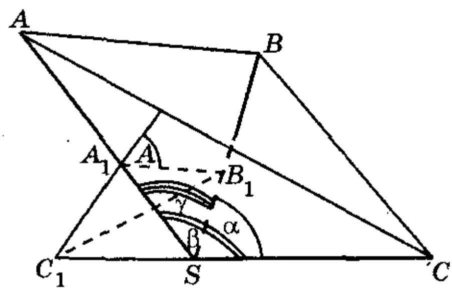


Рис. 246

1. Пусть углы β и γ — острые. Тогда плоскость, проходящая через точку A_1 перпендикулярно ребру AS, пересекает ребра SB и SC в точках B_1 и C_1 (рис. 245). В сечении получится треугольник $A_1B_1C_1$. Угол при вершине A_1 в этом треугольнике является линейным углом внутреннего двугранного угла при ребре SA и, следовательно, равен A, т. е. $\angle C_1A_1B_1 = A$.

Выразим по теореме косинусов $C_1B_1^2$ из треугольников $A_1B_1C_1$ и C_1SB_1, а затем приравняем полученные выражения. Имеем

$$A_1C_1^2 + A_1B_1^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1B_1 \cdot \cos A = B_1S^2 + C_1S^2 - 2B_1S \cdot C_1S \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$2A_1C_1 \cdot A_1B_1 \cdot \cos A = 2B_1S \cdot C_1S \cdot \cos\alpha - (B_1S^2 - A_1B_1^2) - (C_1S^2 - A_1C_1^2),$$

т. е.

$$2A_1C_1 \cdot A_1B_1 \cdot \cos A = 2B_1S \cdot C_1S \cdot \cos\alpha - 2A_1S^2.$$

Подставляя в последнее равенство

$$A_1C_1 = A_1S\cdot \operatorname{tg}\beta,\ A_1B_1 = A_1S\cdot \operatorname{tg}\gamma,\ \ B_1S = \frac{A_1S}{\cos\gamma},\ C_1S = \frac{A_1S}{\cos\beta},$$

получим (сократив все члены на $2A_1S^2$)

$$\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\cos A = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma} - 1,$$

откуда

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

2. Пусть <u>один из углов β или γ — тупой, а другой — острый</u>. Например, если угол β — тупой, а угол γ — острый, то плоскость, проходящая через точку A_1 перпендикулярно ребру AS, пересечет ребро BS и продолжение ребра CS. Имеем

$$\angle C_1A_1B_1 = \pi - A,\ \angle B_1SC_1 = \pi - \alpha, \angle A_1SC_1 = \pi - \beta, \angle A_1SB_1 = \gamma$$

(рис. 246). Если же угол β — острый, а угол γ — тупой, то $\angle C_1A_1B_1 = \pi - A$, $\angle B_1SC_1 = \pi - \alpha$, $\angle A_1SC_1 = \beta$, $\angle A_1SB_1 = \pi - \gamma$. Повторяя доказательство еще раз, убеждаемся, что формула остается справедливой и в этих случаях.

3. Пусть <u>оба угла β и γ — тупые</u>. В этом случае плоскость, проходящая через A_1 перпендикулярно ребру AS, пересечет продолжения ребер SB и SC. Имеем

$$\angle C_1A_1B_1 = A,\ \angle B_1SC_1 = \alpha,\ \angle A_1SC_1 = \pi - \beta,\ \angle A_1SB_1 = \pi - \gamma$$

(рис. 247) и полученная формула также остается справедливой.

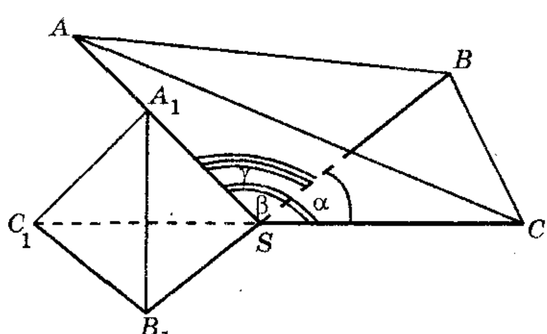


Рис. 247

4. Наконец, рассмотрим случай, когда <u>хотя бы один из углов β или γ — прямой</u>. Например, пусть угол β — прямой, а γ — острый (рис. 248).

В этом случае плоскость, проходящая через точку A_1 перпендикулярно ребру AS, пересекает ребро BS и параллельна ребру CS. Пусть A_1D — прямая пересечения этой плоскости с плоскостью грани DSC, B_1D — перпендикуляр к этой прямой, а B_1C_1 — перпендикуляр к ребру CS. По теореме о трех перпендикулярах A_1D перпендикулярно DC_1.

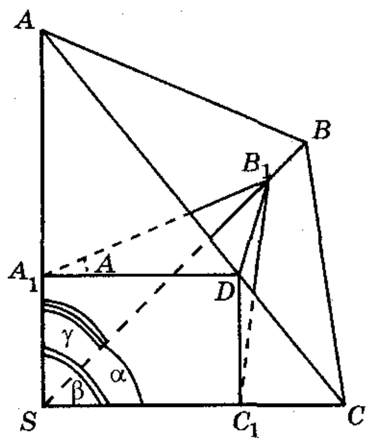


Рис. 248

Из прямоугольных треугольников A_1DB_1 и SA_1B_1 получим

$$A_1D = A_1B_1 \cos A = SB_1 \sin\gamma \cos A.$$

С другой стороны, из прямоугольного треугольника SC_1B_1 имеем

$$A_1D = SC_1 = SB_1 \cos\alpha.$$

Следовательно,

$$SB_1 \sin\gamma \cos A = SB_1 \cos\alpha,$$

откуда $\cos A = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$, т. е. формула остается в силе и в этом частном случае.

Итак, доказанная формула справедлива для произвольных допустимых значений углов α, β и γ.

Аналогично доказываются две другие формулы. Заметим, что формулы (7) можно получить из какой-либо одной одновременной круговой перестановкой букв α, β, γ и A, B, C.

Замечание 1. Как правило, при решении конкретных стереометрических задач имеют дело с каким-либо одним из рассмотренных четырех случаев. Поэтому абитуриенту достаточно привести доказательство лишь для этого случая.

Замечание 2. Можно дать и другие доказательства формул (7) (см. примеры 5, 9 и 14 § 1 данной главы).

Рассмотрим примеры использования формул (7).

Пример 3. *Плоские углы трехгранного угла равны* 45°, 45° *и* 60°. *Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из граней, плоский угол которой равен* 45°. *Найти угол между этой прямой и ребром трехгранного угла, не лежащим в упомянутой грани.*

Решение. Пусть в трехгранном угле $SABC$ известны плоские углы: $\angle ASB = 45°, \angle BSC = 45°, \angle ASC = 60°$, а прямая DS перпендикулярна плоскости грани ASB. Воспользуемся второй из формул (7) и вычислим в трехгранном угле $SABC$ величину двугранного угла при ребре BS (обозначим его через B):

$$\cos B = \frac{\cos 60° - \cos^2 45°}{\sin^2 45°} = 0,$$

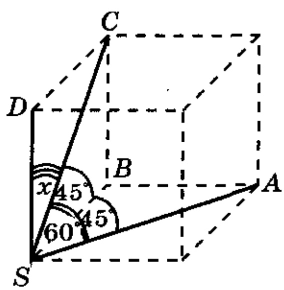


Рис. 249

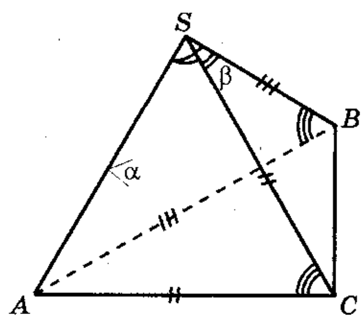


Рис. 250

откуда $B = 90°$. Следовательно, прямая DS расположена в плоскости грани CSB и перпендикулярна ребру BS. Очевидно, что угол DSC (на рис. 249 он обозначен через x) — искомый и равен 45°.

Ответ. 45°.

Замечание. Ребра CS и AS трехгранного угла $SABC$ можно рассматривать как диагонали граней куба, а ребро BS — как ребро этого куба (рис. 249). Так как ребро DS куба перпендикулярно грани ASB, то угол DSC является искомым и равен 45°.

Пример 4. *В треугольной пирамиде две грани являются прямоугольными равнобедренными треугольниками, которые примыкают друг к другу гипотенузами и образуют двугранный угол* α. *Найти двугранный угол в этой пирамиде, ребром которого является катет прямоугольного треугольника.*

Р е ш е н и е. Пусть в треугольной пирамиде $SABC$ (рис. 250) грани ASC и ASB — прямоугольные равнобедренные треугольники с гипотенузой AS; двугранный угол при ребре AS равен α. Плоские углы равны:

$$\angle ASC = \angle ASB = \angle SAC = \angle SAB = \frac{\pi}{4}.$$

Все двугранные углы, ребрами которых являются катеты прямоугольных треугольников ASC и ASB, одинаковы. Вычислим, например, двугранный угол при ребре SB.

Рассмотрим трехгранный угол $SABC$. Обозначим плоский угол при его вершине S, противолежащий ребру SA, через β, а искомый двугранный угол — через x. Тогда по формулам (7) имеем

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta - \cos^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{4}}, \ \cos x = \frac{\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\cos\beta}{\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta}.$$

Отсюда следует, что

$$\cos\beta = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \ \cos x = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}$$

или $\cos x = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{3+\cos\alpha}}$, т. е. $x = \arccos\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{3+\cos\alpha}}$.

О т в е т. $\arccos\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{3+\cos\alpha}}$.

З а м е ч а н и е. Ответ можно дать в другой, эквивалентной форме. Так как

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}, \ \sin^2 x = \frac{2\cos\beta}{1+\cos\beta},$$

$$\cos^2 x = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}, \ \mathrm{tg}^2 x = \frac{2\cos\beta}{1-\cos\beta} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\,\mathrm{ctg}^2\frac{\beta}{2},$$

то

$$x = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

П р и м е р 5. *В прямом круговом конусе с вершиной S угол между высотой SO и образующей равен φ. На плоскости основания вне конуса выбраны две точки A и B так, что прямые SA и SB взаимно перпендикулярны и образуют с высотой SO углы, соответственно равные α и β. Вычислить* *угол между образующими, по которым боковая поверхность конуса пересекает треугольники OSA и OSB.*

Решение. Пусть SA_1 и SB_1 — образующие, по которым боковая поверхность конуса пересекает треугольники OSA и OSB (рис. 251). Обозначим искомый угол между этими образующими через x. Выражая по формулам (7) косинус двугранного угла при ребре SO трехгранных углов $SOAB$ и SOA_1B_1, получим

$$\frac{\cos 90° - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos x - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi};$$

откуда $\cos x = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta$.

Ответ. $\arccos(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta)$.

Пример 6. *Три равных прямых круговых конуса с углом* α $\left(\alpha \le \frac{2\pi}{3}\right)$ *в осевом сечении имеют общую вершину и касаются друг друга внешним образом по образующим* l_1, l_2 *и* l_3. *Найти угол между* l_1 *и* l_2.

Решение. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$, ребрами которого являются оси конусов. Плоские углы этого трехгранного угла одинаковы и равны α, а образующие l_1, l_2 и l_3 являются биссектрисами этих углов. Применяя формулы (7), получим выражение для косинуса двугранного угла A при ребре SA через плоские углы α трехгранного угла $SABC$ и выражение для косинуса того же угла A через плоские углы $\frac{\alpha}{2}$ и x трехгранного угла с ребрами AS, l_1 и l_2:

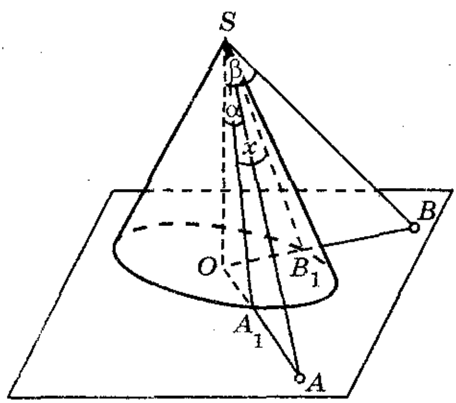


Рис. 251

$$\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\ \cos A=\frac{\cos x-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\cos x-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

откуда

$$\cos x=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

или

$$\cos x=1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)=1-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

или

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},\ x=2\arcsin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),\ \text{так как } \alpha\le\frac{2\pi}{3}.$$

Ответ. $2\arcsin\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$

Пример 7. *Три прямых круговых конуса имеют общую вершину и каждый из них касается внешним образом двух других. Вычислить углы между линиями касания боковых поверхностей этих конусов, если у первого конуса угол между осью и образующей равен α, у второго — β, а у третьего — γ.*

Решение. Пусть $\vartheta_1=\beta+\gamma$, $\vartheta_2=\alpha+\gamma$, $\vartheta_3=\alpha+\beta$. Обозначим углы между образующими, по которым касаются конусы: первый со вторым и третьим — через x, второй с первым и третьим — через y, третий с первым и вторым — через z.

Применяя формулы (7), имеем

$$\frac{\cos x-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2\cos\vartheta_3}{\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3},$$

откуда

$$\cos x=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\left(\frac{\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2\cos\vartheta_3}{\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3}\right)$$

Аналогично находим $\cos y$ и $\cos z$.

Ответ. $\arccos\left[\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\left(\frac{\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2\cos\vartheta_3}{\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3}\right)\right]$,

$$\arccos\left[\cos^2\beta+\sin^2\beta\left(\frac{\cos\vartheta_2-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_3}{\sin\vartheta_1\sin\vartheta_3}\right)\right],$$

$$\arccos\left[\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\left(\frac{\cos\vartheta_3-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2}\right)\right],$$

где $\vartheta_1=\beta+\gamma, \vartheta_2=\alpha+\gamma, \vartheta_3=\alpha+\beta$.

2^0. Выражение плоских углов через двугранные:

$$\cos\alpha=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C},\ \cos\beta=\frac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin A\sin C},$$
$$\cos\gamma=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}. \tag{8}$$

Доказательство. Применяя формулы (7) к трехгранному углу $S'A'B'C'$, полярному относительно трехгранного угла $SABC$, и воспользовавшись соотношениями (1) и (2), получим

$$\cos(\pi-\alpha)=\frac{\cos(\pi-A)-\cos(\pi-B)\cos(\pi-C)}{\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)},$$

$$\cos(\pi-\beta)=\frac{\cos(\pi-B)-\cos(\pi-A)\cos(\pi-C)}{\sin(\pi-A)\sin(\pi-C)},$$

$$\cos(\pi-\gamma)=\frac{\cos(\pi-C)-\cos(\pi-A)\cos(\pi-B)}{\sin(\pi-A)\sin(\pi-B)},$$

откуда следуют формулы (8).

