ИНТЕНСИВНАЯ ПОДГОТОВКА
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ 2010

МАТЕМАТИКА

РЕПЕТИТОР

ЭКСМО

ИНТЕНСИВНАЯ ПОДГОТОВКА
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ 2010

В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина

МАТЕМАТИКА

РЕПЕТИТОР

МОСКВА эксмо 2009

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я7
К 75

Об авторах:
В.В. Кочагин — кандидат педагогических наук
М.Н. Кочагина — кандидат педагогических наук

Рецензент:
Н.И. Фирстова — кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и методики обучения математике математического факультета МПГУ

Кочагин В. В.

К 75 ЕГЭ 2010. Математика : репетитор / В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина. — М. : Эксмо, 2009. — 320 с. — (ЕГЭ. Репетитор).

ISBN 978-5-699-36076-5

Учебное пособие адресовано *выпускникам* средней школы для подготовки к единому государственному экзамену по математике.

Учебное пособие включает:
- полную информацию о структуре и содержании ЕГЭ по математике;
- краткий теоретический материал по всем темам ЕГЭ;
- сведения о типах заданий разного уровня с подробными комментариями;
- ответы и решения.

Издание окажет помощь *учителям*, *репетиторам* и *родителям* при подготовке учащихся к ЕГЭ по математике.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-699-36076-5

Содержание

I. ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые старшеклассники! Скоро Вам предстоит пройти итоговую аттестацию, сдав выпускные экзамены в школе. Среди таких экзаменов есть и экзамен по математике. Его сдают все ученики 11-х классов в письменной форме. В последнее время появилась новая форма организации и проведения экзамена, объединившая выпускной экзамен в школе со вступительным экзаменом в вуз. Такой экзамен получил название единого государственного экзамена (ЕГЭ). Так как его цели отличаются от целей ранее проводимых выпускных экзаменов в школе, то и структура, и проведение, и подготовка к нему должны быть другими. В 2010 году объем, содержание и виды заданий ЕГЭ по математике будут существенно изменены. Пособие, которое Вы держите в руках, знакомит с особенностями проведения ЕГЭ по математике, его содержанием и типовыми задачами. С помощью этой книги вы сможете самостоятельно подготовиться к экзамену и успешно его сдать.

Данное пособие предназначено прежде всего для учеников. В нем представлен основной теоретический материал, который изучается в школе и входит в экзаменационную работу, примеры заданий, аналогичных экзаменационным, а также комментарии к ним. Весь материал пособия разбит на несколько разделов, в соответствии с основными вопросами содержания школьного курса математики, присутствующими в текстах ЕГЭ:

— Выражения и преобразования.

— Функции и их свойства.

— Уравнения и неравенства.

— Текстовые задачи.

— Геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин.

Каждый из разделов состоит из нескольких тем. В содержание каждой темы включены основные теоретические вопросы для их быстрого повторения, советы-рекомендации для эффективного и рационального решения отдельных видов заданий, типовые задания с подробными решениями, а также задания для самостоятельного решения с указаниями и ответами. Задания для самостоятельного решения в данном пособии соответствуют уровню заданий разных частей ЕГЭ по математике. В соответствии с целями «Репетитора ЕГЭ по математике», большей частью – это подготавливающие и обучающие задания, нежели контролирующие.

Наиболее эффективно работу по подготовке к сдаче ЕГЭ можно построить по следующему плану:

1) Ознакомиться с разделом пособия «Что такое ЕГЭ?» с целью выяснения структуры экзаменационной работы.

2) Изучив (или повторив) теоретический материал первой темы первого раздела, разобрать комментарии по решению типовых заданий этой темы и решить последовательно все предложенные задания, начиная с заданий первой части.

3) Сравнить полученные ответы с ответами, приведенными в конце книги. Обязательно разобраться с причинами появления ошибок (если таковые будут), при необходимости повторив теоретический материал, или воспользовавшись нашими советами к решению задач, которые предложены в разделе «Указания».

4) Работая так и дальше, последовательно переходить от одной темы к другой, от одного раздела к другому. Стараться запоминать основные приемы решения заданий.

5) Изучив рекомендации по заполнению бланка ответов, решать подготовительные варианты к ЕГЭ, предложенные, например, на сайте www.fipi.ru. В случае ошибок в ответах или незнания способа выполнения какого-то задания, повторить соответствующий теоретический вопрос по данному пособию и вернуться к решаемому варианту.

Надеемся, что данное пособие поможет старшеклассникам систематизировать свои знания по математике, узнать особенности заданий, предлагающихся на ЕГЭ по математике, а также поможет самостоятельно подготовиться к экзамену и успешно его сдать.

Хотелось бы выразить благодарность учащимся старших классов гимназии № 1534 города Москвы и студентам математического факультета Московского городского педагогического университета за неоценимую помощь при подготовке данного пособия.

II. ЧТО ТАКОЕ ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Основные нормативные положения ЕГЭ

Введение единого государственного экзамена (ЕГЭ) в практику основывается на положениях Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года.

Единый государственный экзамен — это экзамен, объединяющий два экзамена: выпускной — для учащихся 11-го класса и вступительный в вуз — для абитуриентов. Среди целей такого объединения — обеспечение доступности и равных возможностей получения высшего образования, снижение психологической нагрузки на выпускников школ за счет упразднения июльских вступительных экзаменов в вузы, объективная оценка уровня подготовки выпускников школ и стандартизация требований к подготовке поступающих в вузы.

Каждому ученику, сдавшему ЕГЭ, выдается сертификат с результатами по стобалльной шкале.

Каждый вуз для себя устанавливает количество баллов, необходимое для поступления. Чем престижнее вуз, тем выше он установит «проходной балл».

Ученик должен получить на ЕГЭ по математике такое количество баллов, которое превысит пороговое значение, устанавливаемое ежегодно Рособрнадзором. В этом случае отметка по математике в школьный аттестат выставляется по итогам года, и выпускник имеет возможность продолжить обучение в вузе. В 2009 году пороговое значение по математике составляло 21 балл.

Срок действия сертификата с результатами ЕГЭ истекает 31 декабря года, следующего за годом его получения. Так, срок действия сертификата, который будет выдан в 2010 году, истечет 31 декабря 2011 года. Лицам, проходившим военную службу по призыву и уволенным с военной службы, срок действия сертификата продлевается на все время службы плюс 1 год после увольнения.

Выпускник, сдавший ЕГЭ в 2010 году и не поступивший в вуз, может повторно сдать ЕГЭ в 2011 году. В этом случае он может использовать для поступления в 2011 году лучший из двух сертификатов.

Как по процедуре проведения ЕГЭ, так и по результатам ЕГЭ может быть подана апелляция. Более детальную информацию можно узнать на интернет-сайте www.ege.edu.ru. На этом же сайте можно найти варианты ЕГЭ по математике прошлых лет и демонстрационную версию варианта этого года.

На единый государственный экзамен по математике отводится 4 часа (240 минут). Все необходимые справочные материалы предоставляются каждому сдающему ЕГЭ. Пользоваться калькулятором на ЕГЭ по математике не разрешается.

Структура экзаменационной работы по математике

В 2010 году изменяется структура экзаменационной работы. Две части экзаменационной работы содержат 18 заданий: 12 заданий базового уровня в первой части и 6 более сложных заданий во второй. В заданиях первой части требуется дать краткий ответ (ответом служит целое число или дробь). Все задания второй части предполагают развернутый ответ, т.е. полное обоснованное решение и ответ.

Стратегия решения заданий ЕГЭ должна быть следующей:

— если Вам важен балл по стобалльной шкале, то ваша задача — правильно решить как можно больше заданий, причем, желательно, заданий из обеих частей варианта.

— если Вам важно только перейти пороговое значение баллов, то достаточно решать задания только первой части.

По сравнению с прошлыми годами содержание заданий ЕГЭ также изменяется. Среди заданий появились задания на использование приобретенных при обучении математике знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни (см. раздел «Текстовые задачи»). Введен новый тип заданий на клетчатой бумаге, в связи с чем, геометрических задач становится больше — теперь их 4 из 18. О типовых заданиях вы можете узнать из раздела «Основные вопросы содержания».

Особенности оформления экзаменационной работы по математике

Формы записи ответов для разных заданий различаются.

Для каждого из заданий B1–B12 ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Единицы измерений не пишут. Этот тип заданий называется заданием с кратким ответом.

Задания второй части C1–C6 — это задания с развернутым ответом. При выполнении этих заданий надо в специальном бланке ответов для этих заданий (два отдельных листа) записать полное решение и ответ.

Эту последнюю группу заданий проверяют эксперты – высококвалифицированные учителя и преподаватели вузов. Все задания части I проходят компьютерную проверку. Именно поэтому следует внимательно отнестись к правилам оформления работы.

Для заданий с кратким ответом необходимо верно и аккуратно заполнить бланк ответов. Исправления (зачеркивания, замазывания и т.п.) в области, отведенной для записи ответов, не допускается. Если ученик ошибся при записи ответа, то он может отменить этот ответ, и записать верный ответ в специально отведенном поле бланка ответов (в нижней части листа). Таких «отмен» можно сделать ограниченное количество. Поэтому лучше записать ответы на черновике, проверить их, и только потом внимательно и аккуратно заполнить бланк ответов, записывая каждый символ в отдельную ячейку.

Для оформления заданий части II (с развернутым ответом), выдается 2 отдельных листа, куда надо записывать решение задания, и после каждого решения ответ. Все рисунки и пометки можно производить только во внутреннем поле листа и только черными чернилами (гелевой или капиллярной ручкой). При оформлении решений следует обратить внимание на правильную запись хода решения, наличие обоснований всех этапов решения (не обязательно очень подробных, но правильных!) и верный ответ.

Некоторые рекомендации по поведению во время экзамена

Напомним, что с собой на экзамен необходимо взять пропуск на ЕГЭ (выдается после подачи заявки на участие в ЕГЭ в Вашем общеобразовательном заведении), **паспорт** и **черную ручку** (лучше гелевую). Листы для черновиков и необходимый справочный материал выдается каждому ученику, сдающему ЕГЭ.

Во время проведения экзамена старайтесь не волноваться. Чем быстрее у Вас получится сосредоточиться на решении заданий, тем скорее Вы вспомните необходимые математические факты и приемы решения типовых заданий. Не стоит забывать и о самопроверке.

И еще, внимательно читайте условие и требование выполняемого задания. На ЕГЭ в заданиях первой части контролируется только ответ на поставленный вопрос!

Перед тем, как приступить к выполнению заданий, посмотрите всю предложенную вам работу. Далее, не теряя времени, начинайте выполнять одно за другим задания первой части. Затем переходите к следующей части. Если какое-то задание вызвало затруднения, переходите к решению следующего. К пропущенным заданиям можно будет вернуться позже. Рекомендуем проверять себя после выполнения каждого задания, а также после выполнения заданий каждой части. Перед тем, как сдать работу, еще раз проверьте правильность заполнения бланков ответов: необходимые ячейки должны быть заполнены.

Желаем успешной сдачи экзаменов!

Единый государственный экзамен - 2010

Бланк ответов №1

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z . - À Â Ä Ô Ö È É Ê Ë Î Ï Ù Û Ü ß

Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка.

ВНИМАНИЕ! Все бланки и листы с контрольными измерительными материалами рассматриваются в комплекте.

Номера заданий типа А с выбором ответа из предложенных вариантов

Образец написания метки: ☒ ЗАПРЕЩАЮТСЯ исправления в области ответов. Будьте аккуратны. Случайный штрих внутри квадрата может быть воспринят как метка.

Номера вариантов ответа: 1, 2, 3, 4

Номера вариантов ответа: 1, 2, 3, 4

Замена ошибочных ответов на задания типа А	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	
	А	А	А	Резерв - 6
	А	А	А	
	А	А	А	Резерв - 7
	А	А	А	

Результаты выполнения заданий типа В с ответом в краткой форме

Замена ошибочных ответов на задания типа В

В -	В -
В -	В -
В -	В -

ВНИМАНИЕ!

III. ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ СОДЕРЖАНИЯ

Раздел III.1. ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Тождественные преобразования иррациональных и степенных выражений

Выполнение заданий по преобразованию выражений, содержащих корни n-й степени и степень с рациональным показателем, всегда вызывает трудности. Это связано как с большим числом применяемых свойств, так и с вычислениями, требующими повышенной концентрации внимания. В заданиях *части I* требуется непосредственное применение свойств. В заданиях *части II* приходится применять комбинацию нескольких свойств.

Теоретические сведения

Определение. **Арифметическим корнем n-й** степени из числа a называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Свойства арифметического корня

(n, k — натуральные числа ($n > 1$, $k > 1$); $a \geq 0$, $b \geq 0$).

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad (1)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0 \qquad (2)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \qquad (3)$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \qquad (4)$$

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k \qquad (5)$$

Для любого действительного числа x:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, \text{ если } n \text{ четно;} \\ x, \text{ если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \qquad (6)$$

Определение. **Степенью числа a $(a > 0)$** с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное $(n > 1)$, называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Если $a = 0$, то при $r > 0$ $a^r = 0$.

Свойства степени с рациональным показателем
(r, s — рациональные числа, $a > 0$, $b > 0$)

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (7)$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \qquad (8)$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{rs} \qquad (9)$$

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r \qquad (10)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad (11)$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2 \qquad (12)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (13)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (14)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad (15)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad (16)$$

Некоторые степени чисел 2, 3, 4, 5

$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$	$2^5=32$	$2^6=64$
$3^0=1$	$3^1=3$	$3^2=9$	$3^3=27$	$3^4=81$	$3^5=243$	$3^6=729$
$4^0=1$	$4^1=4$	$4^2=16$	$4^3=64$	$4^4=256$	$4^5=1024$	$4^6=4096$
$5^0=1$	$5^1=5$	$5^2=25$	$5^3=125$	$5^4=625$	$5^5=3125$	

Решение типовых заданий

При преобразовании степеней с целыми показателями следует обратить внимание на преобразования дробных выражений. Здесь часто приходится учитывать, что

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n},\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ n\in Z.$$

Задание 1. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-4^{-3}:4^{-5}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-4^{-3}:4^{-5}=4^2-4^{-3-(-5)}=16-4^2=0.$$

Ответ: 0.

Рассмотрим задания на непосредственное применение свойств корня n-й степени и степени с рациональным показателем.

Задание 2. Вычислите $\sqrt[4]{81\cdot 0{,}0001}$.

Решение. По свойству (1) получим

$$\sqrt[4]{81\cdot 0{,}0001}=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{0{,}0001}=3\cdot 0{,}1=0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

Задание 3. Вычислите $\left(-3\sqrt[4]{2}\right)^4$.

Решение. По свойству (10) имеем

$$\left(-3\sqrt[4]{2}\right)^4 = (-3)^4 \cdot \left(\sqrt[4]{2}\right)^4 = 81 \cdot 2 = 162.$$

Ответ: 162.

Задание 4. Вычислите $\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^6$.

Решение.

Применяя последовательно свойства (10) и (5), получим

$$\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^6 = (-2)^6 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = 64 \cdot \sqrt[3]{2^6} = 64 \cdot \sqrt[3]{64} = 64 \cdot 4 = 256.$$

Ответ: 256.

Задание 5. Вычислите $\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$.

Решение.

Переведем смешанное число в неправильную дробь

$$\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}} = \sqrt[3]{-\frac{4 \cdot 27 + 17}{27}} = -\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = -\frac{5}{3}.$$

Ответ: $-1\frac{2}{3}$.

Задание 6. Найдите значение выражения $36^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Решение.

$$36^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Представим 27 как 3^3, а 8 как 2^3, тогда по свойству (9) и (11) получим

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{27}.$$

Ответ: $\frac{2}{27}$.

Если сразу не удается вычислить корень n-й степени, то часто помогает разложение подкоренного выражения на множители.

Задание 7. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{-20\cdot 25\cdot 128}$.

Решение.

1 *способ.* $\sqrt[3]{-20\cdot 25\cdot 128}=\sqrt[3]{-64000}=-40.$

2 *способ.* $\sqrt[3]{-20\cdot 25\cdot 128}=-\sqrt[3]{2^2\cdot 5\cdot 5^2\cdot 2^7}=-\sqrt[3]{5^3\cdot 2^9}=$
$=-5\cdot 8=-40.$

Ответ: -40.

При выполнении преобразований иногда удобно сначала заменить корни n-й степени на соответствующие степени с рациональным показателем, используя определение степени с рациональным показателем.

Задание 8. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[6]{16}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[6]{16}=16^{\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{6}}=16^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=16^{\frac{1}{2}}=4.$$

Ответ: 4.

Задание 9. Вычислите $\dfrac{\sqrt[3]{243}\cdot\sqrt[5]{16}}{3^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{-0,6}}$.

Решение.

Так как в выражении присутствуют степени чисел 3 и 4, то заменим 243 на 3^5, а 16 на 4^2. Имеем

$$\frac{\sqrt[3]{243}\cdot\sqrt[5]{16}}{3^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{-0,6}}=\frac{\left(3^5\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(4^2\right)^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{-0,6}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}\cdot 4^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{-\frac{3}{5}}}=3\cdot 4=12.$$

Ответ: 12.

Задание 10. Упростите выражение

$$40^{\frac{1}{3}}+162^{\frac{1}{4}}-3\sqrt[4]{32}-2\sqrt[3]{5}.$$

Решение.

Разложим на простые множители: $40=2^3\cdot 5$, $162=2\cdot 3^4$, $32=2^5$.

Имеем: $40^{\frac{1}{3}}+162^{\frac{1}{4}}-3\sqrt[4]{32}-2\sqrt[3]{5}=$

$$=\left(2^3\cdot 5\right)^{\frac{1}{3}}+\left(2\cdot 3^4\right)^{\frac{1}{4}}-3\left(2^5\right)^{\frac{1}{4}}-2\cdot 5^{\frac{1}{3}}=$$

$$=2\cdot 5^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{4}}\cdot 3-3\cdot 2^{\frac{5}{4}}-2\cdot 5^{\frac{1}{3}}=3\cdot 2^{\frac{1}{4}}(1-2)=-3\sqrt[4]{2}.$$

Ответ: $-3\sqrt[4]{2}$.

При преобразовании буквенных выражений полезно сначала разложить выражение на множители, а только потом, при необходимости, применять формулы сокращенного умножения ((12)—(16)).

Задание 11. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a}-3\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}-3\sqrt{b}}$, если $\dfrac{a}{b}=7\dfrac{58}{81}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{a}-3\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}-3\sqrt{b}}=\frac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-3\sqrt[4]{b}\right)}=\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

При $\dfrac{a}{b}=7\dfrac{58}{81}$ имеем $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}=\sqrt[4]{7\dfrac{58}{81}}=\sqrt[4]{\dfrac{625}{81}}=\dfrac{5}{3}$.

Ответ: $1\dfrac{2}{3}$.

Задание 12. Упростите выражение $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}{1-a^2}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}$ и найдите его значение при $a = 0{,}001$.

Решение.

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}{1-a^2}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}{(1-a)(1+a)}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}=\frac{1+a}{a^{\frac{1}{3}}}-a^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}.$$

При $a = 0{,}001$ имеем $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{0{,}001}}=\dfrac{1}{0{,}1}=10.$

Ответ: $a^{-\frac{1}{3}}$; 10.

Когда не удается разложить на множители с помощью вынесения общего множителя, часто помогает группировка.

Задание 13. Найдите значение выражения

$$\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}-1}$$

при $y = 39\dfrac{1}{16}$, $x = 19$.

Решение.

$$\frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}-1}=\frac{x^{\frac{1}{4}}\left(y^{1/4}-1\right)-\left(y^{1/4}-1\right)}{x^{\frac{1}{4}}-1}=$$

$$=\frac{\left(x^{1/4}-1\right)\left(y^{1/4}-1\right)}{x^{\frac{1}{4}}-1}=y^{\frac{1}{4}}-1.$$

При $y = 39\frac{1}{16}$

$$y^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(39\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(\frac{625}{16}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

Ответ: 1,5.

Чтобы выбрать соответствующую формулу сокращенного умножения ((12)–(16)), обращаем внимание на показатели степени.

Задание 14. Упростите выражение $\frac{x-4}{x+x^{0,5}+1} : \frac{x^{0,5}+2}{x^{1,5}-1}$ и найдите его значение при $x = 144$.

Решение. $x = \left(x^{0,5}\right)^2$, $x^{1,5} = \left(x^{0,5}\right)^3$, поэтому к выражению $x-4$ применяем формулу разности квадратов, а к выражению $x^{1,5}-1$ — разности кубов.

$$\frac{x-4}{x+x^{0,5}+1} : \frac{x^{0,5}+2}{x^{1,5}-1} = \frac{\left(x^{0,5}-2\right)\left(x^{0,5}+2\right)}{x+x^{0,5}+1} \times$$
$$\times \frac{\left(x^{0,5}-1\right)\left(x+x^{0,5}+1\right)}{x^{0,5}+2} = \left(x^{0,5}-2\right)\left(x^{0,5}-1\right).$$

При $x = 144$

$$\left(x^{0,5}-2\right)\left(x^{0,5}-1\right) = \left(144^{0,5}-2\right)\times\left(144^{0,5}-1\right) =$$
$$= 10 \times 11 = 110.$$

Ответ: 110.

Задание 15. Упростите выражение $\frac{4x-y}{2x+x^{0,5}y^{0,5}}$ и найдите его значение при $x = 324$ и $y = 81$.

Решение. В числителе используем формулу разности квадратов, а в знаменателе вынесем общий множитель.

$$\frac{4x-y}{2x+x^{0,5}y^{0,5}}=\frac{\left(2x^{0,5}-y^{0,5}\right)\left(2x^{0,5}+y^{0,5}\right)}{x^{0,5}\left(2x^{0,5}+y^{0,5}\right)}=\frac{2x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}}.$$

При $x = 324$ и $y = 81$ имеем

$$\frac{2x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}}=\frac{2\cdot18-9}{18}=\frac{27}{18}=1{,}5.$$

Ответ: $\dfrac{2x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}}$ 1,5.

При преобразовании дробных выражений полезно разложить на множители числитель и знаменатель каждой дроби, затем сократить дробь. И только потом приводить к общему знаменателю.

Задание 16. Упростите выражение

$$\frac{a-16b}{\sqrt{a}-4\sqrt{b}}-\frac{a\sqrt{a}-64b\sqrt{b}}{a-16b}$$

и найдите его значение при $a = 4$ и $b = 0{,}04$.

Решение.

Первая дробь:

$$\frac{a-16b}{\sqrt{a}-4\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-4\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}-4\sqrt{b}}=\sqrt{a}+4\sqrt{b}.$$

Вторая дробь:

$$\frac{a\sqrt{a}-64b\sqrt{b}}{a-16b}=\frac{\left(\sqrt{a}-4\sqrt{b}\right)\left(a+4\sqrt{ab}+16b\right)}{\left(\sqrt{a}-4\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{a+4\sqrt{ab}+16b}{\sqrt{a}+4\sqrt{b}}.$$

Имеем:

$$\sqrt{a}+4\sqrt{b}-\frac{a+4\sqrt{ab}+16b}{\sqrt{a}+4\sqrt{b}}=$$

$$= \frac{a + 16b + 8\sqrt{ab} - a - 4\sqrt{ab} - 16b}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} = \frac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}}.$$

При $a = 4$ и $b = 0{,}04$ имеем

$$\frac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + 4\sqrt{b}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 0{,}2}{2 + 4 \cdot 0{,}2} = \frac{1{,}6}{2{,}8} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}.$$

Ответ: $\frac{4}{7}$.

Наибольшие трудности возникают при упрощении выражений с помощью свойства (6).

Задание 17. Упростите выражение

$$\sqrt[4]{(2x-1)^4} - \sqrt[4]{(2x+1)^4}$$

а) при $x < -200$; б) при $-0{,}2 < x < 0{,}2$; в) при $x > 200$.

Решение.

Пусть $A = \sqrt[4]{(2x-1)^4} - \sqrt[4]{(2x+1)^4}$.

По св-ву (6): $A = |2x-1| - |2x+1|$.

При $x \le -\frac{1}{2}$ $A = -2x + 1 + 2x + 1 = 2$.

При $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ $A = 1 - 2x - 2x - 1 = -4x$.

При $x \ge \frac{1}{2}$ $A = 2x - 1 - 2x - 1 = -2$.

Поэтому имеем в пункте а) $A = 2$; в пункте б) $A = -4x$; в пункте в) $A = -2$.

Ответ: а) 2; б) $-4x$; в) -2.

При преобразовании дробных выражений, содержащих корни n-й степени, иногда умножение на выражение, сопряженное знаменателю, позволяет упростить вид всего выражения.

Задание 18. Вычислите $\dfrac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=$$

$$=\frac{6-\sqrt{35}}{\sqrt[3]{36-35}}+\sqrt{35}=6-\sqrt{35}+\sqrt{35}=6.$$

Ответ: 6.

Для вычисления значения выражения вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm$ $\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}$, $a\geq 0$, $b\geq 0$ сначала обозначают его, например A, а затем возводят обе части в квадрат.

Задание 19. Выражение $\sqrt{7-\sqrt{24}}-\sqrt{7+\sqrt{24}}$ является целым числом. Найдите его.

Решение.

Пусть $A=\sqrt{7-\sqrt{24}}-\sqrt{7+\sqrt{24}}$. Рассмотрим A^2.

$$A^2=7-\sqrt{24}-2\sqrt{7-\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7+\sqrt{24}}+7+\sqrt{24}=$$

$$=14-2\sqrt{\left(7+\sqrt{24}\right)\left(7-\sqrt{24}\right)}=14-2\sqrt{25}=4.$$

Так как $A<0$, то $A=-\sqrt{4}=-2$.

Ответ: -2.

При преобразовании выражений, содержащих корни, часто используют введение новой переменной. Это позволяет сделать выражение более компактным.

Задание 20. Найдите значение выражения

$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}$ при $x=2100$.

Решение.

Пусть $a=\sqrt{x-4}$, тогда $x=a^2+4$. И исходное выражение имеет вид

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=$$

$$=\sqrt{a^2+4-4a}-\sqrt{a^2+4+4a}=$$

$$=\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(a+2)^2}=|a-2|-|a+2|=$$

$$=\left|\sqrt{x-4}-2\right|-\left|\sqrt{x-4}+2\right|.$$

При $x=2100$ имеем

$$\left|\sqrt{x-4}-2\right|-\left|\sqrt{x-4}+2\right|=\sqrt{x-4}-2-\sqrt{x-4}-2=-4.$$

Ответ: -4.

Задания для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Вычислите: $\sqrt[3]{0{,}9}\cdot\sqrt[3]{-0{,}03}$.

2. Вычислите: $\sqrt[4]{54}\cdot\sqrt[4]{24}$.

3. Вычислите: $\left(-\sqrt[6]{17}\right)^6$.

4. Вычислите: $\left(-3\sqrt[5]{\frac{1}{9}}\right)^5$.

5. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$.

6. Вычислите: $\sqrt{\sqrt{17}-1}\cdot\sqrt{1+\sqrt{17}}$.

7. Упростите выражение $\dfrac{a-81b}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}$ и найдите его значение при $a = 324$, $b = 0{,}0169$.

8. Упростите выражение $\dfrac{a-6\sqrt{a}+9}{\sqrt{a}-3}$ и найдите его значение при $a = 2{,}56$.

9. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{7-\sqrt{39}}+\dfrac{1}{7+\sqrt{39}}$.

10. Вычислите $\dfrac{1}{\sqrt{15}-5}-\dfrac{1}{\sqrt{15}+5}$.

11. Найдите значение выражения $\dfrac{3^{-2x+0{,}5}\cdot 3^{4x}}{27^x}$ при $x = -0{,}5$.

12. Упростите выражение $\dfrac{x+8y}{x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+4xy^{\frac{2}{3}}}$ и найдите его значение при $x = 8$, $y = 27$.

13. Найдите при $x = 0{,}008$ значение выражения

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}\right)^2-1+2x^{-\frac{1}{3}}.$$

14. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a}-16\sqrt{b}}{\left(a^{1/8}+2b^{1/8}\right)^2+\left(a^{1/8}-2b^{1/8}\right)^2}$ и найдите его значение при $a=\dfrac{1}{16}$, $b = 81$.

15. Вычислите: $\dfrac{7\sqrt{30}}{3\sqrt{10}-10\sqrt{3}}+\sqrt{3}+\sqrt{10}$.

16. Найдите значение выражения

$\left(a^{-\frac{1}{5}}-a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{\frac{1}{5}}-a^{-\frac{4}{5}}\right)$ при $a=10$.

17. Вычислите: $64^{\frac{1}{2}}\cdot\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{324}$.

18. Упростите выражение $\dfrac{9x-y}{3x+x^{0,5}y^{0,5}}$ и найдите его значение при $x=100$ и $y=576$.

19. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a}+5\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}+5\sqrt{b}}$ и найдите его значение при $\dfrac{a}{b}=\dfrac{81}{256}$.

20. Упростите выражение $\dfrac{x-16}{x-2x^{0,5}+4}:\dfrac{x^{0,5}-4}{x^{1,5}+8}$ и найдите его значение при $x=121$.

21. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[5]{-27}}{4^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-0,4}}$.

22. Упростите выражение $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{1}{3}}}{a-1}\right)^{-1}-a^{\frac{1}{6}}$ и найдите его значение при $a=64$.

23. Выражение $\sqrt{10-\sqrt{96}}-\sqrt{10+\sqrt{96}}$ является целым числом. Найдите его.

24. Упростите выражение $54^{\frac{1}{3}}+48^{\frac{1}{4}}-\sqrt[4]{243}-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{3}$.

25. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{x^2-3(2x-3)}$ при $x=2{,}9996$.

26. Упростите выражение $\dfrac{3\sqrt[3]{8m}-6\sqrt[6]{8m}}{2-\sqrt[6]{8m}}:\sqrt[6]{8m}$ и найдите его значение при $m=2004$.

27. Вычислите: $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}+5^{-3}:5^{-4}$.

28. Упростите выражение $\left(\dfrac{3x^{\frac{1}{2}}}{3-x^{\frac{1}{2}}}+3\right)\left(9-6x^{\frac{1}{2}}+x\right)$ и найдите его значение при $x=169$.

29. Найдите значение выражения

$$\sqrt[4]{(3x-12)^4}-\sqrt[4]{(3x+12)^4} \text{ при } x<-200.$$

30. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{\left(8-\sqrt{63}\right)^2}}{\sqrt[3]{8+\sqrt{63}}}+\sqrt{63}+200.$

31. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2}+\sqrt{16b^2}+4b$ при $a=-145$, $b=-543$.

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

32. Найдите значение выражения

$$\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}-\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} \text{ при } x=200.$$

33. Упростите выражение

$$\sqrt[4]{\left(1-2x+x^2\right)\left(x^2-1\right)(x-1)}\cdot\frac{\sqrt[4]{x+1}}{x^2+2x-3}.$$

34. Сравните выражения $\sqrt{204}+\sqrt{207}$ и $\sqrt{205}+\sqrt{206}$.

35. Верно ли, что выражение

$$\frac{\sqrt{\left|8\sqrt{3}-14\right|}-\sqrt{14+8\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}$$ является целым числом?

Тождественные преобразования логарифмических выражений

Непосредственные преобразования логарифмических выражений содержатся в заданиях *части I*. Различаются задания количеством шагов, необходимых для нахождения значения логарифмического выражения. В этих заданиях требуется найти значение некоторого логарифмического выражения или упростить его. Следует отметить, что с преобразованиями логарифмических выражений можно встретиться и при решении уравнений или исследовании функций, поэтому в неявном виде они могут присутствовать в заданиях *части II*.

Теоретические сведения

Определение. **Логарифмом числа** b **по основанию** a ($a>0$; $a\neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

$\lg b$ — обозначение десятичного логарифма, т.е. логарифма числа b по основанию 10, $\ln b$ — обозначение натурального логарифма, т.е. логарифма числа b по основанию e ($e=2{,}7\ldots$).

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b \ \left(a>0,\ a\neq 1,\ b>0\right).$$

Свойства логарифмов ($a>0, a\neq 1, b>0, c>0$):

1) $\log_a a = 1$
2) $\log_a 1 = 0$
3) $\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$

4) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

5) $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$

6) $\log_{a^q} b = \dfrac{1}{q} \cdot \log_a b,\ q \neq 0$

7) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ c \neq 1$

8) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},\ b \neq 1$

9) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a},\ c \neq 1,\ b \neq 1$

Решение типовых заданий

Задание 1. Найдите значение выражения $\log_{0,3} \dfrac{1}{0,09}$.

Решение.

Преобразуем выражение и используем определение логарифма:

$$\log_{0,3}(0{,}09)^{-1} = \log_{0,3}\left((0{,}3)^2\right)^{-1} = \log_{0,3}(0{,}3)^{-2} = -2.$$

Ответ: -2.

Задание 2. Найдите значение выражения $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$.

Решение.

Преобразуем выражение, начиная с внутреннего логарифма, и воспользуемся определением логарифма:

$$\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2} = \log_2 \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \log_2\left(\frac{1}{4}\log_2 2\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2.$$

Ответ: -2.

Для преобразования суммы (или разности) логарифмических выражений иногда достаточно использовать определение логарифма, а чаще свойства логарифма (3) и (4). Если основания логарифмов разные, то можно привести логарифмы к одному основанию и затем применить свойства (3) и (4).

Задание 3. Найдите значение выражения $\log_3 81 - \log_3 27$.

Решение.

1 способ. Используя определение логарифма, получим $\log_3 81 - \log_3 27 = 4 - 3 = 1$.

2 способ. Используя свойство (4) логарифма, получим $\log_3 81 - \log_3 27 = \log_3 \frac{81}{27} = \log_3 3 = 1$.

Ответ: 1.

Задание 4. Найдите значение выражения

Решение.

$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81}.$$

Преобразуем выражение с помощью свойства (4) логарифма:

$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81} = \log_3\left(15 : \frac{5}{9}\right) + \log_3 \frac{1}{81} =$$

$$= \log_3 27 + \log_3 \frac{1}{81} = 3 + (-4) = -1.$$

Ответ: –1.

Основное логарифмическое тождество используется при преобразовании выражений, содержащих логарифм в показателе степени. Идея таких преобразований заключается в получении равных основания степени и основания логарифма.

Задание 5. Найдите значение выражения $10^{1-\lg 5}$.

Решение.

Используя свойства степеней и основное логарифмическое **тождество, получим**

$$10^{1-\lg 5} = \frac{10^1}{10^{\lg 5}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Ответ: 2.

Задание 6. Вычислите $\sqrt{5}^{\log_5 16}$.

Решение.
Преобразуем выражение, используя свойства степеней

$$\sqrt{5}^{\log_5 16} = 5^{\frac{1}{2}\log_5 16} = \left(5^{\log_5 16}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя основное логарифмическое тождество, получим $\left(5^{\log_5 16}\right)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4.$

Ответ: 4.

Задание 7. Найдите значение выражения $7^{\log_{\frac{1}{49}} \frac{1}{4}}$.

Решение.
Используя свойство (6) логарифма и основное логарифмическое тождество, получим

$$7^{\log_{\frac{1}{49}} \frac{1}{4}} = 7^{\log_{(7)^{-2}} \frac{1}{4}} = \left(7^{\log_7 \frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Ответ: 2.

Иногда можно легко перейти от одного основания логарифма к другому с помощью свойства логарифма (6), например, от $\log_9 a$ к $0{,}5\log_3 a$ $(9 = 3^2)$. В других случаях следует использовать свойства (7) или (8).

Задание 8. Найдите значение выражения

$$\left(\log_5 36 + \log_5 2 - \log_5 8\right) \cdot \log_9 \frac{1}{25}.$$

Решение.
Преобразовав выражение в скобках с помощью свойств (3) и (4), получим

$$\left(\log_5 36 + \log_5 2 - \log_5 8\right) = \log_5 \frac{36 \cdot 2}{8} = \log_5 9.$$

Используем формулу (7) перехода к новому основанию.

1 способ.

$$\log_5 9 \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \log_5 9 \cdot \frac{\log_5 \frac{1}{25}}{\log_5 9} = \log_5 \frac{1}{25} = -2.$$

2 способ.

$$\log_5 9 \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \frac{\log_9 9}{\log_9 5} \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \frac{1 \cdot \log_9 \frac{1}{25}}{\log_9 5} = \log_5 \frac{1}{25} = -2.$$

3 способ. Используя свойство (5) и (8) получим

$$\log_5 9 \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \log_5 9 \cdot (-2) \log_9 5 = -2.$$

Ответ: –2.

Задание 9. Найдите значение выражения

$$\log_3 12 - \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4.$$

Решение.

Преобразуем вычитаемое с помощью применения дважды формулы перехода к новому основанию

$$\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 = \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \log_5 4 =$$

$$= \log_3 5 \cdot \log_5 4 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} = \log_3 4.$$

Первоначальное выражение теперь имеет вид

$$\log_3 12 - \log_3 4 = \log_3 \frac{12}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

В заданиях, требующих выразить некоторое логарифмическое выражение через одно или два заданных значения логарифма, обычно надо использовать свойства логарифма произведения или частного (3) и(или) свойство (8) перехода к новому основанию.

Задание 10. Чему равен $\lg 15$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

Решение.

Выразим $\lg 15$ через $\lg 2$ и $\lg 3$, учитывая, что $15 = 3 \cdot 5 = 3\left(\frac{10}{2}\right)$.

$$\lg 15 = \lg(3 \cdot 5) = \lg 3 + \lg 5 = \lg 3 + \lg \frac{10}{2} =$$
$$= \lg 3 + \lg 10 - \lg 2 = b + 1 - a.$$

Ответ: $b + 1 - a$.

Наибольшую сложность представляют преобразования логарифмических выражений, находящихся под радикалом. В процессе преобразований приходится рассматривать модули логарифмических выражений, для раскрытия которых требуется сравнить иррациональные числа (например, $\log_2 3$ и $\log_3 2$) или рациональное и иррациональное число (например, $\log_2 3$ и 1).

Задание 11. Представьте в виде разности логарифмов

$$\left(\left(\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2\right)^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение.

Будем действовать последовательно. Рассмотрим выражение $\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2$. Перейдем к основанию 3:

$$\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2 = \log_3^4 2 + \frac{1}{\log_3^4 2} + 2.$$

Приведем к общему знаменателю и применим формулу квадрата суммы двух выражений. Получим: $\left(\frac{\log_3^4 2 + 1}{\log_3^2 2}\right)^2$.

Имеем: $\left(\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2\right)^{0,5} = \frac{\log_3^4 2 + 1}{\log_3^2 2}$.

Тогда:

$$\left(\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2\right)^{0,5} - 2 = \frac{\log_3^2 2 + 1 - 2\log_3^2 2}{\log_3^2 2} = \left(\frac{\log_3^2 2 - 1}{\log_3 2}\right)^2.$$

Окончательно получаем:

$$\left(\left(\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2\right)^{0,5} - 2\right)^{0,5} = \left|\frac{\log_3^2 2 - 1}{\log_3 2}\right|.$$

Раскрываем модули, учитывая, что $0 < \log_3 2 < 1$ и $0 < \log_3^2 2 < 1$.

$$A = \frac{1 - \log_3^2 2}{\log_3 2} = \frac{1}{\log_3 2} - \log_3 2 = \log_2 3 - \log_3 2.$$

Ответ: $\log_2 3 - \log_3 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Вычислите: $\log_{625} 25$.

2. Вычислите: $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$.

3. Вычислите: $\log_{35} 7 + \frac{1}{\log_5 35}$.

4. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} + 3^{\log_{\sqrt{3}} 7}$.

5. Найдите значение выражения $\log_{36} 16 - \log_6 \frac{1}{9}$.

6. Вычислите: $\left(\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{\log_9 6}}$.

7. Вычислите: $\left(\frac{1}{3}\right)^{4\log_{\frac{1}{3}} 2}$.

8. Найдите $\log_8 \log_4 \log_2 16$.

9. Вычислите: $\log_2 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$.

10. Найдите значение выражения $\log_{0,5} 32 - \log_7 \frac{\sqrt{7}}{49}$.

11. Найдите значение выражения $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

12. Вычислите: $2^{\log_8 125} + \log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$.

13. Вычислите: $\frac{\lg 128}{\lg 4}$.

14. Найдите значение выражения $\log_6 \frac{36}{a}$, если $\log_6 a = -6$.

15. Найдите значение выражения $\log_3 (27a)$, если $\log_3 a = 4$.

16. Найдите значение выражения

$$(0,1)^{\lg 0,1} - 10^{\log_{1000} 64} + 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}.$$

17. Найдите значение выражения

$$6^{-0,5 + \log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0,5 + \log_2 0,5}.$$

18. Вычислите: $11^{\log_{121}\left(2\sqrt{2}-5\right)^2} + 2\sqrt{2} + 4,1$.

19. Найдите значение выражения $\frac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$.

20. Вычислите: $\log_9 15 + \log_9 18 - 2\log_9 \sqrt{10}$.

21. Найдите значение выражения

$$6\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7.$$

22. Вычислите: $\log_2 14 - \log_2 5 \cdot \log_5 3 \cdot \log_3 7$.

23. Найдите значение выражения

$$(\log_3 4 + \log_2 9)^2 - (\log_3 4 - \log_2 9)^2.$$

24. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

25. Вычислите: $\log_4 24 - \log_4 9 \cdot \log_9 13 \cdot \log_{13} 6$.

26. Найдите значение выражения

$$(\log_7 22 - \log_7 12 + \log_7 6) \cdot \log_{11} 7.$$

27. Найдите значение выражения $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

28. Найдите значение выражения $9^{\log_3(1+0{,}5+0{,}25+\ldots)}$.

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

29. Вычислите: $\log_{3\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}$, если $\log_9 6 = a$.

30. Вычислите: $\log_{2\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt[3]{12}}$, если $\log_4 6 = a$.

31. Найдите значение выражения

$$\frac{\log_7^2 14 + \log_7 14 \cdot \log_7 2 - 2\log_7^2 2}{\log_7 14 + 2\log_7 2}.$$

32. Найдите значение выражения

$$\frac{2\log_3^2 2-\log_3^2 18-(\log_3 2)\cdot\log_3 18}{2\log_3 2+\log_3 18}.$$

33. Найдите значение выражения

$$\left[\left(\frac{\log_4^2 3+1}{2\log_4 3}-1\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\log_4^2 3+1}{2\log_4 3}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\sqrt{2\log_4 3}.$$

34. Вычислите:

$$\left[\left(\frac{\log_3^2 4+1}{2\log_3 4}-1\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\log_3^2 4+1}{2\log_3 4}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\sqrt{2\log_3 4}.$$

35. Найдите значение выражения

$$\left(\left(\log_4^4 3+\log_3^4 4+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Данные преобразования встречаются в заданиях *части I*. Обычно используются формулы одного аргумента, формулы приведения, сложения и двойного угла. Иногда решение задания требует последовательного применения разных формул.

Теоретические сведения

Формулы одного аргумента

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}n, n \in Z \tag{4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \tag{5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{6}$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{7}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{8}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{9}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{10}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{11}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{12}$$

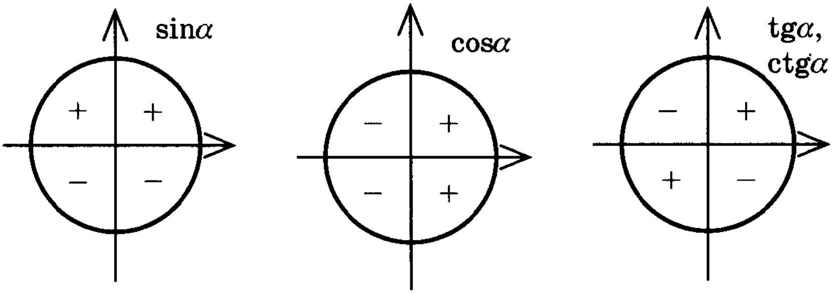
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \tag{13}$$

Формулы понижения степени (или половинного аргумента)

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \tag{14}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \tag{15}$$

Знаки тригонометрических функций



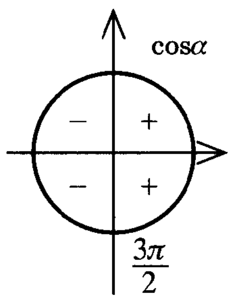
Решение типовых задач

Каждый год в ЕГЭ встречаются задания на применение формул приведения. Их применяют для преобразования выражений вида

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \sin(\pi+\alpha);\ \operatorname{tg}(270°+\alpha);\ \operatorname{ctg}(360°-\alpha)\ \text{и т.д.}$$

Преобразовать подобные выражения помогает следующее правило: 1) находим четверть, в которой расположен аргумент тригонометрической функции, и определяем знак функции в этой четверти (угол α считаем углом I четверти); 2) меняем функцию на кофункцию, если аргументом служат выражения $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$... или не изменяем функцию, если аргументом служат выражения $(\pi\pm\alpha)$, $(2\pi\pm\alpha)$...

Задание 1. Упростите выражение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.



Р е ш е н и е.

1) Аргумент $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ лежит в III четверти, где $\cos\alpha$ отрицателен.

2) Число $\frac{3\pi}{2}$ находится на вертикальной оси, поэтому «киваем головой сверху вниз», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Да». Поэтому получаем: $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$.

Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 2. Упростите выражение $\sin(\pi-\alpha)$.

Решение.

1) Угол $\pi-\alpha$ лежит во II четверти, где $\sin\alpha$ положителен.

2) Угол π находится на горизонтальной оси, поэтому «киваем головой справа налево», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Нет». Поэтому получаем $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

Задание 3. Упростите выражение $\operatorname{tg}(90°+\alpha)$.

Ответ: $-\operatorname{ctg}\alpha$.

Задание 4. Упростите выражение $\operatorname{ctg}(360°-\alpha)$.

Ответ: $-\operatorname{ctg}\alpha$.

Рассмотрим более сложные случаи, когда сначала используется свойство четности тригонометрических функций ($\cos\alpha$ — четная функция, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — нечетные функции), а затем формулы приведения:

Задание 5: Упростите выражение $\sin(\alpha-\pi)$.

Решение. Сравним выражения из заданий 2 и 5. Чтобы применить формулы приведения, используем нечетность $\sin t$.

$$\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 6: Упростите выражение $\cos\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha.$$

Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 7: Упростите выражение $\operatorname{tg}(\alpha - 270°)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}(\alpha - 270°) = -\operatorname{tg}(270° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $-\operatorname{ctg}\alpha$.

Задание 8: Упростите выражение $\operatorname{ctg}(\alpha - 360°)$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - 360°) = -\operatorname{ctg}(360° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Рассмотрим следующую ситуацию, когда, прежде чем применить формулы приведения, необходимо уменьшить аргумент, используя свойство периодичности тригонометрических функций (наименьший положительный период $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ равен 2π, поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные 2π; наименьший положительный период $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ равен π, поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные π).

Задание 9. Упростите выражение

$$\frac{\sin\left(\dfrac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - 1}.$$

Решение.

Когда надо преобразовывать выражения в числителе и знаменателе, удобно преобразовывать отдельно числитель, отдельно знаменатель.

В числителе:

$$\sin\left(\frac{9}{2}\pi-\alpha\right)-\operatorname{ctg}(5\pi+\alpha)=\sin\left(4\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)-\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{ctg}\alpha=\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha.$$

В знаменателе: $\sin(\pi-\alpha)-1=\sin\alpha-1.$

Разделим числитель на знаменатель, получим: $\frac{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha-1}$. Выражения в числителе и знаменателе содержат один и тот же аргумент α, поэтому используем формулы одного аргумента (а именно: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$).

$$\frac{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha-1}=\frac{\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin\alpha-1}=\frac{\cos\alpha(\sin\alpha-1)}{\sin\alpha(\sin\alpha-1)}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Если сумма (разность) аргументов тригонометрических функций равна $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$ и т.д., то помогают формулы приведения.

Задание 10. Вычислите: $\cos^2 15°+\cos^2 75°$.

Решение. Так как $15°+75°=90°$, то

$$\cos^2 15°+\cos^2 75°=\cos^2(90°-75°)+\cos^2 75°=$$

$$=\sin^2 75°+\cos^2 75°=1.$$

Ответ: 1.

Разобраться в обилии формул тригонометрии часто помогает сравнение аргументов тригонометрических функций, входящих в выражение.

Задание 11. Упростите выражение $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta}$.

Решение.
Аргументы числителя и знаменателя отличаются в 2 раза, значит, применим формулы двойного угла в числителе.

$$\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} = \frac{2\sin 2\beta\cos 2\beta}{\cos 2\beta} = 2\sin 2\beta.$$

Ответ: $2\sin 2\beta$.

