Сергей Гаврилов

Функциональный анализ для начинающих

Классический анализ, теория вероятности, дифуры – все проходили их в вузе, есть какая-то опора. Но про функциональный анализ, теорию множеств такого не скажешь, их преподают далеко не всюду.

Я выбрал здесь форму диалога. Кого с кем? Я теперешний – беседую с самим собой, начинающим. Вопросы и недоумения воображаемого читателя – мои недоумения, из тех времен, когда я только приступал к изучению предмета.

Профессиональный математик текст забракует: нестрого, неполно, неточно, порой вульгарно, и вообще-то на самом деле все не так. Что же, я сознательно следовал принципу, сформулированному автором пособий по математике, взявшим себе псевдоним В. Босс: «переупростить, даже приврать слегка».

Не лелею я надежду, что мой скромный труд проложит кому-то легкую дорогу к пониманию: такое невозможно. Функциональный анализ требует особой настройки мозгов, что не дается без напряжения. Зато он открывает целый новый мир.

Рубежи перестройки мышления ждут нас с вами по ходу изложения. Преодолев их, вы никогда уже не станете прежним. Надо ли это вам? Решайте сами.

1. МНОЖЕСТВА И ПРОСТРАНСТВА ... 3
Множества ... 3
Подмножества и операции ... 4
Конечные и бесконечные множества. Мощности ... 5
О бесконечностях и бесконечном ... 6
Множества на примерах ... 8
Что такое отображение ... 9
Эквивалентность и упорядоченность ... 9
Аксиома выбора ... 10
Функция выбора ... 12
Запись высказываний ... 13
Что такое пространство ... 13

2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ ... 15
Метрические пространства ... 15
Предельная точка ... 17
Замкнутые множества ... 18
Открытые множества ... 19
Всюду плотные множества ... 21
Сходимость и предел ... 22
Полнота пространства ... 23
О пределах в математике ... 24

3. ЧТО ТАКОЕ ЧИСЛА ... 26
Числовое множество ... 26
Группа ... 26
Натуральные числа ... 27
Целые числа ... 27
Рациональные числа ... 28
Вещественные числа ... 30
Числа алгебраические и трансцендентные ... 31
Комплексные числа ... 32
Определение натуральных чисел ... 33

4. ПОПОЛНЕНИЕ МНОЖЕСТВ ... 34
Процедура пополнения ... 34
Метрика на пополнении ... 35
Пополнение – на примерах ... 36
Категории Бэра ... 38

5. ЗНАКОМИМСЯ С МЕРОЙ ... 40
Что такое мера ... 40
Мера Жордана ... 41
Мера Лебега ... 42
Мера через пополнение ... 44
Точные грани ... 45
Внешняя и внутренняя меры ... 46
Возвращаемся к мере Лебега ... 48

6. СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ ... 50
Что такое системы множеств ... 50
Кольцо множеств ... 51
Минимальное кольцо ... 52
Кольцо и полукольцо ... 53
Алгебра, сигма-кольцо и сигма-алгебра ... 55
Продолжение меры на кольцо ... 56
Продолжение меры по Жордану ... 56
Продолжение меры по Лебегу ... 58
Измеримость по Борелю ... 58

7. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ... 60
Альтернативное интегрирование ... 60
Простые функции ... 61
Измеримые функции ... 62
Эквивалентные функции ... 64
Интегрирование произвольных функций ... 65
Свойства интеграла Лебега ... 66
Интеграл через пополнение ... 68
Для чего нужен интеграл Лебега ... 69

8. КОМПАКТНОСТЬ ... 71
Катастрофа с оптимизацией ... 71
Экстремумы в n-мерном пространстве ... 72
Идея компактности ... 73
Понятие об ε-сети ... 74
Предкомпактность ... 75
Теорема Арцела ... 76

1. Множества и пространства

Функциональный анализ – сравнительно молодой раздел математики. Основные результаты здесь получены в XX веке. И вряд ли можно найти другой столь же востребованный различными отраслями науки инструмент. А начать придется с азов теории множеств: именно множество – базовое понятие математики.

Множества

Так что за дисциплина – функциональный анализ?