Рассмотрим примеры использования формул (8).

Пример 8. *Доказать, что если все двугранные углы трехгранного угла — острые, то и все плоские углы — острые.*

Доказательство. Пусть α, β и γ — плоские углы данного трехгранного угла, противолежащие соответственно двугранным углам A, B и C. Применяя первую из формул (8), имеем

$$\cos\alpha=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}>0,$$

так как $\cos A>0, \cos B>0, \cos C>0$. Поэтому $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать. Аналогично получаем неравенства $\cos\beta>0$ и $\cos\gamma>0$.

П р и м е р 9. *Вычислить двугранные углы правильных тетраэдра и додекаэдра.*

Р е ш е н и е. Плоские углы правильного тетраэдра таковы:

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, все двугранные углы также равны друг другу. В силу теоремы косинусов для правильного трехгранного угла имеем

$$\cos A = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

откуда

$$A = B = C = \arccos\frac{1}{3}.$$

Для додекаэдра плоские углы при вершинах являются углами правильного пятиугольника; поэтому

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{3\pi}{5}.$$

Следовательно,

$$\cos A = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\cos\frac{3\pi}{5}}{1+\cos\frac{3\pi}{5}}.$$

Подставив значение $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, получим $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, т. е.

$$A = B = C = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

О т в е т. $\arccos\frac{1}{3}$; $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

П р и м е р 10. *Основанием пирамиды служит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие составляют с ней углы, равные α. Чему равен двугранный угол между этими последними боковыми гранями?*

Р е ш е н и е. Пусть в пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — квадрат; грани ASD и ASB перпендикулярны плоскости этого квадрата, а грани DSC и BSC составляют с ней углы, равные α (рис. 252). Вычислим двугранный угол x между гранями DSC и BSC. Плоскость ASC делит данную пирамиду на две одинаковые треугольные пирамиды, перпендикулярна плоскости основания и является биссектральной плоскостью двугранного углах (докажите это).

Рассмотрим трехгранный угол $CASB$ с вершиной C. Внутренние двугранные углы его равны $\frac{x}{2}$, α и $\frac{\pi}{2}$. Плоский угол BAC равен $\frac{\pi}{4}$ (AC — биссектриса прямого угла BCD). Следовательно, применяя формулу (8), имеем

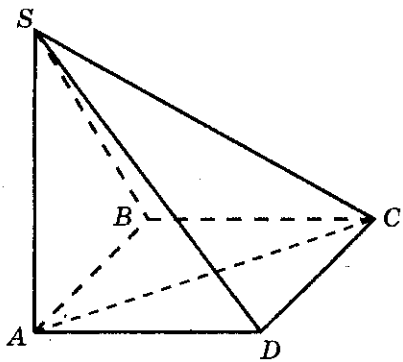


Рис. 252

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}},\ \text{т. е.}\ \cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\alpha},$$

или

$$\frac{1}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{1-\cos^2\alpha};\ \frac{1}{2}=\frac{1+\cos x}{2(1-\cos^2\alpha)};\ \cos x=-\cos^2\alpha,$$

откуда

$$x=\arccos(-\cos^2\alpha).$$

Ответ. $\arccos(-\cos^2\alpha)$.

Пример 11. *В трехгранном угле $OABC$ (O — вершина) все внутренние двугранные углы равны α. Найти угол между ребром OA и биссектрисой угла BOC* (рис. 253).

Решение. Пусть OD — биссектриса угла BOC. Следовательно, плоскость AOD является биссектральной плоскостью двугранного угла при ребре OA, причем она перпендикулярна плоскости грани BOC (докажите это). Рассмотрим трехгранный угол $OADC$. Все его двугранные углы известны и равны $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, α. Для нахождения искомого плоского угла AOD ($\angle AOD = x$) воспользуемся формулой (8):

$$\cos x = \frac{\cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\, x \cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{2}},$$

откуда

$$\cos x = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ т. е. } x = \arccos\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ. $\arccos\dfrac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

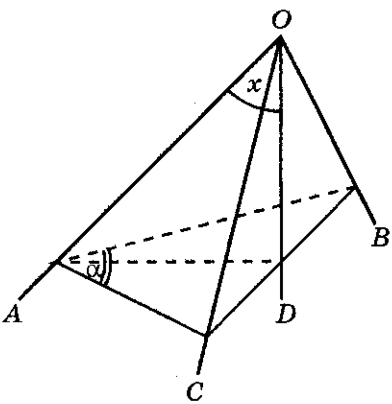


Рис. 253

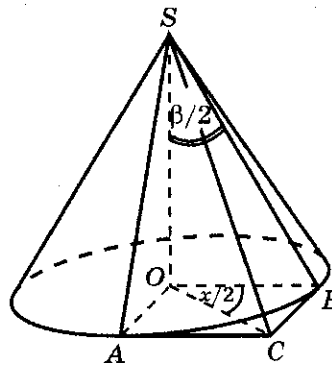


Рис. 254

Замечание. Ответ можно записать в другой, эквивалентной форме. Так как

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha) - \cos^2\alpha}},$$

а

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

то после несложных преобразований находим

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}},$$

откуда

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

Пример 12. *Дан прямой круговой конус с вершиной S и центром основания O. Угол при вершине S осевого сечения конуса равен β. Через вершину S конуса проходит ребро двугранного угла, равного α. Грани этого угла касаются боковой поверхности конуса по образующим SA и SB, где A и B — точки окружности основания конуса. Найти угол AOB* (рис. 254).

Решение. Пусть SC — ребро указанного в условии двугранного угла, равного α. Плоскость треугольника OSC является биссектральной плоскостью этого двугранного угла, а также двугранного угла, образованного плоскостями треугольников AOS и BOS (докажите это). Последний измеряется линейным углом AOB, который требуется определить. Обозначим его через x. Тогда угол BOC равен $\frac{x}{2}$.

Рассмотрим трехгранный угол $SOBC$. Его внутренние двугранные углы равны $\frac{x}{2}, \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\alpha}{2}$, а плоский угол OSB равен $\frac{\beta}{2}$. Следовательно, применяя формулу (8), имеем

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{2}},$$

откуда

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, \text{ т. е. } x = 2\arcsin\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Ответ. $2\arcsin\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

П р и м е р 13. *В трехгранном угле OABC угол между гранями OAB и OBC — прямой, а величина каждого из остальных двугранных углов равна γ. Найти величину плоского угла AOC* (рис. 255).

Р е ш е н и е. Обозначим искомый угол через x. По формуле (8) имеем

$$\cos x = \frac{\cos\frac{\pi}{2} + \cos^2\gamma}{\sin^2\gamma},$$

откуда

$$\cos x = \operatorname{ctg}^2\gamma,\ \text{т. е. } x = \arccos(\operatorname{ctg}^2\gamma).$$

О т в е т. $\arccos(\operatorname{ctg}^2\gamma)$.

П р и м е р 14. *Доказать, что если все внутренние двугранные углы тетраэдра — острые, то и все плоские углы — острые.*

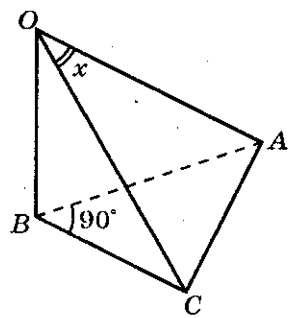


Рис. 255

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя формулу (8) к одному из плоских углов α, получим

$$\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B\cos C}{\sin B\sin C},$$

где A, B и C — внутренние двугранные углы. Так как по условию эти углы острые, то $\cos\alpha > 0$, т. е. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично доказывается, что и все остальные плоские углы данного тетраэдра острые.

3^0. Некоторые частные случаи формул (7) и (8).

1. *Если двугранный угол A, противолежащий плоскому углу α, — прямой, то*

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma, \tag{9}$$

т. е. косинус плоского угла, противолежащего прямому двугранному углу трехгранного угла, равен произведению косинусов двух других плоских углов этого трехгранного угла.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (7), имеем

$$\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}=0,$$

откуда следует доказываемая формула.

Формулу, аналогичную (9), в сферической тригонометрии называют ***сферической формулой Пифагора.***

Можно дать другие ее доказательства, не используя общих соотношений (7) (см. пример 17 данного параграфа, а также пример 15 §1).

Эта формула может применяться при решении различных стереометрических задач.

Пример 15. *Вычислить угол* α *между прямой* l*, расположенной в плоскости* P*, и наклонной, если известно, что прямая составляет угол* $\gamma\left(0<\gamma\le\frac{\pi}{2}\right)$ *с проекцией на эту плоскость данной наклонной, образующей угол* β *с плоскостью* P (рис. 256).

Решение. Плоскому углу α трехгранного угла $SABC$ противолежит прямой двугранный угол A. Следовательно, по только что доказанной формуле (9) имеем

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma.$$

Рассмотрим ряд важных следствий из полученного соотношения.

Следствие 1. *Если прямые* l_1 *и* l_2 *в плоскости* P *образуют равные углы* $\gamma_1=\gamma_2$ *с проекцией наклонной, то эти прямые образуют равные углы и с самой наклонной* (рис. 257).

Доказательство. Имеем

$$\cos\alpha_1=\cos\beta\cos\gamma_1=\cos\beta\cos\gamma_2=\cos\alpha_2,$$

откуда $\alpha_1=\alpha_2$.

Следствие 2. *Если прямые* l_1 *и* l_2 *в плоскости* P *образуют равные углы* $\alpha_1=\alpha_2$ *с наклонной, то эти прямые образуют равные углы и с ее проекцией* (рис. 257).

Доказательство. Так как $\alpha_1=\alpha_2$, то

$$\cos\gamma_1=\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha_2}{\cos\beta}=\cos\gamma_2,$$

откуда $\gamma_1=\gamma_2$, что и требовалось доказать.

Следствие 3 (***теорема о трех перпендикулярах***). *Если прямая* l *перпендикулярна проекции наклонной на плоскость* P*, то эта прямая перпендикулярна также и самой наклонной.*

Доказательство. Так как $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 256), то $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma = 0$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Имеет место и обратное утверждение. Если прямая l перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной на плоскость P.

Доказательство. Так как $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 0$, откуда $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

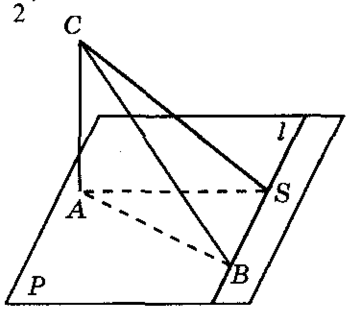


Рис. 256

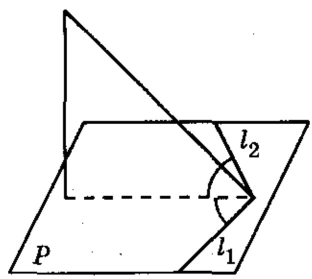


Рис. 257

Пример 16. *Пусть в трехгранном угле один из внутренних двугранных углов — прямой. Доказать, что если плоские углы, прилежащие к этому двугранному углу — острые, то третий плоский угол — также острый.*

Доказательство. Пусть $A = \frac{\pi}{2}$, тогда $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$. Так как $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$, т. е. $\cos\alpha > 0$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Пример 17. *Пусть острые углы* α, β *и* γ *— плоские углы трехгранного угла. Доказать, что если двугранный угол, противолежащий плоскому углу* α, *— прямой, то*

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma.$$

Доказательство. Это соотношение уже было доказано ранее (см. с. 753). Приведем другое его доказательство. Пусть в трехгранном угле $SABC$ плоские углы — острые и равны α, β и γ ($\angle CSB = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle BSA = \gamma$), а двугранный угол, противолежащий углу α, — прямой (рис. 258).

Из произвольной точки M ребра BS опустим перпендикуляры MN и ML на ребра AS и CS (так как углы γ и β по условию — острые, то эти перпендикуляры обязательно пересекут ребра AS и CS). Двугранный угол при ребре AS — прямой. Следовательно, прямая MN перпендикулярна плоскости грани ASC, а значит, $MN \perp SL$. Отсюда по теореме о трех перпендикулярах заключаем, что $NL \perp SL$. Из прямоугольного треугольника MLS получим

$$SL = SM \cos\alpha,$$

а из прямоугольных треугольников SLN и SNM имеем

$$SL = SN \cos\beta = SM \cos\gamma \cos\beta.$$

Сравнивая два полученных для SL выражения, убеждаемся в справедливости доказываемого соотношения.

П р и м е р 18. *Дан конус, в осевом сечении которого угол при вершине равен α. Через вершину проведена плоскость под углом β к высоте. Найти угол между двумя образующими, по которым эта плоскость пересекает поверхность конуса.*

Р е ш е н и е. Пусть требуется определить угол ASC (рис. 259), который обозначим через x. Через высоту конуса SO проведем плоскость, перпендикулярную плоскости ASC. Обозначим линию пересечения этих плоскостей через BS.

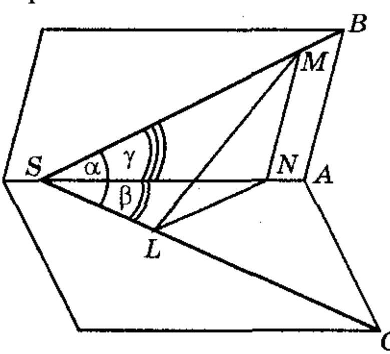


Рис. 258

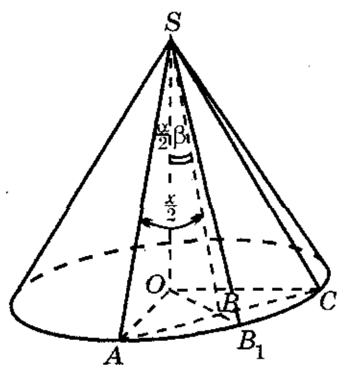


Рис. 259

Нетрудно доказать, что BS является биссектрисой угла ASC, т. е. $\angle ASB = \dfrac{x}{2}$. Из условия задачи и построения следует, что $\angle OSB = \beta$.

Таким образом, в трехгранном угле $SOAB$ двугранный угол при ребре BS — прямой, а плоские углы при его вершине S равны $\dfrac{\alpha}{2}$, β, $\dfrac{\pi}{2}$. Применяя формулу (9), получаем

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\beta\cos\frac{x}{2},$$

откуда

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta} \text{ и } x=2\arccos\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}.$$

Ответ. $2\arccos\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$.