В заданиях на преобразования выражений, содержащих степени с натуральными показателями, сначала применяют формулы сокращенного умножения.

Задание 12. Упростите выражение

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Решение.

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= \frac{\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \left(\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha\right)^2 =$$

$$-1 - 1 = -2.$$

Ответ: -2.

При использовании формул понижения степени иногда приходится извлекать арифметический корень из квадрата выражения.

Задание 13. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}}$, если $\pi < \alpha < 2\pi$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Так как $\pi<\alpha<2\pi$, то $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$, где $\cos\frac{\alpha}{2}<0$, значит, $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$.

Имеем: $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}}=\left|\sin\frac{\alpha}{4}\right|$.

Так как $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{4}<\frac{\pi}{2}$, где $\sin\frac{\alpha}{4}>0$, то $\left|\sin\frac{\alpha}{4}\right|=\sin\frac{\alpha}{4}$.

Ответ: $\sin\frac{\alpha}{4}$.

При преобразовании произведения нескольких косинусов, аргументы которых составляют геометрическую прогрессию, используют следующий прием: одновременное умножение и деление на $2\sin n°$, $n°$ — наименьший из аргументов косинуса.

Задание 14. Вычислите $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

Решение.

$$\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\frac{2\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cos 80°}{2\sin 20°}=$$

$$=\frac{\sin 40°\cos 40°\cos 80°}{2\sin 20°}=\frac{\sin 80°\cos 80°}{4\sin 20°}=$$

$$=\frac{\sin 160°}{8\sin 20°}=\frac{\sin(180°-20°)}{8\sin 20°}=\frac{\sin 20°}{8\sin 20°}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Задачи для самостоятельного решения

Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби

1. Упростите выражение $19\cos^2\alpha - 9 + 19\sin^2\alpha$.

2. Упростите выражение $17\cos^2\alpha - 5 + 17\sin^2\alpha$.

3. Найдите $\sin\beta$, если $\cos\beta = -0{,}6$, и $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

4. Найдите $\cos\gamma$, если $\sin\gamma = -0{,}8$, и $\frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$.

5. Найдите значение выражения $2\sqrt{26}\sin x$, если $\cos x = \frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

6. Найдите значение выражения $3\sqrt{37}\cos x$, если $\sin x = \frac{6}{\sqrt{37}}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$

7. Найдите значение выражения $\sin(270° - \beta)$, если $\cos\beta = 0{,}8$.

8. Найдите значение выражения $\cos(\beta - 270°)$, если $\sin\beta = 0{,}1$.

9. Найдите значение выражения $\mathrm{tg}^2(\alpha - \pi)$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha = 5$.

10. Вычислите: $\cos^2 15° - \sin^2 75°$.

11. Упростите выражение $\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18} + \cos\frac{2\pi}{9}\sin\frac{5\pi}{18}$.

12. Упростите выражение $\cos 45°\cos 15° - \sin 45°\sin 15°$.

13. Дано: $\sin\, a = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < a < p$. Найдите: $\sin 2\alpha$.

14. Вычислите значение выражения $\frac{2\cos^2 24° - 1}{\sin 21° \cdot \cos 21°}$.

15. Вычислите значение выражения $\dfrac{\sin 17^\circ \cdot \cos 17^\circ}{1 - 2\sin^2 28^\circ}$.

16. Упростите выражение $\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} + \cos\alpha - \sin\alpha$.

17. Вычислите: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos^4 75^\circ - \cos^4 15^\circ)$.

18. Упростите: $\cos(\pi + 2\alpha) + \sin(\pi + 2\alpha)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha)$.

19. Вычислите: $\dfrac{5^{\cos 2x}}{4 \cdot 25^{\cos^2 x}}$.

20. Вычислите: $625^{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}$.

21. Вычислите значение выражения

$\log_{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}}\sin\dfrac{3\pi}{8}$.

22. Вычислите значение выражения

$\log_4\cos\dfrac{\pi}{12} + \log_4\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

23. Найдите значение выражения

$\dfrac{\sin(\frac{13}{2}\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}(6\pi + \alpha)}{1 + \sin(2\pi - \alpha)}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения

24. Вычислите : $8\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \operatorname{ctg} 10^\circ$.

25. Вычислите: $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \ldots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

26. Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

27. Найдите значение выражения $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha + 2\cos 4\alpha$, если $\cos\alpha - \cos 3\alpha = 1$.

28. Упростите выражение: $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, если $540° < \alpha < 720°$.

29. Упростите выражение $\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\beta}}$, если $\pi < \beta < 2\pi$.

Раздел III.2. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Все задания ЕГЭ, связанные с исследованием функций, можно разделить на два типа: исследование функций элементарными методами (без помощи производной) и исследование функций неэлементарными методами (с помощью производной). К заданииям первого типа можно отнести задания на нахождение области определения некоторой функции, множества ее значений, наибольшего (наименьшего) значения функции, четности (нечетности), нулей функции и т.д. Ко второму типу заданий относятся те задания, которые требуют нахождение производной функции для нахождения промежутков возрастания (убывания) функции, экстремумов функции, наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке и т.д.

Отнесение заданий к разным типам весьма условно, так как часто одни и те же задания можно решить как с помощью производной функции, так и без ее использования.

Исследование функций элементарными методами

Обычно в *части I* предлагаются задания на нахождение области определения аналитически заданной функции. Среди заданий *части I* присутствуют задания на нахождение множества значений функции, заданной аналитически, или ее наибольшего (наименьшего) значения. В заданиях *части II* может требоваться решить уравнение или неравенство, при решении которых используются свойства функций: область определения, область значений, ограниченность, монотонность и т.п.

В заданиях ЕГЭ встречается два способа задания функций: аналитический (формулой) и графический (графиком).

Теоретические сведения

$D(y)$ — область определения функции y — множество, на котором задается функция. При графическом способе задания функции ее область определения может считываться по графику. Если функция задана аналитически (формулой) и ее область определения не указана, то это означает, что функция задается на естественной области определения.

$E(y)$ — множество значений функции y, которые она принимает при всех значениях аргумента из ее области определения. Проще всего находить множество значений функции, если задан ее график. В этом случае надо спроектировать все точки графика функции на ось Oy. Получившееся множество точек будет множеством значений функции. Это множество может задаваться конечным числом точек, состоять из одного или нескольких промежутков.

Нули функции. Для функции, заданной графически, — это абсциссы точек, в которых график функции пересекает ось абсцисс или касается ее. Чтобы найти нули функции f, заданной аналитически, надо решить уравнение $f(x) = 0$.

Определение. Функция f *возрастает* на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Иными словами, функция называется *возрастающей* на множестве X, если для любых двух значений аргумента из этого множества большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение. Функция f *убывает* на множестве X, если для любых x_1 и x_2 из множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Иными словами, функция называется *убывающей* на множестве X, если для любых двух значений аргумента из этого множества большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Исследование функции на монотонность заключается в нахождении всех промежутков, на которых функция убывает, и всех промежутков, на которых функция возрастает.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *четной,* если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Свойство графика четной функции — симметричность относительно оси ординат.

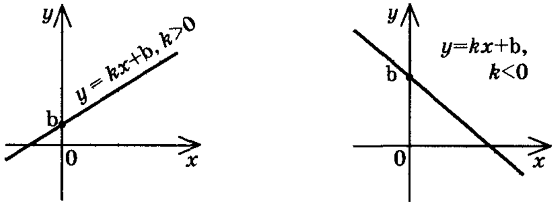
Определение. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. Свойство графика нечетной функции – симметричность относительно начала координат.

Определение. Функцию f называют периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения функции значения этой функции в точках x, $x + T$, $x - T$ равны, т.е. $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Свойство непрерывной функции

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[a; b]$, то она принимает на этом отрезке любое значение, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$.

Свойства линейной функции $y = kx + b$, $k \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$



1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Область значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$, если $k \neq 0$.

$E(y) = \{b\}$, если $k = 0$.

3) Монотонность:

если $k > 0$, то функция y возрастает на $D(y)$;

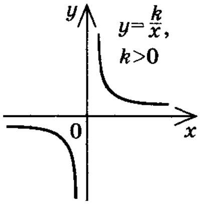
если $k < 0$, то функция y убывает на $D(y)$.

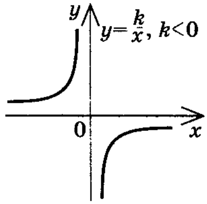
Свойства обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$

1) Область определения: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Область значений: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3) Монотонность:





Если $k > 0$, то функция y убывает на промежутке $(0; +\infty)$ и на промежутке $(-\infty; 0)$.

Если $k < 0$, то функция y возрастает на промежутке $(0; +\infty)$ и на промежутке $(-\infty; 0)$.

4) Функция является нечетной.

Свойства дробно-рациональной функции
$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены от x

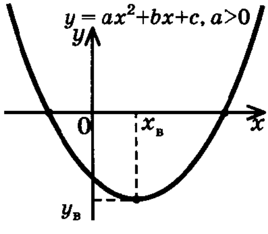
1) Область определения $D(y)$ – любые действительные x, не обращающие знаменатель $Q(x)$ в нуль.

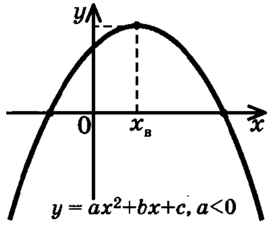
2) Множество значений $E(y)$ зависит от конкретной функции.

Свойства квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$,
$a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, $c \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$

1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) График квадратного трехчлена – парабола с вершиной в точке с абсциссой $x_B = -\dfrac{b}{2a}$, направленная вет-



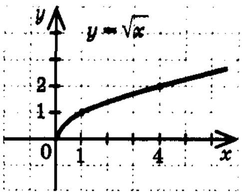


вями вверх, если $a > 0$; направленная ветвями вниз, если $a < 0$.

3) Множество значений:

$E(y) = [y_B; +\infty)$, если $a > 0$; $E(y) = (-\infty; y_B]$, если $a < 0$, y_B — ордината вершины параболы.

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

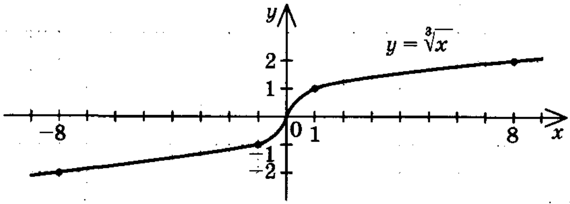


1) Область определения: $D(y) = [0; +\infty)$.

2) Множество значений: $E(y) = [0; +\infty)$.

3) Монотонность: функция y возрастает на $D(y)$.

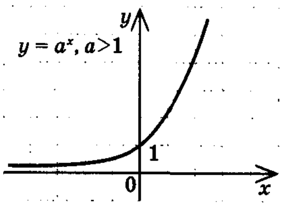
Свойства функции $y = \sqrt[3]{x}$

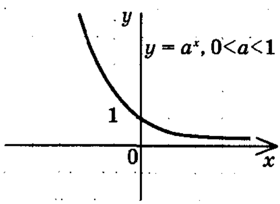


1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2) Множество значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
3) Монотонность: функция y возрастает на $D(y)$.
4) Функция y нечетна.

Свойства показательной функции
$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.





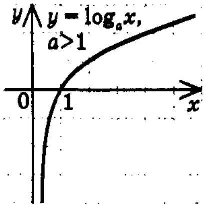
2) Область значений: $E(y) = (0; +\infty)$.

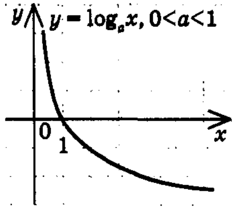
3) Монотонность:

при $a > 1$ функция возрастает на $D(y)$,

при $0 < a < 1$ функция убывает на $D(y)$.

Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$





1) Область определения: $D(y) = (0; +\infty)$.

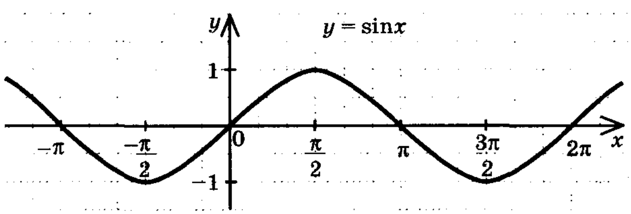
2) Область значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3) Монотонность:

при $a > 1$ функция y возрастает на $D(y)$,

при $0 < a < 1$ функция y убывает на $D(y)$.

Свойства функции $y = \sin x$



1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Область значений: $E(y) = [-1; 1]$.

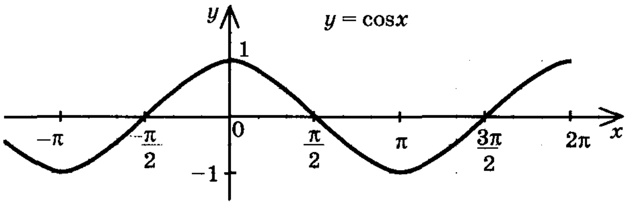
3) Монотонность:

функция y возрастает на каждом из промежутков вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$; функция y убывает на каждом из промежутков вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

4) Функция является нечетной.

5) Наименьший положительный период функции $y = \sin x$ равен 2π.

Свойства функции $y = \cos x$



1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Область значений: $E(y) = [-1; 1]$.

3) Монотонность:

функция y возрастает на каждом из промежутков вида $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; функция y убывает на каждом из промежутков вида $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

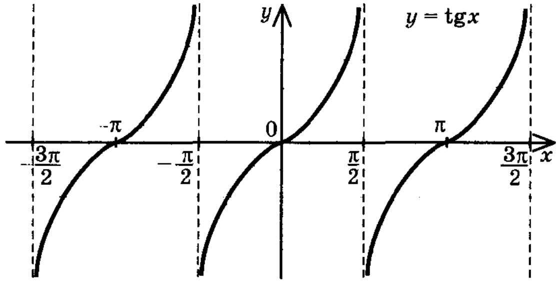
4) Функция является четной.

5) Наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен 2π.

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

1) Область определения: объединение всех промежутков вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \ k \in \boldsymbol{Z}.$$



2) Область значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

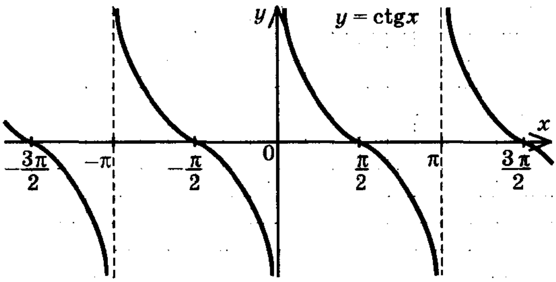
3) Монотонность: функция возрастает на каждом из промежутков вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4) Функция является нечетной.

5) Наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π.

Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$



1) Область определения: объединение всех промежутков вида $(\pi k;\ \pi + \pi k,\ k \in Z)$.

2) Область значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3) Монотонность: функция y убывает на каждом из промежутков вида $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

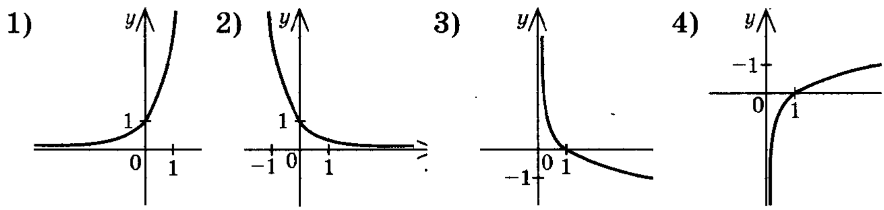
4) Функция является нечетной.

5) Наименьший положительный период функции $y = \operatorname{ctg} x$ равен π.

Решение типовых задач

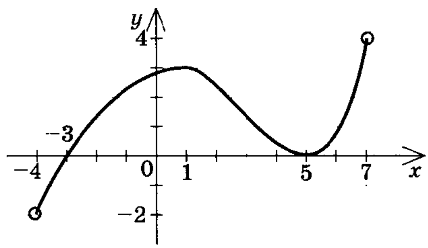
Задание 1. На каком из рисунков изображен график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$?

Решение. Выбор правильного ответа надо производить, сравнив «шаблон» функции $y = a^x$, $0 < a < 1$ (который должен быть в памяти) с этими четырьмя рисунками.



Проверить себя можно несколькими способами: вычислить значения функций в нескольких «контрольных» точек или выявить характерные свойства функции $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ и сопоставить их со свойствами тех функций, графики которых предложены. Например, данная функция убывает на своей области определения $(-\infty;+\infty)$. Из предложенных графиков функций такими свойствами обладает только функция, изображенная на рисунке 2. Такими же должны быть рассуждения, если «шаблон» функции забыт.

Задание 2. Функция задана графиком.



Укажите:

а) область определения функции;

б) множество значений функции;

в) промежутки, на которых функция принимает только положительные значения;

г) нули функции;

д) промежутки возрастания функции.

Решение. а) $D(y)=(-4;7)$. Для того чтобы найти область определения функции, заданной графически, надо спроектировать все точки графика на ось Ox. Полученный промежуток и будет областью определения функции.

б) $E(y) = (-2;4)$. Для того чтобы найти множество значений функции, заданной графически, надо спроектировать все точки графика на ось Oy. Полученный промежуток и будет множеством значений функции.

в) Надо найти те промежутки оси Ox, на которых график функции расположен выше оси Ox. Положительные значения функция принимает на промежутке $(-3;5)$ и на промежутке $(5;7)$. В точке $x = 5$ функция обращается в нуль.

г) Надо найти те точки, в которых график функции пересекает ось Ox или касается ее. Нулями функции будут 5 и -3.

д) Для определения промежутков возрастания функции можно воспользоваться определением, но для того, чтобы прочитать график, достаточно знать графическую интерпретацию возрастания функции на промежутке: график функции «поднимается вверх». Получаем, что функция возрастает на промежутке $(-4;1]$ и на промежутке $[5;7)$.

В заданиях на нахождение области определения функции, заданной аналитически, чаще всего встречаются композиции функции вида $y = f(t)$, где $t = g(x)$. Область определения функций y можно найти как пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Задание 3. Найдите область определения следующих функций:

$$\text{а) } y = \log_2(4 - x^2),\ \text{б) } y = \sqrt{6x - x^2 - 8},\ \text{в) } y = \frac{x-3}{x^2-9}.$$

Решение. а) Областью определения функции $y = \log_2 t$ является промежуток $(0; +\infty)$, поэтому область определения функции $y = \log_2(4 - x^2)$ можно найти из неравенства $4 - x^2 > 0$, $-2 < x < 2$.

Ответ: $(-2; 2)$.

б) Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0; +\infty)$, поэтому область определения функции $y = \sqrt{6x - x^2 - 8}$ можно найти из неравенства $6x - x^2 - 8 \geq 0$, $x^2 - 6x + 8 \leq 0$, $2 \leq x \leq 4$.

Ответ: $[2; 4]$.

в) Областью определения дробно-рациональной функции $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ являются любые действительные x, не обращающие знаменатель $Q(x)$ в нуль. Поэтому областью определения функции $y = \dfrac{x-3}{x^2-9}$ являются все действительные числа, кроме корней уравнения $x^2 - 9 = 0$ $(x = 3,\ x = -3)$.

Обратите внимание на то, что сокращение дроби на общий множитель привело бы к сужению области определения.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

Существуют несколько приемов нахождения множеств значений функций, заданных аналитически. Рассмотрим их на примерах.

Прием 1. Нахождение множества значений функции по ее графику (см. решение задания 2, б).

Прием 2. Нахождение множества значений функции с помощью производной (см. следующий параграф).

Прием 3. Последовательное нахождение множества значений функций, входящих в данную композицию функций (прием пошагового нахождения множества значений функции).

Задание 4. Найдите множество значений функции $y = 4 - \sin x$.

Решение. Зная, что функция $y = \sin x$ принимает все значения от -1 до 1, то с помощью свойств неравенств получаем, что $-1 \leq \sin x \leq 1$ и $3 \leq 4 - \sin x \leq 5$.

Значит, функция $y = 4 - \sin x$ может принимать все значения, не меньшие 3 и не большие 5. Множество значений $E(y) = [3;\ 5]$.

Ответ: $[3;\ 5]$.

Прием 4. Выражение x через y. Заменяем нахождение множества значений данной функции нахождением области определения функции, обратной к данной.

Задание 5. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 3}.$$

Решение. Пусть $x \geq 0$. Выразим x через y:

$$x^2 y + 3y = x^2 + 2, \quad x^2(y - 1) = 2 - 3y.$$

1-й случай. Если $y - 1 = 0$, то уравнение $x^2 + 3 = x^2 + 2$ корней не имеет. Получили, что функция y не принимает значения, равного 1.

2-й случай. Если $y - 1 \neq 0$, то $x^2 = \dfrac{2 - 3y}{y - 1}$. Так как $x^2 \geq 0$, то $\dfrac{2 - 3y}{y - 1} \geq 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получим $\dfrac{2}{3} \leq y < 1$.

Так как функция $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 3}$ является чётной, то при $x < 0$ она принимает те же значения.

Ответ: $\left[\dfrac{2}{3}; 1\right)$.

Прием 5. Упрощение формулы, задающей дробно-рациональную функцию.

Задание 6. Найдите множество значений функции $y = \dfrac{x(x - 4)}{x}$.

Решение. Области определения функций $y = \frac{x(x-4)}{x}$ и $y = x - 4$ различны (отличаются одной точкой $x = 0$). Найдем значение функции $y = x - 4$ в точке $x = 0$: $y(0) = -4$.

$E(x-4) = (-\infty; +\infty)$. Множества значений функции $y = \frac{x(x-4)}{x}$ и $y = x - 4$ будут совпадать, если из множества значений последней функции исключить значение $y = -4$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$.

Прием 6. *Нахождение множества значений квадратичных функций* (с помощью нахождения ординаты вершины параболы и установления направления ее ветвей).

Задание 7. Найдите множество значений функции

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

Решение. Графиком данной функции является парабола. Абсцисса вершины параболы $x_B = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$. Ордината вершины $y_B = y(2) = -1$. Ветви параболы направлены вверх, так как старший коэффициент больше нуля ($1 > 0$). Так как функция непрерывна, то она может принимать все значения, большие или равные -1. Множество значений данной функции — промежуток $[-1; +\infty)$.

Ответ: $[-1; +\infty)$.

Прием 7. *Введение вспомогательного угла для нахождения множества значений некоторых тригонометрических функций.* Данный прием применяется для нахождения множества значений функций вида $y = a\sin x \pm b\cos x$ или $y = a\sin(px) + b\cos(px)$, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Задание 8. Найдите множество значений функции

$$y = 15\sin 2x + 20\cos 2x.$$

Решение. Найдем значение

$$\sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Преобразуем выражение

$$15\sin 2x + 20\cos 2x = 25\left(\frac{3}{5}\sin 2x + \frac{4}{5}\cos 2x\right) =$$

$$= 25(\cos\alpha \sin 2x + \sin\alpha \cos 2x) = 25\sin(2x + \alpha),$$

где $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Множество значений функции $y = \sin(2x + \alpha)$:

$$-1 \le \sin(2x + \alpha) \le 1.$$

Тогда множество значений исходной функции:

$$-25 \le 25\sin(2x + \alpha) \le 25.$$

Ответ: $[-25;\ 25]$.

Задание 9. Найдите множество значений следующих функций:

а) $y = \dfrac{6x + 7}{3 - 10x}$, б) $y = \sin 5x - \cos 5x$, в) $y = \sqrt{x + 1} - 3$,

г) $y = 4x^2 + 8x + 10$, д) $y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$, е) $y = \sqrt{x^2 + 3}$.

Решение. а) Выразим x через y:
$6x + 7 = 3y - 10xy$, $x(6 + 10y) = 3y - 7$.

Если $6 + 10y = 0$, то $y = -0{,}6$. Подставляя это значение y в последнее уравнение, получим $0x = -8{,}8$. Данное уравнение корней не имеет, значит, функция $y = \dfrac{6x + 7}{3 - 10x}$ не принимает значения, равного $-0{,}6$.

Если $6 + 10y \neq 0$, то $x = \dfrac{3y - 7}{6 + 10y}$. Область определения последнего уравнения – любое действительное y, кроме $y = -0{,}6$.

Получаем, что $E(y) = (-\infty; -0{,}6) \cup (-0{,}6; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}6) \cup (-0{,}6; +\infty)$.

б) Найдем значение $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ и преобразуем выражение

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 5x - \sin\frac{\pi}{4}\cos 5x\right) = \sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Учитывая множество значений функции $y = \sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, получаем, что $E(y) = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. Функция будет принимать все значения из этого промежутка, так как является непрерывной на множестве всех действительных чисел.

Ответ: $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

в) Найдем множество значений функции $y = \sqrt{x+1}$. Учитывая, что $0 \leq \sqrt{x+1}$, по свойствам неравенств получим $-3 \leq \sqrt{x+1} - 3$. $E(y) = [-3; +\infty)$.

Ответ: $[-3; +\infty)$.

г) Находить множество значений квадратичной функции $y = 4x^2 + 8x + 10$ можно способом, разобранным в задании 6, а можно преобразовать квадратный трехчлен, выделив полный квадрат:

$$4x^2 + 8x + 10 = (2x+2)^2 + 6.\ E\left((2x+2)^2\right) = [0; +\infty),$$

$$E\left((2x+2)^2 + 6\right) = [6; +\infty).$$

В силу непрерывности функция $y = 4x^2 + 8x + 10$ принимает все значения из промежутка $[6; +\infty)$.

Ответ: $[6; +\infty)$.

д) Так как $E(x^2) = [0; +\infty)$, следовательно, $E(x^2 + 3) = [3; +\infty)$. Так как обратная пропорциональность — непрерывная и убывающая функция на этом промежутке, то большему значению аргумента будет соответствовать меньшее значение функции. При стремлении аргумента этой функции к $+\infty$ значение самой функции стремится к нулю: $E\left(\dfrac{1}{x^2 + 3}\right) = \left(0; \dfrac{1}{3}\right]$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{3}\right]$.

е) $E(x^2) = [0; +\infty)$, $E(x^2 + 3) = [3; +\infty)$, $E\left(\sqrt{x^2 + 3}\right) = \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Задание 10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 3 - \frac{4}{1 + \sqrt{x - 1}}.$$

Решение. Разность принимает наименьшее значение при наибольшем значении вычитаемого. Дробь принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя. Получаем, что данная функция принимает наименьшее значение при наименьшем значении выражения $1 + \sqrt{x - 1}$, находящегося в знаменателе дроби.

$$E\left(\sqrt{x - 1}\right) = [0; +\infty).\ E\left(1 + \sqrt{x - 1}\right) = [1; +\infty).$$

Итак, наименьшее значение знаменателя равно 1 (при $x = 1$). Тогда функция принимает значение, равное -1.

Ответ: -1.

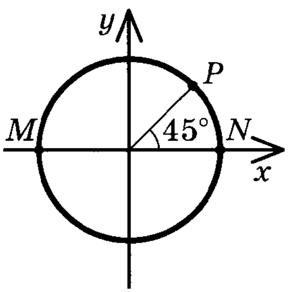
Задание 11. Найдите множество значений фукнции $y = \cos x$ на следующих промежутках:
а) $[30^\circ; 45^\circ]$, б) $[-45^\circ; 45^\circ]$, в) $[-180^\circ; 45^\circ]$.

Решение. а) Так как в первой четверти функция $y = \cos x$ непрерывна и убывает, значит, большему аргументу соответствует меньшее значение функции, т. е. если $30^\circ \le x \le 45^\circ$, то функция принимает все значения из промежутка $\frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $E(y) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

б) На промежутке $[-45^\circ; 45^\circ]$ функция $y = \cos x$ не является монотонной. Рассмотрим два промежутка: $[-45^\circ; 0^\circ]$ и $[0^\circ; 45^\circ]$. На первом из этих промежутков функция $y = \cos x$ непрерывна и возрастает, а на втором — непрерывна и убывает. Получаем, что множество значений на первом промежутке $\frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le 1$, на втором $\frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le 1$.

Ответ: $E(y) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.



в) Аналогичными рассуждениями можно воспользоваться и здесь. Хотя можно это сделать рациональнее: спроектируем дугу MNP на ось абсцисс.

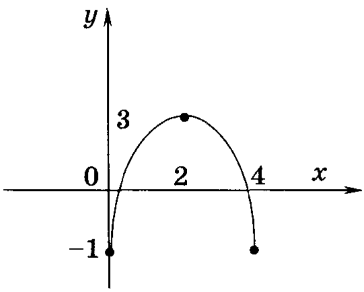
В силу непрерывности функции получим, что множество значений функции $y = \cos x$ есть промежуток $[-1; 1]$.

Ответ: $E(y) = [-1; 1]$.

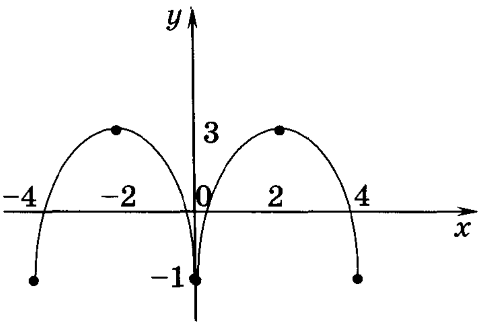
Задание 12. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 8. На отрезке $[0;4]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = -x^2 + 4x - 1$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-4;6]$.

Р е ш е н и е. Изобразим схематически график функции $y = f(x)$ на отрезке $[0;\ 4]$.

Графиком функции $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Вершина параболы — точка $(2;3)$.

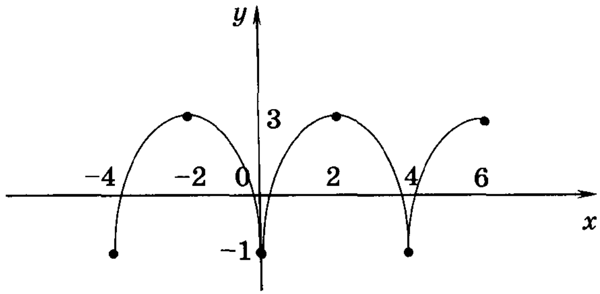


Так как функция $y = f(x)$ является четной, то на отрезке $[-4;4]$ ее график выглядит следующим образом.



Так как функция $y = f(x)$ является периодической функцией с периодом, равным 8, то на отрезке $[-4;6]$ ее график выглядит следующим образом.

Получаем, что функция $y = f(x)$ на отрезке $[-4;6]$ имеет 5 нулей.



Ответ: 5.

Задания для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби

1. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \dfrac{16}{x}$ на отрезке [2;8].

2. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -\,x^3$ на отрезке [1;2].

3. Найдите наибольшее значение функции
$y = 3x^2 - x + 5$ на отрезке [1;2].

4. Найдите наибольшее значение функции
$y = -4x^2 + 5x - 8$ на отрезке [2;3].

5. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 + 6x - 1$ на отрезке [0;4].

6. Найдите наименьшее целое значение функции $f(x) = 0{,}5^x$ на промежутке $(-\,4;-1)$.

7. Найдите наименьшее целое значение функции $f(x) = \log_2 x$ на промежутке $(2;128)$.

8. Найдите наибольшее целое значение функции $f(x) = \sqrt{x+4}$ на промежутке $(0;32)$.

9. Найдите наибольшее целое значение функции $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$ на промежутке $(0;32)$.

10. Найдите наибольшее целое значение функции $g(x) = 5\sin x$ на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

11. Найдите наименьшее целое значение функции $g(x) = 12\cos x$ на промежутке $(0;\pi)$.

12. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = 2\sin x - 1$?

13. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = \sin(2x) - 1$?

14. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = 2\sin^2 x - 1$?

15. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = 8\sin x\cos x$?

16. Сколько целых чисел содержится в множестве значений функции $f(x) = 8\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$?

17. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{15}{\sin x + 4}$.

18. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_2(4 - x^2).$$

19. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(4 - x^2).$$

20. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_2(4 - 5x) \text{ на промежутке } [-\frac{4}{5}; 0].$$

21. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(4 - 5x) \text{ на промежутке } [-\frac{4}{5}; 0].$$

22. Какого значения функция $y = \dfrac{3x + 6}{2x - 5}$ не достигает ни при каком действительном значении x?

23. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$.

24. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt[4]{x + 5}$?

25. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x) = \dfrac{\sqrt[4]{16 - x^2}}{x + 2}$?

26. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x) = \sqrt[4]{9 - x^2} + \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$?

27. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x) = \sqrt[4]{9 - x^2} + \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$?

28. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x) = \log_2\left(4 - x^2\right)$?

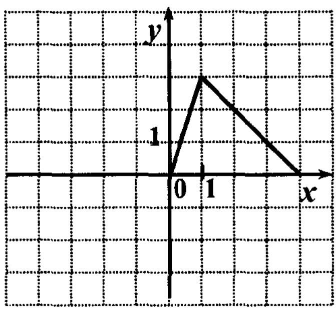
29. Сколько целых чисел содержится в области определения функции $g(x) = \log_x\left(4 - x^2\right)$?

30. Укажите наименьшее целое число, входящее в область определения функции $y = \log_2 x \cdot \log_x 2$.

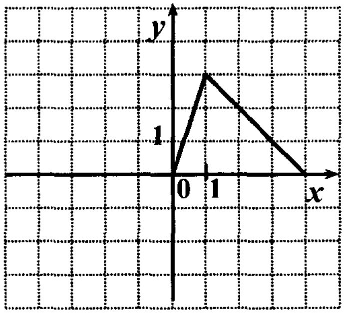
31. Укажите, сколько целых чисел содержит область определения функции $y = \log_4 \dfrac{1 - x}{x + 2}$.

32. Найдите длину промежутка, являющегося областью определения функции $y = \sqrt{\lg \dfrac{1 - 3x}{x - 2}}$.

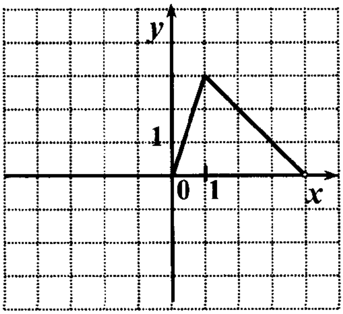
33. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной. На рисунке изображен график этой функции при $0 \le x \le 4$. Найдите $f(-3)$.



34. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной. На рисунке изображен график этой функции при $0 \le x \le 4$. Найдите $f(-3)$.



35. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4. На рисунке изображен график этой функции при $0 \le x < 4$. Найдите $f(-3)$.



36. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной. На промежутке $[0;4]$ она задается формулой $f(x) = 2 - (x - 2)^2$. Найдите $f(-3)$.

37. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной. На промежутке $[0;4]$ она задается формулой $f(x) = 2 - (x - 2)^2$. Найдите $f(-3)$.

38. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4. На промежутке $[0;4)$ она задается формулой $f(x) = 2 - (x - 2)^2$. Найдите $f(34)$.

39. Нечетная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 1{,}4 + f(x - 4)$ вычислите $g(1) + g(3) + g(5) + g(7)$.

40. Четная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 2{,}4 + f(x - 4)$ вычислите $g(1) + g(3) - g(5) - g(7)$.

41. Найдите значение функции $y = \dfrac{f(x) - 2f(-x)}{g(x) - 3g(-x)}$ в точке x_1, если известно, что функция $y = f(x)$ — четная, функция $y = g(x)$ — нечетная, $f(x_1) = 1$, $g(x_1) = 2$.

42. Найдите значение функции $y = \dfrac{f(x) - 2f(-x)}{g(x) - 3g(-x)}$ в точке x_2, если известно, что функция $y = f(x)$ — нечетная, функция $y = g(x)$ — четная, $f(x_2) = 1$, $g(x_2) = 2$.

43. Нечетная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = x(x+7)(x^2 - x - 20)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$.

44. Четная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = (x^3 - x)(2^{-x} - 16)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$.

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения

45. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 9\cos x - 12\sin x.$$

46. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \cos x - \sqrt{3}\sin x.$$

47. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x + \sqrt{3}\sin x}.$$

48. Сколько целых чисел содержится во множестве значений функции $y = \sin^2 x + \sin x + 1$.

49. Сколько целых чисел содержится во множестве значений функции $y = 9\sin^2 x + 6\cos x$?

50. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 2}.$$

51. Найдите наименьшее целое значение функции

$$y = \frac{4}{x^2 + 4x + 5}.$$

52. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{3}{x^2 + 2x + 4}.$$

53. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{1 + 3\sin(10x)}.$$

54. Найдите множество значений функции

$$y = \log_4\big(4 + 3\sin(10x)\big).$$

55. Найдите множество значений функции $y = 3^{1 + 3\sin(10x)}$.

56. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{7}{4 + 3\sin(10x)}.$$

57. Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,5}(\sin x + 5).$$

58. Найдите множество значений функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{3 - \sin x}}$.

59. Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{8\sqrt{2}(\cos(10x) + \sin(10x))}.$$

60. Найдите множество значений функции

$$y = \log_2\left(8\sqrt{2}(\cos(10x) + \sin(10x))\right).$$

61. Найдите множество значений функции

$$y = 2^{\sqrt{2}(\cos(10x) + \sin(10x))}.$$

62. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{5}{3 + \sqrt{2}(\cos(10x) + \sin(10x))}.$$

63. Найти длину наибольшего отрезка оси абсцисс, на котором графики функций $f(x) = 4 - \sqrt{x + 5 + 2\sqrt{x + 4}}$ и $g(x) = \sqrt{x + 13 - 6\sqrt{x + 4}}$ совпадают.

64. Найти длину наибольшего отрезка оси абсцисс, на котором графики функций $g(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}}$ и $f(x) = 3 - \sqrt{x - 3 + 2\sqrt{x - 4}}$ совпадают.

65. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 - 2x - x^2}}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} + \operatorname{tg} x.$$

66. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} + \operatorname{tg} x.$$

67. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x^4 - 4x^3 + 16x - 16} + \operatorname{ctg} x.$$

68. Найдите область определения функции

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 16x - 16}{\sqrt{6 - x - x^2}} + \mathrm{ctg}\,x.$$

Исследование функций с помощью производной

Задания на исследование функций встречаются во всех частях ЕГЭ. Решения заданий в *части I* требуют применения стандартного алгоритма. Задания *части II* отличаются более сложной формулой, задающей функцию, и их решение требует применения самых разнообразных утверждений из математического анализа.

Теоретические сведения

Нахождение производной данной функции называют дифференцированием.

Для нахождения производной используют формулы дифференцирования и правила дифференцирования.

Формулы дифференцирования

Функция $f(x)$	Производная функция $f'(x)$
$\mathrm{kx} + C,\ C \in R$	k
x^{α}	$\alpha\, x^{\alpha - 1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$

Правила дифференцирования

Значения производных функций f и g в точке x_0 обозначим так: $f'(x_0) = f'$, $g'(x_0) = g'$.

П р а в и л о 1 (дифференцирование суммы). Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то их сумма дифференцируема в этой точке и $(f + g)' = f' + g'$.

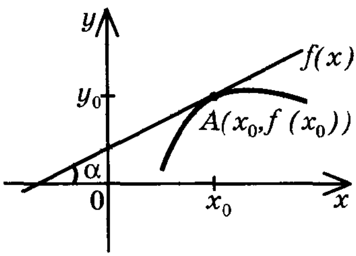
П р а в и л о 2 (дифференцирование произведения). Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то их произведение дифференцируемо в этой точке и $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

П р а в и л о 3 (дифференцирование частного). Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 и функция g не равна нулю в этой точке, то частное $\frac{f}{g}$ также дифференцируемо в этой точке и $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

П р а в и л о 4. (Производная сложной функции) Если функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ также дифференцируема в точке x_0 и $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Геометрический смысл производной. Касательная к графику функции

Существование производной функции f в точке x_0 эквивалентно существованию (невертикальной) касательной в точке $(x_0; f(x_0))$ графика функции f, при этом



угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$. В этом и состоит *геометрический смысл производной.*

Уравнение касательной к графику функции f в точке $A(x_0; f(x_0))$ имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Замечание. Число k в уравнении прямой $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ называют угловым коэффициентом прямой. k равен тангенсу угла, который образует прямая $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ с положительным направлением оси Ox $(k = \operatorname{tg} \alpha)$. В уравнении касательной $k = f'(x_0)$, значит, значение производной в точке x_0, т.е. $f'(x_0)$, равно тангенсу угла наклона касательной графика функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 к положительному направлению оси Ox.

Механический смысл производной

Если материальная точка движется по координатной прямой, причем задан закон движения, т.е. координата x этой точки есть известная функция $x\ (t)$ времени t, то мгновенная скорость $v\ (t)$ определена (только) для любой дифференцируемой функции $x(t)$, при этом $v(t) = x'(t)$. Короче: механический смысл производной состоит в том, что производная от координаты по времени есть скорость.

Аналогично и с ускорением движения: $a(t) = v'(t)$. Имеем $x''(t) = a(t)$. Короче, производная от скорости по времени есть ускорение.

Применение производной к исследованию функции

Признак возрастания (убывания) функции

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на интервале I.

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на интервале I.

Промежутки возрастания и убывания функции называют промежутками монотонности функции.

Критические точки функции, максимумы и минимумы

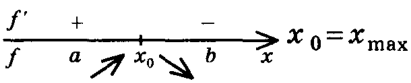
Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками*.

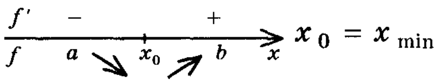
Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции. Короче: если в точке x_0 производная функции f меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума функции f.

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) < 0$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0;\ b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции. Короче: если в точке x_0 производная функции f меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума функции f.

Точки максимума и минимума называют *точками экстремума*. Значения функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название – *экстремум функции*).

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке





Теорема ***Вейерштрасса.*** Непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Правило нахождения наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции f на отрезке:

1. Находим критические точки функции f.
2. Выбираем те из них, которые принадлежат данному отрезку.

3. Вычисляем значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезка.

4. Из полученных чисел выбираем наибольшее (наименьшее).

Решение типовых заданий

Прежде чем находить производную функции, полезно выполнить преобразования, упрощающие вид формулы, задающей функцию. Это существенно облегчает дальнейшие вычисления.

Задание 1. Найдите производную функции

$$f(x) = (x+1)(x+2) - (x-1)(x-3).$$

Решение. Сначала упростим формулу, задающую функцию. Для этого раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$f(x) = (x+1)(x+2) - (x-1)(x-3) = 7x - 1.$$

Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

Используя формулу для нахождения производной линейной функции, получим $f'(x) = 7$.

Ответ: $f'(x) = 7$.

Задание 2. Найдите значение $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \ln e^{\sin x}$.

Решение. Сначала упростим формулу, задающую функцию. Для этого применим свойство логарифмов (см. раздел «Тождественные преобразования логарифмических выражений»). $f(x) = \ln e^{\sin x} = \sin x$. Данная функция определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел. Используем формулу для нахождения производной синуса. $f'(x) = \cos x$, значит, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Задание 3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x+3}{x+4}$ в точке с абсциссой $x_0 = -3$.

Решение. Вспомним, что уравнение касательной имеет вид

$$y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y(x_0).$$

Найдем последовательно $y(x_0)$, $y'(x_0)$, т.е. $y(-3)$, $y'(-3)$. Имеем: $y(-3) = 0$. Чтобы определить $y'(-3)$, найдем $y'(x_0)$, используя правило 3 о дифференцировании частного.

$$y'(x) = \frac{(x+3)'(x+4) - (x+3)(x+4)'}{(x+4)^2} = \frac{1}{(x+4)^2}.$$

Получим, что $y'(-3) = 1$ и уравнение касательной имеет вид:

$$y = x + 3.$$

Ответ: $y = x + 3$.

Задание 4. Найдите угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox, проведенной к графику функции $y = -\ln x$ в его точке A (1; 0).

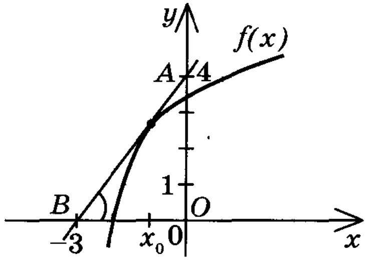
Решение. Тангенс угла наклона касательной равен значению производной функции y (x) в точке $x_0 = 1$.

$y'(x) = -\dfrac{1}{x}$, $y'(1) = -1 < 0$, т.е. касательная образует тупой угол α с положительным направлением оси абсцисс и тангенс этого угла равен -1. $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ: 135°.

Замечание. Угол наклона касательной в **задании 3** равен 45°.

Задание 5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



Решение. Касательная AB образует $\angle ABO$ с положительным направлением оси Ox. Из ΔABO имеем $\operatorname{tg}\angle ABO = \frac{AO}{BO} = \frac{4}{3}$, значит, исходя из геометрического смысла производной, получаем $f'(x_0) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

Задание 6. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 + 1}$, параллельной прямой $y = -32x + 7$.

Решение. Так как угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен $f'(x_0)$ и эта касательная параллельна прямой $y = -32x + 7$, то абсциссу точки касания найдем из уравнения $f'(x_0) = -32$.

Чтобы найти производную функции $f(x)$, сначала упростим формулу, задающую функцию. Применим формулу разности квадратов.

$$f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 + 1} = x^4 - 1 \text{ и } f'(x_0) = 4x_0^3.$$

Остается решить уравнение $4x_0^3 = -32$, $x_0 = -2$.

Уравнение касательной имеет вид

$$y = -32(x+2) + f(-2).$$

Так как $f(-2) = 15$, то $y = -32(x+2) + 15$, $y = -32x - 49$.

Ответ: $y = -32x - 49$.

Замечание. Чтобы написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, параллельной оси абсцисс, необходимо учесть, что $f'(x_0) = 0$. В **задании 6** $4x_0^3 = 0$, $x_0 = 0$ и уравнение касательной, параллельной оси Ox, имеет вид: $y = -1$.

Задание 7. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{1-x}$, проходящей через точку $P(2;\ 0)$. В ответе укажите площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.

Решение. Если найдем абсциссу точки касания (x_0), то напишем уравнение касательной. Но точка $P(2;\ 0)$ не лежит на графике функции $f(x) = \sqrt{1-x}$, и абсцисса x_0 не задана. Поэтому напишем уравнение касательной к графику данной функции в общем виде.

Имеем: $y = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x_0}}(x - x_0) + \sqrt{1-x_0}$. (*)

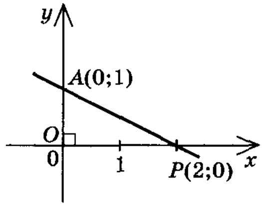
Точка $P(2;\ 0)$ лежит на касательной, поэтому подставим ее координаты в уравнение касательной (*)

$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{1-x_0}}(2 - x_0) + \sqrt{1-x_0}\ ,\ x_0 = 0.$$

Тогда уравнение (*) имеет вид: $y = -0{,}5x + 1$.

Найдем площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.

$$S_{AOP}=\frac{1}{2}AO\cdot PO=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1.$$



Ответ: 1.

Задание 8. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки B этой прямой изменяется по закону $S(t)=2t^3-12t^2+7$ (t — время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость тела будет равна 72 м/с? Через сколько секунд после начала движения ускорение тела будет равно 36 м/с^2?

Решение. Из механического смысла производной имеем: скорость — это производная пути по времени. Скорость изменяется по закону $v(t)=S'(t)=6t^2-24t$, с другой стороны, скорость равна 72 м/с. Решим уравнение $6t^2-24t=72$. Учитывая, что $t>0$, получим, что $t=6$ с.

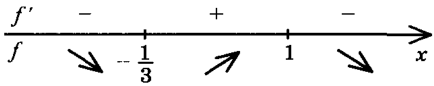
Так как ускорение — это производная скорости по времени, то ускорение изменяется по закону $a(t)=v'(t)=12t-24$, с другой стороны, ускорение равно 36 м/с^2. Решим уравнение $12t-24=36$, $t=5$ с.

Ответ: через 6 секунд; через 5 секунд.

Задание 9. Исследуйте функцию $f(x)=-x^3+x^2+x+1$ на возрастание и убывание. В ответе укажите длину промежутка возрастания.

Решение. Вспомните достаточный признак возрастания функции. Чтобы найти промежутки возрастания функции, определим, на каких промежутках производная функции положительна. Данная функция определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$. Исследуем знак производной, для этого решим уравнение $f'(x) = 0$ и отметим его корни на координатной прямой (корни $-\frac{1}{3}$ и 1).



Функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ и на промежутке $[1; +\infty)$.