Коротко определить довольно сложно. Можно считать его продолжением классического анализа, который преподается в любом техническом вузе. Пожалуй, отличие в том, что здесь более решительно отвергается принцип *конструктивности* построений.

Что это означает?

Надеюсь, станет ясно далее.

Функциональный анализ развивается исходя из потребностей прикладных задач. Таких как дифференциальные и интегральные уравнения, вариационные задачи, разложение в функциональные ряды. Подобные задачи подводят к необходимости рассмотрения *функциональных пространств*, «точками» которых являются функции. Так что функциональный анализ можно рассматривать и как теорию функций.

А как вам нравится такое определение: функциональный анализ – теория бесконечномерных пространств?

Сильно. И довольно неожиданно.

Добрую половину тематики составляют в нем вопросы бесконечномерных линейных пространств. Но именно эта часть до поры выпущена: есть смысл заниматься ею отдельно, а здесь сосредоточиться на необходимых инструментах.

Функциональный анализ базируется на понятии *множества*. Теорию множеств в инженерных вузах почти не изучают, так что приступать к ней довольно-таки трудно – психологически, хотя технически ничего сложного нет.

Надо начать с определения множества?

Такого определения нет. Множество – исходное понятие, неопределимое через другие. Наоборот, многие понятия (числа, например), вводятся посредством множеств.

Можно только дать пояснения. Основная идея – *принадлежность*. Говорят, что элемент x принадлежит множеству X (или не принадлежит). Обозначается:

$x \in X$ (или $x \notin X$).

В частности, множество может быть и *пустым*: $X = \varnothing$. Как ни странно, пустое множество имеет своеобразный приоритет перед другими: его не требуется конструировать из каких-то элементов, оно первично.

Множество считается заданным, если для любого x можно установить, принадлежит ли он множеству. Посему есть смысл уточнить: в множество входят элементы, объединенные неким общим свойством. Так что конкретное множество содержит однородные (в каком-то смысле) объекты.

И что это за объекты?

Ими могут быть числа, векторы, функции, фигуры на плоскости – что угодно. Очень часто имеют дело с множествами множеств...

Какой кошмар! Может, лучше уж не пытаться вникнуть?

Звучит пугающе, но, как увидим, тут нет ничего такого, что не помещалось бы в обычной голове.

Подмножества и операции

Понятие *подмножества* достаточно ясно интуитивно. Подмножество какого-то множества объединяет часть его элементов. Тот факт, что *Y* является подмножеством *X*, записывают:

$Y \subset X$.

Это означает, что из $a \in Y$ следует $a \in X$, а наоборот – не обязательно.

Если будем рассматривать различные подмножества множества *X* (нередкий случай), получим *семейство*, множество множеств. Не упускайте из вида, что подмножества, входящие в *X*, рассматриваются как *элементы* семейства *F*: особого множества, а не *X*!

Рассмотрим операции с множествами.

В общем-то, эта тема знакома. Кажется, сейчас чуть ли не в школе ее дают.

Мы все же выпишем их:

$X \bigcup Y$ – объединение (или сумма) множеств;

$X \bigcap Y$ – пересечение множеств;

$X \setminus Y$ – разность множеств (содержит элементы *X*, кроме тех, что содержатся и в *Y*);

$X \Delta Y$ – симметрическая разность (из объединения множеств исключаются те элементы, которые принадлежат и *X*, и *Y*). Ее можно выразить через другие операции, например, прямо по определению: $X\Delta Y = (X \bigcup Y) \setminus (X \bigcap Y)$. Или иначе: $X\Delta Y = (X \setminus Y) \bigcup (Y \setminus X)$.

Нередко эти вещи иллюстрируют примитивными рисунками: этакими наползающими друг на друга «огурцами». Они известны также как *круги Эйлера*.