Пример 19. *Из точки ребра двугранного угла* $\alpha\,(0<\alpha<90^\circ)$ *исходят два луча, расположенные в разных гранях. Один из этих лучей перпендикулярен ребру двугранного угла, а другой образует с ребром острый угол* α. *Найти угол между этими лучами.*

Решение. Пусть из точки S ребра двугранного угла α между плоскостями P и Q исходят два луча: луч SB расположен в плоскости P и перпендикулярен ребру двугранного угла, луч SA расположен в плоскости Q и образует с этим ребром острый угол β (рис. 260).

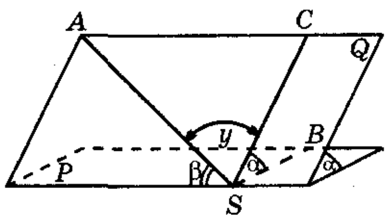


Рис. 260

Вычислим угол между этими лучами, обозначив его через x. Восставим из точки S в плоскости Q перпендикуляр SC к ребру двугранного угла α. Это ребро, являясь перпендикуляром к двум пересекающимся прямым SC и SB, перпендикулярно также плоскости, в которой расположены данные прямые. Следовательно, плоскость Q, проходящая через него, перпендикулярна плоскости CSB трехгранного угла $SABC$, т. е. двугранный угол C при ребре SC этого трехгранного угла — прямой. Плоский угол ASC (обозначим его через y) равен $y=90^\circ-\beta$. Используя формулу (9), имеем

$$\cos x=\cos y\cos\alpha,$$

или

$$\cos x=\sin\beta\cos\alpha,$$

откуда

$$x = \arccos(\sin\beta\cos\alpha).$$

Ответ. $\arccos(\sin\beta\cos\alpha)$.

Пример 20. *Прямая, касательная к конусу, составляет с его образующей в точке касания острый угол* α *и наклонена к плоскости основания конуса под углом* β. *Определить угол между образующей и плоскостью основания.*

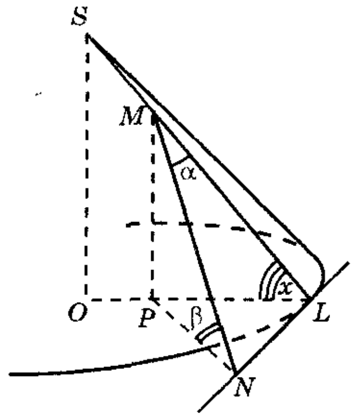


Рис. 261

Решение. Пусть прямая MN, касательная к конусу в точке M, составляет с его образующей SL угол α и наклонена к плоскости основания под углом β (рис. 261). Следовательно, угол MNP между наклонной MN и ее проекцией на плоскость основания конуса равен β.

Найдем угол x между образующей ML и ее проекцией PL на плоскость основания конуса.

Касательная плоскость MNL к конусу перпендикулярна плоскости OSL его осевого сечения. Значит, двугранный угол при ребре ML трехгранного угла $MPLN$ является прямым и согласно формуле (9) имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

откуда

$$\sin x = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}, \text{ т. е. } x = \arcsin\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

Ответ. $\arcsin\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}$.

2. Рассмотрим соотношения, связанные с правильным трехгранным углом.

Из формул (7) следует, что *если все плоские углы трехгранного угла равны между собой:* $\alpha = \beta = \gamma$, *то равны и внутренние двугранные углы:* $A = B = C$; *при этом*

$$\cos A = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (10)$$

Из формул (8) следует, что *если все внутренние двугранные углы трехгранного угла равны между собой:* $A = B = C$, *то равны и плоские углы:* $\alpha = \beta = \gamma$, *при этом*

$$\cos\alpha = \frac{\cos A}{1-\cos A}. \qquad (11)$$

П р и м е р 21. *Доказать, что если все двугранные углы треугольной пирамиды равны между собой, то все ее ребра также равны между собой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в треугольной пирамиде все двугранные углы равны A. Тогда и все плоские углы при вершинах также равны между собой. Обозначив их через α, имеем

$$\cos\alpha = \frac{\cos A}{1-\cos A}.$$

Следовательно, все грани пирамиды равны и представляют собой равносторонние треугольники.

3. Из формул (7) следует, что *если двугранный угол A противолежит прямому плоскому углу α, то*

$$\cos A = -\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma. \qquad (12)$$

Из формул (8) следует, что *если плоский угол α противолежит прямому двугранному углу A, то*

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C. \qquad (13)$$

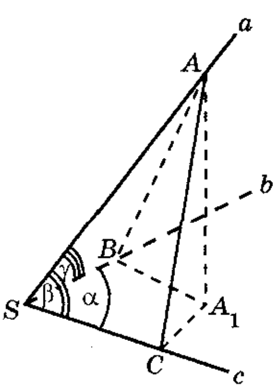


Рис. 262

П р и м е р 22. *Доказать, что если в трехгранном угле один из двугранных углов — прямой, а два других — острые (или тупые), то плоский угол, противолежащий прямому двугранному углу, — острый.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в трехгранном угле $SABC$ двугранный угол A — прямой,а углы B и C — острые. Тогда для плоского угла α, противолежащего углу A, имеем

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C > 0,$$

откуда $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

4°. «Теорема синусов»

Теорема. *Во всяком трехгранном угле синусы плоских углов пропорциональны синусам противолежащих им двугранных углов:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}. \qquad (14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S — вершина трехгранного угла, a, b, c — его ребра, α, β, γ — плоские углы, образованные ребрами b и c, c и a, a и b соответственно, A, B, C — двугранные углы, противолежащие этим плоским углам (рис. 262).

Опустим из точки A ребра a перпендикуляр на плоскость противоположной грани. Пусть точка A_1 — основание этого перпендикуляра. Через AA_1 проведем плоскости, перпендикулярные ребрам b и c, и обозначим буквами B и C точки пересечения этих плоскостей с ребрами b и c или их продолжением.

Вычислим длину перпендикуляра AA_1 двумя способами.

Из прямоугольного треугольника ACS (с прямым углом C) имеем

$$AC = SA \sin\beta,$$

а, следовательно, из прямоугольного треугольника AA_1C (с прямым углом A_1) получим

$$AA_1 = AC \sin C = SA \sin\beta \sin C.$$

С другой стороны, из прямоугольных треугольников ABS и ABA_1 аналогично получим

$$AB = SA \sin\gamma,$$

$$AA_1 = AB \sin B = SA \sin\gamma \sin B.$$

Сравнивая выражения для AA_1, находим

$$SA \sin\beta \sin C = SA \sin\gamma \sin B,$$

откуда

$$\frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Аналогично получаем соотношение

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B}.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. «Теорему синусов» можно вывести, воспользовавшись формулами (7). Действительно,

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma - \cos^2\beta\cos^2\gamma - \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\beta\sin^2\gamma} =$$

$$= \frac{(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma) - \cos^2\beta\cos^2\gamma - \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\beta\sin^2\gamma} =$$

$$=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\beta\sin^2\gamma},$$

откуда имеем

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma},$$

или, так как все углы заключены в интервале между 0 и π, то

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=K.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\sin B}{\sin\beta}=K,\ \frac{\sin C}{\sin\gamma}=K,$$

что и доказывает справедливость формул (14).

Эту теорему можно успешно использовать при решении задач стереометрии, в которых требуется установить то или иное соотношение между основными элементами трехгранного угла.

Пример 23. *Прямая AB параллельна плоскости π. Прямая CD пересекает прямую AB под острым углом α и образует с плоскостью π угол φ. Определить угол между плоскостью π и плоскостью, в которой лежат прямые AB и CD* (рис. 263).

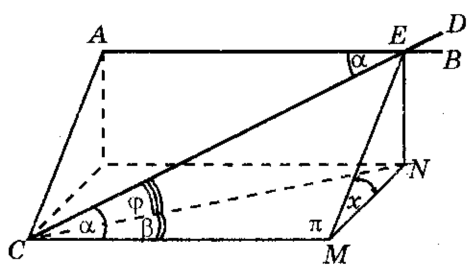


Рис. 263

Решение. Обозначим через E точку пересечения прямых AB и CD. Опустим из этой точки на плоскость π перпендикуляр EN. Угол между прямой CD и плоскостью π измеряется углом между этой прямой и ее проекцией на плоскость π, т. е.

$$\angle ECN=\varphi.$$

Известно, что если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Следовательно, линия пересечения плоскости, в которой лежат прямые AB и CD, и плоскости π параллельна прямой AB. Опустим из точки E на эту линию перпендикуляр EM. Отрезок MN является проекцией EM на плоскость π. На основании теоремы о трех перпендикулярах заключаем, что MN — перпендикуляр к CM, т.е. угол EMN является линейным углом искомого двугранного угла между плоскостями. Обозначим его через x.

Углы ECM и AEC равны как накрест лежащие при параллельных прямых AE и CM. Значит, $\angle ECM = \alpha$.

Чтобы найти угол x, применим «теорему синусов» для трехгранного угла $CEMN$:

$$\frac{\sin x}{\sin\varphi} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\sin x = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha},\ x = \arcsin\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}.$$

Ответ. $\arcsin\dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$.

Замечание. Можно дать другое, не использующее «теорему синусов» (14) решение рассматриваемой задачи. А именно, угол x мы можем найти из прямоугольного треугольника ENM, где $NE = CE\sin\varphi$ (из треугольника ENC) и $ME = CE\sin\alpha$ (из треугольника EMC). Получим

$$\sin x = \frac{NE}{ME} = \frac{CE\sin\varphi}{CE\sin\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}.$$

Таким образом, попутно мы доказали следующее утверждение. Пусть прямая l расположена в некоторой плоскости P, перпендикулярна одной из двух пересекающихся наклонных (l_1) и составляет с другой наклонной (l_2) угол α (рис. 264). Пусть наклонные l_1 и l_2 образуют со своими проекциями на плоскость P соответственно углы x и φ.

Тогда имеет место соотношение

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi}{\sin x}. \qquad (15)$$

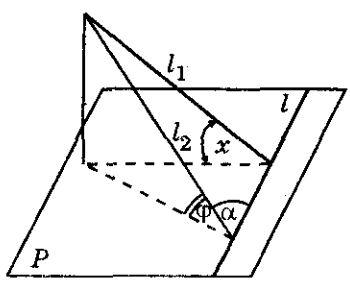


Рис. 264

Пример 24. *Внутри трехгранного угла, все плоские углы которого равны α, проходит прямая, одинаково наклоненная к его ребрам. Найти угол наклона этой прямой к каждому ребру трехгранного угла.*

Решение. Пусть прямая SO одинаково наклонена под углом x ко всем ребрам правильного трехгранного угла $SABC$ (рис. 265); она является одновременно его биссектрисой и высотной прямой. Плоскость ASD, проходящая через эту прямую, перпендикулярна плоскости грани CSB и пересекает эту грань по прямой SD, являющейся биссектрисой плоского угла BSC (докажите это). В трехгранном угле $SOBD$ двугранный угол при ребре SO равен $360°: 6 = 60°$, а двугранный угол при ребре SD — прямой. По «теореме синусов» (14) имеем

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin 60°} = \frac{\sin x}{\sin 90°},$$

откуда $\sin x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}$, т. е. $x = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

Ответ. $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

Приведем другое решение, не основанное на «теореме синусов». Отложим на ребрах трехгранного угла отрезки $SA = SB = SC = 1$. Полученная при этом пирамида $SABC$ является правильной; SO — ее высота, которая проектируется в центр O правильного треугольника, служащего основанием пирамиды. Следовательно,

$$\sin x = OB,\ OB = \frac{DB}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}DB,\ DB = \sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\sin x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2},\ x = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

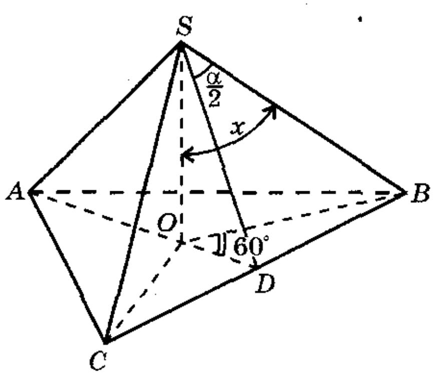


Рис. 265

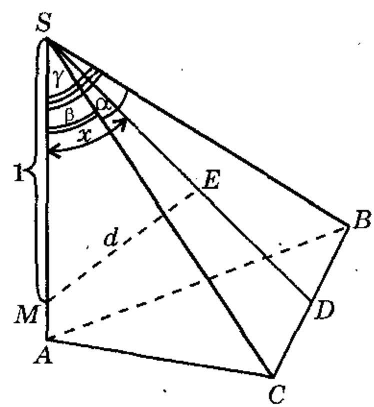


Рис. 266

Пример 25. *Плоские углы трехгранного угла равны* α, β *и* γ. *На расстоянии* 1 *от вершины трехгранного угла на том его ребре, к которому примыкают углы* α, β *и* γ, *взята точка. Определить расстояние от этой точки до плоскости угла* α.

Решение. Пусть $SABC$ — данный трехгранный угол, в котором $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$ (рис. 266); M — точка ребра AS, отстоящая на расстояние 1 от вершины S. Через ребро AS перпендикулярно плоскости грани BSC проведем плоскость, которая пересечет плоскость грани BSC по прямой SD (SD может находиться и вне грани BSC).

Расстояние от точки M до плоскости грани BSC измеряется длиной перпендикуляра ME к прямой SD, лежащего в плоскости ASD, и равно

$$d = \sin x,$$

где x — угол MSE.

Рассмотрим трехгранный угол $SMDC$, у которого (по построению) двугранный угол при ребре SD — прямой. Применяя «теорему синусов», получим

$$\frac{\sin x}{\sin C} = \frac{\sin\beta}{\sin 90^\circ}. \tag{16}$$

Согласно третьей из формул (7) запишем выражение для косинуса двугранного угла при ребре CB через углы α, β и γ трехгранного угла $SABC$:

$$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{17}$$

Решив систему уравнений (16) и (17), определим $\sin x$:

$$\sin x = \sin\beta\sin C = \sin\beta\sqrt{1-\cos^2 C} =$$

$$= \sin\beta\sqrt{1-\left(\frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) - \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\alpha}$.

Пример 26. *Прямоугольный треугольник расположен так, что его гипотенуза лежит в плоскости* π, *а катеты образуют с этой плос-*

костью углы α и β. Найти угол между плоскостью треугольника и плоскостью π.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 267), гипотенуза AC которого лежит в плоскости π, катет BC составляет с этой плоскостью угол α, а катет AB — угол β.