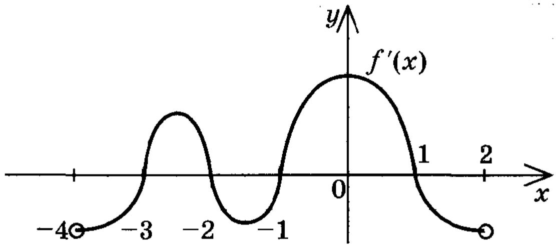
Функция возрастает на промежутке $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$: т.к. функция $f(x)$ непрерывна в точках $-\frac{1}{3}$; 1, то эти точки влючаются в промежутки монотонности.

Длина промежутка возрастания равна $1\frac{1}{3}$.

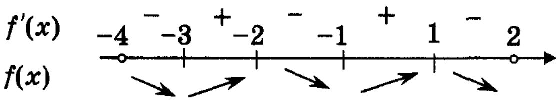
Ответ: $1\frac{1}{3}$.

Задание 10. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (−4; 2). График ее производной изображен на рисунке. Укажите число промежутков убывания функции.

Решение. Определим промежутки, на которых производная функции отрицательна, т.е. график производной лежит ниже оси абсцисс. Так как $f'(x) < 0$ на



промежутках (–4; –3), (–2; –1), (1; 2), то число промежутков убывания равно 3.



Ответ: 3.

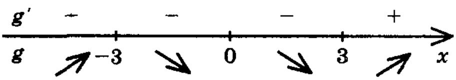
Замечание. Функция $y = f(x)$, заданная условиями задания 10, имеет два промежутка возрастания.

Задание 11. Найдите точки экстремума функции $g(x) = x^5 - 15x^3$.

Р е ш е н и е. Вспомните, что точки экстремума функции — это точки минимума и максимума функции. В этих точках производная функции $g'(x)$ меняет знак. Найдем $g'(x)$ и исследуем ее знак. Функция $g(x)$ определена и дифференцируема на $\boldsymbol{R}$.

Имеем: $g'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x-3)(x+3)$.

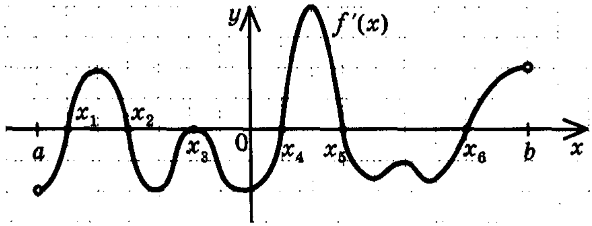
Функция имеет две точки экстремума: $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$.



Ответ: $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$.

Замечание. Функция $g(x) = x^5 - 15x^3$ имеет три критические точки –3, 0 и 3 (см. определение критических точек в теоретической части).

Задание 12. На рисунке изображен график производной некоторой функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(a;\ b)$. Сколько точек минимума имеет функция $f(x)$ на этом промежутке?



Решение. В точках минимума производная функции меняет знак с минуса на плюс. Таких точек три: x_1, x_4, x_6.

Ответ: 3.

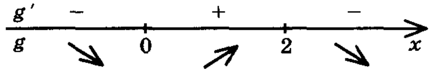
Замечание. Данная функция имеет две точки максимума (производная в этих точках меняет знак с плюса на минус): x_2 и x_5. И шесть критических точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

Задание 13. Найдите максимум функции $g(x) = x^2 e^{-x} + 7$.

Решение. Вспомните, что максимумом функции называется значение функции в точке максимума. Найдем точку максимума функции, для этого определим производную функции и исследуем ее знак. Функция $g(x)$ определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

При нахождении производной данной функции следует обратить внимание на то, что функция $y = e^{-x}$ является сложной функцией.

$$g'(x) = \left(x^2\right)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot \left(e^{-x}\right)' = e^{-x}\left(2x - x^2\right).$$



$x_{max} = 2$, Значит, максимум равен $g\left(x_{max}\right) = g(2) = \dfrac{4}{e^2} + 7$.

Ответ: $\dfrac{4}{e^2} + 7$.

Замечание. Для данной функции: точка минимума $x_{\min} = 0$; минимум равен $g(x_{\min}) = g(0) = 7$.

Задание 14. Укажите точку минимума функции

$$f(x) = \frac{5^{\log_5(2-x)}}{5^{\log_5(x+4)}} + 6x.$$

Решение. Найдем область определения функции f:

$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 2.$$

Упростим формулу, задающую функцию

$$f(x) = \frac{5^{\log_5(2-x)}}{5^{\log_5(x+4)}} + 6x = \frac{2-x}{x+4} + 6x,\ x \in (-4; 2).$$

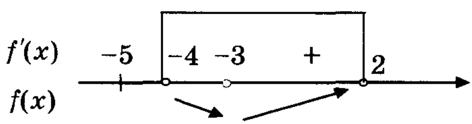
Чтобы найти точку минимума функции, найдем производную функции и исследуем ее знак.

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+4)^2} + 6.$$

Решим уравнение $f'(x) = 0$ при $x \in (-4; 2)$.

$$-\frac{6}{(x+4)^2} + 6 = 0;$$

$$x = -3\ (x = -5 \notin (-4; 2)).$$



Ответ: $x_{\min} = -3$.

Задание 15. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^4 (x+2)^3$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

Решение. Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на $\boldsymbol{R}$.

Найдем критические точки функции, т.е. в данном случае решим уравнение $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4x^3(x+2)^3 + x^4 \cdot 3 \cdot (x+2)^2 = x^3(x+2)^2(7x+8).$$

Функция имеет три критические точки: -2, $-\dfrac{8}{7}$ и 0.

Отрезку $[-1;\ 1]$ принадлежит только точка 0.
Вычислим значения функции на концах отрезка и в точке 0.

$$f(-1) = 1,\ f(1) = 27,\ f(0) = 0.$$

Ответ: $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = f(1) = 27$, $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 0$.

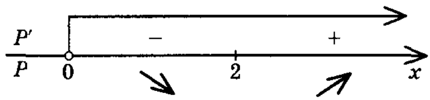
Задание 16. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 см^3, а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания. В ответе укажите этот периметр.

Решение. Обозначим через x высоту, т.е. длину бокового ребра параллелепипеда. Тогда стороны его основания равны x и $\dfrac{4}{x^2}$, а периметр основания $P = 2\left(x + \dfrac{4}{x^2}\right)$. Исходя из смысла задачи, переменная x принимает только положительные значения. Исследуем функцию $P(x) = 2\left(x + \dfrac{4}{x^2}\right)$ на наименьшее значение при $x \in (0;\ +\infty)$.

Для этого найдем производную функции и исследуем ее знак на промежутке $(0;\ +\infty)$.

Имеем: $P'(x) = 2\left(1 - \frac{8}{x^3}\right) = 2 \cdot \frac{x^3 - 8}{x^3}$.

Так как $x_{\min} = 2$ является единственной критической точкой на промежутке $(0;\ +\infty)$, то функция $P(x)$ принимает в этой точке наименьшее значение, равное $P(2) = 6$.



Полученный результат означает, что наименьший периметр основания имеет прямоугольный параллелепипед с боковым ребром, равным 2 см, и сторонами в основании 2 см и 1 см.

Ответ: 6 см.

Задания для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Вычислите $y'(0)$, если $y(x) = e^x + \sin x$.

2. Вычислите $y'(2)$, если $y = x^4 - \frac{1}{x}$.

3. Вычислите $y'(2)$, если $y = \frac{-2x+1}{4x+2}$.

4. Найдите значение производной функции $y = x\ln x$ в точке $x = e$.

5. Вычислите $f'(4)$, если $f(x) = 4\sqrt{x} - 5$.

6. Найдите значение $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x) = 2\operatorname{tg} x$.

7. Найдите $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, если $f(x) = 4\operatorname{ctg} x$.

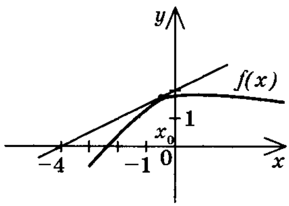
8. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если

$$f(x) = (x-1)\left(x^2+1\right)(x+1).$$

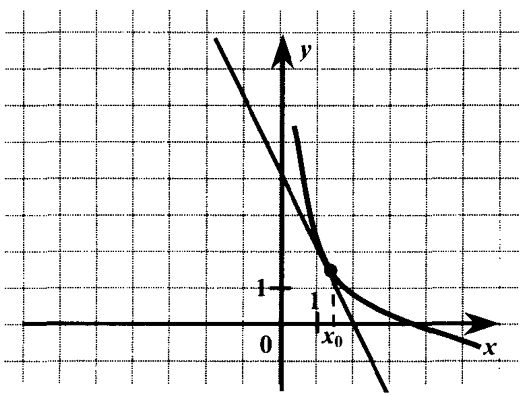
9. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = 6x - \frac{2}{x}$ в его точке с абсциссой (-1).

10. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \sin 2x$ в его точке с абсциссой 0.

11. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



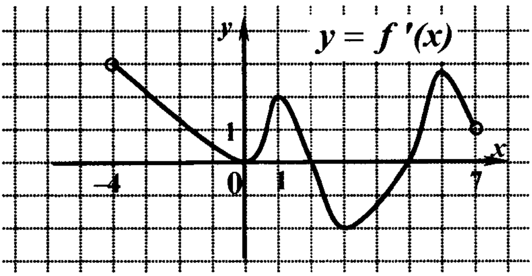
12. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



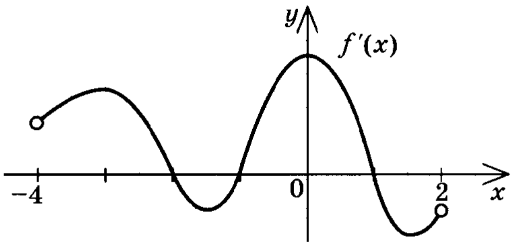
13. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 3x + 2$.

14. Найдите минимум функции $y = x^3 - 3x + 2$.

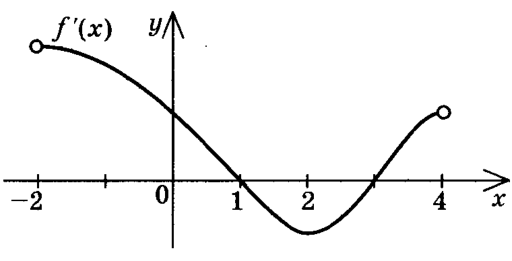
15. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4;7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. В какой точке отрезка $[2;5]$ функция принимает наименьшее значение.



16. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4;2)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите число промежутков возрастания функции $y = f(x)$.

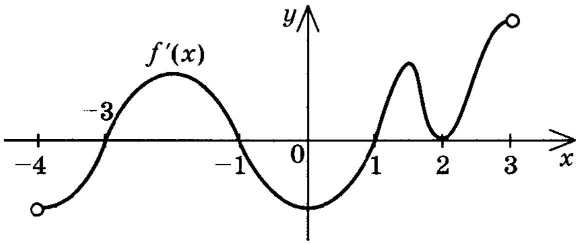


17. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-2;4)$. График ее производной изображен на рисунке.



Укажите длину промежутка убывания функции $y = f(x)$ на этом отрезке.

18. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 3)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите число точек экстремума функции $y = f(x)$ на этом промежутке.

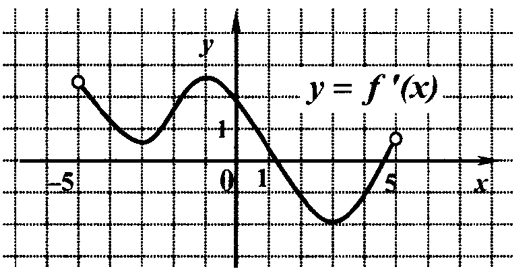


19. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = 2x^3 - 6x$ на отрезке $[0; 2]$.

20. Найдите площадь треугольника, который образует касательная к графику функции $g(x) = x^{-1}$ в точке с абсциссой 1 с осями координат.

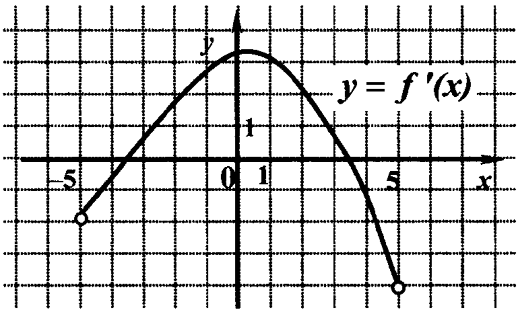
21. Найдите площадь треугольника, который образует касательная к графику функции $h(x) = e^x$ в точке с абсциссой 0 с осями координат.

22. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции.



К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют отрицательный угловой коэффициент?

23. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции.



К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Сколько из проведенных касательных имеют положительный угловой коэффициент?

24. Функция $y = 3x^2 + 29$ на отрезке $[-200;\ 200]$ имеет наименьшее значение при x_0, равном ... .

25. Тело движется по прямой так, что расстояние от начальной точки изменяется по закону $S(t) = 5t + 0{,}2t^3 - 6$ (м), где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 5 секунд после начала движения.

26. Найдите значение производной функции

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$$

в точке $x_0 = 100$.

27. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{1 - 4x}{2x + 1}$ в точке $x_0 = -1$.

28. Найдите значение производной функции

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right)^2 - 2\left(x^2 + 1\right) + 1 \text{ в точке } x_0 = 2.$$

29. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{16}{x} \text{ в точке } x_0 = 4.$$

30. Найдите значение производной функции

$$f(t) = \cos t + \operatorname{tg} t$$

в точке $t_0 = \pi$.

31. Найдите значение производной функции $g(x) = x + e^{-2x}$ в точке $x_0 = 0$.

32. Укажите число целых решений неравенства $f'(x) \le 0$, если $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{16}{3}x^3$.

33. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к графику функции $y = x^5 - x$ в начале координат? В ответе укажите градусную меру этого угла.

34. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $g(x) = (x-1)^2(x+1)^2 - \left(x^2 + 1\right)^2$, проведенной в точке с абсциссой 1.

35. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $g(x) = \frac{1 - 2x}{4x + 1}$, проведенной в точке с абсциссой –0,5.

36. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции

$$y = (x + 1)\left(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1\right)$$

в его точке с абсциссой –1.

37. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = 2\sin x - 3\mathrm{ctg}x$ в его точке с абсциссой $\frac{\pi}{3}$.

38. Найдите точку графика функции

$$f(x) = (x-1)\left(x^{200} + x^{199} + \ldots + x + 1\right),$$

касательная в которой параллельна оси абсцисс. В ответе укажите сумму координат этой точки.

39. Через точку $M(-1;0)$ к графику функции $y = \sqrt{2x-1}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение. В ответе укажите градусную меру угла между касательной и положительным направлением оси Ox.

40. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 2x$, параллельной прямой $y = 4x - 5$. В ответе укажите площадь треугольника, образованного этой касательной и осями координат.

41. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x$, параллельной оси абсцис. В ответе укажите расстояние от точки $(0;0)$ до этой касательной.

42. Укажите точку графика функции $y = x^2 + 4x$, в которой касательная параллельна прямой $y - 2x + 5 = 0$. В ответе запишите сумму координат этой точки.

43. Найдите площадь треугольника, образованного касательной к графику функции $y = \ln(2x-1)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и осями координат.

44. Найдите площадь треугольника, образованного касательной в точке $x_0 = 0{,}5$ к графику функции $y = e^{2x-1} - \cos 2\pi x$ и осями координат.

45. Укажите точку минимума функции $g(x)$, если $g'(x) = (x-7)(x+3)$.

46. Найдите максимум функции $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 3$.

47. Укажите точку максимума функции $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x}$.

48. Укажите точку минимума функции

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 4.$$

49. Найдите минимум функции $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

50. Укажите точку минимума функции $y = 7 + x - 5\ln x$.

51. Исследуйте функцию $y = 9 - x + 7\ln x$ на монотонность. В ответе укажите длину промежутка возрастания.

52. Исследуйте функцию $f(x) = x^3(x-1)^2$ на монотонность. В ответе укажите длину промежутка убывания.

53. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = g(x)$ в точке $C(-6;\ 6)$. Найдите $g'(-6)$.

54. Найдите точку максимума функции

$$f(x) = \left(2x - 7^{\sqrt{x}}\right)\left(7^{\sqrt{x}} + 2x\right) - 2x^4 + 49^{\sqrt{x}}.$$

55. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[0;3]$. В ответе укажите их сумму.

56. Найдите наименьшее значение функции

$$g(x) = x^2 - 2x + 7$$

на отрезке $[-2100;2100]$.

57. Найдите наибольшее значение функции

$$g(x) = 3\cos x + 1$$

на отрезке $[-2100; 2100]$.

58. Найдите наименьшее значение функции

$$g(x) = \sqrt{4\cos x + 5}$$

на отрезке $[1; 2100]$.

59. Найдите наибольшее значение функции

$$g(x) = -\frac{x}{2100} + 1$$

на отрезке $[-2100; 2100]$.

60. Тело движется по прямой так, что расстояние от начальной точки изменяется по закону $S = t + 0{,}4t^2 - 6$ (м), где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 10 секунд после начала движения.

61. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки C этой прямой изменяется по закону $S(t) = t^3 - t^2$ (t — время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения ускорение тела будет равно 40 м/с^2?

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

62. Напишите уравнения касательной к графику функции $y = e^{-0{,}5x} - 0{,}5x$, образующей с осями координат равнобедренный прямоугольный треугольник.

63. Найдите наименьший из возможных углов, образуемых с положительным направлением оси абсцисс касательной к графику функции $f(x)=\frac{4}{3}x^3-2x^2+2x+1$. В ответе запишите его градусную меру.

64. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=3^{\log_3(3x-6)}-x^3$.

65. Через точку $P(x;y)$ графика функции $f(x)=$ $=\ln(x-2)-0{,}5x^2$ проведена касательная к графику функции. Угловой коэффициент этой касательной равен (-2). Найдите координаты точки P.

66. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 32 см^3, а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания. В ответе укажите этот периметр.

67. Определите размеры бассейна с квадратным дном и объемом 32 м^3 таким образом, чтобы сумма площади боковой поверхности и площади дна была минимальной. В ответе укажите площадь боковой поверхности.

68. Найдите промежутки убывания функции

$$f(x)=-5x+4\sin x-200.$$

69. Найдите множество значений функции

$$h(x)=2\sqrt{x+14}+\sqrt{6-x}.$$

70. Найдите множество значений функции

$$g(x)=4\cos x-4\sqrt{4\cos x+5}.$$

71. Найдите множество значений функции

$$g(x) = 2\sqrt{-x+3} - 3\sqrt{5x-10}.$$

72. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}}.$$

Первообразная

Задачи на нахождение или применение первообразной встречаются и в заданиях *части I*. В заданиях обычно требуется вычислить первообразную, используя формулы и правила нахождения первообразных или найти площади плоских фигур, в частности криволинейной трапеции.

Теоретические сведения

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции* $f(x)$ на заданном промежутке I, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Общий вид первообразных. Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I, а C — произвольная постоянная.

Три правила нахождения первообразных

Правило 1. Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$.

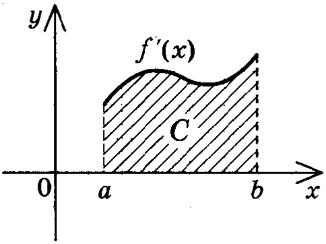
Правило 2. Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то функция kF — первообразная для kf.

Правило 3. Если F есть первообразная для f, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.

Таблица первообразных для некоторых функций

Функция f	k	x^{α}, $\alpha \in R$, $\alpha \neq -1$	$\sin x$	$\cos x$
Общий вид первообразных для функции f	$kx + C$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$
Функция f	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	e^X	a^X
Общий вид первообразных для функции f	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$e^X + C$	$\frac{a^X}{\ln a} + C$

Определение. Фигура, ограниченная прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ при $x \in [a;b]$, называется **криволинейной трапецией.**



Площадь криволинейной трапеции находится по формуле (*) $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Если $f(x) \leq 0$ при $x \in [a;b]$, то $S = -(F(b) - F(a))$. (**)

Решение типовых заданий

Задание 1. Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$, если $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

Решение. Преобразуем формулу, задающую функцию, т.е. представим $\frac{1}{x^4}$ в виде степени с отрицательным показателем $\left(\frac{1}{x^4} = x^{-4}\right)$ и воспользуемся формулой для первообразной степенной функции. Имеем:

$$F(x) = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C,\ C \in \boldsymbol{R}.$

Задание 2. Найти первообразную для функции $g(x) = \sqrt{x}$, график которой проходит через точку $P\ (9;1)$.

Решение. Преобразуем формулу, задающую функцию, т.е. представим $\sqrt{x}$ в виде степени с рациональным показателем и воспользуемся формулой для первообразной степенной функции. Получим: $G(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$

Так как $G(9) = 1$, то решим уравнение относительно C: $1 = \frac{2}{3}9\sqrt{9} + C,\ C = -17.$

Ответ: $G(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 17.$

Замечание. Так как первообразная определяется для данной функции на заданном промежутке, то при необходимости этот промежуток указывается. Например, общий вид первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ таков: $F(x) = \ln|x| + C,\ \ C \in \boldsymbol{R}$; на промежутке $(-\infty;0)$: $F(x) = \ln(-x) + C,\ \ C \in \boldsymbol{R}$; на промежутке $(0;+\infty)$: $F(x) = \ln x + C,\ C \in \boldsymbol{R}.$

Однако если первообразная задана на множестве всех действительных чисел, то, как правило, в условии задачи об этом не говорится (как в задании 5).

Задание 3. Укажите первообразную для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, если $F(-1) = 4.$

Решение. Имеем: $F(x) = \ln|x| + C$. Так как $-1 \in (-\infty; 0)$, то $F(x) = \ln(-x) + C$.

Учитывая, что $F(-1) = 4$, получим, что $C = 4$.

Ответ: $F(x) = \ln(-x) + 4$.

Задание 4. **Найти** первообразную для функции $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 2x}$, график которой проходит через точку $P\left(-\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Решение. Используя правило 3, получим общий вид всех первообразных для функции $f(x)$: $F(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C$.

Укажем среди них ту первообразную, график которой проходит через точку P.

Так как $F\left(-\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}$, то получим уравнение для нахождения C:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\left(-\frac{\pi}{8}\right) + C,\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + C, \text{ откуда } C = 1.$$

Ответ: $F(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + 1$.

Так как общих формул для нахождения первообразных произведения или частного не существует (в отличие от соответствующих формул для производной), то при решении ряда задач необходимо выполнить некоторые преобразования: представить данную функцию в виде суммы элементарных функций, первообразные которых известны.

Задание 5. Укажите общий вид первообразных для функции $f(x) = \dfrac{4 + e^x}{4e^x}$.

Решение. Представим выражение $\frac{4+e^x}{4e^x}$ в виде суммы: $\frac{4+e^x}{4e^x} = \frac{1}{e^x} + \frac{1}{4} = e^{-x} + \frac{1}{4}$.

Общий вид первообразных для функции $f(x)$ таков:

$$F(x) = -e^{-x} + \frac{1}{4}x + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Ответ: $F(x) = -e^{-x} + \frac{1}{4}x + C,\ C \in \mathbf{R}$.

Задание 6. Для функции

$$f(x) = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

найдите первообразную, проходящую через точку A $(2;17)$.

Решение. Упростим формулу, задающую функцию: $f(x) = (x-1)\left(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) = x^7 - 1$. Тогда $F(x) = \frac{x^8}{8} - x + C$. Так как $F(2) = 17$, то $C = -13$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^8}{8} - x - 13$.

Задание 7. Укажите общий вид первообразных для функции $f(x) = (x-1)(x+3)^{32}$.

Решение. Представим выражение $(x-1)(x+3)^{32}$ в виде разности:

$$f(x) = (x-1)(x+3)^{32} = (x+3-4)(x+3)^{32} =$$
$$= (x+3)^{33} - 4(x+3)^{32}$$

и $F(x) = \frac{(x+3)^{34}}{34} - \frac{4(x+3)^{33}}{33} + C,\ C \in \mathbf{R}$.

Ответ: $F(x) = \frac{(x+3)^{34}}{34} - \frac{4(x+3)^{33}}{33} + C,\ C \in \mathbf{R}$.

Следующее задание связано с исследованием первообразной данной функции. При этом ее решение не требует отыскания самой первообразной.

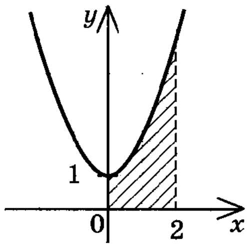
Задание 8. Сравните значения $F(1)$ и $F(2)$, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = -\sqrt{x^{20} + 20}$.

Решение. Чтобы сравнить значения $F(1)$ и $F(2)$, докажем, что функция $F(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$. Для этого исследуем знак $F'(x)$. Так как по определению $F'(x) = f(x)$, а функция $f(x)$ принимает только отрицательные значения на $\boldsymbol{R}$, то $F(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$ (см. «Достаточный признак убывания функции» в теоретических сведениях раздела «Исследование функции с помощью производной»), значит, $F(1) > F(2)$.

Ответ: $F(1) > F(2)$.

Рассмотрим применение первообразной к вычислению площадей плоских фигур.

Задание 9. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.



Решение. Построим схематично график функции $y = x^2 + 1$ и прямую $x = 2$. (Криволинейную трапецию смотрите на рисунке.)

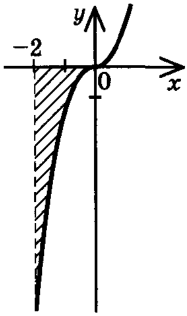
По формуле нахождения площади криволинейной трапеции (*) имеем:

$S = F(2) - F(0)$, где $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$ одна из первообразных для функции $y = x^2 + 1$.

$F(2) = \dfrac{2^2}{3} + 3$, $F(0) = 0$, поэтому $S = \dfrac{8}{3} + 3 = 5\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $5\dfrac{2}{3}$.

Задание 10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = -2$.



Решение. Построим схематично график функции $y = x^3$ и прямую $x = -2$ в системе координат xOy.
Так как $y(x) \le 0$ при $x \in [-2; 0]$, то, применяя формулу (**), получим
$S = -(F(0) - F(-2)) = F(-2) - F(0)$,

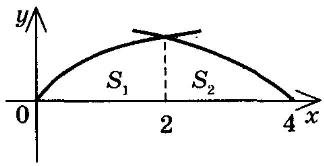
где $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ — одна из первообразных для функции $y = x^3$.
$S = 4$.

Ответ: 4.

Рассмотрим более сложные задания на вычисление площадей плоских фигур.

Задание 11. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4 - x}$, $y = 0$.

Решение. Построим схематично графики данных функций в одной системе координат.



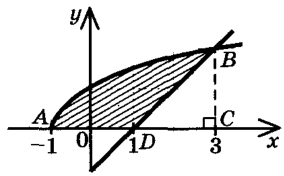
Вычислим абсциссы точек пересечения графиков этих функций: $\sqrt{x} = \sqrt{4 - x}$; $x = 2$.
$S = S_1 + S_2$.
$S_1 = F_1(2) - F_1(0)$, $F_1(x) = \dfrac{2}{3} x\sqrt{x}$ одна из первообразных для функции $y = \sqrt{x}$ и $S_1 = \dfrac{4}{3}\sqrt{2}$.

$S_2 = F_2(4) - F_2(2)$, $F_2(x) = -\frac{2}{3}(4-x)\sqrt{4-x}$ одна из первообразных для функции $y = \sqrt{4-x}$ и $S_2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

$S = \frac{8}{3}\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

Задание 12. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x+1}$, $y = x - 1$, $y = 0$.



Решение. Построим схематично графики данных функций в одной системе координат.

Вычислим абсциссы точек пересечения графиков функций:

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (x-1)^2, \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = 3, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Искомая площадь может быть найдена как разность площадей криволинейной трапеции ABC (S_1) и прямоугольного равнобедренного треугольника BCD (S_2).

$S = S_1 - S_2$.

$S_1 = S_{ABC}$, $S_1 = F_1(3) - F_1(-1)$,

$F_1(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$ одна из первообразных для функции $y = \sqrt{x+1}$ и $S_1 = \frac{16}{3}$.

$S_2 = S_{BCD} = 2$.

Окончательно имеем: $S = \frac{16}{3} - 2 = 3\frac{1}{3}$, тогда $3S = 10$.

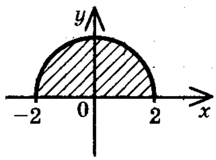
Ответ: 10.

Задание 13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$.

Решение.

Имеем: $y = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 - x^2, \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1. \\ y \ge 0. \end{cases}$

Получаем, что графиком функции является полуокружность с центром в точке (0; 0) и радиусом, равным 1, расположенная в верхней полуплоскости.



Площадь заштрихованной фигуры равна половине площади круга.

$$S = \frac{1}{2} S_{круга} = \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 2\pi.$$

Ответ: 2π.

Задачи для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2 + 4, x = 0, x = 3, y = 0$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 9x^2 + 1, x = 0, x = 2, y = 0$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ и графиком функции $y = 2\sin x$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = 2$, $x = 4$ и графиком функции $y = \frac{1}{x^2}$.

5. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = -2x$.

6. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4$.

7. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x$ и прямой $y = 0$.

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ и графиком функции $y = \cos x$.

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) + 8$, $y = 8$ и осью ординат.

11. Вычислите $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{8 - x}$, $y = 0$.

12. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$.

13. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{y} = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

14. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^2$, $x = 0$, $x = 3$.

15. Найдите значение выражения $3S$, где S — площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 2x - 2$ и графиком ее первообразной $F(x)$, зная, что $F(0) = 1$.

16. На множестве $\boldsymbol{R}$ задана функция

$$f(x) = -3x^2 - 2x + 16.$$

Найти произведение нулей той первообразной, график которой проходит через точку $M\ (-1;0)$.

17. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две различные первообразные функции для $f(x)$, причем $F_1(3)=8$, $F_2(5)=12$, $F_1(5)=14$. Найдите $F_2(3)$.

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

18. Является ли функция $F(x)=3x-\sin 4x+\dfrac{\sin 8x}{8}$ первообразной для функции $f(x)=8\sin^4 2x$?

19. При каких значениях x, $x\in[\pi;2\pi]$ обращается в нуль та из первообразных для функции

$$f(x)=\cos x-\sin x,$$

которая при $x=\dfrac{3\pi}{2}$ имеет значение, равное -2?

20. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{1-4x}$, касательной к графику этой функции в его точке с абсциссой $x_0=-6$ и прямой $y=0$.

21. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{8x-x^2-12}$, $y=0$, $x=4$.

22. Сравните значения $F(2)$ и $F(7)$, если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)=\log_{200}\left(x^4+200\right)$.

23. Укажите первообразную для функции

$$f(x)=(x+5)(x-7)^{20},$$

проходящую через точку $M\ (7;0)$.

Рациональные неравенства

В заданиях *части I* обычно предлагаются задания на решение рациональных неравенств. В заданиях *части II* решение рациональных неравенств является одним из этапов решения показательных или логарифмических неравенств.

Теоретические сведения

Простейшими среди неравенств с одной переменной являются **линейные неравенства**, т.е. неравенства вида $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\ge 0$, $ax+b\le 0$, где $a\ne 0$.

Определение. Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\le 0$, где $a\ne 0$, называют неравенствами второй степени с одной переменной (или **квадратными неравенствами**).

Решение квадратных неравенств состоит из 4 этапов:

1) Графиком квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\ne 0$ является парабола. Определяем направление ветвей параболы (при $a>0$ ветви параболы направлены вверх; при $a<0$ ветви параболы направлены вниз).

2) Решая уравнение $ax^2+bx+c=0$, находим нули функции.

3) Если уравнение имеет корни, то отмечаем корни на координатной прямой и через отмеченные точки проводим схематически параболу. Если уравнение не имеет корней, то схематически изображаем параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a>0$ или в нижней при $a<0$.

4) Находим решение неравенства с учетом смысла знака неравенства.

Определение. **Рациональными неравенствами** называются неравенства вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ge 0$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\le 0$, где

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ Q_m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m.$$

Если $Q_m(x) = 1$, то имеем целые рациональные неравенства, в частности квадратные.

Рациональные неравенства решают *методом интервалов*, который заключается в следующем. Рассмотрим решение неравенства $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$.

1) Находим нули многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

2) Эти точки отмечаем на координатной прямой. Нули $Q_m(x)$ отмечаем «выколотыми» точками.

3) Все эти точки разбивают координатную прямую на конечное число интервалов, на каждом из которых выражение в левой части неравенства $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ сохраняет свой знак. Чтобы определить знак левой части на всем интервале, достаточно определить знак $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в какой-либо точке этого интервала.

4) Определив, какой знак имеет левая часть на каждом интервале, запишем ответ с учетом смысла знака неравенства.

Квадратные неравенства также можно решать методом интервалов.

Решение типовых заданий

Линейные неравенства

Задание 1. Укажите наименьшее целое решение неравенства $-x + 0{,}5(x + 4) < 4$.

Решение. При решении линейных неравенств обычно переносят слагаемые, содержащие переменную, в левую часть неравенства, а остальные — в правую часть.

$-x + 0{,}5(x + 4) < 4 \Leftrightarrow -0{,}5x < 2$.

Имеем: $-0{,}5x < 2 \Leftrightarrow x > -4$.

Наименьшим целым решением является –3.

Ответ: –3.

Замечание. Типичной ошибкой при решении линейных неравенств является сохранение знака неравенства при умножении или делении на отрицательное число.

Задание 2. Найдите число целых решений неравенства $-3 \le \frac{x}{4} - 1 < 1$.

Решение. Исходное неравенство называется двойным неравенством. Его можно решать разными способами.

1-й способ (непосредственно).

$$-3 \le \frac{x}{4} - 1 < 1 \Leftrightarrow -3 + 1 \le \frac{x}{4} < 1 + 1 \Leftrightarrow -8 \le x < 8.$$

2-й способ (с помощью системы).

$$-3 \le \frac{x}{4} - 1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} - 1 \ge -3, \\ \frac{x}{4} - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} \ge -2, \\ \frac{x}{4} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -8, \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow -8 \le x < 8.$$

Количество целых чисел, входящих в промежуток $[-8;\ 8)$, равно 16.

Ответ: 16.

Квадратные неравенства

Решение квадратных неравенств разбивается на три случая в зависимости от значения дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ соответствующего квадратного уравнения:

1) $D > 0$;

2) $D = 0$;

3) $D < 0$.

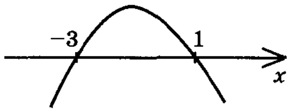
1-й случай $(D > 0)$

Задание 3. Укажите середину промежутка, на котором выполняется неравенство $-x^2 - 2x + 3 \ge 0$.

Решение.

1) Так как $f(x) = -x^2 - 2x + 3, a = -1 < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

2) Решим уравнение $-x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$. $D = 16 > 0$. Его корни: $x = 1$ и $x = -3$.

3) 

4) С учетом знака неравенства $(\geq)$ его решением будет промежуток $[-3;1]$.

Серединой промежутка $[-3;1]$ является число -1.

Ответ: -1.

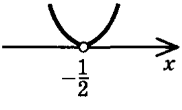
2-й случай $(D = 0)$

Задание 4. Решите неравенство: $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

Решение.

1) Так как $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$, $a = 4 > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

2) Уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ имеет совпавшие корни $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$. $D = 0$.

3) 

4) С учетом знака неравенства $(>)$ его решением является объединение промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Замечание. Решением неравенства $4x^2+4x+1 \ge 0$ является промежуток $(-\infty;+\infty)$. Решением неравенства $4x^2+4x+1 \le 0$ является только число –0,5.

Неравенство $4x^2+4x+1<0$ решений не имеет.

3-й случай $(D<0)$

Задание 5. Решите неравенство $-x^2-6x-10<0$.

Решение.

1) Так как $f(x)=-x^2-6x-10, a=-1<0$, то ветви параболы направлены вниз.

2) Уравнение $-x^2-6x-10=0$ решений не имеет, так как $D<0$.

3) 

4) С учетом знака неравенства $(<)$ его решением является промежуток $(-\infty;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

Замечание. Неравенство $-x^2-6x-10>0$ решений не имеет.

Метод интервалов

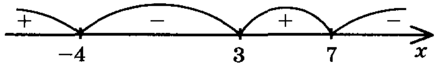
Задание 6. Найдите наименьшее целое решение неравенства $(x-3)(x+4)(7-x) \le 0$.

Решение. Находим корни уравнения $(x-3)(x+4)(7-x)=0$. Получаем: $x=3$, $x=-4$, $x=7$.

Отмечаем эти числа на координатной прямой.

Определяем знак выражения $(x-3)(x+4)(7-x)$ в каждом интервале.

Отметим, что в каждом из промежутков $(-\infty; -4)$, $(-4; 3)$, $(3; 7)$, $(7; +\infty)$ сохраняется знак, а при переходе через точки $-4, 3, 7$ знак изменяется, т.е. знаки чередуются.



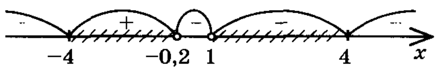
Решением неравенства является объединение промежутков $[-4; 3]$ и $[7; +\infty)$.

Наименьшим целым решением является число -4.

Ответ: -4.

Задание 7. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{x^2-16}{1+4x-5x^2} \ge 0$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители. Получим $\dfrac{(x-4)(x+4)}{-5(x-1)(x+0{,}2)} \ge 0$. Отметим нули числителя и знаменателя на координатной прямой и определим знаки.



Решением неравенства является объединение промежутков $[-4; -0{,}2)$ и $(1; 4]$.

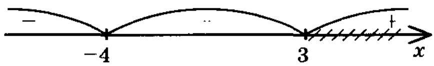
Наибольшим целым решением является число 4.

Ответ: 4.

Задание 8. Решите неравенство $(x-3)(x+4)^2 \ge 0$.

Решение. Корнями уравнения $(x-3)(x+4)^2 = 0$ являются числа $x = 3$ и $x = -4$, причем $x = -4$ – корень двойной кратности, т.е. при переходе через него знак не меняется.

Имеем:



Решение неравенства: $\{-4\} \cup [3; +\infty)$.

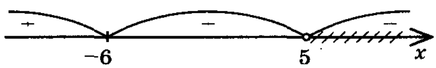
Ответ: $\{-4\} \cup [3; +\infty)$.

Замечание. Решением неравенства $(x-3)(x+4)^2 > 0$ является промежуток $(3; +\infty)$. Решением неравенства $(x-3)(x+4)^2 \le 0$ является промежуток $(-\infty; 3]$. Решением неравенства $(x-3)(x+4)^2 < 0$ является объединение промежутков $(-\infty; -4)$ и $(-4; 3)$.

Задание 9. Решите неравенство $\dfrac{x^2 + 12x + 36}{5 - x} \le 0$.

Нули числителя: $x_1 = x_2 = -6$ (т.е. -6 — корень двойной кратности).

Нуль знаменателя: $x = 5$.



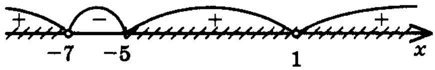
Решение неравенства: $\{-6\} \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $\{-6\} \cup (5; +\infty)$.

Задание 10. Решите неравенство $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{-x^2 - 6x + 7} \le 0$. В ответе укажите наименьшее натуральное решение.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$\frac{(x-1)(x+5)}{-(x-1)(x+7)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+7)} \ge 0.$$



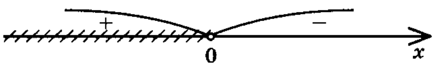
Решением неравенства является объединение промежутков: $(-\infty; -7) \cup [-5; 1) \cup (1; +\infty)$.

Наименьшее натуральное решение — число 2.

Ответ: 2.

Задание 11. Решите неравенство $\dfrac{-x^2 - 12}{x^5} \geq 0$.

Решение. Нули числителя: $-x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -12$, уравнение решений не имеет, значит, числитель не обращается в нуль ни в одной точке.
Нули знаменателя: $x = 0$.



Решением неравенства является промежуток $(-\infty; 0)$.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

Применение метода интервалов не ограничивается решением рациональных неравенств. Универсальность метода основана на следующем свойстве непрерывных функций: «Если на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак».

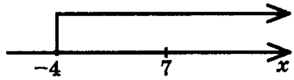
Задание 12. Решите неравенство $\sqrt{x+4}(x-7) \geq 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+4}(x-7)$.

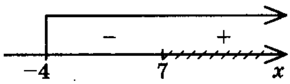
1. Найдем область определения функции. Так как арифметический корень определен только для неотрицательных чисел, то решим неравенство $x + 4 \geq 0$. Имеем: $D(f) = [-4; +\infty)$.

2. Найдем нули функции: $x = -4$ и $x = 7$.

3. Отметим область определения и нули функции на координатной прямой.



4. Определим знак функции $f(x) = \sqrt{x+4}(x-7)$ в каждом интервале.



Решение неравенства: $\{-4\} \cup [7; +\infty)$.

Ответ: $\{-4\} \cup [7; +\infty)$.

Замечание. Решением неравенства $\sqrt{x+4}(x-7) > 0$ является промежуток $(7;+\infty)$.

Решением неравенства $\sqrt{x+4}(x-7) \le 0$ является промежуток $[-4; 7]$.

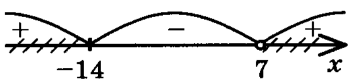
Решение неравенств часто используется для нахождения области определения функции.

Задание 13. а) Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x+14}{x-7}}.$$

Найдем область определения, решив неравенство

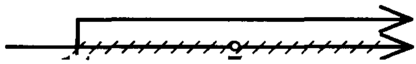
$$\frac{x+14}{x-7} \ge 0.$$



Ответ: $D(y) = (-\infty; -14] \cup (7; +\infty)$.

б) Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{x+14}}{x-7}$.

Решим систему: $\begin{cases} x+14 \geq 0, \\ x-7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -14, \\ x \neq 7. \end{cases}$

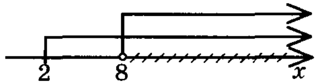


Решением системы является объединение промежутков: $[-14; 7) \cup (7; +\infty)$

Ответ: $D(y) = [-14; 7) \cup (7; +\infty)$.

в) Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{\sqrt{x-2}}{x-8}}$.

Решим систему: $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8.$



Ответ: $D(y) = (8; +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{4}.$$

2. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(4-x)(x+5) \geq 0.$$

3. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\frac{4-x}{x+5} \geq 0$?

4. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{x+9}{2-x}}$?

5. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $(x+5)^2 \le 25 - x^2$?

6. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$-7 < 3 - 2x < 13.$$

7. Укажите наименьшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} 3x + 14 > 5, \\ 2{,}5x \le 10. \end{cases}$

8. Решите неравенство $x^2 - 20x + 100 \le 0$.

9. Укажите наибольшее решение неравенства

$$\sqrt{12 - x} \ge -4.$$

10. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x+1}$.

11. Укажите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{(x^2 - 10x + 25)x}{x^2 - 9} < 0.$$

12. Укажите число целых решений неравенства

$$\frac{(x+2)(x-4)}{-x^2 + 4x - 4} \ge 0.$$

13. Укажите число целочисленных решений ныеравенства

$$\frac{\sqrt{x^2 - 36}}{(8 - x)x} \ge 0.$$

14. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5x - 4(2x - 1) > 3(x + 2) \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases}$ и укажите наибольшее целое решение.

15. Укажите число целочисленных решений неравенства

$$\frac{\sqrt{x^2 - 36} + 1}{(8 - x)x} \geq 0.$$

16. Найдите корень уравнения $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} = 0$, удовлетворяющий неравенству $-(5 - 2x) > -(6{,}5 - 3x)$.

17. Среди решений уравнения $\frac{2x - 2}{x + 3} + \frac{x + 3}{x - 3} = 5$ найдите те, которые не удовлетворяют неравенству

$$-x^2 - 7x + 8 > 0.$$

18. Найдите сумму целых решений неравенства

$$\frac{9 - x^2}{3x^2 - 2x - 1} \geq 0.$$

19. Укажите число целых решений неравенства

$$\frac{(x - 2)\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{5 - x} \geq 0.$$

20. Укажите среднее арифметическое целых решений неравенства $\frac{(x^2 + 7)(3 - x)}{x + 4} > 0$.

21. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\frac{x + 6}{x - 5} > 1$.

22. Укажите сумму целых чисел, **не являющихся** решениями неравенства $\frac{4x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 3x + 1} > 0$.

23. Найдите наибольшее целое решение двойного неравенства

$$-1 \le \frac{x+1}{2-x} < 1.$$

24. Найдите целое решение неравенства

$$\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{8}{x^2-1} < 0.$$

25. Укажите число целых решений неравенства

$$\frac{10+3x-x^2}{7+\sqrt[4]{x}} \ge 0.$$

26. Укажите наименьшее значение x, при котором выражение $\sqrt{x-6} + \sqrt{x+3}$ имеет смысл.

27. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^3 - 4x^2 \ge 0, \\ x \le 0. \end{cases}$

28. Найдите произведение натуральных решений неравенства

$$\frac{x^3 - 27}{x^4 - \frac{16}{81}} \le 0.$$

29. Найдите сумму натуральных решений неравенства

$$\frac{x^3 - 4x^2 + x - 4}{2-x} \ge 0.$$

30. Укажите целое число, входящее в область определения функции $y = \sqrt{\frac{-5}{x^2-6x+8}}$.

31. Решите неравенство $x^4 + 2x^2 - 3 \le 0$. В ответе запишите длину промежутка, на котором выполняется неравенство.

32. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 \le 0, \\ x^4 - 81x + 1000 > 0. \end{cases}$

33. Укажите число целых чисел, входящих в область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{-x^2 + 36}}{x + 2}$.

34. Укажите число целых чисел, входящих в область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{-x^2 + 36}}{x + 2}}$.

35. Укажите число целых решений неравенства

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{-x^2 + 5x - 6} \ge 0.$$

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

36. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{20 + x - x^2}}{2x - 3} \le \dfrac{\sqrt{20 + x - x^2}}{x - 6}$.

37. Решите неравенство $\dfrac{(x^4 - 2x^3 + 2x - 1)(x^2 - 4x + 4)}{7 - 6x - x^2} \ge 0.$

38. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}(x^2 + 3x - 18)(4x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - 5x + 6)(3x^2 - 8x + 14)} \le 0.$$

Иррациональные уравнения

Данные уравнения традиционно встречаются и в заданиях *части I*, и в заданиях *части II*. В заданиях *части II* часто встречаются уравнения, требующие нестандартных подходов к их решению.

Теоретические сведения

Решение иррациональных уравнений часто приводит к появлению посторонних корней, поэтому их решение предполагает два подхода:

1. Решение без равносильных преобразований, но при этом необходима проверка.

2. Использование равносильных преобразований.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

или **(I)**

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x). \qquad \text{(II)}$$

$$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \\ f(x) = 0. \end{array}\right. \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

$$\sqrt[3]{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{array}\right. \qquad \text{(IV)}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

$$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^3(x). \qquad \text{(VI)}$$

Для любого действительного числа a:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{ если } n \text{ четно;} \\ a, \text{ если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \qquad (*)$$

Решение типовых заданий

Простейшие иррациональные уравнения

Рассмотрим сначала простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = a, a \geq 0, n \in N,\ n > 1$, решаемые с помощью определения арифметического корня.

Задание 1. Решите уравнение $\sqrt{8 - \dfrac{x}{4}} = 6$.

Решение. По определению арифметического корня имеем:

$$8 - \frac{x}{4} = 6^2.$$

Далее: $\dfrac{x}{4} = 8 - 36, \dfrac{x}{4} = -28,\ x = -112.$

Ответ: -112.

Задание 2. Решите уравнение $\sqrt[3]{35 - x^2} = 2$.

Решение. Имеем:

$35 - x^2 = 2^3,\ 35 - x^2 = 8,\ x^2 = 27,\ x = \pm\sqrt{27},\ x = \pm 3\sqrt{3}.$

Ответ: $\pm 3\sqrt{3}$.

Рассмотрим решение уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, $n \in N,\ n > 1$.

Задание 3. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{4x}$.

Решение.

1-й способ. Возводим обе части уравнения в квадрат, решаем квадратное уравнение и делаем проверку.

Имеем: $x^2 - 5 = 4x,\ x^2 - 4x - 5 = 0,\ x = -1$ или $x = 5$.

Проверка:

при $x = -1$ выражение $\sqrt{x^2 - 5}$ не имеет смысла;

при $x = 5$ получаем верное равенство $\sqrt{5^2 - 5} = \sqrt{4 \cdot 5}$.

2-й способ. По схеме равносильных преобразований (I):

$$\sqrt{x^2-5}=\sqrt{4x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5=4x, \\ 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=5, \end{array}\right. \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: 5.

Задание 4. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2-5}=\sqrt[3]{4x}$.

Решение. Так как возведение в куб не приводит к появлению посторонних корней, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2-5=4x$ и проверка не нужна.

Получаем $x=-1$ или $x=5$.

Ответ: -1; 5.

Задание 5. Решите уравнение

$$x^2-6x+\sqrt{x-4}=\sqrt{x-4}-5.$$

Решение. При решении данного уравнения нельзя забывать об области определения уравнения.

Имеем:

$$x^2-6x+\sqrt{x-4}=\sqrt{x-4}-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x=-5, \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=5, \end{array}\right. \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: 5.

Задание 6. Найдите сумму корней уравнения

$$(2x-3)\sqrt{2x^2-5x+2}=0.$$

Решение. По схеме равносильных преобразований (III) имеем:

$$(2x-3)\sqrt{2x^2-5x+2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2 \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0, \\ 2x-3=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{2}, x \ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} x=2, x=\frac{1}{2}, \\ x=1{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Сумма корней равна 2,5.

Ответ: 2,5.

Задание 7. Найдите произведение корней уравнения

$$(2x-3)\sqrt[3]{2x^2-5x+2}=0.$$

Решение. По схеме равносильных преобразований (IV) имеем:

$$(2x-3)\sqrt[3]{2x^2-5x+2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1{,}5, \\ x=0{,}5, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Произведение корней равно 1,5.

Ответ: 1,5.

Рассмотрим решение уравнений, которые чаще других встречаются в заданиях ЕГЭ. Они решаются с помощью возведения в соответствующую степень.

Задание 8. Решите уравнение $\sqrt{x+16}-x+4=0$.

Решение. Сначала, как говорят, «уединим корень», т.е. представим уравнение в виде $\sqrt{x+16}=x-4$.

1-й способ.

Возведем обе части уравнения в квадрат, решим квадратное уравнение и выполним проверку.

$x + 16 = (x - 4)^2$, $x + 16 = x^2 - 8x + 16$, $x^2 - 9x = 0$, $x = 0$ или $x = 9$.

Проверка: при $x = 0$ $\sqrt{0 + 16} = 0 - 4, \sqrt{16} = -4$ неверно;

При $x = 9$ $\sqrt{9 + 16} = 9 - 4, \sqrt{25} = 5$ верно.

2-й способ.

По схеме (V)

$$\sqrt{x+16} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 16 = (x-4)^2, \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = 9, \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Ответ: 9.

Задание 9. Решите уравнение $\sqrt[3]{x + 2 - 2x^2} - x = 0$.

Решение. Сначала «уединим корень», т. е. представим уравнение в виде $\sqrt[3]{x + 2 - 2x^2} = x$. Так как возведение в куб не приводит к появлению посторонних корней, то исходное уравнение равносильно уравнению $-2x^2 + x + 2 = x^3$ и проверка после нахождения корней уравнения не нужна.

Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения $-x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$.

Сгруппируем слагаемые по два и вынесем общий множитель. Получим: $-x^2(x + 2) + (x + 2) = 0, (x + 2)(1 - x^2) = 0$.

Имеем: $x = -2$, $x = 1$, $x = -1$.

Ответ: -2; -1; 1.

Задание 10. Решите уравнение $\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1$. Сначала «уединим корень», т. е. представим уравнение в виде $\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1$.

Решение.

По схеме (V)

$$\sqrt{x^3 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = (x-1)^2, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение: $x^3 - 3x + 1 = x^2 - 2x + 1$,

$x^3 - x^2 - x = 0$, $x(x^2 - x - 1) = 0$.

Корни уравнения $x = 0$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Вернемся к системе.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \\ x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \end{array}\right. \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Проверка корней непосредственной подстановкой в уравнение была бы технически сложна. Поэтому использование схемы равносильных преобразований в данном задании рациональнее.

Ответ: $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Наибольшие трудности при решении иррациональных уравнений возникают, если требуется применить следующее свойство корня n-й степени. (*)

Задание 11. Найдите наибольший корень уравнения $\sqrt{(x^2 - x - 6)^2} = x - 2$.

Решение. Так как $\sqrt{a^2} = |a|$, то имеем:

$$\sqrt{(x^2 - x - 6)^2} = x - 2 \Leftrightarrow |x^2 - x - 6| = x - 2. \quad (1)$$

Замечание. При решении уравнений вида $|f(x)| = g(x)$ используют следующие схемы:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \quad \text{или}$$

$$|f(x)|=g(x) \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ f(x)=g(x);\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ f(x)=-g(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

В решении задания 11 мы используем первую схему, так как правая часть уравнения (1) проще, чем его левая часть.

Имеем: $|x^2-x-6|=x-2 \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-x-6=x-2,\\ x^2-x-6=2-x,\end{array}\right.\\ x-2\ge 0.\end{cases}$

Решим уравнения. Корни первого уравнения $x=1\pm\sqrt{5}$. Корни второго уравнения $x=\pm 2\sqrt{2}$. Отберем корни:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\pm\sqrt{5},\\ x=\pm 2\sqrt{2},\end{array}\right.\\ x\ge 2\end{cases} \iff \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{5},\\ x=2\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Чтобы выбрать наибольший корень, сравним $1+\sqrt{5}$ и $2\sqrt{2}$. Сравнить квадраты этих чисел, т.е. $6+2\sqrt{5}$ и 8. Так как $6+2\sqrt{5}>8$, то $1+\sqrt{5}>2\sqrt{2}$.

Ответ: $1+\sqrt{5}$.

Задание 12 Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[3]{(x^2-x-6)^3}=x-2$.

Решение. Так как $\sqrt[3]{a^3}=a$, то

$$\sqrt[3]{(x^2-x-6)^3}=x-2 \iff x^2-x-6=x-2 \iff x=1\pm\sqrt{5}.$$

Так как средним арифметическим чисел a и b называется выражение вида $\frac{a+b}{2}$, то имеем:

$$\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}=1.$$

Ответ: 1.

Задание 13. Решите уравнение $(\sqrt{x^2 - x - 6})^2 = x - 2$.

Замечание. $(\sqrt{a})^2 = a$ при $a \geq 0$.

Решение.

Имеем: $(\sqrt{x^2 - x - 6})^2 = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = x - 2, \\ x^2 - x - 6 \geq 0. \end{cases}$

Уравнение имеет корни $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

Решение неравенства: $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.

Неравенству удовлетворяет только корень $x = 1 + \sqrt{5}$.

Ответ: $1 + \sqrt{5}$.

Введение новой переменной

Иногда иррациональное уравнение становится более компактным, если ввести новую переменную.

Задание 14. Найдите наименьший корень уравнения

$$x^2 + 3 = 1{,}5\,(x + 4) + \sqrt{2x^2 - 3x + 2}.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на 2, тогда получим:

$$2x^2 + 6 = 3\,(x + 4) + 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2},$$

$$2x^2 - 3x - 6 = 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2}.$$

Введем новую переменную $a = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$. Отметим, что $a > 0$. Тогда исходное уравнение имеет вид $a^2 - 2a - 8 = 0$ и его корни $a = -2, a = 4$. Учитывая, что $a > 0$, получим $a = 4$.

Остается решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4$, его корни $x = -2$ и $x = 3{,}5$. Наименьшим является -2.

Ответ: -2.

Задание 15. Решите уравнение $\sqrt{4x + 1} + \sqrt{3x - 2} = 5$.

Решение.

Пусть $a = \sqrt{4x+1}$, $b = \sqrt{3x-2}$. Отметим, что $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Решим систему $\begin{cases} a^2 = 4x+1 \ (1), \\ b^2 = 3x-2 \ (2), \\ a+b=5, \\ a \geq 0,\ b \geq 0. \end{cases}$

Из (1) и (2) можно получить, что $3a^2 - 4b^2 = 11$.

Решим систему $\begin{cases} 3a^2 - 4b^2 = 11, \\ a+b=5, \\ a \geq 0,\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = 2. \end{cases}$

Учитывая, что $a = \sqrt{4x+1}$, $b = \sqrt{3x-2}$, найдем, что $x = 2$.

Ответ: 2.

Задание 16. Решите уравнение

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}} = 2.$$

Решение. Пусть $y = \sqrt{x-4}$, $y \geq 0$, тогда исходное уравнение имеет вид:

$$\sqrt{y^2-2y+1} - \sqrt{y^2-6y+9} = 2.$$

$$\sqrt{(y-1)^2} - \sqrt{(y-3)^2} = 2,\ |y-1| - |y-3| = 2.$$

Решим последнее уравнение на каждом из трех промежутков.

При $y \leq 1$: $1 - y + y - 3 = 2$, $-2 = 2$ неверно.

При $1 < y < 3$: $y - 1 + y - 3 = 2$, $y = 3 \notin (1;\ 3)$.

При $y \geq 3$: $y - 1 - y + 3 = 2$, $2 = 2$ верно.

Итак, решением уравнения с модулем является промежуток $[3;\ +\infty)$.

Так как $y = \sqrt{x-4}$, то $\sqrt{x-4} \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 13$.

Ответ: $[13;\ +\infty)$.

Нахождение области определения уравнения

При решении некоторых иррациональных уравнений с самого начала полезно найти область определения уравнения (в дальнейшем ООУ), иногда это дает ключ к их решению.

Задание 17. Решите уравнение $\sqrt{x-7}+\sqrt{3-x}=92.$

Решение.

Найдем ООУ, для этого решим систему $\begin{cases} x-7 \geq 0, \\ 3-x \geq 0. \end{cases}$

Система решений не имеет, значит, и исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Задание 18. Решите уравнение

$$\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0.$$

Решение.

Найдем ООУ, для этого решим систему

$$\begin{cases} 11x+3 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ 9x+7 \geq 0, \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ — корень уравнения.

Ответ: 2.

Использование свойств функций

В нестандартных ситуациях при решении иррациональных уравнений помогает использование монотонности функций, стоящих в левой и правой частях уравнения.

Задание 19. Решите уравнение $\sqrt{x-7}=13-x.$

Решение. Так как $y=\sqrt{x-7}$ возрастает на промежутке $[7;+\infty)$, а $y=13-x$ — убывающая функция на множестве всех действительных чисел, то уравнение может иметь не более одного решения.

Проверкой убеждаемся, что $x = 11$ — корень.

Ответ: 11.

Решим уравнение из задания 15 другим способом.

Задание 20. Решите уравнение $\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 5$.

Решение. Так как функция $y = \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2}$ возрастает на множестве $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, то каждое свое значение она принимает один раз, в том числе и значение 5. Так как $y(2) = 5$, значит, $x = 2$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: 2.

Системы иррациональных уравнений

Задание 21. Решите систему $\begin{cases} \sqrt{x+3y+1} = 2, \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y-6. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим 1-е уравнение:

$$\sqrt{x+3y+1} = 2 \Leftrightarrow x+3y+1 = 4.$$

Выразим x через y и подставим во 2-е уравнение

$$\begin{cases} x = 3-3y, \\ \sqrt{2(3-3y)-y+2} = 7y-6. \end{cases}$$

Корнем последнего уравнения является $y = 1$, тогда имеем:

$$\begin{cases} y = 1, \\ x = 3-3\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: (0; 1).

Задачи для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Решите уравнение $\sqrt{7-x^2}=\sqrt{-6x}$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

2. Решите уравнение $\sqrt{19-x^2}=3$.

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

3. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2-2x}=2$.

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

4. Решите уравнение $x^2-5x+\sqrt{2-x}=6+\sqrt{2-x}$.

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

5. Решите уравнение $\sqrt{x-8}\cdot\sqrt[4]{x+2}=\sqrt{x-8}$.

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите наименьший корень.)

6. Решите уравнение $\sqrt{3-2x}=6+x$.

7. Решите уравнение $\sqrt{x^2-3x+11}-5=x^2-3x$. В ответе укажите среднее арифметическое его корней.

8. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^3+12x^2-11x-2}=0.$$

9. Решите уравнение $\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-5x+12}=3$.

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

10. Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt[3]{(x^2+2)^3} = 3x.$$

11. Решите уравнение $\sqrt{x^3 - 7x + 4} = x - 2$. В ответе укажите целое число, ближайшее к корню уравнения.

12. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - 1 = 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$. В ответе укажите число корней.

13. Найдите произведение корней уравнения

$$10\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} - 3 = 0.$$

14. Решите уравнение $\sqrt{4x+2} - x = 0$. В ответе укажите целое число, ближайшее к корню уравнения.

15. Решите уравнение $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = 4$. В ответе укажите число корней.

16. Найдите сумму корней уравнения

$$(x-1)\sqrt{2 - 3x - 2x^2} = 0.$$

17. Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt{2x^2 - 2} = 5 - x^2.$$

18. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[4]{(x+1)^4} = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$.

19. Решите уравнение $\sqrt{5x-4} = \sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

20. Решите уравнение $\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2 = 9x + 6$.

21. Решите уравнение $\sqrt{3x+7} + \sqrt{x+6} + \sqrt{17x-15} = 13$.

22. Решите уравнение $\sqrt{129 - x} = 3x - 13$.

23. Решите уравнение

$$\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 - 2x - 15} + (x + 3)(200 - x) = 0.$$

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

24. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} - 1 + \frac{1}{x}(\sqrt{4x - x^2 - 3} + 1) = 0.$$

25. Решите уравнение $x^2 + 4x + 25 + 6(x + \sqrt{x + 5}) = 0$.

26. Решите систему $\begin{cases} \sqrt{x - y + 5} = 3, \\ \sqrt{x + y - 5} = 11 - 2x. \end{cases}$

27. Решите уравнение

$$\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}.$$

28. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + 2x + x^2} + \sqrt{26 + 3x - 5x^2} = x + 1.$$

29. Решите уравнение $\sqrt[4]{1 - x} + \sqrt[4]{x + 15} = 2$.

Тригонометрические уравнения

Данные уравнения могут присутствовать в заданиях *части I* и *II*. *А, В, С.* В заданиях *части I* обычно предлагаются простейшие уравнения. При решении тригонометрических уравнений в вариантах ЕГЭ приходится применять различные методы решения уравнений, иногда решение тригонометрического уравнения является одним из этапов решения показательного, логарифмического уравнений или исследования функции. Перед изучением данной темы полезно повторить теоретические сведения, изложенные в теме «Преобразования тригонометрических выражений».

Теоретические сведения

Общие формулы:

$$\sin x = a,\ -1 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z \quad (1)$$

$$\cos x = a,\ -1 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z \quad (4)$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \quad (5)$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a \quad (6)$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \quad (7)$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a \quad (8)$$

Особые случаи:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \quad (9)$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z \quad (10)$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in Z \quad (11)$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z \quad (12)$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \quad (13)$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \quad (14)$$

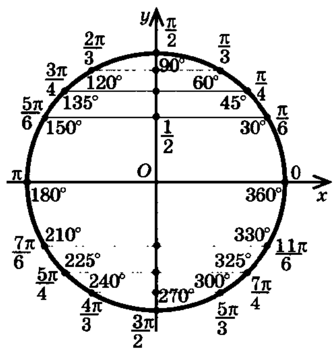
Находить значения арксинусов (арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов) некоторых углов помогает следующая таблица.

Угол / Значения	0	$\frac{\pi}{6}=30°$	$\frac{\pi}{4}=45°$	$\frac{\pi}{3}=60°$	$\frac{\pi}{2}=90°$
arcsin ↑	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccos ↑	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
arctg ↑	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
arcctg ↑	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Например: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

				$\frac{\pi}{3}=60°$	
arcsin ↑				$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

Тригонометрическая окружность



Решение типовых задач

Рассмотрим простейшие уравнения и на примере их решения покажем, как отвечать на дополнительные вопросы. Такие вопросы — еще одна особенность ЕГЭ по математике: обычно требуется не только решить тригонометрическое уравнение, но из полученного семейства решений выбрать те, которые удовлетворяют некоторым условиям.

Простейшие уравнения (дополнительные вопросы)

Задание 1. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. По формуле (1) имеем:

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ k \in Z;\ x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

При ответах на дополнительные вопросы удобнее представить решения в виде объединения двух семейств решений

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z\ (1), \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z\ (2). \end{array}\right. \qquad (I)$$

Дополнительные вопросы к заданию 1.

А) *Найдите наименьший положительный корень.*

Выбираем наименьшее положительное решение из каждого семейства. Из (1) имеем $x = \frac{\pi}{3}$, из (2) $x = \frac{2\pi}{3}$.

Наименьшим из них будет $\frac{\pi}{3}$.

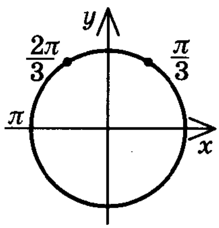
Ответ: $\frac{\pi}{3}$ или $60°$.

Б) *Найдите наибольший отрицательный корень.*

При $k = -1$ из (1) имеем $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$. При $n = -1$ из (2) имеем $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}$. Наибольшим из них будет $-\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{4\pi}{3}$ или $-240°$.

В) *Укажите те корни уравнения, для которых* $\cos x > 0$.



Отметим все решения уравнения (I) на тригонометрической окружности. Из этих решений надо выбрать те, для которых $\cos x > 0$. Известно, что $\cos x > 0$, если x лежит на дуге в I четверти или в IV четверти.

Получаем, что $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Г) *Укажите те корни, которые лежат в промежутке* $[-3\pi; -\pi]$.

Решим системы: $\begin{cases} -3\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k \le -\pi, \\ k \in Z \end{cases}$ (1*)

и $\begin{cases} -3\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le -\pi, \\ n \in Z \end{cases}$ (2*).

Имеем (1*): $\begin{cases} -\frac{5}{3} \le k \le -\frac{2}{3}, \\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow k = -1$ и $x = -\frac{5\pi}{3}$.

$$(2^*): \begin{cases} -\dfrac{11}{6} \le n \le -\dfrac{5}{6}, \\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow n = -1 \ \text{ и } \ x = -\dfrac{4\pi}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{5\pi}{3}$; $-\dfrac{4\pi}{3}$.

Д) *Сколько корней имеет уравнение на промежутке* $\left[-3\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$?

Решим системы: $\begin{cases} -3\pi \le \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \le \dfrac{\pi}{2}, \\ k \in Z \end{cases}$ (1**)

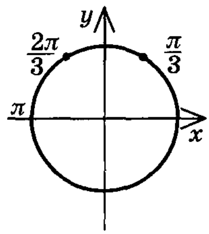
и $\begin{cases} -3\pi \le \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n \le \dfrac{\pi}{2}, \\ n \in Z \end{cases}$ (2**).

Решением (1**) являются $k = -1$ и $k = 0$. Решением (2**) является $n = -1$. Таким образом, получаем $2 + 1 = 3$ корня.

Ответ: 3 корня.

Е) *Найти ближайший к π корень уравнения.*

Отметим все корни уравнения (I) на тригонометрической окружности.

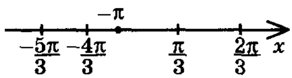


Искомым корнем является $\dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}$.

Ж) *Между какими корнями заключено число −π ?*

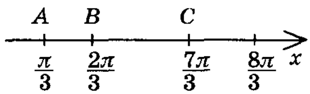
Отметим корни уравнения (I) на координатной прямой.



Ответ: $-\dfrac{4\pi}{3} < -\pi < \dfrac{\pi}{3}$.

З) *Найти наибольшую длину отрезка, внутри которого не содержится ни одного корня уравнения.*

Отметим корни уравнения (I) на координатной прямой.



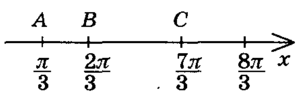
Среди отрезков AB или BC надо выбрать наибольший.

Длина AB равна $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Длина BC равна $\frac{7\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Наибольшая длина равна $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{3}$.

И) *Найти наименьшую длину отрезка, на котором есть два корня уравнения.*

Отметим корни уравнения (I) на координатной прямой.



Среди отрезков AB или BC надо выбрать наименьший.

Длина AB равна $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Длина BC равна $\frac{7\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

Наименьшая длина равна $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Задание 2. Решите уравнение $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$.

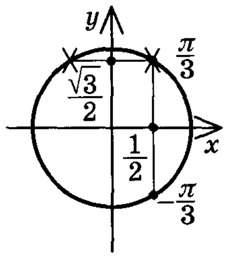
Решение. При решении тригонометрических уравнений полезно упростить аргумент. В данном случае применить формулы приведения (см. «Преобразование тригонометрических выражений» в разделе III.1). Имеем: $\sin x + \sin x = -1$, $\sin x = -\frac{1}{2}$.

По формуле (1) для решения простейших уравнений $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Задание 3. Решите уравнение $\dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$.

Решение. $\dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$



Отмечаем решения системы на тригонометрической окружности.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Задание 4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0$.

Решение.

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi n, \ n \in Z, \\ \pi^2 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}n \ (1), \\ x^2 < \pi^2 \ (2). \end{cases}$$

Решением неравенства (2) является промежуток $(-\pi; \pi)$. Отберем решения уравнения (1), принадлежащие промежутку $(-\pi; \pi)$. Это 0 и $\pm\frac{\pi}{2}$.

Ответ: 0; $\pm\frac{\pi}{2}$.

При решении тригонометрических уравнений необходимо помнить, что функции $\operatorname{tg} t$ или $\operatorname{ctg} t$ существуют не при всех действительных значениях t.

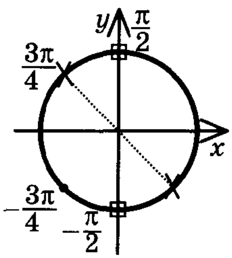
Задание 5. Решите уравнение

$$\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0.$$

Р е ш е н и е. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом существует.

$$\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0, \end{array}\right. \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}, \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$



При решении системы используем тригонометрический круг.

Решение системы:

$$x = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; n \in \boldsymbol{Z}; x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}; \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in \boldsymbol{Z}.$

Обратимся к более сложным уравнениям. Сначала рассмотрим общие методы решения уравнений, присущие как тригонометрическим, так и показательным и логарифмическим уравнениям, а затем обратимся к специальным методам, характерным только для тригонометрических уравнений.

Задание 6. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos^2(\pi - x) - 2\sin x + 2 = 0$. Ответ запишите в градусах.

Решение. Упростим аргумент, применив формулы приведения: $\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$. В левой части уравнения присутствуют две тригонометрические функции. Уменьшим количество функций.

Используем основное тригонометрическое тождество: $1 - \sin^2 x - 2\sin x + 2 = 0$. Получим квадратное уравнение относительно $\sin x$.

Введем новую переменную. Пусть $a = \sin x$, $-1 \le a \le 1\,(*)$, тогда уравнение примет вид $a^2 + 2a - 3 = 0$.

Решая квадратное уравнение, получим $a = -3$ или $a = 1$.
$a = -3$ не удовлетворяет условию $(*)$.

Если $a = 1$, то $\sin x = 1$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$. Вспомните, что необходимо указать в ответе.

Наибольший отрицательный корень получим при $k = -1$. Он равен $\dfrac{\pi}{2} - 2\pi = -\dfrac{3}{2}\pi$. Переведем в градусную меру, получим -270°.

Ответ: $-270°$.

Задание 7. Сколько корней имеет уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3\cos 2x = 2 \text{ на отрезке } \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]?$$

Решение. Сначала упростим аргумент, т.е. применим формулы приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3\cos 2x = 2, \quad \sin x - 3\cos 2x = 2.$$

Далее сравним аргументы, так как аргументы $\sin x$ и $\cos 2x$ отличаются в два раза, применим формулы двойного угла (см. «Преобразование тригонометрических выражений» в разделе III.1).

$$\sin x - 3\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 2.$$

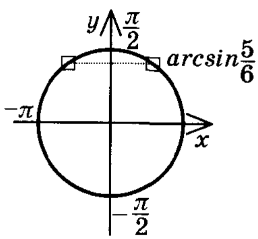
Теперь в уравнении две функции. Уменьшим число функций.

$$\sin x - 3\left(1 - \sin^2 x - \sin^2 x\right) = 2.$$

Пусть $a = \sin x, -1 \le a \le 1$. Решим уравнение

$$6a^2 + a - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = \frac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Получим: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = (-1)^m \arcsin\frac{5}{6} + \pi m, m \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$



Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$. Так как длина отрезка $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ меньше 2π, то можно использовать не координатную прямую, а тригонометрическую окружность.

Этому отрезку принадлежат два корня: $-\frac{\pi}{2}, \arcsin\frac{5}{6}$.

Ответ: 2.

Метод разложения на множители

Задание 8. Между какими корнями уравнения

$\sin 2x + \sin(-x) = 2\cos(-x) - 1$ заключено число $\frac{5\pi}{12}$?

Решение. Сначала упростим аргумент, используя свойство четности (нечетности) функций ($\cos x$ — четная функция, $\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ — нечетные функции).

$\sin 2x + \sin(-x) = 2\cos(-x) - 1,$

$\sin 2x - \sin x - (2\cos x - 1) = 0.$

Сравним аргументы тригонометрических функций. Применим формулы двойного угла.

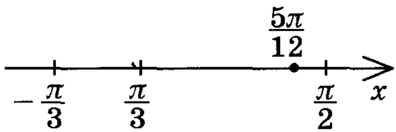
$2\sin x \cos x - \sin x - (2\cos x - 1) = 0,$

$\sin x(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) = 0,$

$(2\cos x - 1)(\sin x - 1) = 0.$

Уравнение имеет следующие корни: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Отметим корни на координатной прямой.



Получим, что $\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5\pi}{12} < \dfrac{\pi}{2}.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5\pi}{12} < \dfrac{\pi}{2}.$

Метод решения однородных уравнений

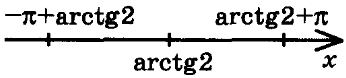
Задание 9. Найдите наименьшую длину отрезка, на котором есть два корня уравнения $\sin x - 2\cos x = 0\ (*)$.

Решение. Исходное уравнение является однородным уравнением 1-й степени, решается делением на $\cos x$ или на $\sin x$ ($\cos x \neq 0$, иначе $\cos x = 0$, и при подстановке в уравнение $(*)$ получим, что и $\sin x = 0$, а это противоречит основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Разделим обе части уравнения на $\cos x$ $(\cos x \neq 0)$.

Получим: $\operatorname{tg} x - 2 = 0, \operatorname{tg} x = 2, x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$.

Отметим корни уравнения на координатной прямой.



Наименьшая длина $\pi + \operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}2 = \pi$.

Ответ: π.

Уравнения $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$ и $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$ являются однородными уравнениями второй степени.' ИХ можно решить, разделив обе части уравнения либо на выражение $\sin^2 x$ (проверив, что $\sin^2 x \neq 0$), либо на $\cos^2 x$ (проверив, что $\cos^2 x \neq 0$). Выполните эти действия самостоятельно. Есть ли различия при решении этих уравнений?»

Задание 10. Решите уравнение
$1 - \sin(-x)\cos x - 3\cos^2(-x) = 0$.

Решение. Упростим аргумент, используя свойства четности $\cos x$ и нечетности $\sin x$. Получим:

$1 + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

$\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

$\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Получим однородное уравнение 2-й степени, которое решается делением, например, на $\cos^2 x$.

$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Введем новую переменную $a = \operatorname{tg} x$. Получим, что $\operatorname{tg} x = 1, \operatorname{tg} x = -2$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \boldsymbol{Z}; -\operatorname{arctg}2 + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Замечание. Уравнения $\cos x = -2$, $\sin x = -2$ не имеют решений, а уравнения $\operatorname{tg} x = -2$, $\operatorname{ctg} x = -2$ имеют бесконечное число решений.

Функционально-графический метод (основан на применении свойств тригонометрических функций)

Задание 11. Решите уравнение $\sin\left(\frac{37\pi}{2} + x\right) = 3x^2 + 1$.

Решение. Сначала упростим аргумент.
$\sin\left(\frac{37\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Исходное уравнение примет вид: $\cos x = 3x^2 + 1$.

Так как $-1 \le \cos x \le 1, 3x^2 + 1 \ge 1$, то уравнение имеет решение, если имеет решение система: $\begin{cases} \cos x = 1, \\ 3x^2 + 1 = 1. \end{cases}$ Решим второе уравнение. Получим $x = 0$. Проверим, удовлетворяет ли число 0 первому уравнению: $\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ (верно).

Ответ: 0.

Замечание. Уравнение $\sin x = 3x^2 + 1$ решений не имеет (проверьте самостоятельно).

Рассмотрим некоторые специальные методы решения тригонометрических уравнений.

Метод введения вспомогательного угла

Уравнение вида $a \sin t + b \cos t = c$ решается делением на выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$, $a^2 + b^2 \ne 0$.

Задание 12. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2$.

Решение. В уравнении $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$, $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим на $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$. Получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = 1.$$

Заменим $\frac{\sqrt{3}}{2}$ на $\cos\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}$ на $\sin\frac{\pi}{6}$

тогда $\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x - \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x = 1.$

Применим формулу «синуса разности». Преобразуем левую часть уравнения

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Наибольший отрицательный корень получим при $n = -1$. Он равен $\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}$.

Задание 13. Решите уравнение $\cos^2 x - 0{,}5|\cos x| \cdot \sin x = 0$.

Решение.

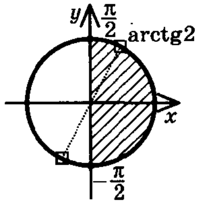
$$\cos^2 x - 0{,}5|\cos x| \cdot \sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x \ge 0 \ (1), \\ \cos^2 x - 0{,}5\cos x \sin x = 0 \ (2); \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0 \ (3), \\ \cos^2 x + 0{,}5\cos x \sin x = 0 \ (4). \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим отдельно каждую систему и объединим их решения.

$$(2):\ \cos x(\cos x - 0{,}5\sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x - 0{,}5\sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m. \end{array}\right.$$

Отметим решения на тригонометрической окружности и отберем те, которые удовлетворяют неравенству (1).

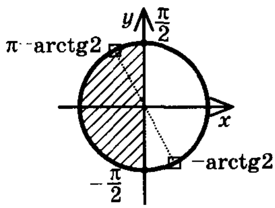


Решение первой системы: $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\operatorname{arctg}2+2\pi m$, n, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Решим вторую систему:

(4): $\cos^2 x + 0{,}5\cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -\operatorname{arctg}2 + \pi t, t \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Отметим решения на тригонометрической окружности и отберем те, которые удовлетворяют неравенству (3).



Решения второй системы: $\pi - \operatorname{arctg}2 + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi m, m \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg}2+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pi-\operatorname{arctg}2+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Системы уравнений

Задание 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin x + \sin y = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

В ответе запишите значение $x \in [0; 2\pi]$.

Решение.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x + \sin y = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ 2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} = -\sqrt{2}(*). \end{cases}$$

Решим отдельно (*):

$\cos\dfrac{x-y}{2} = -1 \Leftrightarrow x - y = 2\pi + 4\pi k, k \in \boldsymbol{Z}.$

Система имеет вид:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ x - y = 2\pi + 4\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3\pi}{4} - 2\pi k, \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Выберем $x \in [0; 2\pi]$: $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{4}$.

Задания для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Укажите наименьший положительный корень уравнения $2\sin x - 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.

2. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $1 - 2\sin x = 0$. Ответ запишите в градусах.

3. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $2\cos x - \sqrt{3} = 0$. Ответ запишите в градусах.

4. Укажите наименьший положительный корень уравнения $2\sqrt{3}\cos x - 3 = 0$. Ответ запишите в градусах.

5. Найдите сумму корней уравнения $\cos(x + 2000\pi) = 0$, принадлежащих промежутку $[0; 3\pi]$. Ответ запишите в градусах.

6. Определите количество корней уравнения $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$, принадлежащих промежутку $[0; 24\pi]$.

7. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}(3x + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ответ запишите в градусах.

8. Укажите корень уравнения $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащий промежутку $(0; \pi)$. Ответ запишите в градусах.

9. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x + \cos 2x = 2$. Ответ запишите в градусах.

10. Укажите наименьший положительный корень уравнения $2\cos^2(\pi - x) + 5\sin x - 4 = 0$. Ответ запишите в градусах.

11. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos 2x + 5\cos(-x) + 3 = 0$. Ответ запишите в градусах.

12. Найдите сумму корней уравнения $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$. Ответ запишите в градусах.

13. Укажите число корней уравнения

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3},$$

принадлежащих промежутку $[-\pi; 2\pi]$.

14. Укажите наименьший положительный корень уравнения $3\cos x + \sin(-2x) = 0$. Ответ запишите в градусах.

15. Укажите корень уравнения $\cos(\pi x)\left(\sin x + \sqrt{2}\right) = 0$, принадлежащий промежутку $[2; 3]$.

16. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$\frac{\sin x}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0.$$

17. Укажите число корней уравнения $\dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$ из промежутка $[-2\pi; 0]$.

18. Найдите сумму корней уравнения $\sin 2x(\mathrm{tg}x - 1) = 0$, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$. Ответ запишите в градусах.

19. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$. Ответ запишите в градусах.

20. Укажите число корней уравнения

$$6\sin^2 x + 5\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 2,$$

принадлежащих промежутку $[-\pi; 0]$.

21. Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}x$ на промежутке $\left[0; \frac{5}{2}\pi\right]$.

22. Решите уравнение $4\cos x = x^2 + 4$.

23. Найти наибольший отрицательный корень уравнения $(2\cos x - 1)\cdot\sqrt{\sin x} = 0$. Ответ запишите в градусах.

24. Найдите значение выражения $\cos x$, если известно, что $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x + 3\sin y = 4. \end{cases}$

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

25. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ \cos x - \cos y = -\sqrt{2} \end{cases}$.

26. Решите уравнение

$$\cos(0{,}5x) = \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 + x^2 - 16.$$

27. Решите уравнение

$$\sqrt{9x - 8 - x^2}\left(\cos 2x + 3\sqrt{3}\sin x - 4\right) = 0.$$

В ответе укажите количество корней.

28. Решите уравнение $\cos^2 x + 0{,}5|\cos x| \cdot \sin x = 0$.

29. Решите уравнение $\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x = -2$.

30. Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi x)\cos(3\pi x) + \sin(3\pi x) = 0$.

31. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi x)\cos(3\pi x) + \sin(3\pi x) = \sin(4\pi x).$$

32. Решите уравнение

$$x^2 - 8x + 20 = (2 - \sin(\pi x))(2 + \sin(\pi x)).$$

33. Решите уравнение

$$x^2 - 8x + 20 = (2 - \cos(\pi x))(2 + \cos(\pi x)).$$

34. Решите уравнение

$$\sqrt{(\cos x - 2)^2} - \sqrt{9\cos^2 x - 24\cos x + 16} = -4.$$

35. Решите уравнение

$$\sin^2 x + 6\sin x \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 9 = 9\cos^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

36. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}\sin^4\frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos^4\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$$

принимают равные значения.

Показательные уравнения и неравенства

Задания на решение показательных уравнений (неравенств) могут встретиться в любой части заданий ЕГЭ. В заданиях *части I* обычно предлагается непосредственно решить простейшие показательные уравнения (неравенства) или воспользоваться решением показательного уравнения для исследования некоторой функции. В *части II* можно встретить более сложные показательные уравнения (неравенства), решение которых обычно является одним из этапов выполнения задания.

Теоретические сведения

Свойства степени положительного числа

Если $a > 0$, $b > 0$, r, s — действительные числа, то:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \tag{1}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \tag{2}$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{rs} \tag{3}$$

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r \tag{4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \tag{5}$$

$$a^0 = 1 \tag{6}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \tag{7}$$

Свойства показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

1) Область определения: $D(y) = \boldsymbol{R}$.

2) Область значения: $E(y) = (0; +\infty)$.

3) Монотонность: при $a > 1$ функция возрастает на $\boldsymbol{R}$, при $0 < a < 1$ функция убывает на $\boldsymbol{R}$.

Простейшее показательное уравнение — это уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0, a \neq 1$. При $b > 0$ это уравнение имеет единственный корень $x = \log_a b$. При $b \leq 0$ оно не имеет корней.

На области определения показательного уравнения (неравенства) справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0, a \neq 1)$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Теорема 2. При $a > 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

Теорема 3. При $0 < a < 1$ неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Решение типовых заданий

Простейшие уравнения и неравенства

Задание 1. Решите уравнение $3^x = 81$.

Решение. *1-й способ.* Представим правую и левую части уравнения в виде степени с основанием 3 и от равенства степеней с одинаковым основанием перейдем к равенству показателей степеней: $3^x = 81$, $3^x = 3^4$, $x = 4$.

2-й способ. Это простейшее показательное уравнение, значит, $x = \log_3 81$, $x = 4$.

Ответ: 4.

Задание 2. Решите неравенство $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Представим правую часть неравенства в виде степени с основанием 2: $2^{x+2} > 2^{-\frac{2}{x}}$.
По теореме 2 данное неравенство равносильно неравенству $x + 2 > -\frac{2}{x}$.

Решая его, получим $\frac{x^2 + 2x + 2}{x} > 0$. Замечаем, что $x^2 + 2x + 2 > 0$ для любых действительных x. Получаем неравенство, равносильное данному: $\frac{1}{x} > 0$. Его решением является промежуток $(0; +\infty)$.

Ответ: $(0; +\infty)$.

При обосновании решения неравенства мы могли ссылаться на свойство монотонной (возрастающей) на своей области определения функции $y = 2^x$.

Выбирайте удобную для себя схему обоснований при решении уравнений и неравенств. Главное, чтобы был получен верный ответ. Особенность ЕГЭ состоит в том, что в заданиях части I контролируются только ответы. Решение заданий части II требует обоснований, причем схема этих обоснований может быть любой, удобной для ученика, но правильной. Мы же покажем возможные способы обоснований решений.

При решении показательных уравнений (неравенств) полезно сначала произвести преобразования, получив в обеих частях уравнения степени с одинаковыми основаниями.

Задание 3. Решите уравнение $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7} = \left(\frac{8}{5}\right)^{7x-3}$.

Решение. Представим правую часть уравнения в виде степени с основанием $\frac{5}{8}$. Получим $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7} = \left(\frac{5}{8}\right)^{-7x+3}$.

Применяя теорему 1, получим уравнение, равносильное данному: $3x - 7 = -7x + 3$, $10x = 10$, $x = 1$.

Ответ: 1.

Задание 4. Решите неравенство $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7} \le \left(\frac{8}{5}\right)^{7x-3}$.

Решение. Представим правую часть неравенства в виде степени с основанием $\frac{5}{8}$: $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7} \le \left(\frac{5}{8}\right)^{-7x+3}$. Применяя теорему 3, получаем неравенство, равносильное данному: $3x - 7 \ge -7x + 3$, $10x \ge 10$, $x \ge 1$.

Без использования теорем о равносильных преобразованиях это неравенство решаем следующим образом: учитывая монотонность функции ($\left(\frac{5}{8}\right)^t$ — убывающая функция, так как $0 < \frac{5}{8} < 1$), можно перейти к неравенству: $3x - 7 \geq -7x + 3, 10x \geq 10, x \geq 1.$

Ответ: $[1; +\infty)$.

Задание 5. Решите уравнение $0{,}04 \cdot (0{,}2)^{x-4} = 5^x$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(0{,}2)^2 \cdot (0{,}2)^{x-4} = (0{,}2)^{-x}$.

Применяя свойства (1) и (7) степени с одинаковым основанием, получаем $(0{,}2)^{x-2} = (0{,}2)^{-x}$. Из равенства степеней с одинаковыми основаниями следует равенство показателей степеней: $x - 2 = -x$, $2x = 2$, $x = 1$.

Ответ: 1.

Если в показательном уравнении несколько показательных выражений с одинаковым основанием, то выражения можно преобразовать с помощью свойств степени (1) и (2): $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ и $a^{b-c} = a^b : a^c$ $(a > 0)$. После таких преобразований уравнение обычно решается методом введения новой переменной или разложением на множители.

Метод введения новой переменной

Задание 6. Решите уравнение $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения с помощью свойств степени (1) и (2):

$$5^{-1} \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 5^x = 250,$$

$$\frac{1}{5} \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 5^x = 250,$$

$$5^{2x} + 25 \cdot 5^x - 1250 = 0.$$

Введем замену $5^x = a$, $a > 0$. Уравнение принимает вид $a^2 + 25a - 1250 = 0$. Решая уравнение, находим его корни: $a = 25$ или $a = -50$.

Учитывая условие $a > 0$, отбросим $a = -50$. Переходя к прежней переменной x, остается решить уравнение $5^x = 25$. Оно имеет корень $x = 2$.

Ответ: 2.

Метод разложения на множители

Задание 7. Решите уравнение $4^{x+1} - 2 \cdot 4^{x-2} = 124$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения с помощью свойств (1), (2) и вынесем за скобки степень с наименьшим показателем $\left(4^{x-2}\right)$:

$4^{x-2}\left(4^3 - 2\right) = 124,$

$4^{x-2} \cdot 62 = 124,$

$4^{x-2} = 2,$

$4^{x-2} = 4^{0,5},$

$x - 2 = 0,5,$

$x = 2,5.$

Ответ: 2,5.

Функционально-графический метод

Рассмотрим уравнения (неравенства), идея решения которых состоит в делении обеих частей уравнения на некоторое показательное выражение. Такая операция не приводит к потере корней (решений), потому что показательные выражения принимают положительные значения (см. область значений функции $y = a^x$).

Задание 8. Решите уравнение $3^x + 4^x = 7^x$.

Решение. Подбором устанавливаем, что корнем уравнения является $x = 1$. Докажем, что других корней нет. Так как $7^x > 0$, разделим обе части уравнения на выражение 7^x. Получим уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1.$

В левой части уравнения — сумма монотонно убывающих функций — монотонная функция (убывающая), поэтому любое свое значение эта функция принимает только один раз, в том числе и значение, равное 1. Значит, уравнение имеет единственный корень, который уже найден.

Ответ: 1.

Замечание. Уравнение $3^x + 4^x = 7$ также решается функционально-графическим методом, но без деления: в левой части — возрастающая функция, которая принимает значение 7 только в одной точке $x = 1$.

Используем прием деления на показательное выражение при решении однородных показательных уравнений (неравенств).

Если при замене показательных выражений, входящих в показательное уравнение, новыми переменными получается однородное уравнение, то этот тип показательных уравнений называют *однородными показательными уравнениями*. Например, если в уравнении $3 \cdot 4^x - 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$ заменить 2^x новой переменной a, а 3^x — новой переменной b, то получим однородное уравнение второй степени $3a^2 - ab - 2b^2 = 0$ (сумма показателей степеней каждого члена равна двум).

Однородное показательное уравнение обычно решается путем деления обеих частей уравнения на входящее в уравнение показательное выражение с наибольшим основанием и сведением данного уравнения к квадратному (можно делить и на любое показательное выражение, входящее в уравнение).

Метод решения однородных уравнений

Задание 9. Решите уравнение $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x = 5 \cdot 25^x$.

Решение. Данное уравнение является однородным (почему?). Разделим обе части уравнения на выражение 25^x, большее нуля для любых x.

$$2\cdot\left(\frac{4}{25}\right)^x-3\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^x=5,\ 2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x=5.$$

Получили квадратное уравнение относительно $\left(\frac{2}{5}\right)^x$.

Введем новую переменную $t=\left(\frac{2}{5}\right)^x, t>0$.

Уравнение $2t^2-3t-5=0$ имеет два корня $t=-1$ и $t=\frac{5}{2}$. С учетом условия $t>0$ отбрасываем $t=-1$. Остается решить уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{5}{2}$, $x=-1$.

Ответ: -1.

Задание 10. Решите неравенство $2\cdot4^x-3\cdot10^x<5\cdot25^x$.

Решение. $2\cdot\left(\frac{4}{25}\right)^x-3\cdot\left(\frac{10}{25}\right)^x<5$, $2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x<5$.

Введем новую переменную $t=\left(\frac{2}{5}\right)^x$, $t>0$.

Получим: $\begin{cases}2t^2-3t-5<0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<t<\frac{5}{2},\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\frac{5}{2}.$

Возвращаясь к прежней переменной x, получим, что неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^x>0$ верно для любых x. Остается решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^x<\frac{5}{2}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^x<\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$. Получаем $x>-1$.

Ответ: $(-1;+\infty)$.

Рассмотрим более сложные задания.

Задание 11. Решите уравнение $\left(3^{x^2}-81\right)\cdot\sqrt{1-x}=0$.

Решение. *1-й способ.* В основе решения уравнения лежит условие равенства произведения двух выражений нулю: произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а второй при этом не теряет смысл.

1) $3^{x^2}-81=0$, $3^{x^2}=3^4$, $x^2=4$, $x=2$ или $x=-2$. При $x=2$ подкоренное выражение отрицательно, значит, число 2 не является корнем уравнения.

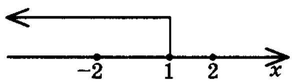
2) $\sqrt{1-x}=0$ при $x=1$. Это число является корнем данного уравнения, так как выражение $3^{x^2}-81$ имеет смысл при любом x.

Ответ: 1, −2.

2-й способ. Если решать уравнение с помощью равносильности, то решение основано на применении следующего утверждения:

$$f(x)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \text{ или } g(x)=0, \\ x\in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

Уравнение равносильно системе:



$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3^{x^2}-81=0, \\ \sqrt{1-x}=0, \end{array}\right. \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $1,-2$.

Системы показательных уравнений

Задание 12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{6x+2y}=6-2^{3x+y}, \\ \dfrac{6x+7+3y}{3x+y}=12-15x-5y. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы, получим $\left(2^{3x+y}\right)^2+2^{3x+y}-6=0$. Введем новую переменную $2^{3x+y}=t$, $t>0$. Решениями уравнения $t^2+t-6=0$ являются числа $t = 2$ или $t = -3$. С учетом ограничения, накладываемого на t, оставляем только значение $t = 2$.

Возвращаясь к неизвестным x и y, получим
$2^{3x+y} = 2, 3x + y = 1.$

Преобразуем второе уравнение системы к виду:

$$\frac{2(3x+y)+y+7}{3x+y} = -5(3x+y)+12.$$

$$\begin{cases} 3x+y=1, \\ \dfrac{2(3x+y)+y+7}{3x+y} = -5(3x+y)+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=1, \\ y+9=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3, \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$$

Ответ: $(1;-2)$.

Задачи для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби

1. Укажите наименьшее натуральное решение неравенства $2^{x-6} > -4$.

2. Укажите наибольшее натуральное решение неравенства $2^{\sqrt{5-x}} > -1$.

3. Решите уравнение $2^x = 0{,}5$.

4. Решите уравнение $5^{4x+1} = 625$.

5. Решите уравнение $28 \cdot 3^{2x} + x \cdot 3^{2x} = 0$.

6. Решите уравнение $6^{x+1} + 30 \cdot 6^x = 1$.

7. Решите уравнение $\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x} = 9$.

8. Решите уравнение $3^{x} = 27 \cdot \sqrt[4]{9}$.

9. Решите уравнение $2^{\frac{5x-1}{5x+2}} = 4$

10. Укажите наибольшее решение неравенства $5^{x-1} \le \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

11. Укажите наименьшее решение неравенства

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \le \frac{1}{\sqrt[5]{5}}.$$

12. Укажите число целочисленных решений неравенства $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} < 1$, принадлежащих отрезку $[-5; 4]$.

13. Решите неравенство $\sqrt{2^{x} - 2} \le 0$.

14. Укажите число целочисленных решений неравенства $2^{x^2} \ge 16$, принадлежащих отрезку $[-5; 5]$.

15. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y = \sqrt{243 - 3^{x^2}}$?

16. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+2}{x-2}} - 9}$?

17. Решите уравнение $5^{x} - 24 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{x} = 25$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

18. Укажите наименьшее целое решение неравенства $2^{x} - \left(\sqrt{2}\right)^{x} - 6 > 0$.

19. Решите уравнение $(0{,}25 - 2^{7-x^2})\log_3(2+5x) = 0$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней).

20. Найдите сумму корней уравнения $2^{\cos(\pi x)} = 1$, принадлежащих отрезку $[0;5]$.

21. Решите уравнение $2^{\left(\sqrt{2}-\sin(\pi x)\right)\left(\sqrt{2}+\sin(\pi x)\right)} = 4 + (x-7)^2$.

22. Найдите количество корней уравнения

$$\sqrt{2-2^{x^2}} \cdot \cos(\pi x) = 0.$$

23. Решите уравнение $3 \cdot 4^x - 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$.

24. Укажите количество целых решений неравенства

$$\left(3^x - 1\right)\left(81 - 3^x\right) > 0.$$

25. Укажите количество целых решений неравенства

$$\frac{\left(5^x - 5\right)\left(16 - 2^x\right)}{3^x} \geq 0.$$

26. Решите уравнение $5^{x^2+\left(\sqrt{x}\right)^2-2} = 5$.

27. Укажите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$.

28. Решите неравенство $(0{,}1)^{4x^2-2x-2} \geq (0{,}1)^{2x-3}$.