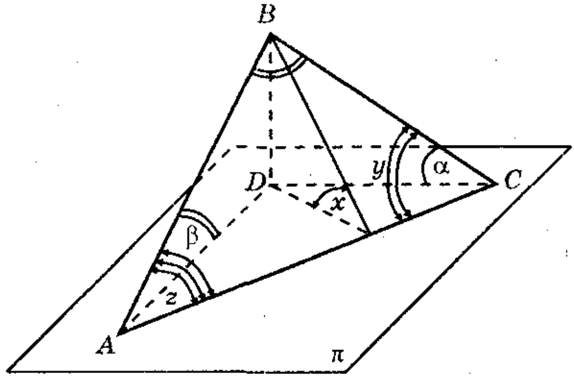


Рис. 267

Пусть BD — перпендикуляр к плоскости π. Тогда углы BCD и BAD являются углами между катетами и их проекциями на плоскость π и, следовательно, равны α и β соответственно. Обозначим двугранный угол между плоскостью треугольника и плоскостью π через x, угол BCA — через y, а угол BAC — через z. Тогда

$$y + z = \frac{\pi}{2}. \qquad (18)$$

Применяя к трехгранным углам $CABD$ и $ACBD$ «теорему синусов», получим

$$\frac{\sin x}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin y}, \text{ или } \sin y = \frac{\sin\alpha}{\sin x}, \qquad (19)$$

$$\frac{\sin x}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin z}, \text{ или } \sin z = \frac{\sin\beta}{\sin x}. \qquad (20)$$

Решив систему уравнений (18)—(20), находим

$$\sin x = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta},$$

откуда

$$x = \arcsin\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}.$$

Ответ. $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.

Замечание. Соотношения (19) и (20) можно доказать непосредственно (см. пример 23).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если все плоские углы треугольной пирамиды равны между собой, то и все ее двугранные углы также равны между собой.

2. В трехгранном угле плоские углы при вершине α и β — острые и связаны с третьим углом γ неравенством $\cos\alpha\cos\beta > \cos\gamma$. Каким является двугранный угол, противолежащий углу γ: острым или тупым?

Ответ. Тупой.

3. Доказать, что сумма внутренних двугранных углов трехгранного угла больше π и меньше 3π.

Указание. Рассмотреть полярный трехгранный угол.

4. Существует ли трехгранный угол с плоскими углами α, 2α, 3α?

Ответ. Не существует, так как каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов; в частности, должно быть $3\alpha < \alpha + 2\alpha$, что не выполняется.

5. Доказать, что если все двугранные углы некоторой треугольной пирамиды равны, то и все ребра этой пирамиды также равны.

6. Пусть в трехгранном угле один из внутренних двугранных углов — прямой. Доказать, что если один из других двугранных углов тупой, то противолежащий ему плоский угол — также тупой.

7. Доказать, что если в трехгранном угле два двугранных угла — прямые, то и противолежащие им плоские углы — также прямые.

8. Пусть в трехгранном угле один из внутренних двугранных углов — прямой. Доказать, что если плоские углы, прилежащие к этому двугранному углу, — тупые, то третий плоский угол — острый.

9. Пусть в трехгранном угле один из внутренних двугранных углов — прямой. Доказать, что если один из плоских углов, прилежащих к этому двугранному углу, — острый, а другой — тупой, то третий плоский угол, противолежащий прямому двугранному углу, — тупой.

10. Доказать, что если в трехгранном угле один из внутренних двугранных углов — острый, другой — прямой, а третий — тупой, то плоский угол, противолежащий прямому двугранному углу, — тупой.

11. Доказать, что любой плоский угол произвольного четырехгранного угла меньше суммы трех других плоских углов.

12. Доказать, что если в трехгранном угле один из внутренних двугранных углов — прямой, а два других — тупые, то плоский угол, противолежащий прямому двугранному углу, — острый.

13. Доказать что если все двугранные углы трехгранного угла — острые, то и все плоские углы — также острые.

14. Одна из двух треугольных пирамид с общим основанием расположена внутри другой. Доказать, что сумма плоских углов при вершине внутренней пирамиды больше, чем сумма плоских углов при вершине внешней.

15. Стороны данного угла, равного α, наклонены к плоскости P под углами β и γ. Найти косинус угла, являющегося проекцией данного угла на плоскость P.

Ответ. $\dfrac{\cos\alpha - \sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}$.

16. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью его основания углы α и β. Найти угол между этими диагоналями.

Ответ. $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.

17. Определить угол x в осевом сечении конуса, описанного около четырех равных шаров, расположенных так, что каждый касается трех других.

Ответ. $x = 2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

18. Два равных конуса расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Углы при вершинах в осевых сечениях этих конусов равны α. Найти угол между двумя образующими, по которым пересекаются конусы.

Ответ. $2\arccos\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}}$.

19. Плоские углы при вершине правильной n-угольной пирамиды равны α. Найти угол между образующей и осью описанной около пирамиды конической поверхности, вершина которой совпадает с вершиной пирамиды.

Ответ. $\arcsin\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

20. Найти косинус угла x при вершине в осевом сечении прямого кругового конуса, зная, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

Ответ. $\cos x = -\frac{1}{3}$.

21. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислить угол между осью и образующей конуса.

Ответ. $\arcsin\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

22. *Из точки A плоскости P проведена наклонная AB под углом α к* плоскости. Через AB проведена плоскость Q под углом β к плоскости P. Определить угол γ между AB и линией пересечения плоскостей P и Q.

Ответ. $\gamma = \arcsin\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

23. Плоский угол правильного трехгранного угла равен α. Вычислить угол при вершине описанного конуса.

Ответ. $2\arcsin\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$.

24. В треугольной пирамиде $SABC$ два плоских угла ASB и BSC при вершине S равны α, а третий плоский угол ASC равен $\frac{\alpha}{2}$. Ребро AS перпендикулярно плоскости основания ABC. Найти угол BAC.

Ответ. $\angle BAC = \arccos\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{\operatorname{tg}\alpha}$.

25. Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Угол в осевом сечении конуса равен 2α. Найти двугранный угол между двумя плоскостями, каждая из которых касается обоих конусов, но не проходит через их общую образующую.

Ответ. $2\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$; если $2\alpha > \frac{\pi}{2}$, то конусы не имеют общих касательных плоскостей (не проходящих через общую образующую).

26. В трехгранном угле плоские углы равны α, β и γ. Вычислить углы между биссектрисами плоских углов и ребрами, противолежащими этим углам.

Ответ.

$$\arccos\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{2\cos\frac{\alpha}{2}};\ \arccos\frac{\cos\gamma+\cos\alpha}{2\cos\frac{\beta}{2}};\ \arccos\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

27. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D — острые, причем плоский угол CDB равен α, а плоский угол ADC равен β; плоскость грани ADC наклонена к плоскости грани ADB под углом A. Вычислить площадь проекции грани BDC на плоскость грани ADB, если ребро BD равно a, а ребро CD равно b.

Ответ. $\frac{ab}{2}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\beta\sin^2 A}$.

28. В тетраэдре $ABCD$ плоскости граней ADC и BDC наклонены к плоскости грани ADB под одним и тем же углом α. Плоский угол ADB при вершине D равен β. Вычислить другие плоские углы при этой вершине.

Ответ. $\operatorname{arcctg}\frac{\cos\alpha(1+\cos\beta)}{\sin\beta}$.

29. В трехгранном угле плоские углы равны α, β и γ. Вычислить углы между ребрами и противолежащими им гранями этого трехгранного угла.

Ответ. $\arcsin\frac{\sqrt{(\sin\alpha\sin\beta)^2-(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2}}{\sin\beta}$;

$$\arcsin\frac{\sqrt{(\sin\gamma\sin\alpha)^2-(\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha)^2}}{\sin\alpha};$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{(\sin\beta\sin\gamma)^2-(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2}}{\sin\gamma}.$$

30. Все три плоских угла некоторого трехгранного угла являются острыми. Один из них равен α; двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны β и γ. Найти два других плоских угла.

Ответ. $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{cosec}\gamma}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}$; $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{cosec}\beta}{1+\cos\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{ctg}\beta}$.

31. На плоское зеркало под углом α падает световой луч (α — это острый угол, который образует падающий луч с перпендикуляром к зеркалу). Затем зеркало поворачивают на острый угол β вокруг проекции падающего луча в плоскости первоначального положения зеркала. На какой угол x отклонится отраженный луч?

Ответ. $x = \arccos(1-2\cos^2\alpha\sin^2\beta)$.

32. В прямоугольном треугольнике через биссектрису прямого угла проведена плоскость, которая составляет с плоскостью треугольника угол α. Какие углы она составляет с катетами треугольника?

Ответ. $\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$.

33. Вычислить объем V наклонного параллелепипеда, если даны длины a, b, c его ребер, выходящих из одной вершины, и плоские углы α, β и γ при этой вершине.

Ответ. $V = 2abc\sqrt{\sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}$.

34. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислить угол между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O является центром круга, служащего основанием конуса.

Ответ. $\arccos\left[1-\sin\dfrac{\beta}{2}\left(\sin\dfrac{\beta}{2}-\sqrt{\sin^2\dfrac{\beta}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\right)\right]$.

35. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S является ромб, а высота SO пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Высота SO образует с ребром SA угол α, а с ребром SB — угол β. Вычислить угол между боковой гранью SAB и основанием пирамиды.

Ответ. $\arccos\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}}$.

36. Два прямых круговых конуса имеют общую вершину. Угол между осью и образующей одного конуса равен α, а его образующая является осью второго конуса, у которого угол между осью и образующей равен β, причем $\beta < \alpha$. Вычислить угол между двумя лучами, по которым пересекаются боковые поверхности конусов.

Ответ. $x = 2\arcsin\left[\dfrac{2\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\alpha}\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)}\right] =$

$$= \arccos\left[\cos 2\alpha + \frac{2(\cos\beta-\cos^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right].$$

37. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S являются острыми, причем $\angle BSC = \alpha, \angle ASC = \beta$, $\angle ASB = \gamma$. Известны боковые ребра: $SA = a$, $SB = b$. Вычислить площадь проекции грани ASB на плоскость грани ASC.

Ответ. $\dfrac{ab}{2} \cdot \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta}$.

38. В трехгранном угле плоские углы равны α, β и γ. Вычислить углы между биссектрисами плоских углов и гранями, противолежащими этим углам.

Ответ.

$$\arcsin\frac{S}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta},\ \arcsin\frac{S}{2\cos\frac{\beta}{2}\sin\gamma},\ \arcsin\frac{S}{2\cos\frac{\gamma}{2}\sin\alpha},$$

где $S = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

39. В тетраэдре $ABCD$ грани ADC и BDC наклонены к плоскости грани ADB под углами α и β соответственно, а плоский угол ADB равен γ. Вычислить отношение площади грани BDC к площади ее проекции на плоскость грани ADC.

Ответ. $\dfrac{1}{|\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta|}$.

40. В трехгранном угле $SABC$ плоские углы при его вершине — острые, причем $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$, а плоскость грани BSC наклонена к плоскости грани ASB под углом γ. Ребро SA служит осью прямой конической поверхности с углом ϑ при вершине в осевом сечении (угол ϑ меньше, чем углы ASC и ASB). Вычислить угол между образующими конической поверхности, по которым она пересекает грани трехгранного угла.

Ответ. $\arccos\left(\cos^2\vartheta + \dfrac{\sin^2\vartheta}{\sin\beta}\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\gamma}\right)$

41. В трехгранном угле плоские углы при вершине — острые; два из них равны α и β. Внутренний двугранный угол, противолежащий углу α, равен γ. Вычислить угол между биссектрисами углов α и β.

42. Доказать, что в трехгранном угле $SABC$ угол $\widetilde{A}$, образованный ребром OA и лучом, являющимся пересечением биссектральной плоскости двугранного угла A с гранью BSC, можно вычислить по формуле

$$\operatorname{tg}\widetilde{A} = \frac{2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\cos A}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma},$$

где β и γ — плоские углы, прилежащие к углу A.

43. Доказать, что если $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ — углы наклона произвольного луча *SM* соответственно к плоскостям граней *BSC*, *ASC* и *ASB* трехгранного угла *SABC*, образованного тремя прямыми плоскими углами, то

$$\cos^2 \overline{A} + \cos^2 \overline{B} + \cos^2 \overline{C} = 2.$$

44. В трехгранном угле *SABC* известен двугранный угол B при ребре *SB* и угол $\overline{A}$ наклона ребра *SA* к плоскости грани *BSC*. Вычислить плоский угол γ, противолежащий ребру *SC*. Провести исследование задачи.

Ответ. $\sin\gamma = \dfrac{\sin\overline{A}}{\sin B}$.

Исследование. Так как $\sin\gamma \le 1$, то задача имеет одно решение, если $\sin\overline{A} = \sin B$, и два решения, если $\sin\overline{A} < \sin B$; это следует из того, что $\sin\gamma = \sin(\pi - \gamma)$.

45. В трехгранном угле *SABC* ребра *SA* и *SB* наклонены к плоскостям противолежащих им граней *BSC* и *ASC* под углами $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соответственно. Внутренний двугранный угол при ребре *SC* равен C. Вычислить плоские углы *BSC* и *ASC*. Провести исследование задачи.

Ответ. $\sin\alpha = \dfrac{\sin\overline{B}}{\sin C}$, $\sin\beta = \dfrac{\sin\overline{A}}{\sin C}$.

Исследование. Задача имеет решение, если

$$\sin\overline{B} \le \sin C \text{ и } \sin\overline{A} \le \sin C.$$

46. В трехгранном угле *SABC* ребра *SA* и *SB* наклонены к плоскостям противолежащих им граней *BSC* и *ASC* под углами $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соответственно. Внутренний двугранный угол при ребре *AS* равен A. Вычислить плоский угол *ASB* и двугранный угол при ребре B. Провести исследование задачи.

Ответ. $\sin\gamma = \dfrac{\sin\overline{B}}{\sin A}$, $\sin B = \dfrac{\sin\overline{A}\sin A}{\sin\overline{B}}$.

Исследование. Задача имеет решение, если

$$\sin\overline{B} \le \sin A \text{ и } \sin\overline{A}\sin A \le \sin\overline{B},$$

т. е. если

$$\sin\overline{A}\sin A \le \sin\overline{B} \le \sin A.$$

47. В трехгранном угле *SABC* плоский угол *BSC* равен α. Углы между ребрами *SA* и *SB* и их проекциями на противолежащие грани *BSC* и *ASC* равны соответственно $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Вычислить плоский угол *ASC*. Провести исследование.

Ответ. $\sin\beta = \dfrac{\sin\overline{A}}{\sin\overline{B}}\sin\alpha$.

Исследование. Задача имеет решение, если выполняются неравенства

$$\sin \overline{A} \sin \alpha \leq \sin \overline{B} \leq \sin \alpha.$$

Пусть $\sin C = \sin \overline{B} : \sin \alpha$, $\sin \beta = \sin \overline{A} : \sin C$. Тогда:

1) если $\sin C < 1$ и $\sin \beta < 1$, то задача имеет четыре решения;

2) если $\sin C = 1$ и $\sin \beta < 1$ (или $\sin C < 1$ и $\sin \beta = 1$), то задача имеет два решения;

3) если $\sin C = \sin \beta = 1$, то существует единственное решение.

48. В трехгранном угле $SABC$ плоский угол ASB равен γ. Углы между ребрами SA и SB и их проекциями на противолежащие грани BSC и ASC равны соответственно $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Вычислить двугранные углы при ребрах SA и SB. Провести исследование.

Ответ. $\sin A = \dfrac{\sin \overline{B}}{\sin \gamma}$, $\sin B = \dfrac{\sin \overline{A}}{\sin \gamma}$.

Исследование. Задача имеет решение при условиях

$$\sin \overline{B} < \sin \gamma, \ \sin \overline{A} < \sin \gamma.$$

Так как $\sin A = \sin(\pi - A)$ и $\sin B = \sin(\pi - B)$, то задача имеет четыре решения:

1) $A < \frac{\pi}{2}$, $B < \frac{\pi}{2}$; 2) $A < \frac{\pi}{2}$, $B > \frac{\pi}{2}$;

3) $A > \frac{\pi}{2}$, $B < \frac{\pi}{2}$; 4) $A > \frac{\pi}{2}$, $B > \frac{\pi}{2}$.

§ 3. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В данном параграфе мы изложим общие методы построения сечений многогранников плоскостью и рассмотрим примеры решения задач на сечения.

Кроме того, будут приведены примеры решения стереометрических задач на доказательство, а также вычислительных задач, при решении которых центральное место занимает доказательство того или иного геометрического факта.

1. Общие методы построения сечений многогранников плоскостью

Построить сечение многогранника плоскостью — это значит найти линии пересечения секущей плоскости с гранями. Для этого *достаточно* *построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника.* Поэтому последняя задача является частью всякой задачи на построение сечения многогранника плоскостью. Наиболее распространенный способ ее решения заключается в построении прямых, по которым секущая плоскость пересекает плоскости граней многогранника. Чтобы построить каждую такую прямую, очевидно, *достаточно найти две точки, одновременно принадлежащие и секущей плоскости, и плоскости грани* (не обязательно самой грани!).

Ниже мы изложим несколько методов построения сечений многогранников плоскостью: метод следов; метод внутреннего проектирования; метод параллельных прямых; метод параллельного переноса секущей плоскости.

1^0. Метод следов.

Следом плоскости P на плоскость Q называют прямую, по которой плоскость P пересекает плоскость Q. Аналогично, ***следом прямой*** на плоскость Q называется точка пересечения этой прямой с плоскостью Q.

Метод следов построения сечений многогранников плоскостью заключается в следующем. Строят след секущей плоскости на плоскость определенной грани многогранника, на диагональную плоскость или на плоскость симметрии и след соответствующего бокового ребра на плоскость сечения, после чего уже строят следы секущей плоскости на другие грани многогранника.

Пример 1. *Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ее ребрах A_1B_1, B_1C_1 и DC даны соответственно точки M, N и Q* (рис. 268). *Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, N и Q.*

Решение. Построим след секущей плоскости на плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ призмы и следы ребер D_1C_1 и A_1D_1 на плоскость сечения. Для этого в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ продолжим отрезок MN до пересечения в точках E и F с прямыми D_1C_1 и A_1D_1. Точка E является общей точкой плоскостей граней $A_1B_1C_1D_1$, DD_1C_1C и секущей плоскости MNQ, а точка F — общей точкой плоскостей граней $A_1B_1C_1D_1$, AA_1D_1D и секущей плоскости MNQ.

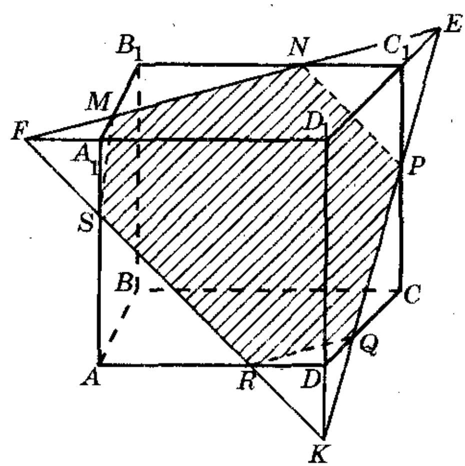


Рис. 268

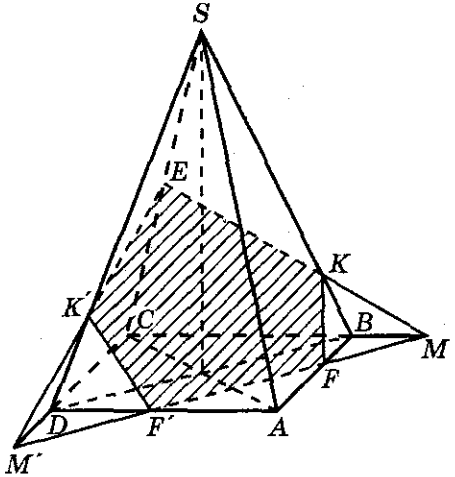


Рис. 269

Построим след секущей плоскости на плоскость грани DD_1C_1C и след ребра D_1D на секущую плоскость. Для этого в плоскости грани DD_1C_1C строим прямую EQ, которая пересекает ребро CC_1 в точке P, а продолжение D_1D — в точке K, которая является общей точкой плоскостей граней DD_1C_1C, AA_1D_1D и секущей плоскости MNQ. Затем в плоскости грани AA_1D_1D строим прямую KF, которая пересекает ребро AD в точке R, а ребро AA_1 — в точке S.

Соединив отрезками точки M, N, P, Q, R, S, получаем искомое сечение $MNPQRS$.

Пример 2. *Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CB взята точка M так, что* $MB = \frac{1}{2}BC\left(MC = \frac{3}{2}BC\right)$. *Построить сечение данной пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и середины ребер AB и SC* (рис. 269).

Решение. Построим след секущей плоскости на плоскость основания пирамиды и следы ребер AD и CD на плоскость сечения. Для этого соединим отрезком точку M и середину F ребра AB, а затем продолжим MF до пересечения с ребром AD в точке F' и с продолжением ребра CD в точке M'. Точка M (след ребра CB на плоскость сечения) является общей точкой плоскостей граней $ABCD$, SBC и секущей плоскости, а точка M' (след ребра CD на плоскость сечения) — общей точкой плоскостей граней $ABCD$, SCD и секущей плоскости.

Построим теперь следы ребер SB и SD на плоскость сечения. Для этого соединим середину E ребра SC с точками M и M'. Пусть K — точка пересечения отрезка EM с ребром SB, а K' — точка пересечения отрезка EM с ребром SD.

По построению, точки F, F', K, K' являются точками пересечения секущей плоскости с ребрами пирамиды $SABCD$. Искомое сечение — пятиугольник $EKFF'K'$.

2^0. Метод внутреннего проектирования. Рассмотрение этого метода начнем с примеров.

Пример 3. *Дана четырехугольная призма* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ *и* $A_1B_1C_1D_1$ *— основания,* $AA_1 \| BB_1 \| DD_1 \| CC_1$). *Построить сечение ее плоскостью, проходящей через точки* A_2, B_2, C_2, *лежащие соответственно на ребрах* AA_1, BB_1, CC_1 *данной призмы* (рис. 270).

Решение. Будем рассматривать точки A, B, C как параллельные проекции соответственно точек A_2, B_2, C_2, определяющих плоскость сечения., Вершину D основания призмы рассматриваем как параллельную проекцию четвертой вершины искомого сечения, являющуюся точкой пересечения секущей плоскости с ребром DD_1 призмы.

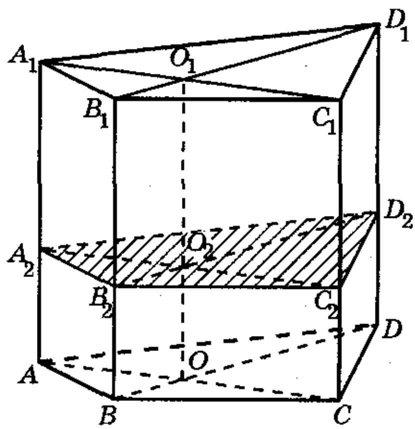


Рис. 270

Для построения этой пока неизвестной четвертой вершины поступаем следующим образом. Строим диагонали основания призмы. Пусть O — точка их пересечения. Через точку O проводим прямую, параллельную боковым ребрам призмы. Эта прямая пересекает прямую A_2C_2 в точке O_2. Точку O рассматриваем как проекцию точки O_2. Точки B, B_2, O, O_2, D лежат в одной плоскости, которая пересекается с плоскостью $A_2B_2C_2$ по прямой B_2O_2. Строим прямую B_2O_2 и в пересечении ее с четвертым боковым ребром призмы получаем искомую точку D_2, лежащую в плоскости $A_2B_2C_2$.

Поэтому четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ — искомое сечение.

Пример 4. *Дана четырехугольная пирамида SABCD. На ее боковых ребрах AS, BS, CS даны точки* A_1, B_1, C_1. *Построить сечение данной пирамиды плоскостью* $A_1B_1C_1$, *проходящей через эти точки* (рис. 271).

Решение. Точки A, B, C основания пирамиды являются центральными проекциями соответственно точек A_1, B_1, C_1, определяющих плоскость сечения. Вершину D основания будем рассматривать как проекцию четвертой вершины искомого сечения, являющейся точкой пересечения се-

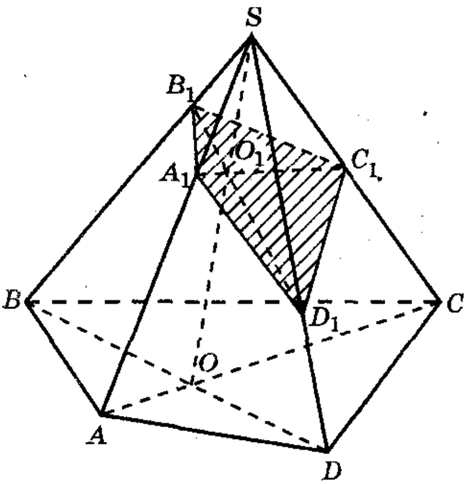


Рис. 271

кущей плоскости с ребром SD пирамиды. Для построения этой пока неизвестной четвертой вершины поступаем следующим образом.

Строим диагонали AC и BD основания пирамиды. Точку их пересечения обозначим через O. Строим прямую SO, которая пересекает отрезок A_1C_1 (в точке O_1), так как A_1C_1 и SO лежат в одной плоскости SAC. Кроме того, точка O_1 принадлежит плоскостям $A_1B_1C_1$ и SBD. Поэтому прямая B_1O_1, принадлежащая тем же плоскостям, пересекает ребро SD в точке D_1. Точка D_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1$ и является искомой.

Итак четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — искомое сечение.

Рассмотренный в примерах 3 и 4 метод построения сечений называется ***методом внутреннего проектирования***.

Сущность этого метода в общем случае сводится к следующему. На плоскости основания многогранника отмечают четыре точки; три проекции (центральные или параллельные) трех точек, определяющих плоскость сечения, и одну надлежащим образом выбранную вершину основания, которую принимают за проекцию одной из вершин сечения. Проводят диагонали указанного четырехугольника. После этого на одной из прямых плоскости сечения строят точку, проекцией которой служит точка пересечения диагоналей указанного четырехугольника. Найденная четвертая точка сечения и одна из трех данных его точек определят прямую, которая в пересечении с соответствующим ребром многогранника дает последнюю вершину искомого сечения.

3^0. Метод параллельных прямых. Решим другим методом задачу, рассмотренную в примере 3.

Пример 5. *Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания, $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$). Построить сечение ее плоскостью, проходящей через точки A_2, B_2, C_2, лежащие соответственно на ребрах AA_1, BB_1, CC_1 данной призмы* (рис. 272).

Решение. В плоскости основания $ABCD$ через точку D проводим прямую, параллельную AB, до пересечения с прямой BC в точке E.

Через точку E в плоскости грани BB_1CC_1 проводим прямую, параллельную BB_1, до пересечения с прямой B_2C_2 в точке F.

Точки F, E и D определяют плоскость, параллельную плоскости грани AA_1B_1B. Поэтому секущая плоскость $A_2B_2C_2$ пересечет плоскость FED по прямой FD_2, параллельной B_2A_2. Точка D_2 получается в результате пересечения ребра DD_1 с прямой, параллельной B_2A_2 и проходящей через точку F.

Четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ — искомое сечение.

Метод, примененный для построения сечения в рассмотренном примере, называется ***методом параллельных прямых***.

В общем случае сущность этого метода заключается в том, что вместо отыскания линий пересечения секущей плоскости с гранями данного многогранника строят прямые ее пересечения с поверхностью некоторого параллелепипеда. Указанный метод основан на следующем свойстве параллелепипеда: всякая плоскость в пересечении с его боковой поверхностью образует параллелограмм.

4°. Метод параллельного переноса секущей плоскости. Сущность ***метода параллельного переноса секущей плоскости*** заключается в следующем. Вместо искомой секущей плоскости строят параллельную ей вспомогательную плоскость, которая пересекает все три грани некоторого трехгранного угла данного многогранника (или его части). С помощью параллельного переноса строят некоторые линейные элементы искомого сечения, соответствующие тем элементам вспомогательной плоскости, которые легко построить.

Решим этим методом задачу, рассмотренную в примере 4.