29. Решите уравнение $6^x - 7^x = 0$.

30. Укажите число целых решений неравенства

$$2^x + 2^{1-x} - 3 \leq 0.$$

31. Решите уравнение $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.

32. Найдите целое число, являющееся решением неравенства $\dfrac{2^{x+1}+1}{2-2^{x+1}} \geq 2$.

33. Решите уравнение $4^{x+1} + 19 \cdot 2^x - 5 = 0$.

34. Решите уравнение $3^{2x+5} - 2^{2x+7} + 3^{2x+4} - 2^{2x+4} = 0$.

35. Укажите наибольшее целое решение неравенства $2^{5x+6} - 7^{5x+2} - 2^{5x+3} - 7^{5x+1} > 0$.

36. Найдите значение выражения $x + y$, если $(x; y)$ – решение системы $\begin{cases} x - y = 2, \\ 4^x - 28 \cdot 2^y = 8 \end{cases}$.

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

37. Укажите число корней уравнения

$$3 \cdot 4^x - 14 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

38. Решите уравнение $8 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 1 = \left(\sqrt{-1-x}\right)^2 + x$.

39. Решите уравнение

$$\sqrt{\left(5^x - 6\right)^2} + \sqrt{\left(5^x - 125\right)\left(5^x - 5\right)} = 5^x - 6.$$

40. Решите уравнение $4^{\sin x} + 2^{1+\sin x} - 8 = 0$.

41. Решите уравнение $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$.

42. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y = \dfrac{9^x - 10 \cdot 3^x}{10 - 2x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y = \dfrac{-9}{10 - 2x}$.

43. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y = \dfrac{81^x - 10 \cdot 9^x}{10 - 2x}$ лежат не ниже соответствующих точек графика функции $y = \dfrac{-9}{10 - 2x}$.

44. Решите систему $\begin{cases} 4^{2x-y} + 8 = 6 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-y}, \\ \dfrac{6x - 7 - 2y}{2x - y - 2} = 5 - 2x + y. \end{cases}$

45. Решите уравнение $\left(\sqrt{5 + \sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - \sqrt{24}}\right)^x = 10.$

46. Решите неравенство $(1{,}25)^{1-x} < (0{,}64)^{2\left(1+\sqrt{x}\right)}$.

47. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = 2^{2x-1}$ и $g(x) = 12$ меньше 4.

48. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = 4^{2x+1}$ и $g(x) = 12$ не меньше 4.

49. Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b = 4^a - 2 \cdot 2^a$ и $c = 9 - 4^a$ меньше 8.

50. Найдите все значения x, при каждом из которых произведение значений выражений

$$\frac{9^x - 49}{9^x - 7} \text{ и } 36^x - 37 \cdot 6^x + 36$$

отрицательно.

51. Найдите все значения x, при каждом из которых произведение значений выражений

$$\frac{4^x - 0{,}25}{2^x - 0{,}5} \text{ и } 6^x - 37 \cdot 6^{0{,}5x} + 36$$

неотрицательно.

Логарифмические уравнения и неравенства

Среди заданий *части I* обязательно есть задания на решение логарифмических уравнений и логарифмических неравенств. Для решения этих заданий требуется применить определение логарифма и его свойства. Это задания обязательного уровня. В заданиях *части II* могут встретиться задания на исследование некоторой функции, при решении которых необходимо решить логарифмическое уравнение (неравенство). Также среди заданий *части II* могут быть задания на решение систем логарифмических уравнений.

Теоретические сведения

$\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область определения (ООУ) этого уравнения $x = a^b > 0$.

$\log_a f(x) = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область определения этого уравнения $f(x) > 0$. На этой области уравнение может иметь любое количество корней, в зависимости от функции $f(x)$.

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область определения этого уравнения задается системой $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ На этой области уравнение имеет корни, которые можно найти, решая уравнение $f(x) = g(x)$.

При решении логарифмических уравнений используются тождественные преобразования логарифмических выражений (см. Раздел III.1). Кроме тождеств, при решении уравнений надо помнить следующие формулы для любых x, y, таких, что $xy > 0$:

$$\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|. \tag{1}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|. \tag{2}$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, \ x \neq 0, \ n \in N. \tag{3}$$

Для решения логарифмических уравнений и неравенств используются свойства логарифмической функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

– Область определения: $D(y) = (0; +\infty)$.

– Область значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

– Монотонность: при $a > 1$ функция y возрастает на $D(y)$, при $0 < a < 1$ функция y убывает на $D(y)$.

При решении логарифмических уравнений и неравенств можно использовать любой из следующих способов рассуждений.

1-й способ. Решать уравнение, используя любые преобразования (кроме сужающих его область определения). Затем **обязательно выполнять проверку**, для того чтобы отбросить посторонние корни. Причем проверку проводить непосредственной подстановкой в уравнение. При этом находить область определения уравнения (ее еще называют областью допустимых значений x) не обязательно. Это полезно только в том случае, когда надо отбросить часть корней, тем самым упростив непосредственную подстановку в уравнение.

К преобразованиям, сужающим область определения логарифмических уравнений, относятся логарифмирование обеих частей уравнения, деление на выражение с переменной, извлечение корня четной степени и формальное применение некоторых логарифмических формул (без модулей).

2-й способ. Для решения логарифмических уравнений (неравенств) использовать **только равносильные преобразования**. Это можно сделать двумя способами: находить ОДЗ (область определения) уравнения (неравенства) и выполнять только равносильные преобразования на данной области определения или сразу использовать схемы равносильных преобразований.

Схемы равносильных преобразований при решении уравнений

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),\ a > 0,\ a \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Если неравенство $f(x) > 0$ решить сложно, а проще решить неравенство $g(x) > 0$, то используем следующую схему:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),\quad a > 0,\ a \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Схемы равносильных преобразований при решении неравенств

Знаки в исходных неравенствах могут быть следующими: $\leq$ (меньше или равно), $\geq$ (больше или равно), $<$ (меньше) или $>$ (больше). Приведем пример схемы решения логарифмического неравенства для одного знака ($\leq$). Схемы для остальных типов неравенств строятся аналогично с учетом изменения знака неравенства.

Если $0 < a < 1$, то

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Если $a > 1$, то $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ $\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Если в основании логарифма находится функция $g(x)$, то используем следующую схему:

$$\log_{g(x)} f(x) \le b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ 0 < g(x) < 1, \\ f(x) \ge g^b(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 1, \\ f(x) \le g^b(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) \ge g^b(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 1, \\ f(x) \le g^b(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение типовых заданий

Простейшие уравнения и неравенства

Задание 1. Решите уравнение $\log_{0,5}(x-1) = 2$.

Решение. Используя определение логарифма, получаем $x - 1 = (0{,}5)^2$, $x = 1 + 0{,}25$, $x = 1{,}25$.

Ответ: 1,25.

Замечание. При решении логарифмических уравнений только с помощью определения логарифма (как в задании 1) не требуется проверка. В остальных случаях, если решение происходит без применения равносильных преобразований, проверка должна быть обязательным этапом решения уравнения. Например, при решении уравнения $\log_3(x+1) = \log_3(-x-1)$ без равносильных преобразований получаем $x = -1$. Проверка показывает, что $x = -1$ — посторонний корень.

Задание 2. Решите неравенство $\log_{0,5}(x-1) < 2$.

Решение. *1-й способ.* Представим 2 в виде логарифма по основанию 0,5. $\log_{0,5}(x-1) < \log_{0,5} 0{,}25$. Область определения неравенства $x > 1$. Поскольку логарифмическая функция $\log_{0,5} t$ с основанием $0 < 0{,}5 < 1$ убывает, имеем $x - 1 > 0{,}25$, $x > 1{,}25$. С учетом области определения получаем $x > 1{,}25$.

2-й способ. С помощью равносильных преобразований решение неравенства можно записать следующим образом:

$$\log_{0,5}(x-1)<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0, \\ x-1>(0,5)^{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>1,25. \end{cases}$$

Решением системы является промежуток $(1,25;\ +\infty)$.

Ответ: $(1,25;\ +\infty)$.

Задание 3. Решите неравенство $\log_3(x+7)<\log_3(5-x)$.

Решение. Учитывая возрастание и область определения логарифмической функции $y=\log_3 t$, получим что исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x+7>0, \\ 5-x>0, \\ x+7<5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7<x<5, \\ 2x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7<x<5, \\ x<-1. \end{cases}$$

Решением системы неравенств является промежуток $(-7;-1)$.

Ответ: $(-7;-1)$.

Задание 4. Решите уравнение $\log_5 \log_2 \log_7 x = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение, начиная с внешнего логарифма. По определению логарифма:

$$\log_2 \log_7 x = 5^0,\ \log_7 x = 2^1,\ x = 7^2,\ x = 49.$$

Ответ: 49.

Решение уравнений (неравенств) с использованием свойств логарифма

Задание 5. Решите уравнение $\lg x^2 + \lg(x+4)^2 = -\lg\frac{1}{9}$.

Решение. *1-й способ.* Преобразуя уравнение с учетом свойств логарифма и формул (3) и (2), получим уравнение, равносильное данному:

$$2\lg|x| + 2\lg|x+4| = 2\lg 3 \Leftrightarrow \lg|x(x+4)| = \lg 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x(x+4)| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x+4)=3, \\ x(x+4)=-3. \end{array}\right.$$

Решая каждое из уравнений совокупности, получим четыре корня: $x_1 = -2 + \sqrt{7}$, $x_2 = -2 - \sqrt{7}$, $x_3 = -1$, $x_4 = -3$. Проверку делать не нужно, так как все преобразования были равносильными.

2-й способ. Применим свойство «логарифма произведения», т.е. $\lg x^2 + \lg(x+4)^2 = \lg\left(x(x+4)\right)^2$ и решим уравнение $\left(x(x+4)\right)^2 = 9$.

Ответ: $-2+\sqrt{7}$, $-2-\sqrt{7}$, -1, -3.

Задание 6. Решите неравенство

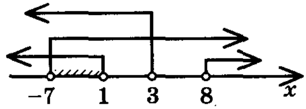
$$\log_3(x+7) < \log_3(5-x) - \log_{\frac{1}{3}}(3-x).$$

Решение. Сначала преобразуем неравенство с помощью свойств логарифма. Затем применим свойство логарифма произведения: $\log_3 x + \log_3 y = \log_3(xy)$ (для $x > 0$, $y > 0$) и 4-ю схему равносильных преобразований.

$$\log_3(x+7) < \log_3(5-x) + \log_3(3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+7) < \log_3\left((5-x)(3-x)\right), \\ 5-x>0, \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+7 < x^2 - 8x + 15, \\ x+7>0, \\ x<5, \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>8 \\ x<1 \end{array}\right. \\ x>-7 \\ x<3 \end{cases}$$



Ответ: $(-7;\ 1)$.

Метод введения новой переменной

Задание 7. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_9(-27x)} > \dfrac{1}{\log_3(-x)}$.

Решение. Преобразуем неравенство с помощью свойств логарифма.

$$\frac{2}{\log_3 27 + \log_3(-x)} > \frac{1}{\log_3(-x)},$$

$$\frac{2}{3 + \log_3(-x)} > \frac{1}{\log_3(-x)}.$$

Введем новую переменную $t = \log_3(-x)$. Неравенство примет вид: $\dfrac{2}{3+t} > \dfrac{1}{t}$, $\dfrac{t-3}{t(3+t)} > 0$. Решая неравенство с помощью метода интервалов, получим $-3 < t < 0$ или $t > 3$.

Остается решить неравенства: $-3 < \log_3(-x) < 0$, $\log_3(-x) > 3$. Область определения первоначального неравенства: $x \neq -1$, $x \neq -3^{-3}$, $x < 0$.

Так как основание логарифма больше единицы, то, решая первое неравенство, получим $-1 < x < -3^{-3}$. Решая второе неравенство, получим $x < -27$. Объединяя решения, получим ответ.

Ответ: $(-\infty;\ -27) \cup \left(-1;\ -\dfrac{1}{27}\right)$.

Метод разложения на множители

Задание 8. Решите уравнение

$$\log_5{}^3 x + 3\log_5{}^2 x = -\frac{1}{\log_x \sqrt{5}}.$$

В ответе запишите число корней уравнения.

Решение. Преобразуем уравнение с помощью свойств логарифма (ООУ: $x \neq 1$, $x > 0$).

$$\log_5{}^3 x + 3\log_5{}^2 x = -\log_{\sqrt{5}} x,$$

$$\log_5{}^3 x + 3\log_5{}^2 x = -2\log_5 x.$$

Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим на множители:

$$(\log_5{}^2 x + 3\log_5 x + 2) \cdot \log_5 x = 0.$$

Полученное уравнение на ООУ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\log_5 x = 0,\\ \log_5{}^2 x + 3\log_5 x + 2 = 0.\end{array}\right.$$

Решая каждое уравнение совокупности отдельно, получим $x = 1$, $x = 0{,}2$ и $x = 0{,}04$. С учетом области определения получаем, что корнями уравнения являются числа 0,2 и 0,04.

Ответ: 2.

Замечание. При решении уравнения произошло расширение области определения уравнения. Действительно, ООУ начального уравнения задавалась условиями $x \neq 1$, $x > 0$. После преобразований с помощью свойств логарифма (переход к новому основанию) ООУ уравнения стала $x > 0$. Обращайте внимание на изменение области определения уравнения при применении этого свойства логарифмов.

Задание 9. Решите неравенство

$$\log_5{}^3 x + 3\log_5{}^2 x \geq -\frac{1}{\log_x \sqrt{5}}.$$

Решение. Преобразуем неравенство с помощью свойств логарифма (ООУ: $x \neq 1$, $x > 0$), как это сделано в предыдущем задании. Получим

$$(\log_5^2 x + 3\log_5 x + 2)\log_5 x \geq 0,$$

$$(\log_5 x + 2)(\log_5 + 1)\log_5 x \geq 0.$$

Введем новую переменную $t = \log_5 x$ и решим неравенство $(t+2)(t+1)\,t \geq 0$ с помощью метода интервалов, учитывая, что $t \neq 0$.

Получим, что решением неравенства относительно t является объединение двух промежутков: $[-2;\ -1] \cup (0;\ +\infty)$. Переходя к прежней переменной x, получим: $-2 \leq \log_5 x \leq -1$ или $\log_5 x > 0$.

Так как основание логарифма больше единицы, то, решая первое неравенство, получим $0{,}04 \leq x \leq 0{,}2$. Решим второе неравенство: $x > 1$. Объединим решения.

Ответ: $(0{,}04;\ 0{,}2) \cup (1;\ +\infty)$.

Функционально-графический метод

Применение функционально-графического метода при решении логарифмических уравнений основано на свойствах монотонных и ограниченных функций. Обычно этот метод применяют, когда в уравнение входит логарифмическая функция и любая другая (степенная, показательная, тригонометрическая).

Задание 10. Решите уравнение $\log_2(3-x) = 6x^{2005} - 5$.

Решение. Можно заметить, что корнем уравнения является число 1. Докажем, что других корней нет. Функция $y = \log_2(3-x) = 6x^{200} - 5$ убывает на своей области определения (почему?). Функция $y = 6x^{200} - 5$ возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$. Следовательно, графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Абсцисса этой точки уже найдена. Получаем, что единственным корнем уравнения является $x = 1$.

Ответ: 1.

Задание 11. Решите неравенство

$$(10x - x^2 - 24)\log_2\left(\sin^2\frac{\pi}{2}x + 1\right) \geq 1.$$

Решение. Введем в рассмотрение две функции $y_1 = 10x - x^2 - 24$ и $y_2 = \log_2\left(\sin^2 \frac{\pi}{2} x + 1\right)$. Найдем области значений этих функций.

Графиком функции y_1 является парабола с вершиной $x_0 = 5$ и направленными вниз ветвями, значит, y_1 принимает значения от $-\infty$ до $y_1(5) = 1$, т.е. $y_1(x) \le 1$.

Так как $0 \le \sin^2 \frac{\pi}{2} x \le 1$, то $1 \le \sin^2 \frac{\pi}{2} x + 1 \le 2$ и $0 \le \log_2 (\sin^2 \frac{\pi}{2} x + 1) \le 1$. Значит, y_2 принимает значения от 0 до 1, т.е. $0 \le y_2(x) \le 1$. Произведение y_1 и y_2 может быть не меньше единицы только в том случае, когда обе эти функции принимают значения, равные единице. Поэтому

$$\left(10x - x^2 - 24\right)\log_2\left(\sin^2 \frac{\pi}{2} x + 1\right) \ge 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - x^2 - 24 = 1, \\ \log_2\left(\sin^2 \frac{\pi}{2} x + 1\right) = 1. \end{cases}$$

Решение второго уравнения системы заведомо сложнее решения первого, но решением системы могут являться только те x, которые удовлетворяют как второму уравнению, так и первому, поэтому решения системы будут содержаться среди решений первого уравнения. Достаточно их найти и подставить во второе уравнение для проверки. Решением первого уравнения системы является $x = 5$. Подставим его во второе уравнение системы, получим верное равенство, следовательно, 5 – решение системы.

Ответ: 5.

Задание 12. Решите уравнение

$$\lg^2\left(x^2 + 3x + 3\right) + \sqrt{x^3 - 4x - 5} = 0.$$

Решение. Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю. Поэтому

$$\lg^2\left(x^2+3x+3\right)+\sqrt{x^3-4x-5}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2\left(x^2+3x+3\right)=0, \\ \sqrt{x^3-4x-5}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+3=1, \\ x^3-4x-5=0. \end{cases}$$

Корнями первого уравнения являются числа -1 и -2. Решения системы содержатся среди этих чисел, поэтому достаточно проверить, являются ли они корнями второго уравнения. Непосредственная подстановка показывает, что корнем второго уравнения является число -1. Значит, оно является решением системы.

Ответ: -1.

При решении логарифмических уравнений и неравенств, содержащих логарифмические выражения в показателе степени, используют логарифмирование обеих частей уравнения.

Задание 13. Решите уравнение $10^{1-\lg x}=100^{2+\lg x}$.

Решение.

ООУ: $x>0$. Выражения в разных частях уравнения принимают только положительные значения, значит, логарифмирование уравнения не приведет к потере корней. Прологарифмируем уравнение: $\lg\left(10^{1-\lg x}\right)=\lg\left(100^{2-\lg x}\right)$.

Применяя свойства логарифма, получим

$$\left(1-\lg x\right)\cdot\lg 10=\left(2+\lg x\right)\cdot\lg 100,\quad 1-\lg x=4+2\lg x,$$

$$3\lg x=-3,\ \lg x=-1,\ \mathrm{x}=0{,}1.$$

Сужение области определения уравнения не произошло (почему?), значит, корни не потеряны.

Ответ: 0,1.

Наибольшую сложность представляют логарифмические уравнения и неравенства, содержащие переменную в основании логарифма. Они решаются с помощью схем равносильных преобразований уравнений и неравенств.

Задание 14. Решите неравенство $\log_{x-2}(x-3) \le 0$.

Решение. $\log_{x-2}(x-3) \le 0 \Leftrightarrow \log_{x-2}(x-3) \le \log_{x-2} 1$. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем. Каждая из этих систем характеризует один из двух возможных случаев для основания логарифма: $x-2>1$ или $0<x-2<1$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2>1, \\ x-3 \le 1, \\ x-3>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-2<1, \\ x-3 \ge 1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>3, \\ x \le 4, \\ x>3; \end{cases} \\ \begin{cases} 2<x<3, \\ x \ge 4 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 3<x \le 4.$$

Ответ: (3; 4].

Задания для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Решите уравнение $5 \cdot 3^{\log_3 x} = x+6$.
2. Решите уравнение $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 48$.
3. Решите уравнение $\log_5(2x+1) - \log_5 4 = \log_5 2$.
4. Решите уравнение $\log_7(2x+5) = 2$.
5. Решите уравнение

$$\log_2(x+3) = \left(\log_2(x+17)\right) \cdot \log_2(x+3)$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

6. Решите уравнение $\log_4(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\frac{1}{2}$.

7. Укажите наименьшее целое решение неравенства $\log_2(x-2)>1$.

8. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x+12)<\log_{\frac{1}{3}}(9-x)$.

9. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $\log_3\dfrac{x-7}{2x-5}<0$.

10. Найдите произведение корней уравнения

$$2\log_4^2 x+\log_4 x-1=0.$$

11. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_5(2x-4)<\log_5(x+3)$.

12. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_{\frac{1}{3}}(-x)\geq\log_{\frac{1}{3}}(2x+9)$.

13. Решите уравнение $\lg(\log_3(\log_5 x))=0$.

14. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций $y_1=\log_3(2x-1)$ и $y_2=2-\log_3(x+1)$.

15. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y=\sqrt{1-\log_3 x}$?

16. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y=\sqrt[4]{1+\log_{0,5} x}$?

17. Укажите наименьшее целое число, входящее в область определения функции $y=\dfrac{1}{\log_2(x+4)-1}$.

18. Укажите наименьшее целое решение уравнения

$$\log_2 x \cdot \log_x 2 = 1.$$

19. Укажите число корней уравнения

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^4 + 1) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2).$$

20. Укажите число корней уравнения

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^4 - 1) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 2).$$

21. Укажите наибольшее целое решение неравенства

$$8^{\log_8(3-2x)} \geq -3.$$

22. Укажите сумму целых решений неравенства

$$\log_3 x > \log_3(5 - x).$$

23. Укажите число целых решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{7}}(2x + 3) < \log_{\frac{1}{7}}(3x - 2)$$

24. Укажите число корней уравнения

$$\log_2(x - 6) = 0{,}5\log_2 x.$$

25. Решите уравнение $2^{|\log_2 x|} = 3.$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

26. Решите неравенство $\log_2 24 \geq \log_2(16 - x) + \log_2(2x - 6)$. В ответе укажите число целых решений неравенства.

27. Решите уравнение

$$\log_4(7 - x)^2 + \log_4(x + 9)^2 = 4 + \log_4(x + 9)^2.$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

28. Укажите число корней уравнения

$$\log_3 x^2 + \log_{\sqrt{3}}(x - 8) = 4.$$

29. Укажите число корней уравнения

$$\log_2 x^2 + \log_2(x + 3)^2 = 2.$$

30. Укажите число корней уравнения $\log_3(5 - x) = \sqrt{x - 1}$.

31. Решите уравнение $(3^{x^2} - 81)\lg(1 - x) = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней.)

32. Укажите число корней уравнения $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{32} = 2^x$.

33. Решите уравнение $\log_2 x - 2 \cdot \sqrt{\log_2 x} - 3 = 0$.

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

34. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\dfrac{2 + \log_5^2\left(16 - x^2\right)}{x^2 - 3x} \geq 0$.

35. Найдите значение выражения $x \cdot y$, если $(x; y)$ — решение системы $\begin{cases} 5\log_3 x + 3\log_3 y = 12 \\ 4\log_3 x + 3\log_{\frac{1}{3}} y = 15. \end{cases}$

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

36. Решите уравнение $\log_2^3 x - 3\log_2^2 x = \dfrac{10}{\log_x 2}$.

37. Решите уравнение $\log_5(x-1{,}75)+0{,}5\log_5(4-4x)^2=0.$

38. Решите уравнение $\log_3^3 x-2\log_3^2 x=1-\dfrac{1}{\log_x\sqrt{3}}.$

39. Решите неравенство

$$(-x^2-8x-15)\log_3(2\cos^2(\pi x)+1)\ge 1.$$

40. Решите уравнение $\lg^2(x^2+x-5)+\sqrt{-x^3+9x-10}=0.$

41. Решите уравнение

$$\lg^2(2x^3+x^2+12)+\log_5^2(2x^2+5x+3)=0.$$

42. Решите уравнение

$$\log_3^2(2000x^3-1999x^2+1)+\sqrt{5^{x^2}-1}=0.$$

43. Решите уравнение

$$\log_3^2(200x^3-199x^2-1)+\sqrt{5^{x^2}-5}=0.$$

44. Укажите корни уравнения

$$\log_{\cos x}2\cdot\log_{\cos^2 x}3=\log_2\sqrt{3},$$

принадлежащие отрезку $[-\pi;2\pi]$.

45. Решите уравнение $\log_{2x-1}(x^2+3x-1)=2.$

46. Решите уравнение

$$\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2.$$

47. Решите неравенство $\log_{x-1}(x+2)\le 0.$

48. Решите неравенство $\log_{|x|-1}|x+2|\le 0.$

49. Решите неравенство $\log_{\sqrt{7}-\sqrt{3}}(4x-x^2-2)\ge 0.$

50. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \lg^2 x - \lg^2 y = 1, \\ \log_2 x - \log_2 y = \log_2 5 + 1. \end{cases}$$

51. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y = \dfrac{\log_3 (2x-1)}{2-x}$ лежат **выше** соответствующих точек графика функции $y = \dfrac{2}{2-x}$.

52. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y = \dfrac{\log_3 (2x-1)}{2-x}$ лежат **не ниже** соответствующих точек графика функции $y = \dfrac{1}{2-x}$.

53. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = \log_2(0{,}5x - 1)$ и $g(x) = 1$ меньше 3.

54. Решите уравнение $\log_3^2 x + \log_3 x = \left(\sqrt{6 - x^2}\right)^2 + x^2$.

55. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $17^{\log_{11}\left(9-4x^2\right)}$ и $17^{\log_{11}(2x+3)} \cdot 17^{\log_{11}\left(2x^2+3x+6\right)}$ принимают равные значения.

56. Решите неравенство $\log_7(7 + |x-5|) \le \sin\dfrac{\pi x}{2}$.

57. Найдите все значения x, при каждом из которых произведение значений выражений $216 - 6^x$ и $\log_2(3x-1) - 5$ **положительно.**

58. Найдите все значения x, при каждом из которых произведение значений выражений $3^x - 729$ и $\log_5(2x-1) - 2$ **неположительно.**

III.4. ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ[1]

Уравнения и неравенства

Линейные уравнения и неравенства

Задание 1. Решите при всех значениях параметра a уравнение $ax = 2x + 5$.

Решение.

Необходимо решить линейное уравнение с параметром. Сначала перенесем все неизвестные слагаемые в левую часть уравнения и приведем подобные слагаемые. Получим $(a - 2)x = 5$.

Чтобы найти значение x, в данном случае надо разделить уравнение на $(a - 2)$. При всех ли значениях параметра a мы можем уравнение разделить на $(a - 2)$? Нет.

При $a = 2$ выражение $a - 2$ обращается в нуль, поэтому значение параметра $a = 2$ является «особым» — контрольным значением параметра. Рассмотрим это значение отдельно.

При $a = 2$ $(2 - 2)x = 5$; $0x = 5$ — уравнение решений не имеет.

Теперь $a \neq 2$, и, чтобы выразить x, делим обе части уравнения на $(a - 2)$.

При $a \neq 2$ получим $x = \dfrac{5}{a-2}$.

Ответ: при $a = 2$ решений нет; при $a \neq 2$ $x = \dfrac{5}{a-2}$.

Задание 2. Решите при всех значениях параметра a неравенство $ax \leq 2x + 5$.

Решение.

Необходимо решить линейное неравенство с параметром. Перенесем все неизвестные слагаемые в левую часть

[1] С материалами данного раздела следует ознакомиться тем, кто ставит своей целью получение высокого абитуриентского балла.

неравенства и приведем подобные слагаемые. Получим $(a-2)x \le 5$.

Чтобы найти значения x, надо разделить обе части неравенства на $(a-2)$. При всех ли значениях параметра a мы можем неравенство разделить на $(a-2)$?

При $a = 2$ выражение $a-2$ обращается в нуль.

Рассмотрим это значение отдельно.

При $a = 2$ $(2-2)x \le 5$; $0x \le 5$. Это неравенство верно при любых значениях x, поэтому решением исходного неравенства при $a = 2$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Теперь $a \ne 2$. Для того чтобы выразить x, надо разделить неравенство на $(a-2)$.

Существенным отличием решения линейного неравенства с параметром от решения линейного уравнения с параметром является то, что знак неравенства при делении обеих частей неравенства на выражение с неизвестным может измениться на противоположный или не изменится.

Поэтому при делении неравенства на выражение с параметром надо учитывать знак этого выражения.

Если $a-2<0$, то знак неравенства придется изменить; если $a-2>0$, то знак неравенства не меняется.

При $a<2$ $x \ge \dfrac{5}{a-2}$ (знак неравенства изменился).

При $a>2$ $x \le \dfrac{5}{a-2}$ (знак неравенства не изменился).

Ответ: при $a = 2$ $x \in (-\infty; +\infty)$; при $a<2$ $x \ge \dfrac{5}{a-2}$; при $a>2$ $x \le \dfrac{5}{a-2}$.

Уравнения с модулем

Уравнения и неравенства с модулем можно решать графически. Для этого выражения, содержащие параметр, переносят в одну часть уравнения (неравенства) и строят графики функций левой и правых частей уравнения (неравенства).

Задание 3. Решите уравнение $|x+3|-a|x-1|=4$ при $a>0$.

Решение.

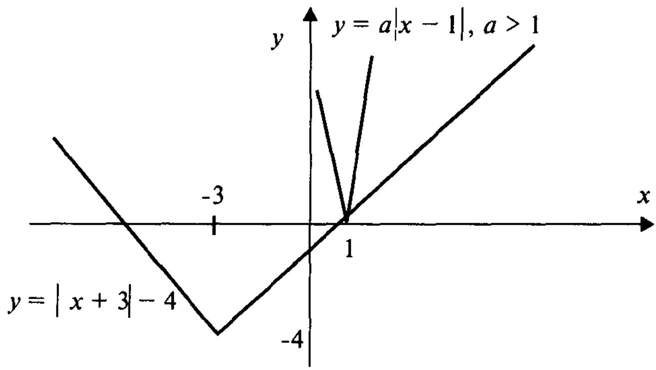
$$|x+3|-a|x-1|=4$$
$$|x+3|-4=a|x-1|.$$

Будем строить в одной системе координат графики функций $y=|x+3|-4$ и $y=a|x-1|$.

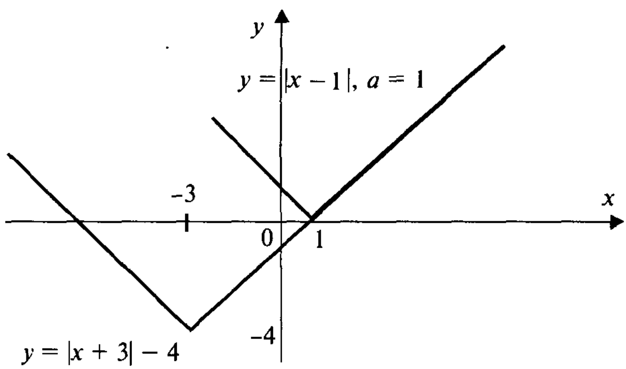
Рассмотрим четыре случая: 1) $a>1$; 2) $a=1$; 3) $0<a<1$; 4) $a=0$.

1) При $a>1$ графики выглядят следующим образом.

Графики пересекаются в одной точке: (1; 0), т.е. при $a>1$ $x=1$.



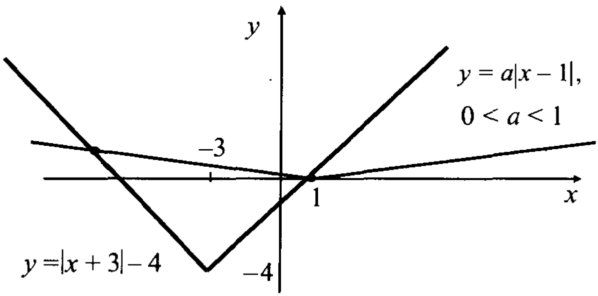
2) При $a=1$ графики выглядят следующим образом.



При $x \geq 1$ графики совпадают, т.е. система имеет бесконечно много решений.

При $a = 1$ решением уравнения будет промежуток $[1; +\infty)$.

3) При $0 < a < 1$ графики выглядят следующим образом.



Графики пересекаются в двух точках. Одна точка имеет координаты (1; 0).

Чтобы найти координаты второй точки, надо решить систему

$$\begin{cases} |x + 3| - 4 = a|x - 1|, \\ x < -3. \end{cases}$$

Так как $x < -3$, то модули выражений раскрываются следующим образом:

$$|x + 3| = -(x + 3) = -x - 3; \ |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1.$$

Осталось решить уравнение:

$$-x - 3 - 4 = a(-x + 1),$$
$$ax - x = a + 7,$$
$$x(a - 1) = a + 7.$$

Так как $0 < a < 1$ $(a \neq 1)$, то $x = \dfrac{a+7}{a-1}$.

Итак, при $0 < a < 1$ $x = 1$ и $x = \dfrac{a+7}{a-1}$.

4) При $a = 0$ график $y = a|x-1|$ совпадает с осью абсцисс и уравнение имеет два решения. Решения можно найти из уравнения $|x+3| - 4 = 0$.

$$|x+3| = 4$$
$$x+3 = 4 \text{ или } x+3 = -4$$
$$x = 1 \text{ или } x = -7$$

При $a = 0$ уравнение имеет два корня: 1 и –7.

Ответ: при $a > 1$ $x = 1$; при $a = 1$ $x \geq 1$; при $0 < a < 1$ $x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$; при $a = 0$ $x = 1$ и $x = -7$.

Квадратные уравнения и неравенства

Число корней квадратного уравнения определяют по знаку дискриминанта:

если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня;

если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (или два совпавших);

если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Задание 4. При каких значениях параметра a уравнение $4x^2 - 4ax + 1 = 0$: 1) имеет два различных корня; 2) имеет два корня; 3) не имеет корней?

Решение. Найдем дискриминант исходного уравнения.

$$D = 16a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16a^2 - 16.$$

1) Так как уравнение имеет два различных корня, то $D = 16a^2 - 16 > 0, a^2 > 1$ (см. решение квадратных неравенств в теме «Неравенства»). Получим

$$a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

2) Так как уравнение имеет два корня, не обязательно различных, то

$$D = 16a^2 - 16 \geq 0, \quad a^2 \geq 1 \quad \text{и} \quad a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

3) Так как уравнение не имеет корней, то

$$D = 16a^2 - 16 < 0, \quad a^2 < 1 \quad \text{и} \quad a \in (-1; 1).$$

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ уравнение имеет два различных корня; при $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ уравнение имеет два корня; при $a \in (-1; 1)$ уравнение не имеет корней.

Задание 5. При каких значениях параметра уравнение $(b-1)x^2 + (b+4)x + b + 7 = 0$ имеет только один корень?

Решение. При всех ли значениях параметра данное уравнение будет квадратным? Нет.

При $b = 1$ уравнение становится линейным ($b = 1$ — контрольное значение параметра). Подставим значение $b = 1$ в исходное уравнение:

$(1-1)x^2 + (1+4)x + 1 + 7 = 0, 5x + 8 = 0$. Это уравнение имеет один корень $-1{,}6$.

При $b \neq 1$ имеем квадратное уравнение. Так как квадратное уравнение имеет один корень, то $D = 0$.

Находим дискриминант и приравниваем его к нулю.

$$D = (b+4)^2 - 4 \cdot (b-1)(b+7) = b^2 + 8b + 16 - 4(b^2 + 6b - 7) =$$

$$= -3b^2 - 16b + 44 = 0$$

$$3b^2 + 16b - 44 = 0.$$

Уравнение имеет корни 2 и $-\frac{22}{3}$.

Ответ: при $b = 1$; $b = 2$; $b = -\frac{22}{3}$ уравнение имеет только один корень.

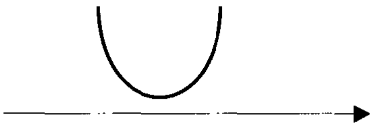
Задание 6. При каких значениях параметра неравенство $ax^2 + 4ax + 5 \leq 0$ не имеет решений?

Решение.

Данное неравенство не при любых значениях параметра a будет квадратным. Какое значение параметра является в данном случае контрольным?

(I) Пусть $a = 0$. Имеем: $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 5 \le 0$. Получаем $5 \le 0$. Это не верно. Значит, при $a = 0$ исходное неравенство решений не имеет.

(II) При $a \ne 0$ исходное неравенство будет квадратным. Графиком функции $f(x) = ax^2 + 4ax + 5$ является парабола. Чтобы неравенство $ax^2 + 4ax + 5 \le 0$ не имело решений, надо, чтобы парабола была расположена выше оси абсцисс.



Запишем условия, соответствующие данному положению параболы.

$$\begin{cases} a > 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

$$D = 16a^2 - 4 \cdot a \cdot 5 = 16a^2 - 20a.$$

Решением неравенства $D < 0$ является промежуток $(0;\ 1{,}25)$.

$$\begin{cases} a > 0, \\ 0 < a < 1{,}25. \end{cases}$$

Решением системы является промежуток $(0;\ 1{,}25)$.

Объединяем полученные решения и получаем ответ.

Ответ: при $a \in [0;\ 1{,}25)$ неравенство не имеет решений.

Рациональные неравенства

Рассмотрим решение рационального неравенства с параметром.

Задание 7. При каких значениях параметра a неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ справедливо для любых $x \in [1;2]$?

Сведем решение рационального неравенства к решению квадратного. Имеем:

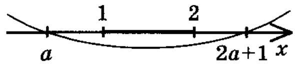
$$\frac{x-2a-1}{x-a}<0 \Leftrightarrow (x-2a-1)(x-a)<0(*).$$

Сравним $2a+1$ и a.

Возможны 3 случая. 1) $2a+1>a$; 2) $2a+1=a$; 3) $2a+1<a$.

1-й случай. $2a+1>a$, $a>-1$. Тогда

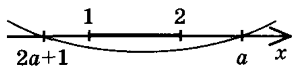
Решим систему: $\begin{cases} a>-1, \\ 2a+1>2, \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<a<1. \\ a<1 \end{cases}$



2-й случай. $2a+1=a$, $a=-1$. Подставим $a=-1$ в (*), получим $(x+1)^2<0$. Это неравенство решений не имеет.

3-й случай. $2a+1<a$, $a<-1$. Тогда

Решим систему: $\begin{cases} a<1, \\ 2a+1<1, \Leftrightarrow \begin{cases} a<-1, \\ a>2. \end{cases} \\ a>2 \end{cases}$



Система решений не имеет.

Ответ: при $a \in (0{,}5;1)$

Иррациональные уравнения

Рассмотрим решение иррационального уравнения с параметром.

Задание 8. Укажите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{x+2a}=x-3$ имеет единственное решение.

$$\sqrt{x+2a} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \ge 0, \\ x+2a = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x^2 - 7x + 9 - 2a = 0. \end{cases}$$

Уравнение имеет единственное решение, если:

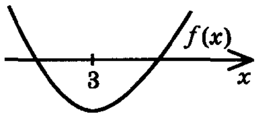
1. $D = 0$ и $x_1 = x_2 \ge 3$.

2. $D > 0$ и один из корней меньше 3, а другой больше 3, т.е., как говорят, 3 разделяет корни.

1. $\begin{cases} D = 49 - 4(9-2a) = 0, \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{13}{8}, \\ x \ge 3. \end{cases}$

При $a = -\dfrac{13}{8}$ $x_1 = x_2 = \dfrac{7 \pm 0}{2} \ge 3.$

2. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 7x + 9 - 2a$. Изобразим схематично график функции $f(x)$ (параболу) с указанными свойствами (3 разделяет корни).



Имеем следующее условие: $f(3) < 0$.

Решим неравенство: $f(3) < 0$, так как $f(3) = -3 - 2a < 0$, то $a > -1{,}5$.

Итак, условиям задачи удовлетворяют следующие значения a: $a = -\dfrac{13}{8}$, $a > -1{,}5$. Наименьшее целое из них равно -1.

Ответ: -1.

Тригонометрические уравнения

Рассмотрим решение тригонометрического уравнения с параметром.

Задание 9. Найдите наименьшее натуральное значение a, при котором уравнение $\sin^4 x - 6\sin^2 x + a = 0$ не имеет решений.

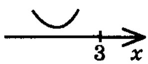
Решение. Введем новую переменную $t = \sin^2 x$, $0 \le t \le 1$.

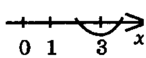
Рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = t^2 - 6t + a$, $t \in [0;1]$. Исходное уравнение не имеет решений, если график функции расположен следующим образом (вершина параболы $t_в = 3$):
Запишем условия, удовлетворяющие 1, 2 и 3 случаям.

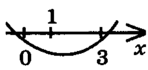
1) $D < 0$ 2) $\begin{cases} f(3) \le 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}$

Решения: 1) $a > 9$; 2) $5 < a \le 9$; 3) $a < 0$.

Наименьшим натуральным решением является число 6.

1) 

2) 

3) 

Ответ: 6.

Показательные уравнения и неравенства

Задание 10. При каких значениях m уравнение

$$200^{2x} - 4 \cdot 200^x + m^2 - 3m = 0$$

имеет единственный корень?

Решение. Введем новую переменную $t = 200^x$, $t > 0$, тогда уравнение примет вид: $t^2 - 4t + m^2 - 3m = 0$. Это квадратное уравнение при $t > 0$ имеет единственный корень в двух случаях:

1) если его дискриминант $D = 0$ и корень квадратного уравнения положительный;

2) если дискриминант $D > 0$ и **только один** корень квадратного уравнения положительный. В этом случае квадратное уравнение имеет два корня, но показательное уравнение имеет единственный корень.

Рассмотрим первый случай. Найдем дискриминант: $D = 16 + 12m - 4m^2$.

Решим квадратное уравнение $16 + 12m - 4m^2 = 0$, получим, что $m = 4$ или $m = -1$. При таких значениях параметра m квадратное уравнение имеет единственный корень $t = 2 > 0$, следовательно, первоначальное показательное уравнение также будет иметь единственный корень.

Рассматривая второй случай, решим квадратное неравенство $(D > 0)$:

$$4 + 3m - m^2 > 0,\ (m - 4)(m + 1) < 0,\ -1 < m < 4.$$

Для того чтобы один корень квадратного уравнения был положительным (при условии существования двух корней), второй должен быть отрицательным или равным нулю. Рассмотрим отдельно каждый из случаев.

Если корни имеют разные знаки, значит, их произведение отрицательно, поэтому, применяя теорему Виета, получим $x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m$, $m^2 - 3m < 0$. Решая последнее неравенство, получим $0 < m < 3$.

Если один из корней равен нулю, то, подставив его в квадратное уравнение, получим, что второй может быть найден из условия $m^2 - 3m = 0$, $m = 0$ или $m = 3$.

Объединяя все возможные значения параметра m, получим, что данное показательное уравнение имеет единственный корень при $m \in [0; 3] \cup \{-1; 4\}$.

Ответ: $[0; 3] \cup \{-1; 4\}$.

Логарифмические уравнения и неравенства

Задание 11. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_5(x^2 - 2x - a) = \log_5(7x - a)$.

Решение.

$$\log_5(x^2 - 2x - a) = \log_5(7x - a) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - a = 7x - a, \\ 7x - a > 0. \end{cases}$$

Уравнение в системе равносильно квадратному уравнению $x^2 - 9x = 0$. Его корни: 0 и 9. При найденных значениях x рассмотрим неравенство $7x - a > 0$.

При $x = 0$ имеем $7 \cdot 0 - a > 0$, т.е. $a < 0$.При $x = 9$ имеем $7 \cdot 9 - a > 0$, т.е. $a < 63$. Остается обобщить полученный результат.

Ответ: при $a < 0$ уравнение имеет два корня 0 и 9; при $0 \le a < 63$ уравнение имеет один корень 9; при $a > 63$ уравнение корней не имеет.

Элементы математического анализа

Исследование функции элементарными методами

Задание 12. При каких значениях a функция

$$f(x) = a\cos x + \sin x - a\sin x$$

будет четной?

Решение. Воспользуемся определением чётной функции. Так как функция $y = f(x)$ является четной, то $f(x) = f(-x)$.

$$f(-x) = a\cos(-x) + \sin(-x) - a\sin(-x).$$

Имеем:

$$a\cos x + \sin x - a\sin x = a\cos(-x) + \sin(-x) - a\sin(-x).$$

Используем свойство четности функции $y = \cos x$ и нечетности функции $y = \sin x$:

$$a\cos x + \sin x - a\sin x = a\cos x - \sin x + a\sin x.$$

После приведения подобных слагаемых получим $2\sin x - 2a\sin x = 0$, т.е. $a = 1$.

Ответ: $a = 1$.

Исследование функции с помощью производной

Задание 13. При каких значениях b прямая $y = bx + 3$ является касательной к параболе $f(x) = x^2 - 2x + 4$?

Решение. Абсцисса точки касания (x_0) не задана, поэтому напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 2x + 4$ в общем виде.

$$y = (2x_0 - 2)(x - x_0) + x_0^2 - 2x_0 + 4,$$

где $2x_0 - 2 = f'(x_0)$, а $x_0^2 - 2x_0 + 4 = f(x_0)$. Приведем подобные слагаемые. Получим:

$$y = (2x_0 - 2)x - x_0^2 + 4. \qquad (1)$$

Так как прямые, заданные уравнением (1), и прямая $y = bx + 3$ должны совпадать, решим систему

$$\begin{cases} b = 2x_0 - 2 \\ 3 = -x_0^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = 1 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = -1 \\ b = -4. \end{cases} \end{array}\right.$$

То есть прямых, удовлетворяющих условиям задания, две: $y = 3$ и $y = -4x + 3$

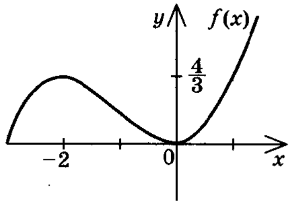
Ответ: при $b = 0$ и $b = -4$.

Задание 14. При каких значениях a прямая $y = a$ пересекает график функции $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2$ более чем в двух различных точках?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2$. Построим схематично ее график. Функция определена и дифференцируема на множестве всех действительных чисел.

$$f'(x) = x^2 + 2x = x(x + 2). \quad f(0) = 0, \ f(-2) = \frac{4}{3}.$$

Тогда график функции $f(x)$ выглядит следующим образом.



Прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \frac{x^3}{3} + x^2$ более чем в двух различных точках (т.е. в данном случае в трех точках), если $0 < a < \frac{4}{3}$.

Ответ: при $0 < a < \frac{4}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби

1. При каком значении a корнем уравнения $(a-2)x = 5$ является число 5?

2. При каком значении a решением неравенства $(a-2)x < 5$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$?

3. При каком значении a уравнение $x^2 - 20x + a = 0$ имеет единственное решение?

4. При каком значении a уравнение $|x-1| = 7 - a$ имеет единственное решение?

5. При каком значении a уравнение $\dfrac{x-5}{x^2-a}=0$ не имеет решений?

6. Укажите наименьшее значение a, при котором сократима дробь $\dfrac{x^2-x-20}{x-a}$?

7. Укажите наименьшее значение a, при котором сократима дробь $\dfrac{x+a}{x^2-x-20}$?

8. При каком наименьшем целом значении a уравнение $x^2-a|x|+a-1=0$ имеет четыре различных корня?

9. При каком значении a уравнение $x^2-a|x|+a-1=0$ имеет три различных корня?

10. При каком наибольшем целом значении a уравнение $x^2-a|x|+a-1=0$ имеет два различных корня?

11. При каком значении a корнем уравнения $\sqrt{x-a}=5$ является число 5?

12. Укажите наибольшее значение a, при котором уравнение $\sqrt[4]{x-3}=7-a$ имеет единственное решение?

13. Укажите наибольшее целое значение a, при котором уравнение $\sqrt[6]{x-3}=a+16$ не имеет решений?

14. Укажите наименьшее значение a, при котором уравнение $\sqrt[4]{x-3}\cdot(x-a)=0$ имеет два различных корня?

15. При каком значении a корнем уравнения $\sin x=a-9$ является число $\dfrac{\pi}{6}$?

16. Укажите наименьшее значение a, при котором уравнение $\sin x = 7 - a$ имеет бесконечно много решений?

17. Укажите наибольшее значение a, при котором уравнение $\sin^2 x = a - 1$ имеет хотя бы одно решение?

18. Укажите наибольшее значение a, при котором уравнение $\cos^2 x = 2a + 3$ имеет бесконечно много решений?

19. При каком значении a корнем уравнения $2^{x-a} = 64$ является число 4?

20. Укажите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $4^x = 3a - 25$ имеет единственное решение?

21. Укажите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $0{,}5^x = 14 - 3a$ не имеет решений?

22. При каком значении a корнем уравнения $\log_7(x - a) = 2$ является число 12?

23. При каком значении a уравнение

$$\log_2(x - 4) \cdot (x - a) = 0$$

имеет два совпавших корня?

24. При каком наименьшем целом значении a уравнение $\log_2(x + 4) \cdot (x + a) = 0$ имеет два различных корня?

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

25. При каких значениях a функция $y = x^2 + (a - 2) \cdot x + 1$ не принимает отрицательных значений?

26. При каких значениях a функция $y = -x^2 + (a - 8) \cdot x$ не принимает положительных значений?

27. При каких значениях a область определения функции $y = \sqrt[6]{-x^2 + 4x + a} + \sqrt{x - 3}$ состоит из одной точки?

28. При каком значении a область определения функции $y = \sqrt[6]{-x^2 + 6x + a} + \sqrt{4 - x}$ состоит из одной точки?

29. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x}{x + 3a - 2} \leq 0$ выполняется для всех $x \in [1; 3]$.

30. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x}{x + 3a - 2} \geq 0$ выполняется для всех $x \in [1; 3]$.

31. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x - 2a - 4}{x + 3a - 2} \leq 0$ выполняется для всех $x \in [1; 3]$.

32. При каких значениях параметра a уравнение $|x - 3| + |x + 1| = a$ имеет бесконечно много решений?

33. При каких значениях параметра a уравнение $|x - 3| = ax$ имеет единственное решение?

34. При каких значениях параметра a, уравнение $\sqrt{x - a} = x + 4$ имеет единственное решение?

35. При каких значениях a функция $y = a\sin x + \cos x$ будет четной?

36. При каких значениях a функция

$$y = ax^2 + \sin x - a\sin x$$

будет нечетной?

37. При каких значениях параметра a, уравнение $\sin x - \cos x = a - 1$ имеет хотя бы одно решение?

38. При каких значениях параметра a, уравнение $\cos^2 x - (2a - 1)\cos x + a(a - 1) = 0$ имеет хотя бы одно решение?

39. При каких значениях параметра a, уравнение $\cos^2 x - 5\cos\ x + a = 0$ имеет хотя бы одно решение?

40. При каких значениях параметра a, уравнение $4^x - (2a + 1)2^x + a(a + 1) = 0$ имеет хотя бы одно решение?

41. При каких значениях параметра a, уравнение $4^x - (2a + 1)2^x + a(a + 1) = 0$ имеет два различных решения?

42. При каких значениях параметра a, уравнение $4^x - (2a - 1)2^x + a(a - 1) = 0$ не имеет решений?

43. При каких значениях параметра m уравнение $200^{2x} - 6 \cdot 200^x + m^2 - 8m = 0$ имеет хотя бы одно решение?

44. При каких значениях параметра a уравнение $25^{x+0,5} - (5a + 2)10^x + a \cdot 4^{x+0,5} = 0$ имеет два различных корня?

45. При каких значениях параметра a уравнение $2 \cdot 9^x - (2a + 3)6^x + 3a \cdot 4^x = 0$ имеет один корень?

46. Решите неравенство $9^{x+1} + a \cdot 8 \cdot 3^x - a^2 < 0$.

47. При каких значениях параметра a, прямая $y = -10x + a$ является касательной к параболе $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$?

48. При каких значениях параметра a, прямая $y = a$ пересекает график функции $y = x^3 - 3x^2$ в единственной точке?

49. При каких значениях a прямая $y = a$ пересекает график функции $y = x^3 - 3x^2$ в трех различных точках?

50. При каких значениях параметра a, прямая $y = a$ не пересекает график функции $y = x^4 - 2x^2 - 5$?

Раздел III.5. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи на проценты

Теоретические сведения

Определение. **Процентом** числа называется его сотая часть.

Пример.
1% — это одна сотая числа.
1% от числа 500 — это число 5.
3% — это три сотых числа.
3% от числа 500 — это число 15.

Решение любых задач на проценты сводится к основным **трем действиям** с процентами:

— нахождению процентов от числа

Пример. Найти 15% от числа 60.
1 способ. Число 60 обозначим за 100%, тогда

$$15\% \text{ — } x$$
$$100\% \text{ — } 60.$$

Найдем x из пропорции $\dfrac{15}{100} = \dfrac{x}{60}$, $x = 9$.

2 способ. $0{,}15 \cdot 60 = 9$. Ответ: 9.

— нахождению числа по его процентам
Пример. Найти число, 12% которого равны 30.

1 способ. 12% неизвестного числа нам известны — это 30. Какое же это неизвестное число? Это число (x) обозначаем за 100% и находим его из пропорции:

$$\begin{array}{lcl} 12\% & \text{—} & 30 \\ 100\% & \text{—} & x. \end{array} \qquad \frac{12}{100} = \frac{30}{x},$$

$$x = \frac{30 \cdot 100}{12} = 250.$$

2 способ. $30 : 0{,}12 = 250$.

Ответ: 250.

— нахождению процентного отношения чисел

Пример. Сколько процентов составляет 120 от 600?

$$\frac{120}{600} \cdot 100\% = 20\%.$$

Ответ: 20%.

При записи ответа в бланке ЕГЭ следует указывать неименованные числа. Например, если ответом задачи является «20 рублей», то в бланке ответов напротив соответствующего номера задания надо написать «20». Так будем записывать ответ при решении всех типовых заданий.

Решение типовых заданий

Задача 1. Магазин в первый день продал 40% имеющихся овощей. За второй день он продал 80% овощей, проданных в первый день. В третий день — оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

Решение. Обозначим за x (кг) — вес имевшихся в магазине овощей. Тогда в первый день магазин продал $0{,}4x$ (кг), а за второй день — $0{,}8 \cdot (0{,}4x)$ кг. Зная, что в третий день было продано 28 кг овощей, составляем уравнение:

$$0{,}4x + 0{,}8 \cdot (0{,}4x) + 28 = x,$$

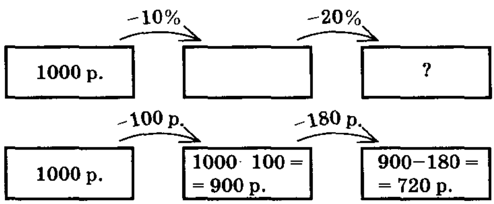
$$0{,}28x = 28$$

$$x = 100$$

Ответ: 100.

Задача 2. Цена изделия составляла 1000 рублей и была снижена сначала на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена товара?

Решение. Подобные задачи, на наш взгляд, удобно решать с помощью такой схемы рассуждений:



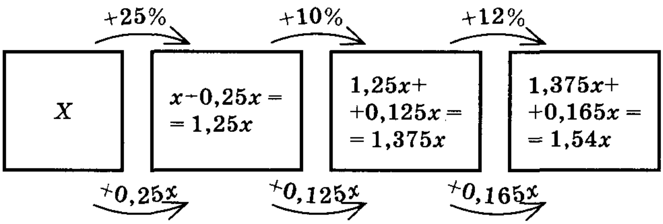
Первое снижение цены товара было на $0{,}1 \cdot 1000 = 100$ р. После первого снижения цена товара составила $1000 - 100 = 900$ р.

Второе снижение цены товара было на $0{,}2 \cdot 900 = 180$ р. После второго снижения цена товара составила $900 - -180 = 720$ р.

Ответ: 720.

Задача 3. Цену товара повысили на 25%, затем новую цену повысили еще на 10% и, наконец, после перерасчета произвели повышение цены еще на 12%. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

Решение. Обозначим первоначальную цену товара за x, тогда после первого повышения цена товара стала — $1{,}25x$. Второе повышение цены было на $0{,}1 \cdot 1{,}25x$. После него цена товара стала $1{,}25x + 0{,}1 \cdot 1{,}25x = 1{,}375x$. Третье повышение цены на 12% производилось от цены, полученной после второго повышения, и составило $0{,}12 \cdot 1{,}375x = 0{,}165x$. После последнего повышения цена товара составила $1{,}375x + 0{,}165x = 1{,}54x$.
Схема рассуждений была следующей:



Осталось выяснить процент повышения первоначальной цены. Цена была повышена на $1{,}54x - x = 0{,}54x$, что составляет 54% от первоначальной цены.

Ответ: 54.

Задача 4. Сберегательный банк в конце года начисляет 3% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 10000 рублей через 2 года?

Решение. Эта задача на так называемые «сложные проценты». Так говорят, когда в задаче идет речь о поэтапном изменении некоторой величины. В данном случае рассмотрим два этапа — на первом начисляется процент на сумму, находившуюся на счету первый год, а на втором этапе производится начисление процентов на сумму, получившуюся после первого этапа, т.е. на сумму с уже начисленными процентами после первого года.

10000 рублей — первоначальная сумма вклада. Начисленные проценты после первого года составят $0{,}03 \cdot 1000$. По окончании первого года на счету окажется $10000 + 0{,}03 \cdot 10000 = 10300$. По окончании второго года проценты составят $0{,}03 \cdot 10300 = 309$. Таким образом, после двух лет сумма вклада составит $10300 + 309 = 10609$. Первоначальный вклад был увеличен на 60,9 рублей.

Ответ: 609.

Задача 5. Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения двух лет она выросла на 304,5 рубля при 3% годовых.

Решение. Пусть A — первоначальная сумма вклада. Тогда через год сумма вклада составила $A + 0{,}03A = A \cdot (1 + 0{,}03) = 1{,}03 \cdot A$. За второй год проценты составили $0{,}03 \cdot (1{,}03 \cdot A)$. Через два года сумма вклада станет равной $1{,}03 \cdot A + 0{,}03 \cdot (1{,}03 \cdot A) = 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot A$. Получаем уравнение:

$$1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot A = A + 304{,}5,$$

$$0{,}0609 \cdot A = 304{,}5,$$

$$A = 5000.$$

Ответ: 5000.

Задачи на «концентрацию», на «смеси и сплавы»

Теоретические сведения

В таких задачах часто встречаются понятия процентного содержания или концентрации. Например, если в задаче идет речь о девятипроцентном растворе уксуса, то можно понять, что в этом растворе 9% чистого уксуса, а остальные 91% приходится на воду, с которой смешивался чистый уксус. Также можно сказать, что 0,09 частей составляет в этом растворе чистый уксус, а 0,91 часть приходится на воду. Понятно, что объем всего раствора принимается за 100% (или за 1).

В задачах этого типа обычно присутствуют три величины, соотношение между которыми позволяет составлять уравнение:

— концентрация (доля чистого вещества в смеси);

— количество чистого вещества в смеси (или сплаве);

— масса смеси (сплава).

Соотношение между этими величинами следующее:

Масса смеси × *концентрация* =
= *количество чистого вещества.*

Задание 6. Сколько литров воды надо добавить к 20 литрам пятипроцентного раствора соли, чтобы получить четырехпроцентный раствор?

Решение. Соль содержится в каждом из растворов. В 20 литрах пятипроцентного раствора соли содержится $20 \times 0{,}05 = 1$(ед.) соли. Ее количество не меняется. Доливается только вода. Узнаем, каково ее количество.

Обозначим x (л) — количество добавленной воды. Из условия задачи получаем, что 4-процентную концентрацию раствора характеризует уравнение $\frac{1}{20 + x} = 0{,}04$. Решением уравнения является $x = 5$.

Ответ: 5.

Задачи на «движение»

Теоретические сведения

Действие движения характеризуется тремя величинами: пройденный путь, скорость и время. Известно соотношение между ними:

Путь = *скорость* × *время.*

Задание 7. Скорость велосипедиста от поселка до станции была на 1 км/ч больше, чем на обратном пути. На обратный путь он затратил на 2 минуты больше. Расстояние между пунктами 7 км. Найдите первоначальную скорость велосипедиста.

Решение. Если x км/ч — скорость велосипедиста от поселка до станции, то $(x - 1)$ км/ч — скорость велосипедиста на обратном пути. Время велосипедиста от поселка до станции $\frac{7}{x}$, а время обратного движения $\frac{7}{x-1}$. Так как время обратного движения на 2 минуты (т.е. на $\frac{1}{30}$ ч) больше, составим уравнение: $\frac{7}{x-1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$. Получим, что $x = 15$.

Ответ: 15.

Задание 8. Катер прошел 20 км по течению реки и такой же путь обратно, затратив на весь путь 1 ч. 50 мин. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите время катера в пути.

Решение. Пусть x (км/ч) — собственная скорость катера. Скорость катера по течению $(x + 2)$ км/ч, а против течения $(x - 2)$ км/ч. Время движения катера по течению $\frac{20}{x+2}$, а против течения $\frac{20}{x-2}$. На весь путь катер потратил $\frac{20}{x-2} + \frac{20}{x+2}$ или 1 ч. 50 мин. Переведем 1 ч. 50 мин в часы: 1 ч. 50 мин. $= 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$ (ч). Решим уравнение $\frac{20}{x-2} + \frac{20}{x+2} = \frac{11}{6}$. Получим: $x = 22$.

Ответ: 22.

Задачи «на работу»

Теоретические сведения

Работу характеризует три величины действия:
— время работы;
— объем работы;

— производительность (количество произведенной работы в единицу времени).

Существует следующее соотношение между этими величинами:

Объем работы =

= время работы × производительность.

Задание 9. Две копировальные машины печатают рукопись. Если всю рукопись будет печатать первая машина, то работа будет выполнена на 4 минуты позже, чем две машины, работая вместе. Если печатать всю рукопись будет вторая машина, то она напечатает на 25 минут позже, чем обе машины, работая вместе. За сколько минут может напечатать эту рукопись вторая машина?

Решение. Пусть время печати всей рукописи первой машиной — x (мин), а второй — y (мин). Тогда время общей работы двух машин можно найти двумя способами: $x - 4$ и $y - 25$. Поэтому получим первое уравнение: $x - 4 = y - 25$.

Примем за единицу работу по печати всей рукописи. Производительность первой машины — $\frac{1}{x}$, производительность второй машины — $\frac{1}{y}$, общая их производительность — $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. Зная их общее время работы $(x-4)$, можно составить второе уравнение

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot(x-4)=1.$$

Решая систему $\begin{cases} x-4=y-25, \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot(x-4)=1 \end{cases}$, получим, что вторая машина может напечатать рукопись за 35 минут.

Ответ: 35.

Задачи для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. В коробку помещается 1,44 $м^2$ керамической плитки размером 20 см×30 см. Плитка продается коробками.

а) Сколько плиток в коробке?

б) Какое минимальное количество полных коробок нужно купить, если требуется 60 плиток?

в) Сколько плиток требуется для полного обкладывания стены площадью 12 $м^2$?

г) Какое минимальное количество коробок плитки надо купить для полного обкладывания стены площадью 7 $м^2$?

д) Какое минимальное количество коробок плитки надо купить для полного обкладывания стены площадью 7 $м^2$, в которой есть дверь, размером 2 м × 0,7 м.?

е) Какое минимальное количество коробок плитки надо купить для полного обкладывания стены площадью 9 $м^2$ с учетом 10 % запаса?

2. Кресло стоило 2000 рублей. Сначала его цену повысили на 20%, затем снизили на 10%. Какова окончательная цена кресла?

3. В январе костюм стоил 5000 рублей. В январе его цена повысилась на 10%. В феврале цена была снижена на 10%. Сколько стал стоить костюм после снижения цены?

4. На распродаже цену книги снизили на 20%. На сколько процентов надо повысить цену, чтобы получить первоначальную цену книги?

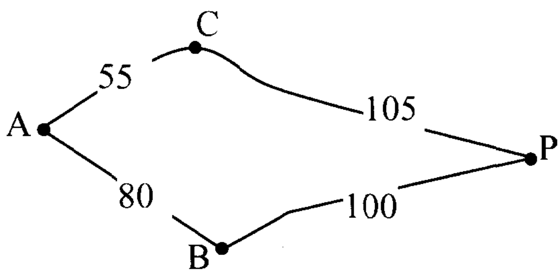
5. Билет на концерт стоит 500 рублей. Какое максимальное число билетов можно купить на 5000 рублей после повышения цены билета на 10%?

6. Билет на концерт стоит 500 рублей. Какое максимальное число билетов можно купить на 5000 рублей после повышения цены билета на 20%?

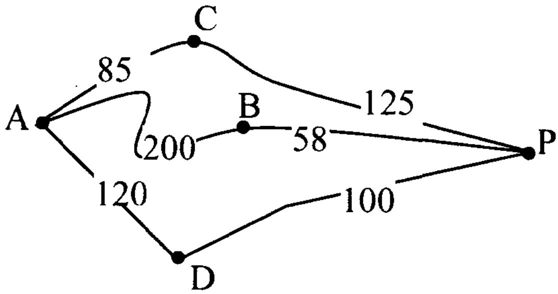
7. Билет на концерт стоит 500 рублей. Какое максимальное число билетов можно купить на 5000 рублей после снижения цены билета на 10%?

8. Билет на концерт стоит 500 рублей. Какое максимальное число билетов можно купить на 5000 рублей после снижения цены билета на 40%?

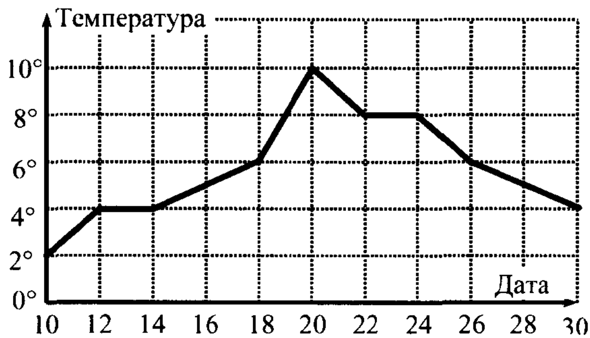
9. Водитель автобуса собирается проехать из пункта A в пункт P, в который ведут два маршрута: через пункт B и через пункт C. Расстояние в километрах между соседними пунктами показаны на схеме. Известно, что если ехать через C, то средняя скорость автобуса будет равна 50 км/ч, а если ехать через B — 60 км/ч. Водитель выбрал маршрут так, чтобы доехать до пункта P за наименьшее время. Сколько часов он будет в пути?



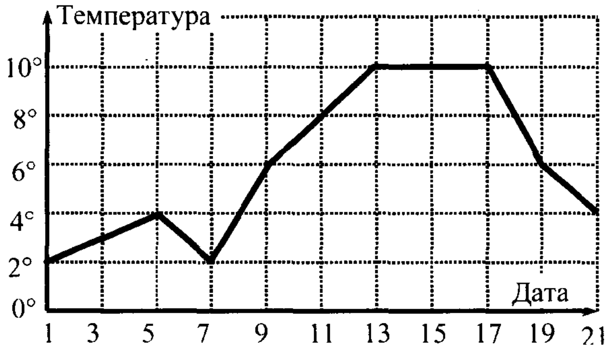
10. Водитель машины собирается проехать из пункта A в пункт P, в который ведут три маршрута: через пункт B, через пункт C и через пункт D. Расстояние в километрах между соседними пунктами показаны на схеме. Известно, что если ехать через C, то средняя скорость автобуса будет равна 50 км/ч, если ехать через B — 60 км/ч, если ехать через D — 55 км/ч. Водитель выбрал маршрут так, чтобы доехать до пункта P за наименьшее время. Сколько часов он будет в пути?



11. Посев семян моркови рекомендуется проводить в конце апреля — начале мая при дневной температуре воздуха не менее + 6°С. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха во второй и третьей декадах апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев моркови.



12. Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее + 6°С. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха в первой и второй декадах апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев петрушки.



13. В первый день со склада было отпущено 20% имевшихся яблок. Во второй день — 180% от того количества яблок, которое было отпущено в первый день. В третий день — оставшиеся 88 кг яблок. Сколько килограммов яблок было на складе первоначально?

14. Изделие, цена которого 500 рублей, сначала подорожало на 10%, а затем — еще на 20%. Какова окончательная цена изделия?

15. Цену на некоторый товар сначала снизили на 30%, а затем повысили на 20%. На сколько процентов уменьшилась первоначальная цена товара?

16. Цену некоторого товара снизили на 15%, а потом — еще на 20%. Найдите общий процент снижения цены.

17. Сумма двух чисел равна 1100. Найдите наибольшее из них, если 6% одного из них равны 5% другого.

18. Сберегательный банк в конце года начисляет 2% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 5000 р. через 3 года?

19. Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения трех лет она выросла на 765,1 р. при 2% годовых.

20. Сберегательный банк в конце года начисляет 5% к сумме, находившейся на счету. На сколько процентов увеличится первоначальный вклад в 20000 р. через 2 года?

21. Цена первого товара повысилась на 30%, а потом — еще на 5%. Цена второго товара повысилась на 25%. После повышения цены товаров сравнялись. Найдите, на сколько процентов первоначальная цена второго товара больше первоначальной цены первого товара.

22. Зарплата была повышена дважды на один и тот же процент за один год. При таком повышении рабочий стал получать вместо 1000 р. за один день 1254,4 р. Определите, на сколько процентов повысилась зарплата.

23. Моторная лодка прошла 10 км по озеру и 4 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

24. Расстояние между морскими пристанями 300 км. Два катера начали свое движение с одной и той же пристани с интервалом в 5 часов, а в конечный пункт прибыли одновременно. Определите время движения первого катера, если скорость его движения на 10 км/ч больше скорости второго.

25. Двое рабочих изготавливают по одинаковому количеству деталей. Первый выполнил эту работу за 6 ч, второй за 4 ч, так как изготовлял в час на 14 деталей больше первого. Сколько деталей изготовил второй рабочий?

26. На строительстве стены первый каменщик работал 5 дней один. Затем к нему присоединился второй и они вместе закончили работу через 4 дня. Известно, что первому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 5 дней больше, чем второму. За сколько дней может построить эту стену первый каменщик, работая один?

27. К 40% раствору соляной кислоты добавили 50 г чистой кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 60%. Найдите первоначальный вес раствора в граммах.

28. Какое количество воды нужно добавить в 1 литр 9% раствора уксуса, чтобы получить 3% раствор?

Раздел III.6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Задачи по планиметрии

Теоретические сведения

a, b, c — стороны треугольника.

α, β, γ — углы треугольника, $\angle A$ — угол, лежащий против стороны a, $\angle B$ — угол, лежащий против стороны b, $\angle C$ — угол, лежащий против стороны c.

h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущенные из вершин соответственно на стороны a, b и c.

R — радиус окружности, описанной около треугольника.

r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

P — периметр треугольника, p — полупериметр треугольника.

S — площадь.

Треугольники

$$S = \frac{1}{2}ah_a,\ S = \frac{1}{2}bc\sin A,\ S = \frac{abc}{4R},$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ S = pr.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (теорема синусов).}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A \text{ (теорема косинусов).}$$

1. *Прямоугольный треугольник (a — катет, b — катет, c — гипотенуза)*

$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора).

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

2. *Равнобедренный треугольник*

Углы при основании равнобедренного треугольника равны. В равнобедренном треугольнике три отрезка — высота, медиана и биссектриса, — проведенные к основанию, равны.

Четырехугольники

d_1, d_2 — диагонали четырехугольника, S — площадь.

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \angle(d_1 d_2)$.

1. *Параллелограмм*

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны. Противоположные углы параллелограмма равны.

$S = ah_a$, $S = ab \sin \angle(ab)$, где a и b — смежные стороны параллелограмма, h_a — высота, проведенная к стороне a.

2. *Прямоугольник*

Имеет все свойства параллелограмма.

Диагонали прямоугольника равны.

$S = ab$, где a и b — смежные стороны прямоугольника.

3. *Ромб*

Имеет все свойства параллелограмма.

Все стороны ромба равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его внутренних углов.

4. *Квадрат*

Имеет все свойства прямоугольника и ромба.

Стороны квадрата равны.

Диагонали квадрата перпендикулярны и равны.

5. *Трапеция*

$S = \frac{a+b}{2}h$, где a и b — основания трапеции, h — ее высота.

6. *Вписанный четырехугольник*

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

7. *Описанный четырехугольник*

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, т.е. $a + c = b + d$.

Решение типовых заданий

В содержание ЕГЭ часто включаются планиметрические задачи, связанные с нахождением площадей, линейных или угловых величин треугольников или четырехугольников. Для решения этих задач необходимо помнить:

— основные определения и свойства геометрических фигур: треугольников (равностороннего, равнобедренного, прямоугольного), четырехугольников (квадрата, ромба, параллелограмма, трапеции и др.), углов (вписанного, центрального, вертикального и др.) и т. п.;

— полезные формулы, которые приведены выше, для нахождения длин и площадей или связывающие линейные и угловые элементы треугольника.

Чаще всего решение задач состоит в последовательном применении 4–5 подобных свойств и формул. Рассмотрим применение этих свойств на примерах.

Задача 1. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $\angle CAD = 30°$, $BD = 13$, $AD = 5$. В ответе укажите значение найденной величины, умноженное на $12 - 5\sqrt{3}$.

Решение.

1-й способ.

1) Найдем площадь треугольника AOD, а затем найдем площадь параллелограмма. Чтобы найти площадь треугольника AOD, достаточно найти длину стороны AO.

2) Из треугольника AOD по теореме косинусов

$6{,}5^2 = AO^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot AO \cdot \cos \angle OAD$

$AO^2 - 5\sqrt{3}AO - 17{,}25 = 0.$

Получаем, что $AO = \dfrac{5\sqrt{3} + 12}{2}$.

3) Площадь треугольника AOD равна

$$S = 0{,}5 \cdot 5 \cdot \left(\frac{5\sqrt{3} + 12}{2}\right) \cdot \sin 30^0 = \frac{5}{8} \cdot \left(5\sqrt{3} + 12\right).$$

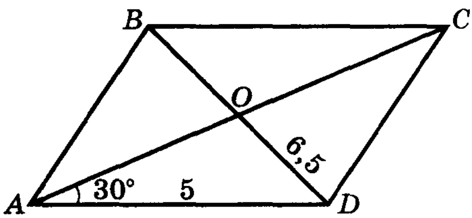
4) Площадь параллелограмма $ABCD$ в 4 раза больше площади треугольника AOD, поэтому

$$S_{ABCD} = \frac{5}{2} \cdot \left(5\sqrt{3} + 12\right).$$

2-й способ.

1) Обозначим буквой O точку пересечения диагоналей. Рассмотрим треугольник AOD. В нем известны два линейных элемента ($OD = 6{,}5$, $AD = 5$) и один угловой ($\angle OAD = 30°$), значит, в этом треугольнике можно найти оставшиеся элементы, например $\angle AOD$. По теореме синусов:

$$\frac{OD}{\sin \angle OAD} = \frac{AD}{\sin \angle AOD}; \quad \frac{6{,}5}{\sin 30°} = \frac{5}{\sin \angle AOD}$$



$\sin\angle AOD = \frac{5}{13}$, $\angle AOD = \arcsin\frac{5}{13}$ (острый угл) или $\angle AOD =$ $= 180° - \arcsin\frac{5}{13}$ (тупой угл). Однако последний случай не удовлетворяет условию задачи, т.к. $\angle AOD$ не является большим углом треугольника AOD.

2) В треугольнике AOD $\angle ADO = 150° - \arcsin\frac{5}{13}$ (по теореме о сумме углов треугольника).

3) Площадь

$$\Delta ABD = \frac{1}{2} AD \cdot BD \cdot \sin\angle ADO = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 13 \cdot \sin\left(150° - \arcsin\frac{5}{13}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} 5 \cdot 13 \cdot \left(\sin 150° \cdot \cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) - \sin\left(\arcsin\frac{5}{13} \cdot \cos 150°\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} 5 \cdot 13 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{25}{169}} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} 5 \cdot 13 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{5}{4}\left(12 + 5\sqrt{3}\right).$$

4) Так как диагональ BD разбивает параллелограмм на два равных треугольника, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади ΔABD, т.е. $S = 2{,}5 \cdot \left(12 + 5\sqrt{3}\right)$.

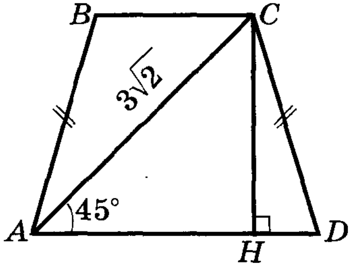
5) В ответе следует записать результат умножения: $2{,}5 \cdot \left(12 + 5\sqrt{3}\right) \cdot \left(12 - 5\sqrt{3}\right) = 2{,}5 \cdot (144 - 75) = 172{,}5.$

Ответ: 172,5.

Задача 2. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагональ которой равна $3\sqrt{2}$ и составляет с основанием угол 45°.

Решение.

1-й способ. 1) Для того чтобы найти площадь трапеции, достаточно найти ее высоту и длины оснований (см. формулу площади трапеции). Высоту найдем с помощью теоремы Пифагора из прямоугольного равнобедренного (почему?) ΔACH.



$2CH^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$, $CH^2 = 9$, значит, высота $CH = 3$, следовательно, $AH = 3$.

2) Обозначим длину HD через a, тогда $AD = 3 + a$, $BC = 3 - a$. Используя формулу для нахождения площади трапеции, получим:

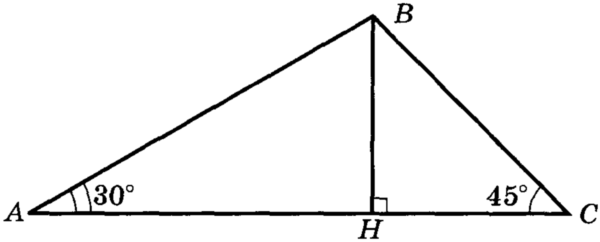
$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{3 - a + 3 + a}{2} \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9.$$

2-й способ. 1) Проведем диагонали трапеции (см. рисунок к задаче). Учитывая, что в данном случае угол между диагоналями трапеции — прямой (почему?), площадь трапеции можно найти по формуле площади произвольного четырехугольника:

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \angle\left(d_1 d_2\right) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sin 90^\circ = 3 \cdot 3 = 9.$$

Ответ: 9.

Задача 3. Радиус описанной окружности около треугольника ABC равен $2\sqrt{2}$. Найдите длину высоты BH, если $\angle A = 30^\circ$, а $\angle C = 45^\circ$.



Решение.

1) Применяя теорему синусов для ΔABC, получим $\dfrac{BC}{\sin 30^\circ} = 2R$,

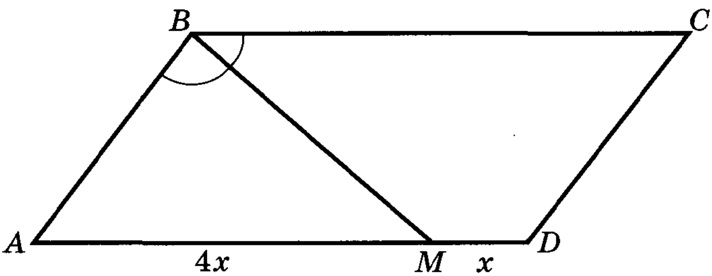
$BC = 2R\sin 30^\circ = 2\sqrt{2}$.

2) Треугольник BCH — прямоугольный и равнобедренный. Применяя теорему Пифагора для ΔBCH, найдем длину стороны BH:

$2BH^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2, \quad BH = 2.$

Ответ: 2.

Задача 4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке M так, что AM в 4 раза больше MD. Найдите длину большей стороны параллелограмма, если его периметр равен 36.



Решение.

1) Точка M делит сторону AD в отношении 4:1, следовательно, обозначив длину MD через x, получим $AM = 4x$, а $BC = AD = 5x$ по свойству параллелограмма.

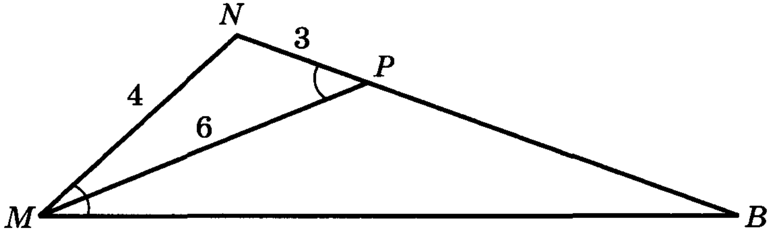
2) $\angle AMB = \angle MBC$ как накрест лежащие при $BC \| AD$ и секущей BM, значит, $\angle ABM = \angle AMB = \angle MBC$, поэтому треугольник ABM — равнобедренный.

3) Получили, что длины сторон параллелограмма равны $AB = DC = 4x$, $AD = BC = 5x$. Зная периметр, можем составить уравнение: $4x + 4x + 5x + 5x = 36$, $18x = 36$, $x = 2$.

4) Получили, что $AB = DC = 8$, $AD = BC = 10$.

Ответ: 10.

Задача 5. Известны длины сторон треугольника MNP: $MN = 4$, $NP = 3$, $MP = 6$. На луче NP выбрана такая точка B, что угол NMB равен углу NPM. Найдите большую сторону треугольника MPB.



Решение.

1) $\Delta MNP \sim \Delta BNM$ (по двум углам), следовательно, из соотношения сторон получим:

$$\frac{MN}{NB} = \frac{MP}{MB} = \frac{NP}{MN},$$

$$NB = \frac{16}{3},\ MB = 8.$$

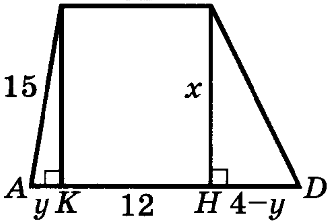
2) Стороны треугольника MPB имеют следующие длины:

$MB = 8$, $MP = 6$, $PB = 2\frac{1}{3}$.

3) В треугольнике MPB MB — бо́льшая сторона. Ее длина равна 8.

Ответ: 8.

Задача 6. Найдите радиус окружности, вписанной в трапецию с основаниями 12 и 16, и одной из боковых сторон, равной 15.



Решение.

1) По свойству описанного четырехугольника:

$BC + AD = AB + CD$, $12 + 16 = 15 + CD$, $CD = 13$.

2) Две высоты трапеции (BK и CH) отсекают на большем основании три отрезка. Пусть $AK = y$, тогда $KH = BC = 12$ и $HD = AD - AH = 16 - y - 12 = 4 - y$.

3) Применяя теорему Пифагора для ΔABK и ΔCDH, получим систему уравнений:

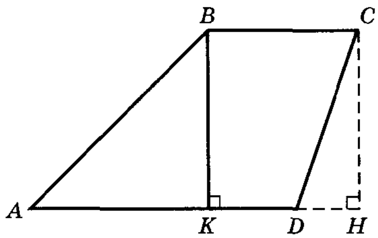
$$\begin{cases} 15^2 = x^2 + y^2 \\ 13^2 = x^2 + (4 - y)^2, \end{cases}$$

где x — длина высоты трапеции, y — длина отрезка AK.

Решая систему методом сложения, находим $y = 9$, $x = 12$.

4) Так как диаметр окружности, вписанной в трапецию, равен высоте трапеции, то радиус вписанной окружности равен половине высоты, т.е. радиус равен 6.

Замечание. Полученное решение позволяет уточнить вид трапеции (см. рис.)



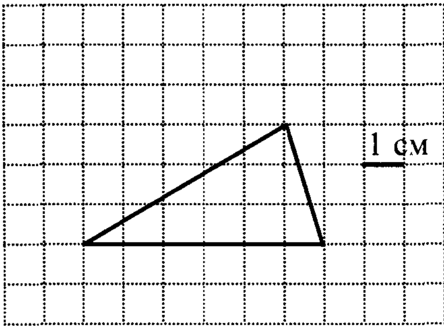
Ответ: 6.

Задачи для самостоятельного решения

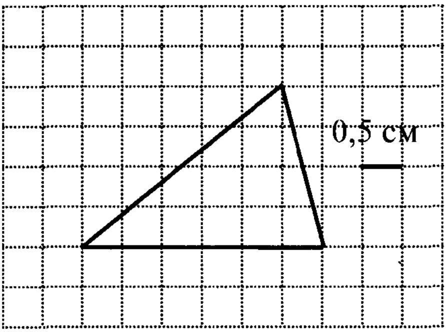
Часть I

Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

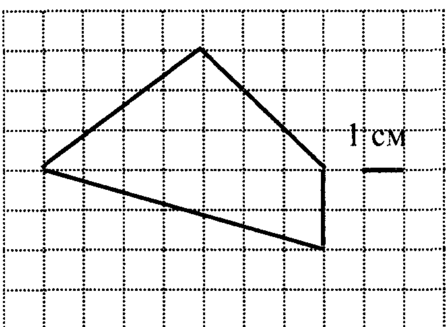
1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник. Найдите его площадь (в квадратных сантиметрах).



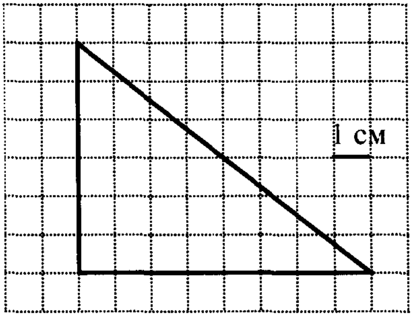
2. На клетчатой бумаге с клетками размером 0,5 см × 0,5 см изображен треугольник. Найдите его площадь (в квадратных сантиметрах).



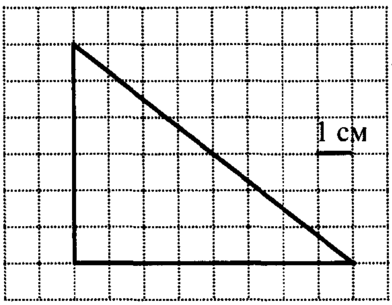
3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен четырехугольник. Найдите его площадь (в квадратных сантиметрах).



4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник. Найдите радиус описанной около треугольника окружности (в сантиметрах).



5. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник (в сантиметрах).



6. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 4\sqrt{2}$, $\angle ADB = 30°$, $\angle BDC = 45°$. Найдите длину стороны AB.

7. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Боковая сторона равна 4. Найдите квадрат длины медианы, проведенной к боковой стороне.

8. Найдите площадь параллелограмма $MPKN$, если $\angle PKM = 45°$, $PK = 5\sqrt{2}$, $PN = 26$.

9. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы его вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

10. В треугольнике MBO построена высота BH. Длина BO равна 5, длина OH равна 4, радиус окружности, описанной около треугольника MBO, равен 10. Найдите длину стороны MB.

11. Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите длину большего основания трапеции.

12. На диагонали BD прямоугольника $ABCD$ взята точка N, так что $BN:ND = 3:2$. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCN$, если $AC = 10$ и $\angle AOB = 30°$.

13. В параллелограмме $MNPQ$ биссектриса угла M пересекает сторону NP в точке A так, что $AN:AP = 3:2$. Найдите длину меньшей стороны параллелограмма, если его периметр равен 48 см.

14. Катеты прямоугольного треугольника имеют длину 12 и 5. Найдите длину медианы, проведенную к гипотенузе.

15. Известны длины сторон треугольника ABC: $AB = 6$, $CA = 7$, $BC = 5$. На луче BC выбрана такая точка F, что угол BAF равен углу ACB. Найдите меньшую сторону треугольника ACF.

Задачи по стереометрии

Теоретические сведения

Прямые и плоскости

Признак параллельности прямых. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Теорема о трех перпендикулярах. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Определение. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Определение. Двугранным углом называется фигура в пространстве, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая прямая — ребром двугранного угла.

Двугранный угол измеряется линейным углом, т.е. углом между двумя перпендикулярами к ребру, выходящими из одной точки и лежащими в разных гранях.

Определение. Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на данных прямых, перпендикулярный к ним.

Определение. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Пирамида

Определение. Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.

Определение. Апофемой правильной пирамиды называется высота ее боковой грани, проведенная из вершины пирамиды.

Теорема 1. Если двугранные углы при основании пирамиды равны, то центр вписанного шара принадлежит ее высоте.

Теорема 2. Если боковые ребра пирамиды равны, то центр описанного шара лежит на высоте или ее продолжении.

Призма

Определение. Прямая призма называется правильной, если ее основания — правильные многоугольники.

Определение. Перпендикулярным сечением наклонной призмы называется ее сечение плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы и перпендикулярной к ним.

Площади и объемы

ПИРАМИДА

1) *Площадь боковой поверхности правильной пирамиды*

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h,$$

где $P_{осн}$ — периметр основания, h — длина апофемы.

2) *Площадь полной поверхности произвольной пирамиды*

$$S_{Полн} = S_{бок} + S_{осн},$$

где $S_{ожн}$ — площадь основания.

3) *Объем произвольной пирамиды*

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания, H — высота пирамиды.

ПРИЗМА

4) *Площадь боковой поверхности прямой призмы*

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot H,$$

где $P_{осн}$ — периметр основания, Н — высота призмы.

5) *Площадь боковой поверхности наклонной призмы*

$$S_{бок} = P_{перп.сеч.} \cdot l,$$

где $P_{перп.сеч.}$ — периметр перпендикулярного сечения, l — боковое ребро призмы.

6) *Площадь полной поверхности произвольной призмы*

$$S_{пол} = S_{бок} + 2S_{осн},$$

где $S_{осн}$ — площадь основания.

7) *Объем произвольной призмы*

$$V = S_{осн} \cdot H,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания, H — высота призмы.

8) *Объем наклонной призмы*

$$V = S_{перп.\ сеч.} \cdot l,$$

где $S_{перп.сеч.}$ — площадь перпендикулярного сечения, l — боковое ребро призмы.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

9) *Площадь боковой поверхности конуса*

$$S_{бок} = \pi \cdot r \cdot l,$$

где r — радиус основания конуса, l — образующая конуса.

10) *Объем конуса*

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h,$$

где r — радиус основания конуса, h — высота конуса.

11) *Площадь боковой поверхности цилиндра*

$$S_{бок} = 2\pi \cdot r \cdot h,$$

где r — радиус основания цилиндра, h — высота цилиндра.

12) *Объем цилиндра*

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

где r — радиус основания цилиндра, h — высота цилиндра.

13) *Площадь сферы*

$$S = 4\pi \cdot R^2,$$

где R — радиус сферы.

14) *Объем шара*

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3,$$

где R — радиус сферы.

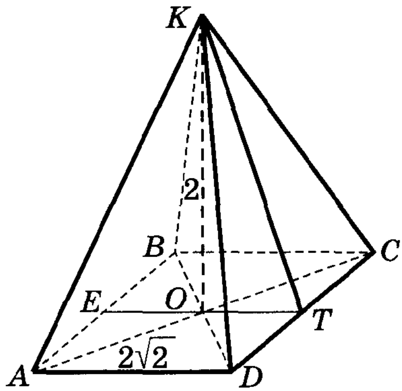
Решение типовых задач

Стереометрические задачи в ЕГЭ включены в *часть I* и *часть II*. Основное отличие стереометрических задач, включаемых в разные части, — это разный уровень необходимых для решения обоснований и количество шагов в решении задач. Так, задачи из части I в своем решении содержат обычно 2—3 вычислительных действия и 1—2 обоснования, без которых невозможно решить задачу. Эти обоснования связаны чаще всего с переводом условия задачи на «язык чертежа» и построениями, о которых прямо или косвенно говорится в задаче. Например, построение и введение в рассмотрение элементов, заданных в условии, таких, как расстояние от точки до плоскости, расстояние между скрещивающимися прямыми, линейный угол.

Стереометрические задачи из *части II* сложнее. Они требуют большего количества развернутых обоснований и обычно несложных вычислений. При решении этих задач часто требуется построение вспомогательных элементов и сечений, сопровождаемых необходимыми доказательствами.

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде известны длина стороны основания $2\sqrt{2}$ и длина высоты 2. Найдите: а) объем пирамиды; б) площадь боковой поверхности; в) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; г) угол наклона боковой грани к плоскости основания; д) радиус вписанного шара; е) радиус описанного шара; ж) расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания; з) расстояние от вершины пирамиды до ребра основания; и) расстояние от ребра основания до противоположной грани; к) расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания; л) объем вписанного конуса; м) площадь боковой поверхности описанного конуса.



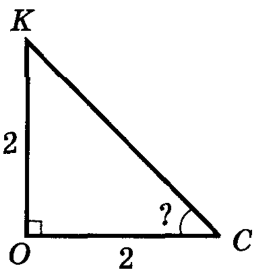
а) KO — высота пирамиды (O — центр квадрата $ABCD$, точка пересечения диагоналей). По формуле (3)

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot KO = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{16}{3}.$$

б) Проведем апофему KT и найдем ее длину из ΔKOT: $KT = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6}.$

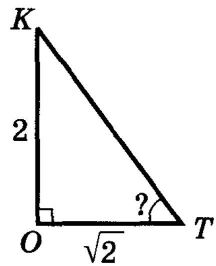
По формуле (1)

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}.$$



в) Так как в правильной пирамиде углы наклона всех боковых ребер к плоскости основания равны, то найдем, например, угол наклона ребра KC к плоскости основания (см. определение угла между прямой и плоскостью). Это угол KCO. Рассмотрим ΔKCO. $KO = 2$, $OC = 0{,}5AC$, а AC является диагональю квадрата $ABCD$, значит, $AC = \left(2\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 4.$ Поэтому $\angle KCO = 45°$.

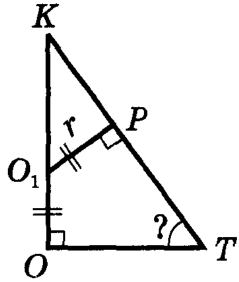
г) Так как в правильной пирамиде углы наклона всех боковых граней к плоскости основания равны, то найдем, например, угол наклона боковой грани KCD к плоскости ABC. Так как $KT \perp DC$, то и $OT \perp DC$ (по теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах), поэтому $\angle KTO$ — линейный угол искомого двугранного угла. Рассмотрим ΔKTO.



$$KO = 2,\ OT = \frac{1}{2} AD = \sqrt{2},\ KT = \sqrt{6}.$$

Имеем: $\angle KTO = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, или $\angle KTO = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$, или $\angle KTO = \arccos\sqrt{\frac{1}{3}}$, или $\angle KTO = \arcsin\frac{2}{\sqrt{6}}$.

д) Так как двугранные углы при основании правильной пирамиды равны, то центр вписанного шара (точка O_1) принадлежит высоте KO. Обозначим радиус вписанного шара буквой r. Рассмотрим ΔKTO. $O_1P = O_1O = r$.

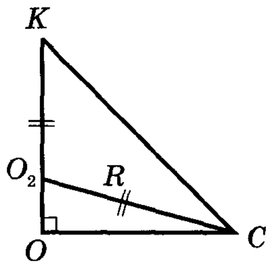


Используя подобие ΔKO_1P и ΔKTO, имеем:

$$\frac{KO_1}{KT} = \frac{O_1P}{OT}, \quad \frac{2-r}{\sqrt{6}} = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad (2-r)\sqrt{2} = r\sqrt{6},$$

$$r = \sqrt{3} - 1.$$

е) Так как боковые ребра правильной пирамиды равны, то центр описанного шара (точка O_2) лежит на прямой KO. Обозначим радиус описанного шара через R. Рассмотрим ΔKCO. По теореме Пифагора из ΔO_2OC:



$$O_2C^2 = OC^2 + O_2O^2,$$

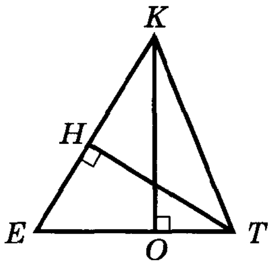
$$R^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + (2-R)^2, \ R = 2.$$

Получаем, что центр описанного шара совпадает с точкой O.

ж) Расстояние от точки K до плоскости ABC равно длине отрезка KO и равно 2.

з) Так как в правильной пирамиде расстояния от вершины до ребер основания равны, то найдем, например, расстояние от точки K до ребра CD. Это расстояние равно длине апофемы KT и равно $\sqrt{6}$.

и) Так как прямая DC параллельна плоскости ABK (по признаку параллельности прямой и плоскости), то расстояние от прямой DC до плоскости ABK равно расстоянию от любой точки прямой DC до этой плоскости. Рассмотрим на прямой DC точку T. И из ΔEKT (точка E — середина AB) найдем искомое расстояние. Это расстояние равно длине высоты TH. Найдем длину TH, выразив двумя способами площадь ΔEKT.



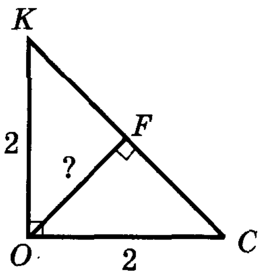
$KT = KE = \sqrt{6}, \ ET = 2\sqrt{2}.$

$S_{EKT} = \frac{1}{2} KO \cdot ET = \frac{1}{2} EK \cdot TH,$

$2 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot TH,$

$TH = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$

к) Найдем, например, расстояние от ребра KC до диагонали BD. Проведем высоту OF в ΔKOC и докажем, что OF — общий перпендикуляр к прямым KC и BD (смотрите определение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых).



1) $OF \perp KC$ по построению.

2) Так как $BD \perp (KCO)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), а $OF \subset (KCO)$, то $BD \perp OF$ (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости).