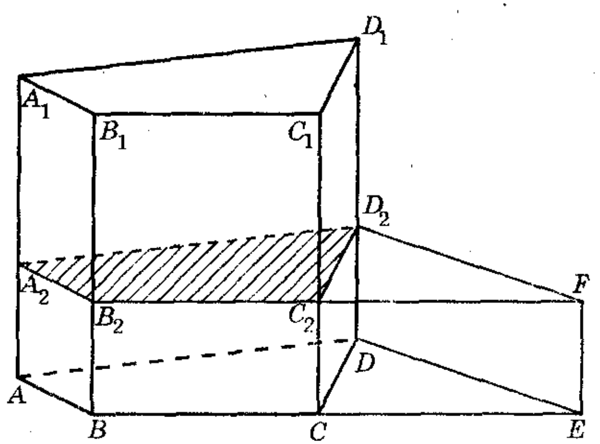


Рис. 272

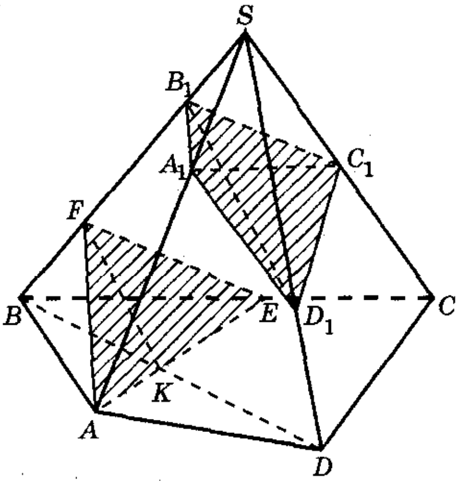


Рис. 273

Пример 6. *Дана четырехугольная пирамида SABCD. На ее боковых ребрах AS, BS, CS даны точки A_1, B_1, C_1. Построить сечение данной пирамиды плоскостью $A_1B_1C_1$, проходящей через эти точки* (рис. 273).

Решение. Проводим $AF \| A_1B_1$ и $EF \| C_1B_1$. Получим треугольник *AFE*, плоскость которого параллельна плоскости $A_1B_1C_1$. Строим диагональ *BD* основания пирамиды. Точку пересечения прямых *BD* и *AE* обозначим через *K*. Строим отрезок *FK*. Через точку B_1 проводим прямую, параллельную *FK*. В пересечении этой прямой с ребром *SD* получаем точку D_1, принадлежащую секущей плоскости $A_1B_1C_1$ (докажите это).

Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — искомое сечение.

5^0. Сравнительный анализ различных методов построения сечений многогранников плоскостью. Выбор метода для наиболее простого решения задачи на построение сечения зависит от свойств данного многогранника и положения точек, определяющих секущую плоскость. Однако при всем многообразии указанных условий несомненно следующее:

1. Метод параллельных прямых предпочтительнее других при построении сечений призматических тел.

2. При построении сечений пирамид удобнее всего применять метод внутреннего проектирования и метод параллельного переноса секущей плоскости.

2. Примеры решения задач на сечения

Пример 7. *В правильной четырехугольной пирамиде SABCD через середины сторон AB и AD основания проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA. Найти площадь сечения, зная сторону основания a и боковое ребро b.*

Решение. Пусть *M* и *N* — соответственно середины сторон *AD* и *AB* основания. Обозначим через *K* точку пересечения прямой *MN* с диагональю *AC*, а через *P* и *Q* — точки пересечения той же прямой с продолжениями ребер *CD* и *CB* (рис. 274). В плоскости *ASC* через точку *K* проведем прямую, параллельную боковому ребру AS. Точку пересечения этой прямой с ребром SC обозначим через L.

Плоскость PLQ проходит через середины сторон AB и AD основания и параллельна боковому ребру AS (по известному признаку параллельности прямой и плоскости). В сечении пирамиды этой плоскостью получается пятиугольник $MELFN$, где E и F — точки пересечения прямых PL и QL с боковыми ребрами SD и SB. Вычислим площадь этого пятиугольника, предварительно доказав, что он составлен из прямоугольника $MEFN$ и треугольника ELF.

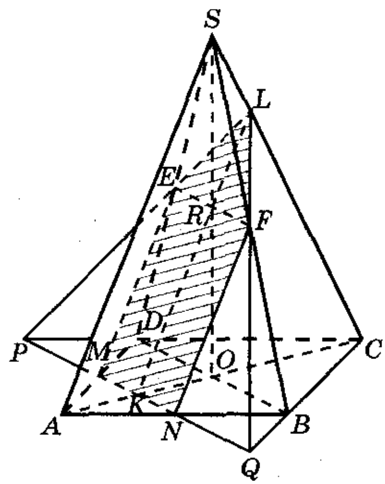


Рис. 274

Плоскость грани ASD пересекает плоскость сечения по прямой ME, параллельной ребру AS (в силу построения секущая плоскость параллельна AS). Так как M — середина AD, то ME — средняя линия в треугольнике ASD, а значит,

$$ME = \frac{1}{2}AS = \frac{b}{2}.$$

Далее, $ME \| AS$, $KL \| AS$, поэтому $ME \| KL$.

Аналогично доказывается, что $NF = \frac{b}{2}$ и $NF \| KL$.

Основанием пирамиды служит квадрат $ABCD$; отсюда нетрудно показать, что $AO \perp MN$. По теореме о трех перпендикулярах имеем $MN \perp KL$. Значит, фигура $MEFN$ — прямоугольник и $EF \perp KL$, т. е. $EF \perp RL$ (где R — точка пересечения KL и EF).

Из подобия треугольников ASC и KLC (по построению $KL \| AS$) имеем

$$\frac{KL}{AS} = \frac{KC}{AC}, \text{ или } \frac{KL}{b} = \frac{\frac{3}{4}AC}{AC},$$

откуда $KL = \frac{3b}{4}$. Следовательно,

$$RL = KL - KR = \frac{3b}{4} - \frac{b}{2} = \frac{b}{4} \left(KR = ME = NF = \frac{b}{2} \right)$$

Искомая площадь пятиугольника $MELFN$ равна сумме площадей прямоугольника $MEFN$ и треугольника ELF:

$$\frac{b}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{b}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{16}ab.$$

Из прямоугольного треугольника AOS получаем следующее условие существования пирамиды: $b^2 > \frac{a^2}{2}$, откуда $0 < a < b\sqrt{2}$.

Ответ. $\frac{5\sqrt{2}}{16}ab.$

Пример 8. *Основанием прямой призмы служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α ($\angle ABC = \alpha$). Найти площадь сечения, проходящего через диагональ AC' призмы параллельно диагонали BD ромба. Высота призмы равна h.*

Решение. Построим сечение. Проведем в плоскости основания призмы через точку A прямую, параллельную диагонали BD ромба (рис. 275). Поскольку эта прямая лежит в плоскости грани $ABCD$, она пересекает продолжения ребер CD и CB в точках M' и N'. Точки C' и M' лежат в плоско-

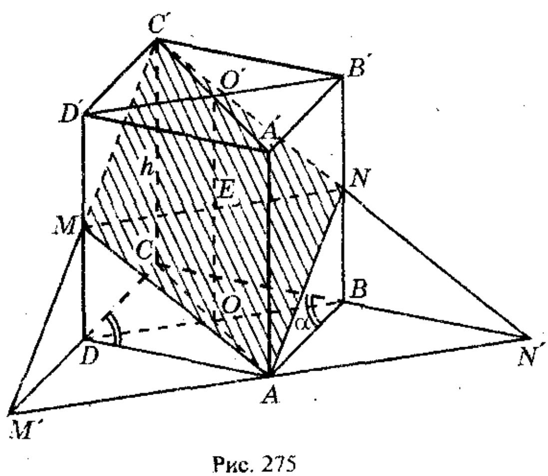


Рис. 275

сти грани $DD'C'C$, поэтому прямая $M'C'$ пересекает ребро DD' в некоторой точке M. Аналогично, точки C' и N' лежат в плоскости грани $CC'B'B$, поэтому прямая $C'N'$ пересекает ребро BB' в точке N.

Итак, точки пересечения секущей плоскости с ребрами призмы найдены. Это точки A, M, C' и N. Соединив их отрезками, получим четырехүгольник, плоскость которого проходит через диагональ AC' призмы и по построению параллельна диагонали DB ромба. Значит, этот четырехугольник является искомым сечением.

Ортогональной проекцией четырехугольника $AMC'N$ на плоскость основания призмы служит ромб $ADCB$ (рис. 275). Следовательно (см. § 1, п. 5), площадь искомого сечения связана с площадью ромба $ADCB$ соотношением

$$S_{\text{ромба}} = S_{\text{сеч}} \cdot \cos\beta,$$

где β — двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы, который измеряется соответствующим линейным углом $C'AC$. Имеем

$$S_{\text{ромба}} = 2S_{\Delta CBA} = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin\alpha = 2a^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\beta = \frac{AC}{AC'},\ AC = 2a\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника ACC' по теореме Пифагора находим

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + h^2}.$$

Таким образом,

$$\cos\beta = \frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + h^2}}.$$

Окончательно получим

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{ромба}}}{\cos\beta} = a\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + h^2}.$$

Ответ. $a\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + h^2}$.

Замечание. Укажем другой способ построения сечения в этой задаче: через точку E пересечения отрезков OO' и AC' проводим прямую MN, параллельную BD, а затем через две пересекающиеся прямые AC' и MN проводим плоскость.

Пример 9. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делятся ребра этого куба плоскостью, проходящей через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB?*

Р е ш е н и е. Пусть F и E — центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB соответственно (рис. 276). Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точки A, F и E.

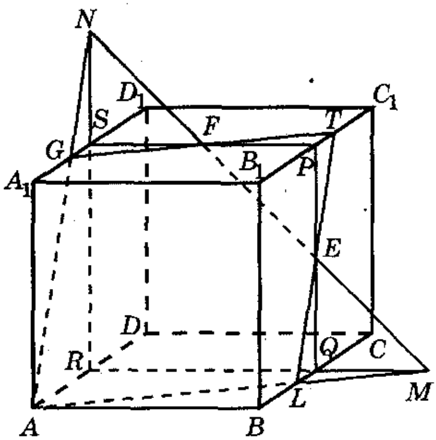


Рис. 276

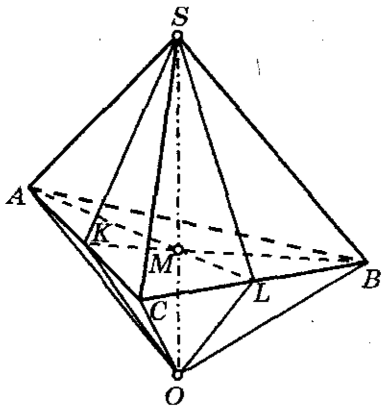


Рис. 277

Проведем через точки F и E плоскость, перпендикулярную ребру B_1C_1. Очевидно, в сечении куба этой плоскостью получается квадрат $PQRS$, вершины которого — середины соответствующих ребер данного куба. Так как точки F и E лежат в этой плоскости, то в ней же лежит и вся прямая FE. Эта прямая пересечет прямую RQ в точке M, а прямую RS — в точке N. При этом $\Delta EPF = \Delta EQM = \Delta NSF$, откуда следует, что отрезки MQ и NS равны половине ребра куба.

Точка M принадлежит как секущей плоскости, так и плоскости грани $ABCD$. Значит, прямая AM есть след секущей плоскости на плоскость грани $ABCD$, а точка L пересечения этой прямой с ребром BC — след ребра BC на плоскость сечения.

Аналогично, прямая AN есть след секущей плоскости на плоскость грани AA_1D_1D, а точка G пересечения этой прямой с ребром A_1D_1 — след ребра A_1D_1 на плоскость сечения.

Продолжив прямые LE и GF до пересечения с ребром B_1C_1, строим след ребра B_1C_1 на секущую плоскость (точка T).

Итак, искомое сечение куба есть четырехугольник $AGTL$.

Вычислительная часть задачи достаточно проста. Так как треугольники ABL и MQL подобны, то $BL : LQ = AB : MQ$. Но $MQ = 0{,}5AB$, поэтому $BL : LQ =$

$= 2 : 1$, откуда $BL : BC = 1 : 3$, т. е. $BL : LC = 1 : 2$. Аналогично доказывается, что $A_1G : GD_1 = 1 : 2$; $C_1T : TB_1 = 1 : 2$.

Ответ. 1 : 2.

3. Примеры решения задач на доказательство

Пример 10. *В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине — прямые. Доказать, что вершина пирамиды, точка пересечения медиан основания и центр описанного около пирамиды шара лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть O — центр описанного около пирамиды шара (рис. 277). Опустим из точки O перпендикуляр OK на грань ASC. Наклонные OA, OC и OS к этой грани равны как радиусы шара, поэтому проекции этих наклонных на плоскость грани ASC также равны между собой: $AK = CK = SK$. Следовательно, K — центр описанной около грани ASC окружности. Так как по условию треугольник ASC — прямоугольный, то K совпадает с серединой его гипотенузы AC.

Заметим, что ребро BS параллельно OK, поскольку BS, так же как и OK, перпендикулярно грани ASC ($BS \perp CS$ и $BS \perp AS$).

Проведем через параллельные прямые OK и BS плоскость $OKSB$. Эта плоскость содержит прямую SO и медиану BK основания ABC.

Аналогично доказывается, что прямая OL (L — середина ребра BC) параллельна ребру AS.

Прямые OL и AS определяют плоскость $OLSA$, которая также содержит прямую SO и другую медиану AL основания ABC.

Значит, медианы AL и BK основания ABC принадлежат двум плоскостям, пересекающимся по прямой SO. Итак, точка M пересечения медиан основания пирамиды лежит на прямой SO, что и требовалось доказать.

Пример 11. *Шар радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти высоту пирамиды.*

Решение. Обозначим через K и M точки касания данного шара соответственно с ребрами SA и SC, а через O — центр шара. Тогда $\Delta SKO = \Delta SMO$ (рис. 278). В самом деле, эти треугольники имеют общую гипотенузу SO и равные катеты $SK = SM$ (отрезки касательных, проведенных из точки S к шару). Поэтому $\angle ASO = \angle CSO$. Далее, центр O данного шара лежит на высоте SP пирамиды (P — прямоугольная проекция точки S на плоскость ABC). Поэтому $SP \perp AP$, $SP \perp CP$ и, значит, $\Delta APS = \Delta CPS$ (эти треугольники прямоугольные, имеют общий катет SP и $\angle ASP = \angle CSP$). Следовательно, $AP = CP$.

Аналогично доказывается, что $AP = BP$.

Пусть F, E и D — соответственно точки касания данного шара с ребрами AB, AC и BC. Сечение данного шара плоскостью ABC является окружностью, вписанной в треугольник ABC и касающейся его сторон AB, AC и BC соответственно в точках F, E и D.