3) Найдем длину OF, используя площадь ΔKOC.

$$S_{KOC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot OF,$$

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot OF,$$

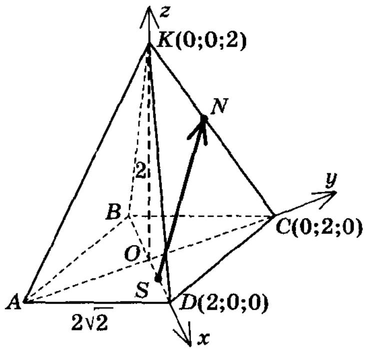
$$OF = \sqrt{2}.$$

На примере пункта предыдущей задачи 1.к) покажем применение векторно-координатного метода для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми. Этот метод используется, когда непосредственно определить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых сложно.

1) Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке. Пусть SN — общий перпендикуляр прямых KC и BD. Найдем длину вектора $\overline{SN}$.
$\overline{SN} = \overline{SD} + \overline{DC} + \overline{CN}.$

2) Так как $\overline{SD}$ коллинеарен $\overline{BD}$, то существует число x, такое что $\overline{SD} = x\overline{BD}$, аналогично, $\overline{CN} = y\overline{CK}$.

Имеем: $\overline{SN} = x\overline{BD} + \overline{DC} + y\overline{CK}$.



3) Найдем координаты векторов: $\overline{BD}\,(4;0;0)$, $\overline{DC}\,(-2;2;0)$, $\overline{CK}\,(0;-2;2)$, поэтому $\overline{SN}\,(4x-2;\ 2-2y;\ 2y)$.

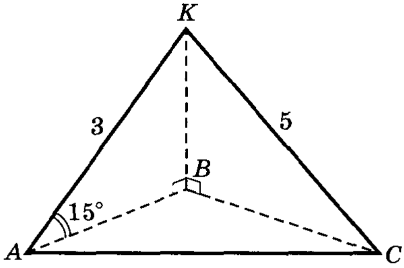
4) Учитывая, что $\overline{SN} \perp \overline{BD}$ $\left(\overline{SN} \cdot \overline{BD} = 0\right)$ и $\overline{SN} \perp \overline{CK}$ $\left(\overline{SN} \cdot \overline{CK} = 0\right)$, получим систему линейных уравнений
$$\begin{cases}(4x-2)4 = 0,\\ (2-2y)(-2) + 2y \cdot 2 = 0\end{cases} \quad \begin{cases}x = 0{,}5,\\ y = 0{,}5.\end{cases}$$

5) Получаем $\overline{SN}$ (0; 1; 1), поэтому его длина
$$\left|\overline{SN}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

л) Высота вписанного конуса равна высоте пирамиды, а радиус основания конуса равен радиусу окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, поэтому
$$V_{впис.конуса} = \frac{1}{3} \cdot \pi\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi.$$

м) Образующая описанного конуса равна боковому ребру пирамиды, а радиус основания конуса равен радиусу окружности, описанной около квадрата $ABCD$, поэтому
$$S_{опис.конуса} = \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi.$$

Задача 2. В треугольной пирамиде $ABCK$ ребро BK перпендикулярно основанию ABC. Длины ребер $AK = 3$, $CK = 5$, $(CK > AC)$, а грань AKC является прямоугольным треугольником. Найдите объем пирамиды, если угол между гранями ABC и AKC равен 15°.



Р е ш е н и е. 1) Так как ΔAKC — прямоугольный, и CK — большая сторона, то CK — гипотенуза, сторона $AC = 4$, $\angle KAC = 90°$.

2) По теореме, обратной к теореме о трех перпендикулярах, $AB \perp AC$. Получаем, что двугранный угол $KACB$ измеряется линейным углом KAB, значит, $\angle KAB = 15°$.

3) Можем считать основанием пирамиды треугольник AKB, а ее высотой — отрезок AC.

$$S_{\Delta AKB} = 0{,}5 \cdot 3 \cdot AB \cdot \sin 15° = 0{,}5 \cdot 3 \cdot (3 \cdot \cos 15°) \cdot \sin 15° = \frac{9}{8}.$$

4) Тогда объем пирамиды можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta AKB} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot 4 = 1{,}5$$

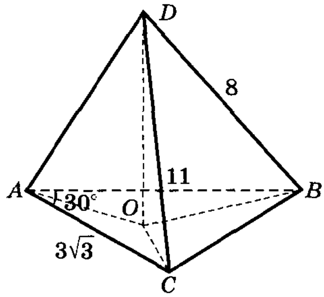
Ответ: 1,5.

Задача 3. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $3\sqrt{3}$; 11 и углом в 30° между ними. Все боковые ребра пирамиды равны 8. Найдите объем пирамиды (V). В ответе запишите $V\sqrt{5}$.

Р е ш е н и е. 1) Рассмотрим пирамиду $DABC$. Пусть DO — ее высота и $AB = 11$, $AC = 3\sqrt{3}$, $\angle BAC = 30°$.

По формуле объема пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO.$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = \frac{33\sqrt{3}}{4}.$$



2) Остается найти высоту пирамиды, т.е. DO. Выясним положение точки O. Так как $\Delta AOD = \Delta BOD = \Delta COD$ (по гипотенузе и катету), то $AO = BO = CO$ и точка O равноудалена от вершин, следовательно, точка O — центр описанной окружности.

3) Обозначим радиус описанной окружности через R. По теореме синусов из ΔABC $2R = \frac{BC}{\sin 30^\circ}$ (*).

4) По теореме косинусов из ΔABC $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A = 11^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 11 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 49,$ $BC = 7$.

5) Подставим BC в (*). Получим $R = 7$.

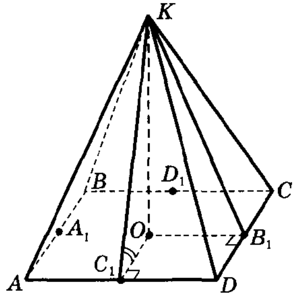
6) По теореме Пифагора из

$$\Delta AOD\colon DO = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}.$$

7) Окончательно получаем $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{33\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{15} = \frac{33\sqrt{5}}{4}.$

В ответе $V\sqrt{5} = 41{,}25$.

Ответ: 41,25.

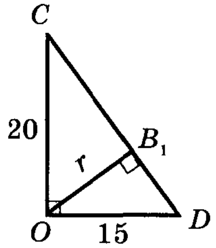


Задача 4. Найдите площадь полной поверхности четырехугольной пирамиды, если в основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 30 и 40, и все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°.

Решение. 1) Рассмотрим пирамиду $KABCD$, KO — высота, $AC = 40$, $BD = 30$.

2) По формуле площади полной поверхности пирамиды

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{ABCD},$$
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600.$$



3) Найдем длину высоты пирамиды, для этого выясним положение точки O. Опустим из точки O перпендикуляры к DC и AD, соответственно OB_1и OC_1. По теореме о трех перпендикулярах: $KB_1 \perp DC$, $KC_1 \perp AD$, поэтому $\angle KC_1O$, $\angle KB_1O$ — линейные углы двугранных углов $KADB$ и $KDCB$, значит, $\angle KC_1O = \angle KB_1O = 30°$. Аналогично, $\angle KA_1O = \angle KD_1O = 30°$.

4) Так как $\Delta KC_1O = \Delta KB_1O = \Delta KA_1O = \Delta KD_1O$ (почему?), то $A_1O = B_1O = C_1O = D_1O$ и точка O равноудалена от сторон, следовательно, точка O — центр вписанной окружности.

5) Обозначим радиус вписанной окружности буквой r.

Найдем его из ΔCOD.

$$CD = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Из подобия ΔOB_1D и ΔCOD получим пропорцию

$$\frac{CO}{OB_1} = \frac{CD}{OD}, \ \frac{20}{r} = \frac{25}{15}, \ r = \frac{20 \cdot 15}{25}, \ r = 12.$$

Из ΔKB_1O: $\cos \angle KB_1O = \dfrac{OB_1}{KB_1}$, $KB_1 = \dfrac{r}{\cos 30°} = 8\sqrt{3}$.

6) $S_{бок} = 4S_{KCD}$, а

$$S_{KCD} = \frac{1}{2} KB_1 \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 25 = 100\sqrt{3}.$$
$$S_{бок} = 400\sqrt{3}.$$

7) Окончательно имеем $S_{полн} = 600 + 400\sqrt{3}$.

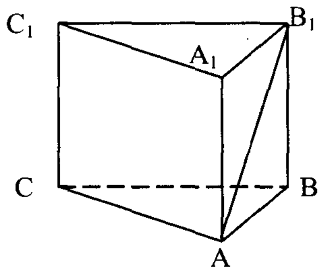
Ответ: $600 + 400\sqrt{3}$.

ПРАВИЛЬНАЯ ПРИЗМА

Задача 5. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6. Прямая AB_1 образует с основанием угол 30^o. Найдите:

I. Площади и объемы

а) площадь боковой поверхности призмы; б) площадь полной поверхности призмы; в) объем призмы; г) на сколько процентов объем вписанного цилиндра меньше объема описанного цилиндра? д) сколько процентов от площади боковой поверхности вписанного цилиндра составляет площадь боковой поверхности описанного цилиндра? е) площадь описанного шара; ж) площадь сечения AB_1C; з) отношение объемов призмы $ABCA_1B_1C_1$ и пирамиды B_1ABC.



II. Углы

и) между прямыми AB_1 и CC_1; к) между плоскостями AB_1C и ABC; л) угол между прямой B_1M и плоскостью ABC, если BM — медиана треугольника ABC;

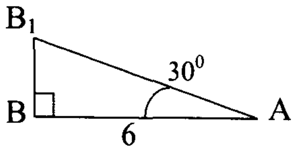
III. Расстояния

м) от точки B_1 до плоскости ACC_1; н) от точки B_1 до прямой AC; о) от прямой BB_1 до плоскости ACC_1; п) между прямыми AC и BB_1;

а) 1. $S_{бок} = P_{осн} \cdot H$. В основании лежит правильный треугольник ABC, значит, $P_{осн} = P_{ABC} = 3 \cdot 6 = 18$.

2. Найдем высоту призмы. Прямая AB_1 образует с основанием угол 30^0 (см. определение угла между прямой и плоскостью). Проекцией диагонали AB_1 является сторона основания AB (так как в правильной призме боковые грани перпендикулярны к плоскости основания), поэтому углом между прямой AB_1 и плоскостью основания ABC является угол B_1AB. Итак, $\angle B_1AB = 30^0$. Высоту призмы BB_1 можно найти двумя способами.

1-й способ.



Из треугольника ABB_1 имеем

$$\mathrm{tg}\angle B_1AB = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{6}$$

$$BB_1 = 6 \cdot \mathrm{tg}30^0 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

2-й способ.

По свойству катета, лежащего против угла в 30^0, имеем $AB_1 = 2BB_1$, и если $BB_1 = x$, тогда $AB_1 = 2x$. По теореме Пифагора $x^2 + 6^2 = (2x)^2$, откуда $x = 2\sqrt{3}$.

3. $S_{бок} = P_{ABC}, BB_1 = 18 \cdot 2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

Ответ: $36\sqrt{3}$.

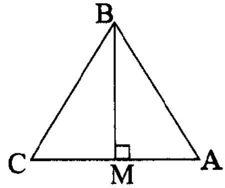
б) $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 36\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 60° =$
$= 36\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$.

Ответ: $54\sqrt{3}$.

в) $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 54$.

Ответ: 54.

г) Сначала рассмотрим цилиндр, описанный около призмы. Высота описанного цилиндра равна высоте призмы, т.е. BB_1, а радиус основания равен радиусу окружности (R), описанной около треугольника ABC.



$$R = \frac{2}{3} \cdot BM = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{6^2 - 3^2} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$V_{опис.\,цилиндра} = \pi \cdot R^2 \cdot BB_1 = 24\sqrt{3}\pi.$$

Теперь рассмотрим цилиндр, вписанный в призму. Высота вписанного цилиндра равна высоте призмы, т.е. BB_1, а радиус основания равен радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC (r).

$$r = \frac{1}{3} \cdot BM = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

$$V_{впис.\,цилиндра} = \pi \cdot r^2 \cdot BB_1 = 6\sqrt{3}\pi.$$

Решим пропорцию:

$$\begin{matrix} 24\sqrt{3}\pi - 100\% \\ 6\sqrt{3}\pi - x \end{matrix}, \quad \frac{24\sqrt{3}\pi}{6\sqrt{3}\pi} = \frac{100\%}{x}, \quad x = 25\%.$$

Прежде чем записать ответ, вспомним, на какой вопрос необходимо ответить в пункте г).

Ответ: на 75% объем вписанного цилиндра меньше объема описанного цилиндра.

д) Сначала рассмотрим цилиндр, описанный около призмы. Образующая описанного цилиндра равна высоте призмы, т.е. BB_1, а радиус основания равен радиусу окружности (R), описанной около треугольника ABC, поэтому

$$S_{бок.\,опис.\,цилиндра} = 2\pi \cdot R \cdot BB_1 = 24\pi.$$

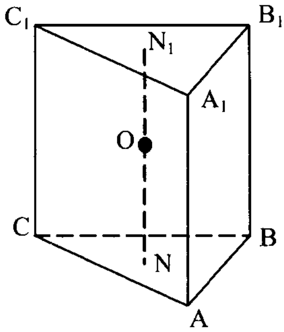
Теперь рассмотрим цилиндр, вписанный в призму. Образующая вписанного цилиндра равна высоте призмы, т.е. BB_1, а радиус основания равен радиусу окружности (r), вписанной в треугольник ABC, поэтому

$$S_{бок.\,впис.\,цилиндра} = 2\pi \cdot r \cdot BB_1 = 36\pi.$$

Решим пропорцию:

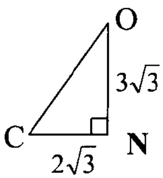
$$\begin{matrix} 36\pi - 100\% \\ 72\pi - y \end{matrix}, \quad \frac{12\pi}{24\pi} = \frac{100\%}{y}, \quad y = 200\%.$$

Ответ: 200% составляет площадь боковой поверхности описанного цилиндра от площади боковой поверхности вписанного цилиндра.



е) 1. Центр описанной сферы (точка O) является серединой отрезка NN_1, где точки N и N_1 — центры треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Эта точка равноудалена от всех вершин призмы. Радиус сферы (OC) найдем из треугольника ONC.

2. $ON = 0{,}5NN_1 = 3\sqrt{3}$.

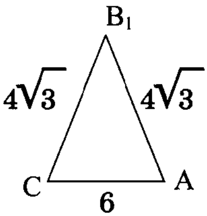


3. NC равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC, $NC = 2\sqrt{3}$.

4. $OC^2 = 3 + 12 = 15$.

5. $S = 4\pi \cdot OC^2 = 60\pi$.

Ответ: 60π.



ж) Искомое сечение — треугольник AB_1C, причем $AB_1=CB_1$ (почему?).

Найдем площадь треугольника.

$$S = \sqrt{15 \cdot (15-12)(15-12)(15-6)} =$$
$$= \sqrt{15 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} = 9\sqrt{15}.$$

2-й способ.

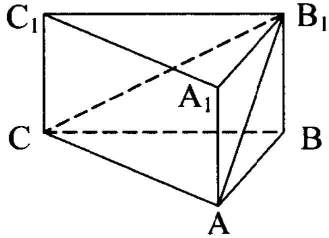
Высота треугольника, опущенная из вершины B_1, равна

$$\sqrt{48-9} = \sqrt{39}\text{, тогда } S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{39} = 3\sqrt{39}.$$

Ответ: $3\sqrt{39}$.

з) Найдем отношение объемов призмы $ABCA_1B_1C_1$ и пирамиды B_1ABC.

$$\frac{V_{ABCA_1B_1C_1}}{V_{B_1ABC}} = \frac{S_{ABC} \cdot BB_1}{\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot BB_1} = 3.$$



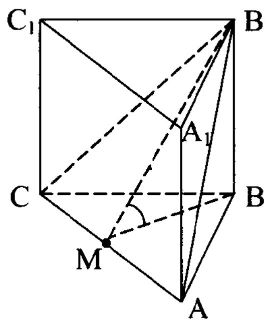
Ответ: 3.

II. Углы

и) Прямые AB_1 и CC_1 являются скрещивающимися. Заменим угол между скрещивающимися прямыми углом между пересекающимися прямыми. Так как прямая CC_1 параллельна прямой AA_1, то $\angle(AB_1; CC_1) = \angle(AB_1; AA_1) = 60°$.

Ответ: 60°.

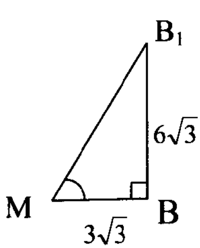
к) 1. Чтобы найти угол между плоскостями AB_1C и ABC, построим соответствующий линейный угол (см. определение линейного угла). Плоскости AB_1C и ABC пересекаются по прямой AC. В плоскости ABC к прямой AC уже проведен перпендикуляр — это высота BM. Так как $AC \perp BM$ (проекции), то $AC \perp MB_1$ (наклонной) по теореме о трех перпендикулярах. Поэтому угол B_1MB является соответствующим линейным углом.



2. Определим его из треугольника B_1MB.

$$3. \operatorname{tg}\angle B_1MB = \frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 2,$$

$$\angle B_1MB = \operatorname{arctg} 2.$$

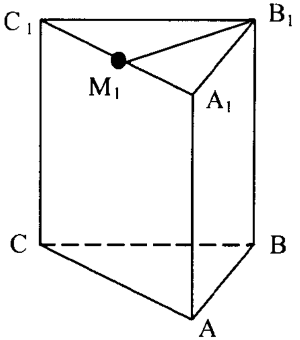


Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

л) Угол между прямой B_1M и плоскостью ABC равен углу B_1MB, так как проекцией B_1M на плоскость ABC является BM.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

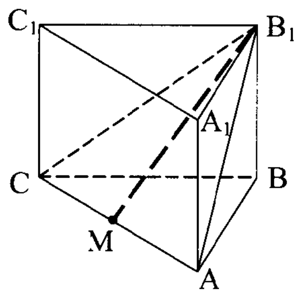
III. Расстояния



м) Так как точка B_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1$, перпендикулярной к плоскости ACC_1, то перпендикуляр из точки B_1 к линии пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и ACC_1 будет перпендикуляром и к плоскости ACC_1. Итак, искомым расстоянием от точки B_1 до плоскости ACC_1 является высота B_1M_1 треугольника $A_1B_1C_1$. $B_1M_1 = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

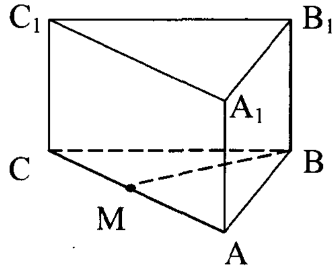
н) Расстоянием от точки B_1 до прямой AC является высота B_1M треугольника AB_1C, проведенная к стороне AC.



Ответ: $\sqrt{39}$.

о) Так как прямая BB_1 параллельна плоскости ACC_1, то расстояние от прямой BB_1 до плоскости ACC_1 равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости, например от точки B_1. А это расстояние мы уже находили в пункте м).

Ответ: $3\sqrt{3}$.

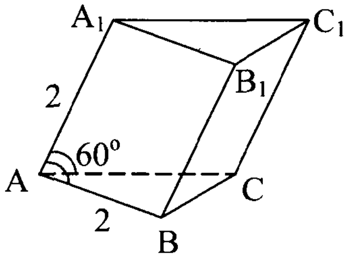


п) Так как $BM \perp AC \perp BM \perp BB_1$, то расстояние между прямыми AC и BB_1 равно длине отрезка BM — общего перпендикуляра к этим прямым.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

НЕПРАВИЛЬНЫЕ ПРИЗМЫ

Задача 6. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной 2. Боковое ребро AA_1 призмы равно 2 и образует со сторонами AB и AC углы по 60°. Найдите: а) площадь грани BCC_1B_1; б) площадь боковой поверхности призмы; в) объем призмы.



а) 1. Так как прямая AA_1 образует равные углы с прямыми AB и AC, то проекция прямой AA_1 на плоскость ABC является биссектрисой угла BAC (почему?). В основании призмы лежит правильный треугольник ABC, поэтому его биссектриса является и высотой.

2. По теореме о трех перпендикулярах можно доказать (докажите!), что $BC \perp AA_1$, значит, $BC \perp BB_1$ (почему?) и грань BCC_1B_1 — квадрат. Площадь квадрата равна 4.

Ответ: 4.

б) Чтобы найти площадь боковой поверхности призмы, осталось найти площади граней ABB_1A_1 и ACC_1A_1.

$$S_{ABB_1A_1} = S_{ACC_1A_1} = 2 \cdot 2 \cdot \sin 60° = 2\sqrt{3}.$$

Окончательно имеем $S_{бок} = 4 + 4\sqrt{3}$.

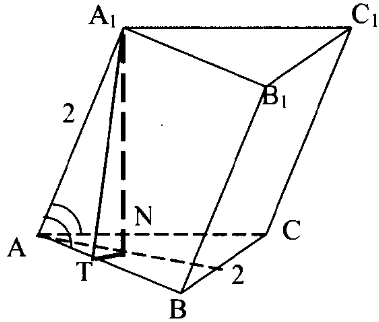
Ответ: $4 + 4\sqrt{3}$.

в) 1. Пусть A_1N — высота призмы, тогда

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot A_1N.$$

2. $S_{ABC} = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$.

3. Найдем высоту A_1N. Из точки N проведем к стороне AB перпендикуляр NT. $AB \perp TN$ (проекции), значит, $AB \perp TA_1$ (наклонной) (почему?). Последовательно определим AT (из треугольника AA_1T); AN (из треугольника ANT); A_1N (из треугольника AA_1N).



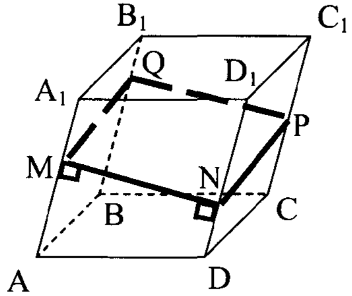
Итак, $AT = 1$, $AN = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $A_1N = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

4. $V_{ABCA_1B_1C_1} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\dfrac{8}{3}} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Задача 7. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 5. Расстояние между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равно 6 и 8, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 10. Найдите: а) объем параллелепипеда; б) площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Из точки M на ребре AA_1 проведем в грани ABB_1A_1 перпендикуляр MQ к ребру AA_1. Плоскость MNQ перпендикулярна боковым ребрам параллелепипеда и сечение этой плоскостью параллелепипеда — есть параллелограмм $MNPQ$ (перпендикулярное сечение) (см. Теоретические сведения в начале параграфа.)



а) Итак, расстояние между ребрами AA_1 и BB_1 равно MQ, расстояние между ребрами AA_1 и DD_1 равно MN, расстояние между ребрами AA_1 и CC_1 равно MP.

$S_{бок} = P_{MNPQ} \cdot AA_1 = 2 \cdot (6 + 8) \cdot 5 = 140.$

Ответ: 140.

б) Так как в треугольнике MNP $MP^2 = MN^2 + PN^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle MNP = 90°$ и перпендикулярное сечение является прямоугольником.

$V = S_{MNPQ} \cdot AA_1 = 6 \cdot 8 \cdot 5 = 240.$

Ответ: 240.

Задачи для самостоятельного решения

Часть I

Ответом в заданиях этой части может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. В четырехугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является прямоугольник, длины ребер $SC = 8$, $CD = 6$, а ребро $SB \perp ABC$. Угол между плоскостями SCD и ABC равен 30°. Во сколько раз площадь основания больше площади грани SBC?

2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания. Ответ запишите в градусах.

3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите радиус описанного шара.

4. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите расстояние p между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания. В ответе записать $3\sqrt{6}p$.

5. В правильной треугольной пирамиде высота равна 4, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 45°. Найдите объем пирамиды V. В ответе запишите $\sqrt{3} \cdot V$.

6. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна высоте и равна 4. Найти расстояние p от вершины основания до плоскости диагонального сечения, не проходящего через эту вершину. В ответе запишите $\frac{p\sqrt{2}}{2}$.

7. В треугольной пирамиде с равными боковыми ребрами известны длины сторон основания 6, 8, 10 и длина высоты 1. Найдите радиус описанного шара.

8. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду с высотой, равной 8, и апофемой, равной 10.

9. В треугольной пирамиде все боковые ребра равны 15,5 см. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 7 см, 15 см, 20 см. Найдите объем пирамиды V. В ответе запишите $\frac{V}{\sqrt{21}}$.

10. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб с диагоналями 30 см и 40 см. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом.

Найдите боковую поверхность пирамиды, если ее высота равна 16 см.

11. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $\sqrt{2}$; 8 и углом в 45° между ними. Все боковые ребра пирамиды равны 7. Найдите объем пирамиды V. В ответе запишите $V\sqrt{6}$.

12. Найдите боковую поверхность четырехугольной пирамиды, если в основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 30 и 40, и все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°.

13. Угол наклона боковой грани к плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды равен 60°, а боковое ребро равно $2\sqrt{15}$. Найдите расстояние между центрами вписанного и описанного шаров.

14. Угол наклона боковой грани к плоскости основания правильной треугольной пирамиды равен 60°. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен 35. Найдите радиус вписанного шара.

15. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6, а высота равна 2. Найдите объем конуса, вписанного в эту пирамиду (V). В ответе запишите $\frac{V}{\pi}$.

16. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около пирамиды (S). В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

17. Найдите площадь боковой поверхности правильной призмы $MNPM_1N_1P_1$, если сторона основания равна

12, а диагональ грани MN_1 образует с плоскостью основания угол 45°.

18. Найдите объем (V) правильной призмы $MNPM_1N_1P_1$, если сторона основания равна 12, а диагональ грани MN_1 образует с плоскостью основания угол 45°. В ответе запишите $\dfrac{V}{\sqrt{3}}$.

19. В правильной призме $MNPM_1N_1P_1$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN_1 образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через середину ребра NP параллельно плоскости MPP_1.

20. В правильной призме $MNPM_1N_1P_1$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN_1 образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите расстояние (p) между прямыми NP и MN_1. В ответе запишите $p\sqrt{3}$.

21. Около правильной призмы $MNPM_1N_1P_1$ описан шар. Найдите площадь его поверхности (S), если сторона основания призмы равна 12, а диагональ грани MN_1 образует с плоскостью основания угол 45^0. В ответе запишите $\dfrac{S}{\pi}$.

22. В правильной призме $MNPM_1N_1P_1$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN_1 образует с плоскостью основания угол 45°. На сколько процентов объем описанного цилиндра больше объема вписанного цилиндра?

23. В правильной призме $MNPM_1N_1P_1$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN_1 образует с плоскостью основания угол 45^0. Сколько процентов от площади боковой поверхности описанного цилиндра составляет площадь боковой поверхности вписанного цилиндра?

24. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной 4. Боковое ребро BB_1 призмы равно 4 и образует равные углы с ребрами BA и BC. Найдите площадь грани ACC_1A_1.

25. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной 4. Боковое ребро BB_1 призмы равно 4 и образует с ребрами BA и BC углы по 45^0. Найдите объем призмы (V).

26. Найдите площадь боковой поверхности наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (S), если ее основанием является правильный треугольник ABC со стороной 4, а боковое ребро BB_1 равно 4 и образует с ребрами BA и BC углы по 45^0. В ответе запишите $S\left(\sqrt{2}-1\right)$.

27. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 8. Расстояние между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равно 12 и 9, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 15. Найти объем параллелепипеда.

28. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 8. Расстояние между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равно 12 и 9, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 15. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

29. Отношение площади боковой поверхности конуса к его объему равно 1,5. Найдите высоту конуса, если его образующая равна диаметру основания.

30. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно 3. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите объем конуса (V). В ответе запишите $\dfrac{V}{\pi\sqrt{3}}$.

Часть II

Решите следующие задания с полным обоснованием решения.

31. Сфера касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной 2. Найдите длину бокового ребра пирамиды, если радиус сферы равен 3.

32. Около пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной, равной 3, описан шар. Найдите радиус шара, если известно, что одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно ее основанию и равно 2.

33. В сферу радиуса $\sqrt{66}$ вписана правильная треугольная пирамида ($DABC$, D — вершина), длина апофемы которой относится к длине высоты как $3:2\sqrt{2}$. Найдите наименьшую площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды, середину стороны AC и пересекающей сторону BC.

IV. Указания

Раздел III.1. ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Тождественные преобразования иррациональных и степенных выражений

1. См. решение типового задания 2.

2. См. решение типового задания 7.

3. См. решение типового задания 3.

4. См. решение типового задания 4.

5. Примените свойство (2).

6. Примените свойство (1) и формулу (12).

7. К выражению в числителе примените формулу (12).

8. В числителе примените формулу квадрата разности.

9. Приведите к общему знаменателю.

10. Приведите дроби к общему знаменателю и в знаменателе примените формулу разности квадратов.

11. Примените свойства (7), (8).

12. В числителе примените формулу (16). В знаменателе вынесите общий множитель x.

13. См. решение типового задания 12.

14. В числителе примените формулу (12). В знаменателе — формулу (14).

15. В знаменателе вынесите общий множитель $\sqrt{30}$.

16. Вынесите общие множители: в первом множителе $a^{-\frac{1}{5}}$, во втором — $a^{-\frac{4}{5}}$.

17. См. решение типового задания 6.

18. См. решение типового задания 15.

19. См. решение типового задания 11.

20. См. решение типового задания 14.

21. См. решение типового задания 5.

22. См. решение типового задания 12.

23. См. решение типового задания 19.

24. См. решение типового задания 10.

25. Не забудьте, что $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$.

26. В числителе вынесите общий множитель $3\sqrt[6]{8m}$.

27. См. решение типового задания 1.

28. Выражение в скобках приведите к общему знаменателю. Ко второму множителю примените формулу (13).

29. См. решение типового задания 17.

30. См. решение типового задания 18.

31. Примените свойство (6).

32. См. решение типового задания 21.

33. Примените последовательно формулы (13) и (6).

34. Рассмотрите разности $A = \sqrt{204} - \sqrt{205}$ и $B = \sqrt{206} - \sqrt{207}$. Умножьте A и B на сопряженные к ним выражения и сравните знаменатели получившихся дробей.

35. Упростите выражение $|8\sqrt{3} - 14|$. Рассмотрите числитель дроби и покажите, что он равен $-2\sqrt{6}$.

Тождественные преобразования логарифмических выражений

13. Применить свойство (4) — «логарифм частного» нельзя! Попробуйте воспользоваться свойством (7) или перейдите к новому основанию.

14. Преобразуйте логарифм частного и сделайте подстановку.

15. Примените формулу логарифма произведения.

16. Преобразуйте каждое слагаемое выражение с помощью свойств (6),(5),(4) и используйте основное логарифмическое тождество.

17. Используйте свойство степеней $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ и основное логарифмическое тождество.

18. $\log_{121}\left(2\sqrt{2}-5\right)^2 = \log_{11}\left|2\sqrt{2}-5\right|$.

19. Преобразуйте выражение в числителе и в знаменателе. Используйте свойство логарифмов (5).

20. Используйте для преобразования свойства логарифма (3), (5) и (4).

21. Перейдите в каждом из логарифмов к новому основанию 3, используя свойство логарифмов (7) и (8). Выбор основания произволен.

22. См. решение типового задания 9.

23. Упростите выражение путем разложения на множители с помощью формулы $a^2 - b^2$.

24. К выражениям в знаменателе примените свойство логарифмов (8) и полученное выражение разложите на множители.

25. См. решение типового задания 10.

26. См. решение типового задания 9.

27. Используйте свойство логарифмов (9).

28. Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

29. Выразите через а значение $\log_3 2$ и выразите через этот логарифм данное выражение. Для этого преобразуйте с помощью свойства (4) логарифм частного. К полученному выражению примените свойства (5), (8) и (3).

30. Выразите через a значение $\log_2 3$ и выразите через этот логарифм данное выражение. Для этого преобразуйте с помощью свойства (4) логарифм частного. К полученному выражению примените свойства (5), (8) и (3).

31. Разложите 14 на множители 7 и 2. Примените свойство логарифмов (3).

32. Разложите 18 на множители.

33. Приведите к общему знаменателю выражения в круглых скобках. При извлечении квадратного корня из квадрата логарифмического выражения не забудьте оставить модуль. Определите знак выражения под модулем и раскройте модуль, используя его определение.

34. Приведите к общему знаменателю выражения в круглых скобках. При извлечении квадратного корня из квадрата логарифмического выражения не забудьте оставить модуль. Определите знак выражения под модулем и раскройте модуль, используя его определение.

35. Перейдите к одному основанию в логарифмическом выражении во внутренних скобках. Используйте формулу $\sqrt{a^2} = |a|$. Не забудьте раскрыть модуль с учетом знака выражения, стоящего под модулем.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

1. Примените основное тригонометрическое тождество.

2. Примените основное тригонометрическое тождество.

3. Из основного тригонометрического тождества выразите $\sin^2\beta$ через $\cos^2\beta$ и не забудьте учесть, что $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

4. Из основного тригонометрического тождества выразите $\cos^2\gamma$ через $\sin^2\gamma$ и учтите, что $\frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$.

5. Из основного тригонометрического тождества выразите $\sin^2 x$ через $\cos^2 x$ и учтите, что $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

6. Из основного тригонометрического тождества выразите $\cos^2 x$ через $\sin^2 x$ и учтите, что $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

7. См. решение типового задания 1.

8. См. решение типового задания 6.

9. См. решение типового задания 7.

10. См. решение типового задания 10.

11. Примените формулу «синуса суммы».

12. Примените формулу «косинуса суммы».

13. Используйте формулу «синуса двойного угла», для этого вычислите $\cos\alpha$.

14. В числителе используйте формулу понижения степени для $\cos^2 24°$ или основное тригонометрическое тождество. В знаменателе — формулу «синуса двойного угла».

15. В числителе используйте формулу «синуса двойного угла». В знаменателе – формулу понижения степени для $\sin^2 28°$ или основное тригонометрическое тождество.

16. В числителе используйте формулу разности кубов двух выражений, а также см. решение типового задания 12.

17. Используйте формулу разности квадратов двух выражений, а также см. решение типового задания 10.

18. Используйте формулы приведения и формулы двойного угла.

19. Представьте 25 как степень 5. Далее выполните деление степеней с одинаковыми основаниями и используйте формулы двойного угла.

20. В показателе степени используйте формулу «синуса двойного угла».

21. Используйте формулу логарифма произведения и формулы приведения.

22. Используйте формулу логарифма произведения и формулы приведения.

23. См. решение типового задания 9.

24. См. решение типового задания 14.

25. Сгруппируйте слагаемые по два и примените формулы приведения.

26. Разделите и числитель и знаменатель на $\cos 2\alpha$ и примените формулу «тангенса двойного угла».

27. Возведите равенство $\cos\alpha - \cos 3\alpha = 1$ в квадрат и используйте формулы понижения степени.

28. Примените формулы понижения степени и используйте то, что $270° < \frac{\alpha}{2} < 360°$.

29. См. решение типового задания 13.

Исследование функций элементарными методами

1. Функция убывает на отрезке $[2;8]$. Сравните значения функции на концах отрезка.

2. Функция убывает на отрезке $[1;2]$. Сравните значения функции на концах отрезка.

3. Установите, принадлежит ли абсцисса вершины параболы заданному отрезку. Сравните значения функции на концах отрезка.

4. Установите, принадлежит ли абсцисса вершины параболы заданному отрезку. Сравните значения функции на концах отрезка.

5. Установите, принадлежит ли абсцисса вершины параболы $(x_в = 3)$ заданному отрезку. Сравните значения функции на концах отрезка с ординатой вершины.

6. Функция непрерывна и убывает на всей числовой прямой. На промежутке $(-4;-1)$ принимает все значения из промежутка $\left(0{,}5^{-1};0{,}5^{-4}\right)$.

7. Функция непрерывна и возрастает на промежутке $(2;128)$, при этом принимает все значения из промежутка $(\log_2 2;\log_2 128)$.

8. Функция непрерывна и возрастает на промежутке $(0;32)$, при этом принимает все значения из промежутка $(2;6)$.

9. Функция непрерывна и возрастает на промежутке $(0;32)$, при этом принимает все значения из промежутка $\left(\sqrt[4]{4};\ \sqrt[3]{36}\right)$.

10. Функция непрерывна и возрастает на промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, при этом принимает все значения из промежутка $(0;5)$.

11. Функция непрерывна и убывает на промежутке $(0;\pi)$, при этом принимает все значения из промежутка $(-12;12)$.

12. Найдите множество значений исходной функции, учитывая, что $-1 \le \sin x \le 1$.

13. Найдите множество значений исходной функции, учитывая, что $-1 \le \sin(2x) \le 1$.

14. Найдите множество значений исходной функции, учитывая, что $0 \le \sin^2 x \le 1$.

15. Сначала упростите формулу, задающую функцию, применив формулу двойного.

16. Сначала упростите формулу, задающую функцию.

17. Сначала найдите множество значений знаменателя, а затем самой функции. Учтите, что функция $y = \dfrac{15}{t}$ убывает.

18. Наименьшее значение функция принимает при наибольшем значении функции $t = 4 - x^2$, заданной на промежутке $(-2;\ 2)$.

19. См. решение предыдущего номера.

20. Убывающая функция на своей области определения принимает наибольшее значение при наименьшем значении аргумента.

21. Возрастающая функция на своей области определения принимает наибольшее значение при наибольшем значении аргумента.

22. См. решение типового задания № 9.а).

23. См. решение типового задания № 6.

24. Область определения функции задается системой неравенств $\begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ x + 5 \geq 0. \end{cases}$

25. Область определения функции задается системой условий $\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0, \\ x + 2 \neq 0. \end{cases}$

26. Область определения функции задается системой условий $\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ \dfrac{\pi x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$

27. Область определения функции задается системой условий $\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0, \\ \dfrac{\pi x}{2} \neq \pi k, k \in Z. \end{cases}$

28. Область определения функции задается неравенством $4 - x^2 > 0$.

29. Область определения функции задается системой условий $\begin{cases} 4 - x^2 > 0, \\ x > 0, x \neq 1. \end{cases}$

30. Область определения функции задается условиями: $x > 0$ и $x \neq 1$.

31. См. область определения функции $y = \log_4 x$.

32. Найдите область определения функции. Она будет задаваться следующими условиями: $\dfrac{1 - 3x}{x - 2} > 0$ и $\lg \dfrac{1 - 3x}{x - 2} \geq 0$.

33. Так как функция $y = f(x)$ является четной, то $f(-3) = f(3)$.

34. Так как функция $y = f(x)$ является нечетной, то $f(-3) = -f(3)$.

35. Так как функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 4, то $f(-3) = f(1)$.

36. Так как функция $y = f(x)$ является нечетной, то $f(-3) = -f(3)$.

37. Так как функция $y = f(x)$ является нечетной, то $f(-3) = f(3)$.

38. Так как функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 4, то $f(34) = f(2)$.

39. $g(1) = 1{,}4 + f(-3)$, аналогично для каждого слагаемого. Далее используйте нечетность функции $y = f(x)$.

40. $g(1) = 1{,}4 + f(-3)$ и т.д. Далее используйте четность функции $y = f(x)$.

41. Сначала найдите значение выражения $f(x_1) - 2f(-x_1)$, используя данные и четность функции $y = f(x)$.

42. Сначала найдите значение выражения $f(x_2) - 2f(-x_2)$, используя данные и нечетность функции $y = f(x)$.

43. При $x \geq 0$ нули функции: $x = 0$; $x = 5$. Функция определена на всей числовой прямой, поэтому, в силу нечетности функции $y = g(x)$, при $x \leq 0$ нули функции: $x = 0$; $x = -5$.

44. При $x \leq 0$ нули функции: $x = 0$; $x = -1$; $x = -4$. Функция определена на всей числовой прямой, поэтому, в силу четности функции $y = g(x)$, при $x \geq 0$ нули функции: $x = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

45. См. решение типового задания 8. (прием 7)

46. См. решение типового задания 8. (прием 7)

47. Сначала найдите множество значений показателя степени, а затем самой степени.

48. Следует найти наибольшее и наименьшее значения функции. Для этого введите новую неизвестную $t = \sin x$, $|t| \le 1$, и найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = t^2 + t + 1$ на отрезке $[-1; 1]$. Наибольшее значение равно 3. Для нахождения наименьшего значения функции воспользуйтесь приемом 6. Наименьшее значение равно 0,75.

49. Исследуйте вопрос о наибольшем и наименьшем значении функции $y = -9t^2 + 6t + 9$, где $t = \cos x$ на отрезке $[-1; 1]$.

50. См. решение типового задания 5.

51. $E(x^2 + 4x + 5) = [1; +\infty)$. Данная функция $y = \dfrac{4}{x^2 + 4x + 5}$ принимает наименьшее значение при наибольшем значении знаменателя.

52. $E(x^2 + 2x + 4) = [3; +\infty)$. Данная функция $y = \dfrac{3}{x^2 + 2x + 4}$ принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя, значит, ее наибольшим значением будет 1.

53. Найдите множество значений подкоренного выражения, а затем и самой функции. Множество значений выражения $1 + 3\sin(10x)$ — отрезок $[-2;4]$.

54. Найдите множество значений подлогарифмического выражения, а затем и самой функции. Множество значений выражения $4 + 3\sin(10x)$ — отрезок $[1; 7]$.

55. Найдите множество значений показателя степени, а затем и самой степени.

56. Найдите множество значений знаменателя, а затем и самой функции.

57. Найдите множество значений подлогарифмического выражения, а затем и самой функции, учитывая, что функция $y = \log_{0,5} t$ — непрерывная и убывающая на $D(y)$.

58. Найдите множество значений показателя степени, а затем самой функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{3-\sin x}}$, учитывая, что функция $y = (0{,}5)^x$ – непрерывная и убывающая на $D(y)$.

59. Воспользуйтесь приемом 3 нахождения множества значений функции. $E(\cos(10x) + \sin(10x)) = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. Так как функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на своей области определения, то $E\left(\sqrt{8\sqrt{2}(\cos(10x) + \sin(10x))}\right) = [0; 4]$.

60. Воспользуйтесь приемом 3 нахождения множества значений функции. $E\big(\cos(10x) + \sin(10x)\big) = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. И учтите, что функция $y = \log_2 t$ убывает функция на своей области определения,

61. См. указание к предыдущему заданию.

62. См. указание к заданию 60.

63. Сначала упростите формулу, задающую каждую функцию, например для функции $y = f(x)$:

$$4 - \sqrt{x + 5 + 2\sqrt{x+4}} = 4 - |a+1|, \text{ где } \sqrt{x+4} = a.$$

И используйте свойство следующее свойство модуля: $|a| = a$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$.

64. Сначала упростите формулу, задающую каждую функцию, например для функции $y = g(x)$:

$$\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} = \sqrt{(a-2)^2}\ , \text{ где } \sqrt{x-4} = a.$$

И используйте свойство следующее свойство модуля: $|a| = a$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$.

65. Область определения функции задается системой условий $\begin{cases} 3 - 2x - x^2 \geq 0, \\ x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \neq 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$

66. Область определения функции задается системой условий $\begin{cases} 3 - 2x - x^2 > 0, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$

67. Область определения функции задается системой условий $\begin{cases} 6 - x - x^2 \geq 0, \\ x^4 - 4x^3 + 16x - 16 \neq 0, \\ x \neq \pi n, n \in Z. \end{cases}$

68. Область определения функции задается системой условий $\begin{cases} 6 - x - x^2 > 0, \\ x \neq \pi n, n \in Z. \end{cases}$

Исследование функции с помощью производной

1. См. в теоретических сведениях таблицу формул дифференцирования.

2. См. в теоретических сведениях таблицу формул дифференцирования.

3. Используйте правило дифференцирования частного.

4. Используйте правило дифференцирования произведения.

5. $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

6. $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

7. $f'(x) = -2x - 4$.

8. $f(x) = (x-1)\left(x^2+1\right)(x+1) = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = x^4 - 1$.

9. См. решение типового задания 4.

10. См. замечание в теоретических сведениях и решение типового задания 4.

11. См. решение типового задания 5.

12. См. решение типового задания 5.

13. См. решение типового задания 11.

14. См. решение типового задания 13.

15. На отрезке $[2;\ 5]$ $f'(x) \le 0$, поэтому исходная функция убывает на этом отрезке.

16. См. решение типового задания 10.

17. См. решение типового задания 10.

18. В точках экстремума производная меняет знак.

19. См. решение типового задания 15.

20. Уравнение касательной имеет вид $y = -x + 2$.

21. Уравнение касательной имеет вид $y = x + 1$.

22. Т.к. угловой коэффициент касательной к графику дифференцируемой функции совпадает со значением производной функции в точке касания, то требуется найти количество целых абсцисс, в которых производная принимает отрицательное значение.

23. Т.к. угловой коэффициент касательной к графику дифференцируемой функции совпадает со значением производной функции в точке касания, то требуется найти количество целых абсцисс, в которых производная принимает положительное значение.

24. Графиком функции является парабола, функция достигает наименьшего значения в ее вершине.

25. См. решение типового задания 8.

26. Примените формулу разности кубов. $f(x) = x - 3$.

27. $f'(x) = \dfrac{-6}{(2x+1)^2}$.

28. $f(x) = \left(\left(x^2 + 1\right) - 1\right)^2 = x^4$.

29. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{16}{x^2}.$

30. $f'(t) = -\sin t + \frac{1}{\cos^2 t}.$

31. $g'(x) = 1 - 2e^{-2x}.$

32. $f'(x) = x^4 - 16x^2 = x^2(x-4)(x+4).$

33. См. замечание в теоретических сведениях.

$$y'(x) = 5x^4 - 1.$$

34. См. замечание в теоретических сведениях.

$$g(x) = \left(x^2 - 1\right)^2 - \left(x^2 + 1\right)^2.$$

Примените формулу разности квадратов.

35. См. замечание в теоретических сведениях.

$$g'(x) = \frac{-6}{(4x+1)^2}.$$

36. См. замечание в теоретических сведениях.

$$y(x) = x^6 - 1.$$

37. См. замечание в теоретических сведениях.

$$y'(x) = 2\cos x + \frac{3}{\sin^2 x}.$$

38. См. замечание к решению типового задания 6.

$$y = x^{201} - 1.$$

39. См. решение типового задания 7.

40. См. решение типовых заданий 6, 7.

41. См. замечание к решению типового задания 6.

42. См. решение типового задания 6. Искомая точка $(-1;\ -3)$.

43. $y'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$, $y_{кас} = x - 1$.

44. $y' = 2e^{2x-1} + 2\pi \sin 2\pi x$, $y_{кас} = 2x + 1$.

45. См. в теоретических сведениях признак минимума функции.

46. См. решение типового задания 13. $y' = 3x^2 - 4x - 7$.

47. См. решение типового задания 13. $y' = \dfrac{x^2 - 9}{x^2}$.

48. См. решение типового задания 13. $y' = 3x^2 + 2x - 5$.

49. См. решение типового задания 13. $y' = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$.

50. См. решение типового задания 13. $D(y) = (0; +\infty)$ $y' = 1 - \dfrac{5}{x}$.

51. См. решение типового задания 13. $D(y) = (0; +\infty)$ $y' = -1 + \dfrac{7}{x}$.

52. $f'(x) = x^2(x-1)(5x-3)$.

53. Используйте геометрический смысл производной.

54. См. решение типового задания 14.

55. См. решение типового задания 15.

56. Наибольшее значение достигается в вершине параболы.

57. Длина отрезка $[-2100;\ 2100]$ больше 2π.

58. Функция возрастает на R.

59. Функция убывает на R.

60. См. решение типового задания 8.

61. См. решение типового задания 8.

62. $\left[\begin{array}{l} y'(x_0) = 1, \\ y'(x_0) = -1. \end{array}\right.$ Первое уравнение решений не имеет, решением второго является $x_0 = 0$.

63. $f'(x) = 4x^2 - 4x + 2 = (2x-1)^2 + 1 \geq 1$.

64. Упростите формулу, задающую функцию. Получите

$$f(x) = 3^{\log_3(3x-6)} - x^3 = 3x - 6 - x^3 \text{ при } x \in (2; +\infty).$$

65. Найдите абсциссу точки касания. Для этого решите уравнение $f'(x) = -2$.

66. См. решение типового задания 16.

67. См. решение типового задания 16.

68. $f'(x) = -5 + 4\cos x < 0$ при любых значениях x.

69. $D(h) = [-14; 6]$. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $h(x)$ на этом отрезке.