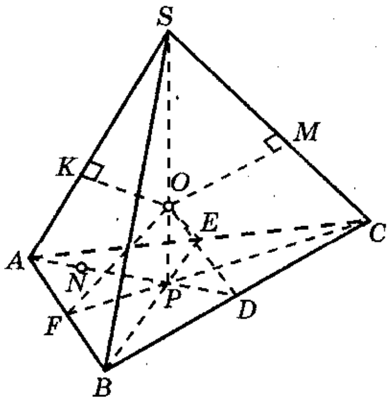


Рис. 278

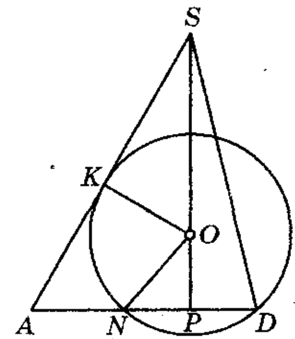


Рис. 279

Далее, $\Delta OPD = \Delta OPE = \Delta OPF$, так как эти треугольники прямоугольные, имеют общий катет OP и $OD = OE = OF = r$. Следовательно, $PE = PF = PD$, но $PA = PB = PC$, т. е. все шесть прямоугольных треугольников PEA, PFA, PFB, PDB, PDC и PEC равны, поскольку они имеют равные катеты и равные гипотенузы. Отсюда следует, что $AF = BF = BD = CD = CE = AE$ и, значит, треугольник ABC — правильный; P — центр вписанной в него окружности.

Таким образом, пирамида $SABC$ правильная. Остается вычислить высоту h этой пирамиды. Рассмотрим сечение пирамиды и данного шара плоскостью $SAPD$ (рис. 279). Обозначим через N вторую точку пересечения AD с окружностью, полученной при пересечении указанной плоскости с шаром. Имеем:

$$SO = r\sqrt{3},\ OK = ON = r,\quad OP = SP - SO = h - r\sqrt{3}.$$

Из треугольника NPO находим

$$NP = \sqrt{r^2 - (h - r\sqrt{3})^2}$$

и далее

$$PD = NP,\ AP = 2PD = 2NP.$$

Из треугольника APS находим

$$AS = \sqrt{h^2 + AP^2} = \sqrt{h^2 + 4[r^2 - (h - r\sqrt{3})^2]}.$$

Так как $\Delta OKS \sim \Delta APS$, то $OK : OS = AP : AS$, т. е.

$$\frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{r^2-(h-r\sqrt{3})^2}}{\sqrt{h^2+4[r^2-(h-r\sqrt{3})^2]}}.$$

После упрощений получим уравнение

$$9h^2 - 16rh\sqrt{3} + 16r^2 = 0,$$

откуда

$$h = \frac{8r\sqrt{3} \pm 4r\sqrt{3}}{9}.$$

Поскольку должно быть $h > r\sqrt{3}$, окончательно находим $h = \frac{4r\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. $\frac{4r\sqrt{3}}{3}$.

Пример 12. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 — боковые ребра. Найти площадь шестиугольника, который получается в сечении этого куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC. Ребро куба равно* 1.

Решение. В этой вычислительной задаче главное — доказать, что шестиугольник, получающийся в сечении, правильный. Тогда вычисление его площади не представляет труда.

Итак, построим сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC, и докажем, что сечение — правильный шестиугольник со стороной, равной $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пусть точка O — центр данного куба (рис. 280). Эта точка лежит на пересечении диагоналей BD_1 и A_1C куба (на рисунке они не отмечены); плоскость, проходящая через эти две диагонали, высекает из куба прямоугольник BA_1D_1C. Эта плоскость имеет с плоскостью интересующего нас сечения две общие точки: O и се-

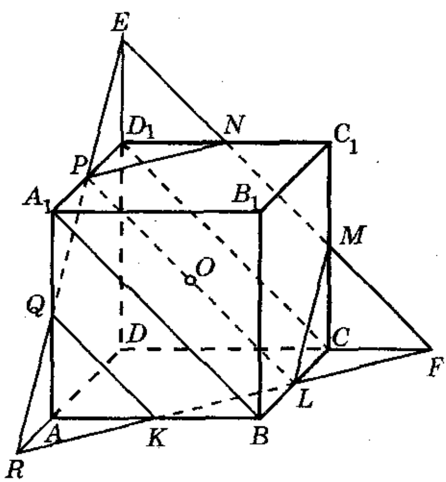


Рис. 280

редину L ребра BC, поэтому их линия пересечения — прямая OL. Но в прямоугольнике BA_1D_1C точка O есть центр симметрии, а потому LO пересекает сторону A_1D_1 в ее середине. Следовательно, доказано, что точка P — середина ребра A_1D_1 — принадлежит рассматриваемому сечению. Аналогично доказывается, что и середина N ребра D_1C_1 принадлежит рассматриваемому сечению.

Прямая KL, лежащая в плоскости грани $ABCD$ (и принадлежащая сечению), пересекает продолжения ребер DA и DC соответственно в точках R и F. Соединим отрезком прямой точки N и F, лежащие в плоскости грани CC_1D_1D по разные стороны от отрезка CC_1; эта прямая пересечет отрезок CC_1 в некоторой точке M, также принадлежащей сечению. Аналогично убеждаемся, что сечение проходит через некоторую точку Q на ребре AA_1. Наконец, ясно, что прямые NF и RP, принадлежащие плоскости сечения и представляющие собой линии пересечения этой плоскости соответственно с плоскостями граней CC_1D_1D и AA_1D_1D, пересекаются в некоторой точке E, лежащей на линии пересечения плоскостей указанных граней, т. е. на прямой DD_1.

Таким образом, построены точки пересечения искомого сечения со всеми ребрами куба. Докажем еще, что точки Q и M — середины соответствующих ребер. Прямоугольные треугольники RAK, KBL и LCF равны, а потому $RA = FC = 0{,}5AB$. Прямоугольные треугольники RAQ, QA_1P и PD_1E также равны: например, $\Delta RAQ = \Delta QA_1P$, поскольку $\angle RQA = \angle A_1QP$ как вертикальные, а $RA = 0{,}5AB = 0{,}5A_1D_1 = A_1P$, ($P$ — середина ребра); отсюда следует, что Q — середина ребра AA_1, а $D_1E = 0{,}5AA_1$. Точно так же доказывается, что точка M — середина ребра CC_1.

Итак, доказано, что сечение $KLMNPQ$, о котором идет речь в задаче, проходит через середины ребер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A куба. Очевидно, что каждая сторона шестиугольника равна половине диагонали грани куба, т. е. все стороны шестиугольника равны между собой.

Остается установить равенство всех углов шестиугольника — тогда будет доказано, что этот шестиугольник является правильным. Из равенства прямоугольных треугольников RAK, RAQ и QAK следует, что треугольник RKQ — равносторонний; тогда $\angle RKQ = 60°$, а потому $\angle QKL = 120°$. Точно так же получаем, что и все остальные углы шестиугольника равны $120°$.

Остается вычислить площадь правильного шестиугольника со стороной, равной $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Имеем $S = 6S_{\Delta}$, где S_{Δ} — площадь правильного треугольника со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Итак, $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) боковые ребра пирамиды равны;

б) боковые ребра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания;

в) около основания пирамиды можно описать окружность и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

2. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

а) двугранные углы при основании пирамиды равны;

б) высоты боковых граней равны;

в) высота пирамиды образует одинаковые углы с боковыми гранями;

г) в основание пирамиды можно вписать окружность и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

3. Существуют ли в пространстве два неравных угла со взаимно перпендикулярными сторонами?

Ответ. Существуют. Например, рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ — квадрат нижнего основания; AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра). Пусть точка E — середина ребра DC. Тогда углы $B_1C_1A_1$ и CC_1E не равны друг другу, хотя их стороны взаимно перпендикулярны: $B_1C_1 \perp C_1E$, $A_1C_1 \perp C_1C$.

4. Можно ли построить прямую, перпендикулярную трем данным скрещивающимся прямым?

Ответ. Вообще говоря, нет.

5. Существует ли четырехгранная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?

Ответ. Существует.

6. Может ли плоскость пересекать пять ребер треугольной пирамиды?

Ответ. Не может.

7. Даны две точки на кубе. Указать кратчайший путь между ними вдоль поверхности куба.

Указание. Выполнить развертку поверхности куба на плоскость.

8. Доказать, что линия пересечения двух некасающихся и несовпадающих сфер — окружность.

9. Доказать, что три биссектральные плоскости трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

10. *В треугольной пирамиде основанием высоты, опущенной из вершины,* является точка пересечения высот основания. Доказать, что это же верно и для остальных вершин.

11. Около сферы описана усеченная четырехугольная пирамида. Доказать, что объемы пирамиды и шара относятся как их полные поверхности.

12. В треугольной пирамиде каждая пара скрещивающихся ребер перпендикулярна. Доказать, что сумма квадратов их длин одинакова для всех пар.

13. Доказать, что в любой тетраэдр можно вписать только один шар.

14. Дан куб. Доказать, что отрезок, соединяющий середину стороны основания с серединой не пересекающей эту сторону диагонали куба, есть кратчайшее расстояние между указанными стороной и диагональю.

15. Доказать, что если в выпуклый многогранник с объемом V и площадью поверхности S вписан шар, то радиус R этого шара равен $R=\dfrac{3V}{S}$.

Указание. Разбить многогранник на пирамиды с основаниями — гранями многогранника и высотами — радиусами шара, проведенными в точки касания с этими гранями.

16. Найти необходимое и достаточное условие того, что:

а) *в прямую призму можно вписать шар*;

б) около прямой призмы можно описать шар.

Ответ. а) В основание призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности;

б) около основания призмы можно описать окружность.

17. В треугольной пирамиде $ABCD$ проводятся всевозможные сечения, параллельные ребрам AB и CD. Доказать, что все эти сечения — параллелограммы, и найти геометрическое место их центров.

18. Доказать, что сечения, общие для каждой пары из четырех попарно пересекающихся сфер, пересекаются в одной точке, если каждые три из них пересекаются.

19. Найти геометрическое место центров сфер, вписанных в данный трехгранный угол.

20. Найти геометрическое место проекций данной точки M на всевозможные плоскости, проходящие через данную прямую l.

Ответ. Искомым геометрическим местом является окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной l и проходящей через точку M, причем диаметр окружности равен длине отрезка, соединяющего точку M и точку пересечения указанной плоскости с прямой l, а центр окружности находится в середине этого отрезка.

21. Найти геометрическое место точек, из которых нельзя провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

22. Найти геометрическое место середин отрезков MN, где M и N лежат на данных скрещивающихся прямых.

Ответ. Плоскость.

23. Доказать, что проекция правильного тетраэдра на плоскость имеет наибольшую площадь, когда эта плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра.

24. Двугранный угол между плоскостями P и Q равен α. В плоскости P лежит правильный треугольник со стороной 1. Доказать, что сумма квадратов длин проекций сторон этого треугольника на плоскость Q не зависит от его положения на плоскости P.

25. Двугранный угол между плоскостями P и Q равен α. В плоскости P лежит квадрат со стороной 1. Доказать, что периметр проекции этого квадрата на плоскость Q является наибольшим, когда диагональ квадрата параллельна плоскости Q.

26. Доказать, что сумма квадратов длин проекций ребер единичного куба на плоскость не зависит от взаимного расположения куба и плоскости и равна 8.

27. В пространстве даны два луча Ax и By, не лежащие в одной плоскости и образующие между собой угол 90°; AB — их общий перпендикуляр. На данных лучах Ax и By рассматриваются точки: M на Ax и P на By такие, что $2AM \cdot BP = AB^2$. Доказать, что расстояние от середины O отрезка AB до прямой MP равно $0{,}5AB$.

28. Дан тетраэдр $ABCD$. Доказать, что его ребра AD и BC взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда выполняется равенство $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.

29. Доказать, что если противоположные ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, то все ее высоты пересекаются в одной точке.

30. Известно, что вершины нижнего основания прямой трехгранной призмы лежат на поверхности шара, а стороны верхнего основания касаются того же шара. Доказать, что такая призма — правильная.

31. Шар вписан в усеченный конус. Доказать, что площадь поверхности шара меньше площади боковой поверхности конуса.

32. Доказать, что косинус угла при вершине в осевом сечении конуса, описанного около четырех равных шаров, расположенных так, что каждый касается трех других, равен $\frac{1}{3}$.

33. Около шара описана четырехугольная усеченная пирамида. Доказать, что объемы шара и пирамиды относятся как их полные поверхности.

34. В треугольной пирамиде основанием высоты, проведенной из вершины, является точка пересечения высот треугольника, лежащего в основании. Показать, что тем же свойством обладают и все высоты пирамиды, опущенные из вершин основания на боковые грани.

35. Шар касается всех трех боковых граней треугольной пирамиды $SABC$ в точках пересечения их биссектрис. Из вершины проведены биссектрисы SD и SE боковых граней SAB и SAC. Угол DSE равен α, объем пирамиды равен V. Доказать, что пирамида правильная. Найти периметр ее основания.

Ответ. $6\sqrt[3]{\dfrac{6V\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}}$.

36. Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Каждый из трех плоских углов при вершине пирамиды равен α. Сумма длин боковых ребер равна $3b$. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

Ответ. $\dfrac{b\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

37. Высота треугольной пирамиды равна h, сумма девяти плоских углов при вершинах основания равна α. Известно, что существует шар, касающийся всех боковых граней в точках пересечения их медиан. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус шара.

Ответ. $\dfrac{2\sqrt{3}h\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha-\pi}{6}\right)}{9\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha-\pi}{6}\right)-3}$.

38. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, а периметр основания равен $3a$. Сфера касается всех трех сторон основания в их серединах и пересекает боковые ребра в их серединах. Доказать, что пирамида правильная. Найти радиус сферы.

Указание. Доказать, что основание пирамиды — правильный треугольник, а ее высота проходит через центр основания.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{16S^2+45a^4}}{24a}$.

39. В точке M, находящейся на расстоянии $2h$ от плоскости основания куба с ребром h и на расстоянии R ($R > 3h$) от центра куба, помещен источник света. Доказать, что тень, отбрасываемая кубом на плоскость основания, будет иметь наибольшую площадь, когда плоскость, проходящая через центр куба, точку M и одну из вершин, перпендикулярна плоскости основания.

40. В пространстве даны два треугольника с соответственно параллельными сторонами. Доказать, что прямые, проходящие через соответственные вершины, пересекаются в одной точке или параллельны.

41. Доказать, что прямая, образующая одинаковые углы с тремя непараллельными прямыми, лежащими в одной плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

42. Из точки в пространстве проведено несколько лучей так, что никакие два из них не образуют угол, меньший 30°. Доказать, что число лучей не больше 58.

43. В пространстве даны точка A и две прямые: l_1 и l_2. Провести через точку A прямую, пересекающую l_1 и l_2.

44. Пусть A, B, C и D — точки в пространстве. Какая фигура получится, если соединить последовательно середины отрезков AB, BC, CD и DA?

Ответ. Параллелограмм.

45. Вписать в трехгранный угол прямой круговой конус.

46. Даны плоскость P и точки M и N. Провести через точку M прямую, параллельную плоскости P и отстоящую от точки N на расстояние l.