70. Пусть $t = \sqrt{4\cos x + 5}$. Тогда $1 \leq t \leq 3$ и $g(t) = t^2 - 4t - 5$. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $g(t)$ на отрезке [1; 3].

71. Функция $g(x)$ убывает на $D(g) = [2; 3]$.

72. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю. Получим: $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}\right)$. Функция $f(x)$ возрастает на $D(f) = [0{,}5; +\infty)$.

Первообразная

1. См.решение типового задания 9.

2. См.решение типового задания 9.

3. См. решение типового задания 9.

4. См. решение типового задания 9.

5. Площадь фигуры можно найти как разность площадей прямоугольного треугольника и криволинейной трапеции.

6. Площадь фигуры можно найти как разность площадей прямоугольника и криволинейной трапеции.

7. См. решение типового задания 8.

8. Площадь фигуры равна $3S$, где S — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \cos x$ и прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

9. Упростите формулу, задающую функцию, получите $y = (x-1)^4$.

10. Примените формулу разности кубов, получите $y = x^3$.

11. См. решение типового задания 11.

12. Площадь фигуры равна $2S$, где S — площадь равнобедренного прямоугольного треугольника.

13. $\sqrt{y} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ x \geq 0. \end{cases}$ Площадь фигуры равна площади прямоугольного равнобедренного треугольника.

14. $y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = x,\ y = -x$. Площадь фигуры равна $2S$, где S — площадь равнобедренного прямоугольного треугольника.

15. Первообразная имеет вид $F(x) = (x-1)^2$.

16. Первообразная имеет вид $F(x) = -x^3 - x^2 + 16x + 16$. Решите уравнение $F(x) = 0$, используя метод группировки.

17. Используйте равенство $F_1(x) = F_2(x) + C$ для $x = 3$ и для $x = 5$.

18. Используйте определение первообразной. Найдите $F'(x)$. Для функции $f(x) = 8\sin^4 2x$ два раза примените формулу понижения степени (см. теоретические сведения в разделе «Преобразование тригонометрических выражений»).

19. Первообразная для $f(x)$ имеет вид

$$F(x) = \sin x + \cos x - 1.$$

Для решения уравнения $F(x) = 0$ примените метод вспомогательного угла (см. тему «Тригонометрические уравнения»).

20. Уравнение касательной $y = -\frac{2}{5}x + 2\frac{3}{5}$. Площадь фигуры можно найти как разность площадей прямоугольного треугольника и криволинейной трапеции.

21. См. решение типового задания 13. Графиком функции $y = \sqrt{8x - x^2 - 12}$ является полуокружность с центром в точке (4; 0) и радиусом, равным 2, расположенная в верхней полуплоскости.

22. См. решение типового задания 8.

23. См. решение типового задания 7.

Раздел III.3. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Рациональные неравенства

1. Неравенство равносильно неравенству $\frac{4-x}{x} > 0.$

2. См. решение типового задания 6.

3. Нуль числителя равен 4. Нуль знаменателя равен (-5).

4. См. решение типового задания 13,а).

5. См. решение типового задания 3.

6. См. решение типового задания 2.

7. Исходная система равносильна системе $\begin{cases} x > -3, \\ x \le 4. \end{cases}$

8. См. замечание к решению типового задания 4.

9. Арифметический корень определен только для неотрицательных чисел.

10. Область определения функции можно найти из системы условий: $\begin{cases} 4 - x^2 > 0, \\ x + 1 \ne 0. \end{cases}$

11. См. решение типового задания 9.

12. См. решение типового задания 9.

13. См. решение типового задания 12.

14. Система неравенств равносильна системе $\begin{cases} x < -\frac{1}{3}, \\ -3 \le x \le 3. \end{cases}$

15. Числитель неотрицателен при $x \in [-\infty; -6] \cup [6; +\infty]$

16. Корни уравнения 1 и 2.

17. Корни уравнения -6 и 5.

18. См. решение типового задания 7.

19. См. решение типового задания 12.

20. Нуль числителя: 3. Нуль знаменателя: -4.

21. $\dfrac{x+6}{x-5} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+6}{x-5} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{11}{x-5} > 0.$

22. Нули числителя: 1, $-0{,}25$. Нули знаменателя: -1, $-0{,}5$.

23. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2-x} \geq -1, \\ \dfrac{x+1}{2-x} < 1. \end{cases}$

24. Приведите дроби к общему знаменателю $x^2 - 1$ и воспользуйтесь методом интервалов.

25. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x \geq 0\,, \\ 10 + 3x - x^2 \geq 0\,. \end{cases}$

26. Необходимо решить систему неравенств $\begin{cases} x \geq 6, \\ x \geq -3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^3 - 4x^2 \geq 0, \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x \geq 4, \\ x \leq 0. \end{cases}$

28. Нуль числителя: 3. Нули знаменателя: $\pm\dfrac{2}{3}$.

29. Разложите числитель на множители способом группировки.

30. Необходимо решить неравенство $x^2 - 6x + 8 < 0$.

31. Решите уравнение $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$. Отметьте на координатной прямой числа, являющиеся корнями уравнения, и примените метод интервалов.

32. Решением первого неравенства является число 3. Проверьте, удовлетворяет ли это число второму неравенству.

33. См. решение типового задания 13, б).

34. См. решение типового задания 13, в).

35. См. решение типового задания 10.

36. Перенесите все слагаемые в левую часть неравенства и вынесите общий множитель $\sqrt{20+x-x^2}$. Исходное неравенство будет равносильно неравенству

$$\frac{\sqrt{20+x-x^2}(-x+3)}{(2x-3)(x-6)} \le 0.$$

37. Разложите числитель на множители и получите

$$(x+1)(x-1)^3(x-2)^2.$$

38. Неравенство равносильно

$$\frac{\sqrt{x^2-1}(x+6)(x-3)(2x-1)^2}{(x-2)(x-3)} \le 0.$$

Иррациональные уравнения

1. См. решение типового задания 3.

2. См. решение типового задания 1.

3. См. решение типового задания 2.

4. См. решение типового задания 5.

5. Область определения уравнения — промежуток $[8;+\infty)$. Используйте вынесение общего множителя.

6. См. решение типового задания 8.

7. См. решение типового задания 14.

8. $\sqrt{a}+\sqrt{b}=0 \Leftrightarrow a=b=0.$

9. Область определения уравнения можно найти из системы неравенств $\begin{cases} -x>0, \\ -5x+12\ge 0. \end{cases}$ После возведения в квадрат исходного уравнения и решения квадратного уравнения не забудьте проверить: входят ли найденные корни в область определения уравнения.

10. См. решение типового задания 12.

11. См. решение типового задания 10. Корнем уравнения является число $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

12. Введите новую переменную $a=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

13. Введите новую переменную $a=\sqrt[6]{x}$.

14. См. решение типового задания 8. Корнем уравнения является число $2+\sqrt{6}$.

15. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} x \geq 6, \\ x(x-6)=16. \end{cases}$

16. См. решение типового задания 6.

17. Введите новую переменную $a=x^2$.

18. См. решение типового задания 11.

19. Возведите обе части уравнения в квадрат.

20. См. решение типового задания 13.

21. См. решение типового задания 18.

22. См. решение типового задания 19.

23. См. решение типового задания 17.

24. См. решение типового задания 17.

25. Раскройте скобки и выделите полный квадрат $(x+5)^2$.

26. См. решение типового задания 21.

27. См. решение типового задания 16.

28. При упрощении выражения $\sqrt{1+2x+x^2}$ обратите внимание, что $x+1 \geq 0$.

29. См. решение типового задания 15.

Тригонометрические уравнения

1. См. решение типового задания 1 А).

2. См. решение типового задания 1 Б).

3. Выразите $\cos x$ и примените формулу для решения простейшего тригонометрического уравнения вида $\cos x = a, -1 \leq a \leq 1$.

4. См. указание к решению предыдущего задания.

5. Используйте периодичность $\cos x$ и примените формулу для решения простейшего тригонометрического уравнения вида $\cos x = 0$.

6. Примените формулу для решения простейшего тригонометрического уравнения вида $\mathrm{ctg}\, x = a$.

7. Примените формулу для решения простейшего тригонометрического уравнения вида $\mathrm{tg}\, x = a$. Далее выразите x.

8. Используйте формулу двойного угла и формулы (2) и (5).

9. См. решение типовых заданий 7 и 1,б).

10. См. решение типовых заданий 6 и 1,а).

11. См. решение типовых заданий 7 и 1,б).

12. См. решение типового задания 9.

13. См. решение типового задания 2.

14. См. решение типовых заданий 8 и 1,а).

15. $\cos \pi x = 0 \Leftrightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + n,\ n \in Z.$

16. См. решение типового задания 4.

17. См. решение типового задания 3.

18. См. решение типового задания 5.

19. См. решение типового задания 12.

20. См. решение типового задания 10.

21. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x = x + \pi n, n \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + m, m \in Z, \Leftrightarrow x = \pi t, t \in Z. \\ 3x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases}$$

22. См. решение задания 11.

23. См. решение задания 4 и 1,б).

24. См. решение типового задания № 13.

25. Из первого уравнения выразите x и подставьте во второе уравнение. Решение уравнения $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ удобнее представить в виде совокупности двух множеств решений, т.е. $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathrm{Z}; \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

26. Упростите правую часть уравнения. Не забудьте, что область определения уравнения — отрезок $[-4;4]$.

27. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9x - 8 - x^2 \geq 0, \\ \cos 2x + 3\sqrt{3} \sin x - 4 = 0, \end{cases} \\ 9x - 8 - x^2 = 0. \end{array}\right.$$

28. См. решение типового задания 14.

29. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1, \\ \sin 2x = -1. \end{cases}$

Используйте тригонометрический круг.

30. Представьте $\operatorname{tg}(\pi x)$ в виде отношения двух функций. Приведите к общему знаменателю и примените формулы сложения. Не забудьте, что область определения уравнения: $x \neq 0{,}5 + n,\ n \in Z$.

31. См. указание к решению предыдущего задания.

32. Примените функционально-графический метод решения. Для этого выделите в левой части уравнения полный квадрат, а в правой части уравнения раскройте скобки. После этого найдите множество значений функций, стоящих в левой и правых частях уравнения.

33. См. указание к решению предыдущего задания.

34. Используйте следующее свойство арифметического квадратного корня: $\sqrt{a^2} = |a|$. Далее раскройте модуль, используя ограниченность функции

$$y = \cos x \quad (-1 \le \cos x \le 1).$$

35. $9 - 9\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 9\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ и выделите в левой части уравнения полный квадрат.

36. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\sqrt{2}\sin^4\dfrac{x}{2} - \sqrt{2}\cos^4\dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$.

Для упрощения выражения $\sqrt{2}\sin^4\dfrac{x}{2} - \sqrt{2}\cos^4\dfrac{x}{2}$ используйте формулу разности квадратов и формулу двойного угла.

Показательные уравнения и неравенства

1. $2^{x-6} > 0$для любых действительных значений x.

2. Необходимо учесть ОДЗ входящего в уравнение иррационального выражения.

3. Представьте 0,5 виде степени 2.

4. Представьте 625 виде степени 5 и также см. решение типового задания 1.

5. Вынесите общий множитель 3^{2x}.

6. Вынесите общий множитель 6^x.

7. Представьте выражение $\sqrt[10]{3}$ в виде степени 3.

8. Представьте выражение $27 \cdot \sqrt[4]{10}$ в виде степени 3.

9. Получите дробно-рациональное уравнение $\dfrac{5x-1}{5x+2} = 2$.

10. Воспользуйтесь теоремой 2. См. решение типового задания 2.

11. Воспользуйтесь теоремой 3. См. решение типового задания 4.

12. Воспользуйтесь теоремой 3. См. решение типового задания 4.

13. Рассмотрите ОДЗ иррационального выражения, входящего в левую часть неравенства, и решите показательное уравнение.

14. Воспользуйтесь свойствами степеней и представьте правую часть уравнения в виде степени с основанием 2.

15. Решите неравенство $243 - 3^{x^2} \ge 0$.

16. Решите неравенство $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x+2}{x-2}} - 9 \ge 0$.

17. Используйте метод введения новой переменной, например, $a = \left(\sqrt{5}\right)^x$.

18. Используйте метод введения новой переменной, например, $a = \left(\sqrt{2}\right)^x$.

19. Найдите область определения исходного уравнения и не забудьте проверить полученные корни.

20. Представьте 1 в виде степени с основанием 2. Решите тригонометрическое уравнение.

21. Используйте функционально-графический метод решения уравнений. Для этого оцените правую часть уравнения, а в левой части уравнения раскройте скобки и оцените полученное выражение.

22. Найдите область определения исходного уравнения и не забудьте проверить полученные корни.

23. См. решение типового задания 9.

24. Используйте метод интервалов.

25. Используйте метод интервалов.

26. Решите квадратное уравнение с учетом ОДЗ иррационального выражения.

27. Выражение в левой части неравенства можно разложить на множители. Общий множитель 2^{x-2}.

28. Решением неравенства $(2x-1)^2 \leq 0$ является число 0,5.

29. Можно воспользоваться свойством (6) степени положительного числа или рассматривать это уравнение как однородное показательное уравнение первой степени.

30. Воспользуйтесь методом интервалов. Учтите, что $2^x > 0$ для любых x.

31. Разложите на множители выражения в левой и правой части уравнения.

32. Введите новую переменную $a = 2^{x+1} > 0$ и воспользуйтесь методом интервалов.

33. Сведите данное уравнение к квадратному.

34. В разных частях уравнения сгруппируйте выражения с одинаковыми основаниями, а затем разложите на множители.

35. В разных частях неравенства сгруппируйте выражения с одинаковыми основаниями, а затем разложите на множители. Получите $x < 0$.

36. Выразите из первого уравнения x и подставьте во второе уравнение. Решите полученное показательное уравнение, например, методом введения новой переменной.

37. Сведите уравнение к квадратному с помощью введения новой переменной (например, $a = 2^{|x|}$) и отберите корни.

38. Найдите область определения исходного уравнения. После упрощения правой части уравнения решите показательное уравнения и не забудьте проверить полученные корни.

39. Так как $5^x - 6 \geq 0$, то $\sqrt{\left(5^x - 6\right)^2} = 5^x - 6$.

40. С помощью новой переменной $t = 2\sin_x$, $t > 0$ сведите уравнение к квадратному.

41. С помощью новой переменной $t = 4^{\cos^2 x}$, $t > 0$ сведите уравнение к квадратному.

42. Решите неравенство $\dfrac{9^x - 10 \cdot 3^x}{10 - 2x} < \dfrac{-9}{10 - 2x}$.

43. Решите неравенство $\dfrac{9^x - 10 \cdot 3^x}{10 - 2x} \geq \dfrac{-9}{10 - 2x}$.

44. См. решение задания 12. Рассмотрите первое уравнение системы и введите новую переменную $t = 2^{2x-y}$,

$t > 0$. Не забудьте отбросить посторонние корни. Обратите внимание на ОДЗ дробно-рационального выражения.

45. Воспользуйтесь заменой переменных:

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \frac{5^2 - 24}{\sqrt{5-\sqrt{24}}} = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}.$$

46. Перейдите к одному основанию и решите иррациональное неравенство с учетом того, что $\sqrt{x}+1>0$ при $x \geq 0$.

47. Решите неравенство $\left|2^{2x-1} - 12\right| < 4$.

48. Решите неравенство $\left|2^{2x-1} - 12\right| > 4$.

49. Наибольшее из чисел b и c меньше 8 тогда и только тогда, когда каждое из них меньше 8, т.е. когда $\begin{cases} b < 8 \\ c < 8 \end{cases}$.

50. Решите неравенство $\dfrac{9^x - 49}{9^x - 7} \cdot \left(36^x - 37 \cdot 6^x + 36\right) < 0$.

51. Решите неравенство $\dfrac{4^x - 0{,}25}{2^x - 0{,}5} \cdot \left(6^x - 37 \cdot 6^{0{,}5x} + 36\right) \geq 0$.

Логарифмические уравнения и неравенства

1. Примените основное логарифмическое тождество и получите линейное уравнение.

2. Примените свойство логарифма произведения.

3. Примените свойство логарифма частного.

4. См. решение типового задания 1.

5. Вынесите общий множитель и не забудьте про область определения исходного уравнения.

6. Воспользуйтесь свойством логарифма и приведите логарифмические выражения к одному основанию.

7. См. решение типового задания 2.

8. Воспользуйтесь схемой равносильных преобразований для решения неравенства при $0 < a < 1$.

9. См. решение типового задания 2 и затем решите дробно-рациональное неравенство с помощью метода интервалов.

10. Введите новую переменную $t = \log 4x$.

11. Воспользуйтесь схемой равносильных преобразований для решения неравенства при $a > 1$.

12. Воспользуйтесь схемой равносильных преобразований для решения неравенства при $0 < a < 1$.

13. См. решение типового задания 4.

14. Составьте уравнение $y_1 = y_2$. Найдите корень x_0 уравнения.

15. Область определения функции $y = \sqrt{t}$ задается условием $t \geq 0$.

16. Область определения функции $y = \sqrt[4]{t}$ задается условием $t \geq 0$.

17. Область определения функции задается системой условий $\begin{cases} x + 4 > 0, \\ \log_2(x + 4) \neq 1 \end{cases}$.

18. Учтите область определения функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_x 2$.

19. Воспользуйтесь схемой равносильных преобразований для решения уравнения.

20. Воспользуйтесь схемой равносильных преобразований для решения уравнения.

21. Воспользуйтесь основным логарифмическим тождеством. Учтите область определения функции $y = \log_3(3 - 2x)$.

22. Воспользуйтесь схемой равносильных преобразований для решения неравенства при $a > 1$.

23. Воспользуйтесь схемой равносильных преобразований для решения неравенства при $0 < a < 1$.

24. Преобразуйте уравнение, умножив его на два и воспользовавшись свойством логарифмов. Не забудьте про область определения исходного уравнения.

25. Рассмотрите два возможных случая: $\log_2 x \geq 0$ или $\log_2 x < 0$.

26. Используйте свойство «суммы логарифмов» и решайте неравенство с помощью равносильных преобразований. См. решение задания №6. Целые решения неравенства — это 4 и 15.

27. Найдите область определения исходного уравнения и приведите подобные слагаемые.

28. Найдите область определения исходного уравнения. Приведите логарифмические выражения к одному основанию, используя формулу логарифма степени. Далее см. решение типового задания 5.

29. См. решение типового задания 5.

30. Примените функционально-графический метод: попытайтесь «увидеть» корень, а потом докажите, что других корней нет.

31. Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а второй при этом имеет смысл, поэтому среди чисел –2, 0, 2 надо выбрать те, при которых существуют соответствующие выражения.

32. Примените функционально-графический метод: попытайтесь «увидеть» корень, а потом докажите, что других корней нет.

33. Решите уравнение методом введения новой переменной (например, $a = \sqrt{\log_2 x}$.

34. Числитель положителен при $-4 < x < 4$.

35. Приведите логарифмические выражения к одному основанию и используйте для решения системы уравнений метод сложения.

36. Найдите область определения исходного уравнения. Приведите логарифмические выражения к одному основанию. Далее уравнение решите, например методом разложения на множители.

37. Найдите область определения исходного уравнения. Учтите, что $0{,}5\log_5(4-4x)^2 = \log_5|4-4x|$.

38. Найдите область определения исходного уравнения. Приведите логарифмические выражения к одному основанию. Далее уравнение решите, например методом разложения на множители.

39. Примените функционально-графический метод: оцените область значений каждого множителя. См. решение типового задания 11.

40. Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю, если каждое из выражений равно нулю. Проще первое выражение приравнять нулю, решить соответствующее уравнение, а его корни подставить во второе выражение для проверки. См. решение типового задания 12.

41. Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю, если каждое из выражений равно нулю. Проще второе выражение приравнять нулю, решить соответствующее уравнение, а его корни подставить в первое выражение для проверки. См. решение типового задания 12.

42. См. указание к решению задания 41.

43. См. указание к решению задания 41.

44. Область определения уравнения определяется следующими условиями: $\cos x \neq 1$, $\cos 2x \neq 1$, $\cos x > 0$. Перейдите к одному основанию 2. Решите уравнения $\log^2{}_2 \cos x = 1$ и $\log^2{}_2 \cos x = -1$. Первое уравнение не имеет корней.

45. См. решение типового задания 14.

46. Разложите на множители подлогарифмические выражения.

47. См. решение типового задания 14.

48. См. решение типового задания 14.

49. Оцените основание логарифма, тогда сможете выбрать схему равносильных преобразований.

50. Перейдите к одному основанию логарифма (например, к основанию 10) и с помощью введения новых переменных свести систему к алгебраической системе с двумя неизвестными.

51. Решите неравенство $\dfrac{\log_3(2x-1)}{2-x5} > \dfrac{2}{2-x}$.

52. Решите неравенство $\dfrac{\log_3(2x-1)}{2-x} > \dfrac{1}{2-x}$.

53. Решите неравенство $\left|\log_2(0{,}5x-1)-1\right| < 3$.

54. Найдите область определения исходного уравнения. После упрощения правой части уравнения решите логарифмическое уравнения и не забудьте проверить полученные корни.

55. Решите уравнение

$$\log_{11}(9-4x) = \log_{11}(2x+3) + \log_{11}\left(2x^2+3x+6\right).$$

56. Примените функционально-графический метод: оцените область значений функций, стоящих в правой и левых частях неравенства.

57. Решите неравенство

$$\left(216-6^x\right)\cdot\left(\log_2(3x-1)-5\right) > 0.$$

58. Решите неравенство $\left(3^x-729\right)\left(\log_5(2x-1)-2\right) \le 0$.

РАЗДЕЛ III.4. ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

1. Подставьте в исходное уравнение $x = 5$ и решите уравнение относительно a.

2. Рассмотрите разные значения параметра a. Если $a \neq 0$, то решением будет луч.

3. Найдите дискриминант квадратного уравнения и приравняйте его к нулю.

4. Так как модуль действительного числа неотрицателен, то решите неравенство $7 - a \geq 0$.

5. Уравнение не имеет решений, если 5 является корнем и числителя и знаменателя.

6. Разложите числитель $x^2 - x - 20$ на множители.

7. Разложите знаменатель $x^2 - x - 20$ на множители.

8. Введите новую переменную $|x| = y$ и решите квадратное уравнение относительно y. Получите $\left[\begin{array}{l}|x| = 1; \\ |x| = a - 1\end{array}\right.$.

9. См. указание к решению задания 8.

10. См. указание к решению задания 8.

11. Подставьте в исходное уравнение $x = 5$ и решите иррациональное уравнение относительно a.

12. Так как арифметический корень четвертой степени из действительного числа неотрицателен, то решите неравенство $7 - a \geq 0$.

13. Решите неравенство $a + 16 < 0$.

14. $x = 3$ является корнем при любых значениях a. Найдите область определения уравнения и проверьте второй корень $x = a$.

15. Подставьте в исходное уравнение $x = \frac{\pi}{6}$ и решите линейное уравнение относительно a.

16. Так как $-1 \le \sin x \le 1$, то достаточно решить двойное неравенство $-1 \le 7 - a \le 1$.

17. Примените формулы двойного угла и получите, что $0 \le \sin^2 x \le 1$.

18. Так как $0 \le \cos^2 x \le 1$, то достаточно решить двойное неравенство $0 \le 2a + 3 \le 1$.

19. Подставьте в исходное уравнение $x = 4$ и решите показательное уравнение относительно a.

20. Решите неравенство $3a - 25 > 0$.

21. Так как $0{,}5^x > 0$, то достаточно решить неравенство $14 - 3a \le 0$.

22. Подставьте в исходное уравнение $x = 12$ и решите логарифмическое уравнение относительно a.

23. $x = 5$ является корнем при любых значениях a. Найдите область определения уравнения и проверьте второй корень $x = a$.

24. $x = -3$ является корнем при любых значениях a. Найдите область определения уравнения и проверьте второй корень $x = -a$.

25. *1-й способ.* График функции $y = x^2 + (a-2)x + 1$ — парабола — должна лежать выше оси OX или касаться ее. Поэтому достаточно найти ординату вершины параболы и решить неравенство $y_в \ge 0$. *2-й способ.* Для того чтобы парабола лежала выше оси OX или касалась ее достаточно, чтобы дискриминант соответствующего уравнения был меньше нуля или равен нулю.

26. Для того чтобы парабола лежала ниже оси OX или касалась ее достаточно, чтобы дискриминант соответствующего уравнения был меньше нуля или равен нулю.

27. Область определения задается системой неравенств $\begin{cases} x \ge 3, \\ x^2 - 4x - a \le 0 \end{cases}$. Квадратный трехчлен во втором неравенстве задает параболу с вершиной $x_в = 2$ и направленную ветвями вверх. Для того чтобы система имела единственное решение достаточно, чтобы парабола пересекала ось OX в точке 3.

28. Область определения задается системой неравенств $\begin{cases} x \le 4, \\ -x^2 + 6x + a \ge 0. \end{cases}$ Квадратный трехчлен во втором неравенстве задает параболу с вершиной $x_в = 3$ и направленную ветвями вниз. Для того чтобы система имела единственное решение достаточно, чтобы парабола пересекала ось OX в точке 4.

29. Нулем числителя является число 0. Нулем знаменателя — $2 - 3a$. Рассмотрите различные случаи расположения 0 и $2 - 3a$: 1) $2 - 3a < 0$; 2) $2 - 3a = 0$; 3) $2 - 3a > 0$. В каждом из трех случаев определите решение исходного неравенства.

30. См. указание к решению предыдущего задания.

31. Нуль числителя $2a + 4$. Нулем знаменателя $2 - 3a$. Рассмотрите различные случаи расположения $2a + 4$ и $2 - 3a$: 1) $2 - 3a < 2a + 4$; 2) $2 - 3a = 2a + 4$; 3) $2 - 3a > 2a + 4$. В каждом из трех случаев определите решение исходного неравенства.

32. Постройте график функции $y = |x - 3| + |x + 1|$. Рассмотрите различные прямые вида $y = a$ и определите: при каких значениях параметра a эти прямые имеют бесконечно много точек пересечения с графиком функции? А также см. решение типового задания 3.

33. Постройте график функции $y = |x - 3|$. Рассмотрите различные прямые вида $y = ax$ и определите: при каких значениях параметра a эти прямые имеют единственную точку пересечения с графиком функции? А также см. решение типового задания 3.

34. См. решение типового задания 8.

35. Используйте определение четной функции, а также см. решение типового задания 12.

36. Используйте определение нечетной функции, а также см. решение типового задания 12.

37. Используя метод вспомогательного угла преобразуйте выражение $\sin x - \cos x$ к виду $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

38. Получите: $\left[\begin{array}{l}\cos x = a, \\ \cos x = a - 1\end{array}\right.$.

39. См. решение типового задания 9.

40. Получите: $\left[\begin{array}{l}2^x = a, \\ 2^x = a + 1\end{array}\right.$.

41. См. указание к решению предыдущего задания.

42. Получите: $\left[\begin{array}{l}2^x = a, \\ 2^x = a - 1\end{array}\right.$.

43. См. решение типового задания 10.

44. Разделите обе части уравнения на $4^x \neq 0$. С помощью введения новой переменной, сведите уравнение к квадратному и найдите его корни. С учетом свойств показательной функции отберите корни уравнения $\left(\frac{5}{2}\right)^x = a$.

45. Разделите обе части уравнения на $4^x \neq 0$. С помощью введения новой переменной, сведите уравнение к квадратному и найдите его корни. С учетом свойств показательной функции отберите корни уравнения $\left(\frac{3}{2}\right)^x = a$

46. Выражение в левой части уравнения разложите на множители и рассмотрите возможные значения параметра a ($a < 0$, $a = 0$, $a > 0$).

47. См. решение типового задания 13.

48. См. решение типового задания № 14.

49. См. решение типового задания № 14.

50. *1 способ.* Постройте схематично график функции $y = x^4 - 2x^2 - 5$. Рассмотрите различные прямые вида $y = a$ и определите: при каких значениях параметра a эти прямые имеют с графиком функции ровно три точки пересечения? *2 способ.* Сведите решение задания к решению биквадратного уравнения $x^4 - 2x^2 - 5 = a$.

Раздел III.5. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

1.а) Найдите площадь одной плитки.

1.б) Найдите площадь 60 плиток.

1.в) Найдите площадь одной плитки.

1.г) Размер плитки в данной задаче — лишнее условие. Не забудьте округлить результат.

1.д) Учтите, что дверь плиткой не обкладывается.

1.е) Найдите, сколько коробок потребуется для обкладывания стены площадью 9 м^2, и добавьте 10%. Результат округлите. Можно ли обойтись меньшим количеством коробок?

2. В первой ситуации проценты считаются от числа 2000, а во второй – от числа 2400.

3.В первой ситуации проценты считаются от числа 5000, а во второй – от числа 5500.

4.См. решение типового задания 2.

5. Билет на концерт стал стоит 550 рублей.

6. Новая цена билета на концерт — 600 рублей.

7. Билет на концерт стал стоит 450 рублей.

8. Новая цена билета на концерт — 300 рублей.

9. Найдите время движения машины на каждом из двух маршрутов.

10. Найдите время движения машины на каждом из трех маршрутов.

11. По графику изменения температуры определите дни, когда дневная температура была равна $+6°C$.

11. По графику изменения температуры определите дни, когда дневная температура была равна $+6°C$.

12. См. решение типового задания 1.

13. После первого повышения товар стал стоить 550 рублей. Далее 20% считаются уже от числа 550.

14. Пусть товар стоил x (ед.), после снижения цены товар стал стоить $0{,}7x$ (ед.). После повышения цена товара — $0{,}84x$ (ед.).

15. См. решение типового задания 2.

16. Используйте два неизвестных и составьте систему из двух уравнений. Не забудьте выбрать большее из чисел.)

17. Используйте два неизвестных и составьте систему из двух уравнений. Не забудьте выбрать большее из чисел.

18. См. типовую задачу 4.

19. См. типовую задачу 5.

20. См. типовую задачу 4.

21. Если x — цена первого товара, а y — цена второго товара, то $y = 1{,}092x$.

22. Задача сводится к решению уравнения

$$1000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 1254{,}4,$$

где p — процент повышения зарплаты (единовременно).

23. Если собственная скорость лодки — х км/ч, то выразить время движения по озеру и по реке, а затем составить уравнение.

24. Если x ч. — время движения первого катера, то $(x - 5)$ — время второго. Скорость первого $\frac{300}{x}$, скорость второго $\frac{300}{x-5}$.

25. Пусть А — объем работы, тогда производительность работы первого $\frac{A}{6}$, производительность работы второго $\frac{A}{4}$. Известна их разность.

26. Если x — время работы первого, тогда $(x - 5)$ — время работы второго. Производительность первого $\frac{1}{x}$, производительность второго $\frac{1}{x - 5}$. Если учесть, что первый работал 9 дней, а второй 4, можно составить уравнение.

27. См. решение типового задания 6.

28. См. решение типового задания 6.

Раздел III.6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Задачи по планиметрии

1. По рисунку найдем основание треугольника и высоту, проведенную к этому основанию, а затем и его площадь.

2. См. указание к решению предыдущей задачи.

3. Данный четырехугольник можно составить из двух треугольников.

4. Как связаны в прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности и гипотенуза?

5. Найдите площадь и полупериметр треугольника.

6. Примените теорему синусов.

7. Примените теорему косинусов.

8. См. типовую задачу 1.

9. Введите в рассмотрение новый элемент — длину отрезка гипотенузы между центром описанной окружности и точкой касания вписанной окружности и используйте теорему Пифагора.

10. См. типовую задачу 3.

11. Высота трапеции равна диаметру вписанной окружности. Примените теорему Пифагора для прямоугольного треугольника, гипотенуза которого — боковая сторона трапеции, а катет — высота трапеции. Используя свойство описанного четырехугольника, найдите основания трапеции.

12. Из условия получаем, что диагональ BD состоит из пяти равных частей, значит, одну часть можно найти так: $3x + 2x = 10$, $x = 2$. $ND = 4$, $BN = 6$. Затем примените формулу для площади четырехугольника через его диагонали.

13. См. типовую задачу 4.

14. Выясните, какую часть гипотенузы составляет эта медиана.

15. См. типовую задачу 5.

Задачи по стереометрии

1. Примените теорему о трех перпендикулярах. Угол SCB —линейный угол двугранного угла $SCDB$, так как треугольник SCD — прямоугольный.

2. См. решение типовой задачи 1, г).

3. См. типовую задачу 1, е). Центр описанного шара лежит вне пирамиды.

4. См. решение типовой задачи 1, к).

5. См. решение типовой задачи 1, в).

6. Расстояние равно половине диагонали основания.

7. См. решение типовой задачи 1, е).

8. См. решение типовой задачи 1, д).

9. См. решение типовой задачи 3.

10. См. решение типовой задачи 4.

11. См. решение типовой задачи 3.

12. См. решение типовой задачи 4.

13. См. решение типовой задачи 1, д) и 1, е).

14. См. решение типовой задачи 1, д) и 1, е).

15. См. решение типовой задачи 1, л).

16. См. решение типовой задачи 1, м).

17. См. решение типовой задачи 5, а).

18. См. решение типовой задачи 5, в).

19. Сечением является прямоугольник со сторонами 6 и 12.

20. См. решение типовой задачи 5, п).

21. См. решение типовой задачи 5, е).

22. См. решение типовой задачи 5, г) и 5, д).

23. См. решение типовой задачи 5, г) и 5, д).

24. См. решение типовой задачи 6, а).

25. См. решение типовой задачи 6, в).

26. См. решение типовой задачи 6, б).

27. См. решение типовой задачи 7, а).

28. См. решение типовой задачи 7, б).

29. Запишите соответствующее отношение, примените формулы и замените образующую диаметром основания.

30. Радиус основания конуса равен 6, а высота конуса $2\sqrt{3}$.

31. Докажите, что центр сферы принадлежит высоте и длины отрезков касательных, проведенных из каждой вершины к сфере, равны 1. А затем используйте подобие треугольников.

32. Докажите, что центр шара принадлежит прямой, перпендикулярной плоскости основания и проходящей через центр окружности, описанной около основания.

33. Сечением является равнобедренный треугольник, площадь которого зависит от длины высоты, опущенной на боковую сторону. Наименьшее значение этой длины равно расстоянию между скрещивающимися прямыми.

V. ОТВЕТЫ

Раздел III.1. *Тождественные преобразования иррациональных и степенных выражений*

№	1	2	3	4
Ответ	–0,3	6	17	–27
№	**5**	**6**	**7**	**8**
Ответ	4	4	19,17	–1,4
№	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	1,4	–1	3	1
№	**13**	**14**	**15**	**16**
Ответ	25	–5,75	0	–8,1
№	**17**	**18**	**19**	**20**
Ответ	64	0,6	0,75	195
№	**21**	**22**	**23**	**24**
Ответ	–12	0,25	–4	0
№	**25**	**26**	**27**	**28**
Ответ	0,02	–3	30	–90
№	**29**	**30**	**31**	**32**
Ответ	24	208	145	–6
№	**33**		**34**	
Ответ	$-\frac{x+1}{x+3},\ x\in[-1;1,$ $\frac{\sqrt{x+1}}{x+3},\ x>$		Второе выражение больше первого	
№	**35**			
Ответ	Да, –2			

Раздел III.1. Тождественные преобразования логарифмических выражений

№	1	2	3	4
Ответ	0,5	2	1	47
№	5	6	7	8
Ответ	2	9	16	0
№	9	10	11	12
Ответ	0	–3,5	10	2
№	13	14	15	16
Ответ	3,5	8	7	28,5
№	17	18	19	20
Ответ	0	9,1	0,5	1,5
№	21	22	23	24
Ответ	2	1	16	3
№	25	26	27	28
Ответ	1	1	0	4
№	29	30	31	32
Ответ	$\frac{5-8a}{6a+3}$	$\frac{8a-5}{3(2a+1)}$	1	–2
№	33	34	35	
Ответ	$-2\log_4 3$	–2	$\log_3 4-\log_4 3$	

Раздел III.1. *Тождественные преобразования тригонометрических выражений*

№	1	2	3	4
Ответ	10	12	–0,8	0,6
№	**5**	**6**	**7**	**8**
Ответ	–2	–3	–0,8	–0,1
№	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	0,04	0	1	0,5
№	**13**	**14**	**15**	**16**
Ответ	–0,96	2	0,5	0
№	**17**	**18**	**19**	**20**
Ответ	–0,75	1	0,05	5
№	**21**	**22**	**23**	**24**
Ответ	–3	–1	–0,25	0
№	**25**	**26**	**27**	**28**
Ответ	–1	–2,25	0	$-\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$
№	**29**			
Ответ	$\cos\frac{\beta}{4}$			

Раздел III.2. Исследование функции элементарными методами

№	1	2	3	4
Ответ	8	–1	15	–14
№	5	6	7	8
Ответ	8	3	2	5
№	9	10	11	12
Ответ	3	4	–11	5
№	13	14	15	16
Ответ	3	3	9	1
№	17	18	19	20
Ответ	5	2	–2	3
№	21	22	23	24
Ответ	–2	1,5	2	10
№	25	26	27	28
Ответ	8	3	4	3
№	29	30	31	32
Ответ	0	2	2	1,25
№	33	34	35	36
Ответ	1	–1	3	1
№	37	38	39	40
Ответ	–1	2	5,6	0
№	41	42	43	44
Ответ	–0,125	–0,75	3	5

№	**45**	**46**	**47**	**48**
Ответ	15	–2	9	3
№	**49**	**50**	**51**	**52**
Ответ	17	0	1	1
	53	**54**	**55**	**56**
	$[0;2]$	$\left[0;\log_4 7\right]$	$\left[\frac{1}{9};81\right]$	$[1;7]$
№	**57**	**58**	**59**	**60**
Ответ	$\left[\log_{0,5}6;-2\right]$	$\left[\frac{1}{64};\frac{1}{8}\right]$	$[0;4]$	$(-\infty;4]$
№	**61**	**62**	**63**	**64**
Ответ	$[0,25;4]$	$[1;5]$	9	4
№	**65**		**66**	
Ответ	$\left[-3;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};-1\right)\cup(-1;1)$		$\left(-3;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};1\right)$	
№	**67**		**68**	
Ответ	$[-3;-2)\cup(-2;0)\cup(0;2]$		$(-3;0)\cup(0;2)$	

Раздел III.2. Исследование функции с помощью производной

№	1	2	3	4
Ответ	2	32,25	–0,08	2
№	5	6	7	8
Ответ	1	4	–16	0
№	9	10	11	12
Ответ	8	2	0,5	–2
№	13	14	15	16
Ответ	–1	0	5	2
№	17	18	19	20
Ответ	2	3	–4	2
№	21	22	23	24
Ответ	0,5	3	7	0
№	25	26	27	28
Ответ	20	1	–6	32
№	29	30	31	32
Ответ	–0,5	1	–1	9
№	33	34	35	36
Ответ	135	–8	–6	–6
№	37	38	39	40
Ответ	5	–1	30	0,125
№	41	42	43	44
Ответ	4	–4	1	0,25

№	45	46	47	48
Ответ	7	7	−3	1
№	**49**	**50**	**51**	**52**
Ответ	4	5	7	0,4
№	**53**	**54**	**55**	**56**
Ответ	−1	1	16	6
№	**57**	**58**	**59**	**60**
Ответ	4	1	2	9
№	**61**	**62**	**63**	**64**
Ответ	7	$y = 1 - x$	45	функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(2;+\infty)$
№	**65**	**66**	**67**	**68**
Ответ	$P(3;-4,5)$	12	32	$(-\infty; +\circ$
№	**69**	**70**	**71**	**72**
Ответ	$[2\sqrt{5}; 10]$	$[-9; -8]$	$[-3\sqrt{5}; 2]$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

РАЗДЕЛ III.2. *Первообразная*

№	1	2	3	4
Ответ	39	10	1	0,25
№	**5**	**6**	**7**	**8**
Ответ	4	32	32	3
№	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	0,2	12	32	9
№	**13**	**14**	**15**	**16**
Ответ	4,5	9	4	16
№	**17**	**18**	**19**	**20**
Ответ	6	да	2π	$10\frac{5}{12}$
№	**21**	**22**	**23**	
Ответ	π	$F(7) > F(2)$	$\frac{(x-7)^{22}}{22} + \frac{4(x-1)^{21}}{7}$	
	24	**25**	**26**	**27**
	32	32	3	0,2
№	**28**	**29**	**30**	**31**
Ответ	12	32	9	4,5
№	**32**	**33**	**34**	**35**
Ответ	9	4	16	6
№	**36**	**37**	**38**	**39**
Ответ	Да	2π	$10\frac{5}{12}$	π
№	**40**		**41**	
Ответ	$F(7) > F(2)$		$\frac{(x-7)^{22}}{22} + \frac{4}{7}\cdot(x-1)^{21}$	

№	**1**	**2**	**3**	**4**
Ответ	3	10	9	11
№	**5**	**6**	**7**	**8**
Ответ	6	–4	–2	10
№	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	12	4	2	6
№	**13**	**14**	**15**	**16**
Ответ	3	–1	2	1
№	**17**	**18**	**19**	**20**
Ответ	5	–1	2	–0,5
№	**21**	**22**	**23**	**24**
Ответ	6	0	0	2
№	**25**	**26**	**27**	**28**
Ответ	6	6	0	6
№	**29**	**30**	**31**	**32**
Ответ	7	3	2	3
№	**33**	**34**	**35**	**36**
Ответ	12	8	6	{–4; 5}, [–3; 1,5)
№	**37**		**38**	
Ответ	(–7; –1], {2}		(–6; –1], [1; 2)	

№	**1**	**2**	**3**	**4**
Ответ	–1	–10	2	–1
№	**5**	**6**	**7**	**8**
Ответ	8	–3	1,5	1
№	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	–0,6	2	2	1
№	**13**	**14**	**15**	**16**
Ответ	1	4	1	–1,5
№	**17**	**18**	**19**	**20**
Ответ	–3	–1	4	6
№	**21**	**22**	**23**	**24**
Ответ	3	8	–3	1
№	**25**	**26**	**27**	**28**
Ответ	–5	(5; 1)	15	2,6
№	**29**			
Ответ	–15; 1			

№	1	2	3	4	5	6
Ответ	30	–210	–30	30	810	24
№	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	55	135	–360	30	–120	–60
	13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
	2	90	2,5	0	1	810
	19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
	30	2	3	0	–180	0,8
	25			**26**	**27**	
	$\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}; \frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\right)$ $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\right.$			$\pm\pi$	5	
	28			**29**		
	$(-1)^{n+1}\operatorname{arctg}2+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi m,$ $n, m\in Z$			$\frac{3\pi}{4}-2\pi n,\ n\in Z$		
	30			**31**		
	$\frac{k}{4}, k\in\mathbb{Z}, k\neq 4t+2, t\in\mathbb{Z}$			$\frac{k}{4}, k\in\mathbb{Z}, k\neq 4t+2, t\in\mathbb{Z};$ $2n, n\in Z$		
	32	**33**		**34**		
	4	Решений нет		$\pi+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$		
	35			**36**		
	$2\pi n,\ n\in Z$			$(-1)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$		

Раздел III.3. *Показательные уравнения и неравенства*

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ответ	1	5	–1	0,75	–28	–2
№	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	20	3,5	–1	0,8	1,2	5
№	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
Ответ	1	8	5	1	4	4
№	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Ответ	2,8	12,5	7	4	0	3
№	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Ответ	4	1	2	0,5	0	2
№	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
Ответ	0	–1	–2	–1	–1	4
№	**37**	**38**	**39**	**40**		
Ответ	2	–3	3	$\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$		
№	**41**		**42**		**43**	
Ответ	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, \quad n\in\mathbb{Z}$		$(0;2)\cup(5;+\infty)$		$(-\infty;0]\cup[1;5)$	
№	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	
Ответ	(0,5; 0)	2; –2	(25; +∞)	(2; 2,5)	$(-\infty;0,25]\cup$ $\cup[0,5;+\infty)$	
№	**49**	**50**		**51**		
Ответ	$(0;2)$	$(0;\log_9 7)\cup(\log_9 7;2)$		$(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup[4;+\infty)$		

Раздел III.3. *Логарифмические уравнения и неравенства*

№	1	2	3	4	5	6
Ответ	1,5	16	3,5	22	–2	2,5
№	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	5	8	8	0,5	4	3
№	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
Ответ	125	2	3	2	–3	2
№	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Ответ	2	0	1	7	4	1
№	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Ответ	1	2	23	1	4	1
№	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
Ответ	–2	1	512	4	9	32; 0,25
№	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**
Ответ	2	3	–4	2	–2	0
№	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
Ответ	Решений нет	$\pm\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$	2	0,25	$(1;2)$	$[-3;-2)\cup$ $\cup(1;2)$
№	**49**		**50**	**51**	**52**	
Ответ	$\left(2-\sqrt{2};1\right]\cup\left[3;2+\sqrt{2}\right)$		(10; 1)	(2; 5)	Решений нет	
№	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**
Ответ	$(2{,}5;34)$	$\frac{1}{27}$	–1	5	$(3;11)$	$[6;13]$

Раздел III.4. Задания с параметром

№	**1**	**2**	**3**	**4**
Ответ	3	2	100	7
№	**5**	**6**	**7**	**8**
Ответ	25	–5	–4	3
№	**9**	**10**	**11**	**12**
Ответ	1	2	–20	7
№	**13**	**14**	**15**	**16**
Ответ	–17	4	9,5	6
№	**17**	**18**	**19**	**20**
Ответ	2	–1	–2	9
№	**21**	**22**	**23**	**24**
Ответ	5	–37	5	–2
№	**25**	**26**	**27**	**28**
Ответ	$[0;4]$	$[6;10]$	–3	–8
№	**29**	**30**	**31**	**32**
Ответ	$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$	$\left(-\frac{1}{3};-\infty\right)$	$(-\infty;-1{,}5]\cup$ $\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$	4
№	**33**		**34**	
Ответ	$(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup[1;+\infty)$		$(-\infty;-4)\cup\{-3{,}75\}$	
№	**35**	**36**	**37**	**38**
Ответ	0	0	$\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$	$[-1;2]$

Продолжение табл.

№	39	40	41	42
Ответ	$[-6;4]$	$(-1;+\infty)$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;0]$

№	43	44
Ответ	$[0;8]\cup\{-1;9\}$	$(0;0,4)\cup(0,4;+\infty)$

№	45	46	47
Ответ	$(-\infty;0)\cup\{1;5\}$	при $a<0$ $x<\log_3(-a)$; при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x<\log_3\frac{a}{9}$	-5

№	48	49	50
Ответ	$(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$	$(-4;0)$	$(-\infty;-6)$

№	1 а)	1 б)	1 в)	1 г)
Ответ	24	3	200	5
№	1 д)	1 е)	2	3
Ответ	4	7	2160	4950
№	4	5	6	7
Ответ	25	9	8	11
№	8	9	10	11
Ответ	16	3	4	9
№	12	13	14	15
Ответ	11	200	660	16
№	16	17	18	19
Ответ	32	600	306,04	12500
№	20	21	22	23
Ответ	10,25	9,2	12	15
№	24	25	26	27
Ответ	10	168	15	100
№	28	29	30	31
Ответ	47	10	168	15
№	32	33		
Ответ	100	47		

Раздел III.6. *Задачи по планиметрии*

№	1	2	3	4	5
Ответ	9	3	17,5	5	2
№	6	7	8	9	10
Ответ	4	28	170	24	12
№	11	12	13	14	15
Ответ	25	15	9	6,5	2,2

Раздел III.5. *Задачи по стереометрии*

№	1	2	3	4	5
Ответ	3	45	3	12	48
№	6	7	8	9	10
Ответ	2	13	3	28	1000
№	11	12	13	14	15
Ответ	16	1200	1	10	6
№	16	17	18	19	20
Ответ	20	432	432	72	18
№	21	22	23	24	25
Ответ	336	300	50	16	16
№	26	27	28	29	30
Ответ	16	864	336	4	24
№	31	32	33		
Ответ	$\frac{10}{7}$	2	$4\sqrt{66}$		

Учебное издание

ЕГЭ. РЕПЕТИТОР

Кочагин Вадим Витальевич
Кочагина Мария Николаевна

ЕГЭ 2010

Математика

Репетитор

Директор редакции *И. Федосова*
Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Е. Брынчик*
Технический редактор *Н. Тростянская*
Компьютерная верстка *Г. Ражикова*
Корректор *Е. Анищенко*

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел. 411-68-86, 956-39-21
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Подписано в печать 19.08.2009.
Формат 60х90 1/16. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Бумага тип. Усл. печ. л. 20,0.
Тираж 20 000 экз. Заказ № 633.

Отпечатано в ГП ПО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.