47. Через точку M провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

48. Провести прямую, параллельную данной плоскости и пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

49. Построить шар, вписанный в трехгранный угол.

50. Построить плоскость, касающуюся боковой поверхности цилиндра и проходящую через данную точку.

51. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба и перпендикулярной его диагонали.

52. В правильной четырехугольной пирамиде провести сечение плоскостью, проходящей через биссектрису угла наклона бокового ребра к основанию и перпендикулярной боковому ребру.

53. В правильной четырехугольной пирамиде провести сечение плоскостью, проходящей через биссектрису угла наклона бокового ребра к основанию и параллельной боковому ребру.

54. На ребрах SB и SC трехгранного угла $SABC$ даны точки K и P. Построить на ребре SA точку M такую, чтобы сумма отрезков $KM + MP$ была наименьшей.

55. Дана неправильная четырехугольная пирамида $SABCD$, основанием которой является квадрат. В квадрат вписана и около него описана окружности. На этих окружностях найти по точке K и P так, чтобы отрезок KP имел заданную длину и был виден из точки S под прямым углом.

56. На ребре SA трехгранного угла $SABC$ дана точка D. На ребре SB найти точку, равноудаленную от ребра SC и от точки D.

57. Дана сфера, касающаяся ребер трехгранного угла $SABC$ и проходящая через данную точку M. Построить точки касания этой сферы с ребрами трехгранного угла и отрезок, равный ее радиусу.

58. Дана треугольная пирамида $ABCD$ и точка K на ее грани BCD. Через точку K проведена прямая, пересекающая грань ABC и продолжение ребра AD соответственно в точках O и M так, что $OK = 2OM$. Построить точку O.

59. На гранях ABD и BCD треугольной пирамиды $ABCD$ даны точки M и K. На ребре AD (или его продолжении) и на плоскости ABC найти такие точки E и F, чтобы расстояние между ними было равно данному отрезку и чтобы EF было параллельно MK.

60. Дан трехгранный угол $SABC$ и точка M на его грани BSC. Построить треугольник с вершинами в точке M и на гранях угла так, чтобы его периметр был наименьшим.

61. Можно ли рассечь куб плоскостью так, чтобы в сечении получился: а) квадрат; б) пятиугольник; в) шестиугольник; г) правильный шестиугольник?

Ответ. Можно.

62. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребро $SA = a$; угол между SA и плоскостью основания равен α. Найти площадь сечения, проведенного через точку A перпендикулярно SC.

Ответ. $\dfrac{2a^2 \cos\alpha \cos 2\alpha}{\sin\alpha}$.

63. Дан прямой круговой конус. Проводятся сечения плоскостью через его вершину. Оказалось, что площадь максимального сечения в 2 раза больше площади осевого. Найти угол в осевом сечении.

Ответ. $\dfrac{5\pi}{6}$.

64. Дан куб с ребром a. Найти геометрическое место середин отрезков заданной длины l, один из концов которых лежит на диагонали верхнего основания куба, а другой — на не параллельной ей диагонали нижнего основания куба (или на продолжениях этих диагоналей).

Ответ. Если $l > a$, то искомым геометрическим местом являются все точки окружности радиуса $0{,}5\sqrt{l^2 - a^2}$ с центром в центре куба; эта окружность лежит в горизонтальной плоскости, проходящей через центр куба.

Если $l = a$, то искомое геометрическое место состоит из единственной точки — центра куба.

Если $l > a$, то ни одна из точек пространства указанным свойством не обладает.

65. Дана пирамида, в основании которой лежит квадрат и высота которой равна стороне основания. Требуется построить такую трехгранную призму, что ее высота равна данному отрезку h, основанием служит равнобедренный прямоугольный треугольник, а объем призмы равен объему данной пирамиды. Описать способ построения основания этой призмы с помощью циркуля и линейки.

Указание. Из условия равенства объемов пирамиды и призмы выразить катет искомого равнобедренного прямоугольного треугольника через отрезок h и сторону основания пирамиды, а затем провести построение по этой формуле.

66. В правильной четырехугольной пирамиде плоскость, проходящая через сторону основания и среднюю линию противоположной боковой грани, образует с основанием угол $\alpha = 60°$. Найти объем пирамиды, если сторона основания равна a.

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

67. Правильная четырехугольная пирамида рассечена плоскостью, параллельной основанию. В каком отношении делится объем пирамиды, если площадь сечения втрое меньше площади основания?

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}+1}{26}$.

68. В правильной треугольной пирамиде высота равна h, а боковое ребро равно l. Найти площадь сечения, которое параллельно основанию и отстоит от него на расстояние a.

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{4}h^2\frac{l^2-h^2}{(h-a)^2}$.

69. Правильная треугольная пирамида .рассечена плоскостью, параллельной основанию так, что боковая поверхность делится пополам. В каком отношении делится высота пирамиды?

Ответ. $\sqrt{2}+1$.

70. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ плоскость, проведенная через сторону AD основания перпендикулярно грани BSC, делит эту грань на две части, одинаковые по площади. Найти полную поверхность пирамиды, если $AD = a$.

Ответ. $a^2(1+\sqrt{4+2\sqrt{2}})$.

71. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ плоскость, проходящая через сторону AC основания и перпендикулярная ребру SB, отсекает пирамиду $DABC$, объем которой в 1,5 раза меньше объема пирамиды $SABC$. Найти боковую поверхность пирамиды $SABC$, если $AC = a$.

Ответ. $\frac{3a^2}{2\sqrt{2}}$.

72. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1, CC_1 — боковые ребра), у которой $AC = 6$, а $AA_1 = 8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найти отношение, в котором эта плоскость делит объем призмы, если известно, что $BM = MB_1$, а AN является биссектрисой угла CAC_1.

Ответ. $\frac{7}{17}$.

73. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что $SK : KA = SL : LB = 2$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

Ответ. $\frac{8}{37}$.

74. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1, CC_1 — боковые ребра). Плоскость пересекает ребра A_1B_1, B_1C_1 и BC соответственно в точках M, N и P. Найти отношение, в котором эта плоскость делит объем призмы, если известно, что $B_1M : A_1B_1 = 1:2$, $B_1N : B_1C_1 = 2:3$ и $BP : CB = 1:3$.

Ответ. $\frac{7}{29}$.

75. Плоскость проходит через вершину A основания треугольной пирамиды $SABC$, делит пополам медиану SK треугольника SAB, а медиану SL треугольника SAC пересекает в точке D такой, что $SD : DL = 1 : 2$. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ. $\frac{1}{14}$.

76. В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны друг другу. На ребре SA взята точка M такая, что $SM = MA$, на ребре SB — точка N такая, что $SN = \frac{1}{3}SB$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная медиане AD основания ABC. Найти отношение объема треугольной пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды $SABC$.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

77. Через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, отсекающая от противоположной грани треугольник площадью a^2. Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена проведенной плоскостью от данной, если боковая поверхность всей пирамиды равна b^2.

Ответ. $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2$.

78. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник ABC со стороной 1 дм. На продолжении ребра B_1B за точку B взята точка P такая, что BP= 0,5 дм. Через точку P и середины ребер AA_1 и CC_1 проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения, если $BB_1 = 1$ дм.

Ответ. $\frac{3\sqrt{7}}{16}$ дм^2.

79. Найти отношение объемов двух тел, получающихся при рассечении правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон основания перпендикулярно к нему.

Ответ. 1 : 15.

80. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной a. Высота пирамиды равна диагонали этого квадрата. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной ее высоте и двум противоположным сторонам основания. Найти периметр сечения, если известно, что в него можно вписать окружность.

Ответ. $3a$.

81. Дан угол $\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ в осевом сечении прямого кругового конуса с вершиной S и образующей длины l. Через точку A, взятую на основании конуса, проведена плоскость P, перпендикулярная образующей SA. Через вершину конуса проведена плоскость Q, которая перпендикулярна плоскости осевого сечения конуса, проходящего через SA, и составляет с образующей SA конуса угол $\beta\left(\beta < \frac{\alpha}{2}\right)$. Плоскость Q рассекает конус по двум образующим таким, что продолжения этих образующих пересекают плоскость P в точках C_1 и C_2. Найти длину отрезка C_1C_2.

Ответ. $2l\sec\frac{\alpha}{2}\sec\beta\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin\beta}$.

82. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Определить площадь фигуры, полученной в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно a.

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

83. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания. Эта грань является равнобедренным треугольником с боковой стороной $b\,(b \neq a)$. Найти площадь того сечения пирамиды, которое является квадратом.

Ответ. $\left(\dfrac{a\sqrt{2a^2+4b^2}}{2a+\sqrt{2a^2+4b^2}}\right)^2.$

84. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания, $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) даны длины ребер: $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Пусть O — центр основания $ABCD$, O_1 — центр основания $A_1B_1C_1D_1$, а S — точка, делящая отрезок O_1O в отношении 1 : 3, т. е. $O_1S : SO = 1:3$. Найти площадь сечения данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку S параллельно диагонали AC_1 параллелепипеда и диагонали BD его основания $ABCD$.

Ответ. $\dfrac{7}{16}\sqrt{4a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}.$

85. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны a и $3a$. Расстояние между двумя параллельными ребрами, лежащими в плоскостях различных оснований и в различных боковых гранях, равно b. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через указанные параллельные ребра.

Ответ. $\dfrac{11}{4}ab.$

86. Площадь сечения, проведенного через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды параллельно непересекающемуся с этой диагональю боковому ребру, равна S. Найти площадь сечения, проходящего через середины двух смежных сторон основания и середину высоты пирамиды.

Ответ. $\dfrac{5}{4}S.$

87. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h. Вычислить площадь сечения, проходящего через середины двух не смежных и не параллельных сторон основания и через середину высоты пирамиды.

Ответ. $\dfrac{25}{64}a\sqrt{4h^2+3a^2}.$

88. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S. Вычислить площадь сечения, проходящего через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани.

Ответ. $\dfrac{25}{16}S.$

89. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a, и двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

Ответ. $\dfrac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}$.

90. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 2α, а сторона основания равна a. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через одну из сторон основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

Ответ. $\dfrac{a^2}{4}\sqrt{4\cos^2\alpha - 1}$.

91. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположной боковой грани. Вычислить площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен α.

Ответ. $a^2 \cos^3\alpha$.

92. В правильной четырехугольной пирамиде через вершину основания проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру. Определить площадь сечения, если ребро основания равно 1, а боковое ребро равно 2.

Ответ. $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

93. Через одну из сторон основания правильной прямой трехгранной призмы под углом α к основанию проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду объема V. Определить площадь сечения.

Ответ. $\dfrac{V^{2/3}\sqrt{3}}{\cos^{1/3}\alpha \sin^{2/3}\alpha}$.

94. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P сторона основания равна a, а угол наклона боковой грани к основанию равен φ. В этой пирамиде проведена секущая плоскость, которая делит пополам двугранный угол при ребре CD. Найти длину отрезка, по которому эта плоскость пересекается с гранью APB.

Ответ. $\dfrac{a}{1+2\cos\varphi}$.

95. Нижним основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра) служит ромб с острым углом φ. Известно, что в эту призму можно вписать шар диаметра d, касающийся изнутри всех ее граней. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через ребра BC и A_1D_1.

Ответ. $\dfrac{d^2\sqrt{2}}{\sin\varphi}$.

96. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. Найти площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер B_1C_1 и C_1D_1. Ребро куба равно 1.

Ответ. $\dfrac{7\sqrt{17}}{24}$.

97. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1?

Ответ. 7 : 29.

98. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит ребро B_1C_1 точка E, которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB?

Ответ. 2 : 1.

99. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. На продолжении ребер AB, AA_1, AD отложены соответственно отрезки BP, A_1Q, DR, имеющие длину $1{,}5AB$ ($AP = AQ = AR = 2{,}5AB$). Через точки P, Q и R проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

Ответ. 1 : 47.

100. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1. Пусть точка P делит ось OO_1 призмы в отношении 5 : 1. Через точку P и середины ребер AB и A_1C_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Ответ. 49 : 95.

101. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через середины ребер AB, AD и CS проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ. 1 : 1.

102. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC'. На продолжении ребра BA взята точка M так, что $MA =$

$= AB$ ($MB = 2AB$). Через точки M, B' и середину ребра AC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Ответ. 13 : 23.

103. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и высотой h через центр основания проведена плоскость, параллельная грани SAB. Площадь полученного сечения равна площади основания. Найти объем части пирамиды, лежащей ниже этой плоскости.

Ответ. $\frac{12}{247}h^3$.

104. Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отрезки $SK = \frac{2}{3}SA$, $SL = \frac{1}{2}SB$, $SM = \frac{1}{3}SC$ соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найти длину отрезка SN, отсекаемого этой плоскостью на ребре SD.

Ответ. $\frac{2}{5}a$.

105. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и объемом V проведена плоскость, которая параллельна медиане основания BN и пересекает боковое ребро SA в точке K, а боковое ребро SB — в точке L, причем $SK = \frac{1}{2}SA$, $SL = \frac{1}{3}SB$. Найти объем части пирамиды, лежащей ниже этой плоскости.

Ответ. $\frac{23}{24}V$.

106. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ со стороной основания, равной a. Угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проведено сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SB, причем так, что в сечение можно вписать окружность. Найти всевозможные радиусы этих окружностей.

Ответ. $0 \le r \le \frac{a\sqrt{2}}{6}$; $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

107. На ребрах SB и SC трехгранного угла $SABC$ даны соответственно точки M и K, а на гранях ASB и ASC — точки P и H. Построить сечение трехгранного угла плоскостью, проходящей через M и K так, чтобы точки P и H были расположены по одну сторону от плоскости этого сечения и разность расстояний от точек P и H до плоскости сечения была равна данному отрезку.

МОДЕНОВ Владимир Павлович

МАТЕМАТИКА

ИД № 03434 от 15.12.00.
Подписано в печать 26.06.02. Формат $60\times90^1/_{16}$.
Бумага типографская. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 50,00. Уч.-изд. л. 58,80. Тираж 10 000 экз.

Изд. № 157. Зак № 9466

ООО «Издательство Новая Волна».
111141, г. Москва, 1-й проезд Перова Поля, д. 11а.
Тел. 306-29-57, 306-07-59.
Интернет/Home page — www.newwave.msk.ru
Электронная почта/E-mail — sales@newwave.msk.ru
101000, г. Москва, Главпочтамт, а/я 251.

Отпечатано с готовых диапозитивов
на Книжной фабрике № 1 МПТР России.
144003, г. Электросталь Московской обл., ул. Тевосяна, 25.
Тел. /095/ 917-91-41 e-mail: knigist@mail.ru