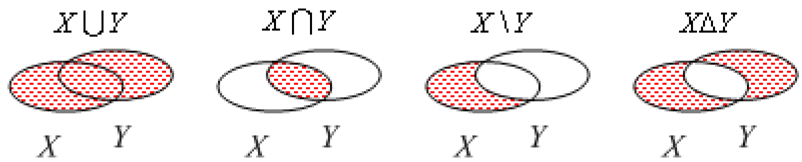


Иллюстрация объединения, пересечения, разности, симметрической разности множеств

Годятся для разъяснения детям…

Не стоит относиться с насмешкой: иногда запутанные вопросы соотношения множеств удобнее попросту разобрать «на огурцах». Способ не хуже иного, нам он послужит, вот увидите!

Кстати уж, если F это семейство (множество множеств), то можно образовать новое множество $\bigcup F$, содержащее все элементы множеств, входящих в F .

А разве оно не есть само F ?

Нет, конечно. Аналогия: в ящике содержатся коробки, в каждой коробке спички. Но ящик-то спичек не содержит (что, быть может, против здравого смысла).

$\bigcup F$ – спички из всех коробок, ссыпанные в кучу. Что совсем не эквивалент множества коробок F , хотя от такой иллюзии трудно отвязаться.

Второе заблуждение – что существование такого множества $\bigcup F$ само собой очевидно. На самом деле на данный счет имеется особая аксиома (*аксиома объединения*).

Конечные и бесконечные множества. Мощности

Множества делятся на *конечные* (с конечным числом элементов) и *бесконечные*.

Первые как-то понятнее...

Однако сами по себе не представляют большого интереса. Имея дело с множествами, по умолчанию будем подразумевать бесконечные.

Конечные множества могут быть в принципе заданы попросту перечислением их элементов, например: $\{1, 4, 102\}$ – множество из трех элементов (чисел). Для бесконечных такое невозможно, посему они и задаются только через общее свойство элементов. Конечно, сходным образом можно задать и конечные множества.

В функциональном анализе бесконечные множества рассматриваются как «актуальные», состоявшиеся. А значит, они никоим образом не являются расширением, продолжением конечных. Взять конечное множество, а затем сказать: «и так далее, до бесконечности» – значит, не сказать ничего.

Справедливости ради стоит отметить, что родоначальником такого подхода является Георг Кантор. Да и приняты его идеи были далеко не сразу.

Но я не уловил, в чем тут разница.

Проиллюстрируем ее «парадоксом», приведенным в книге Дж. Литлвуда «Математическая смесь». Имеются шары, занумерованные натуральными числами. За минуту до полудня в ящик кладутся шары с номерами от 1 до 10, а шар 1 вынимается обратно. За 1/2 минуты до полудня кладутся шары от 11 до 20, а номер 2 вынимается обратно. За 1/3 минуты до полудня кладутся от 21 до 30, а 3 вынимается обратно, и т. д. Сколько шаров останется в ящике в полдень?

Кажущаяся парадоксальность в том, что на каждом шаге количество шаров в ящике увеличивается на 9 штук, и в полдень должно быть «бесконечное» их число. С другой стороны, шар с любым номером n будет вынут на n-м шаге, так что и остаться в ящике ничего не может. Что думаете?

> Изощренное условие маскирует некорректность задачи. Откажемся от «сжатия» процесса к точке полудня, которое создает иллюзию того, что последовательность все-таки завершится. Развернем его в линейку: пусть добавление и изъятие шаров происходит попросту каждую секунду. Теперь совершенно ясно, что при $n \to \infty$ количество шаров в ящике N неограниченно растет; это означает, что какое бы N ни задали, можно указать номер шага n, при котором оно будет превышено. И больше ничего не означает!
>
> В оригинальной постановке задача по сути дела спрашивает: сколько шаров окажется в ящике при $n = \infty$? Но вопрос не имеет смысла: «бесконечность» – такого числа нет, конечное множество не станет бесконечным, сколько его ни продолжать.

А что делать с рассуждением о том, что в ящике ничего не останется?

Сейчас поймете.

Бесконечные множества сравнивают по их *мощности*. Если возможно установить взаимно-однозначное соответствие (*биекцию*) между элементами – значит, множества имеют одинаковую мощность. Удивляет, что, например, множество рациональных чисел (всевозможных дробей) равномощно множеству натуральных чисел (как говорят – *счетно*). Его можно даже «возвести в квадрат» (то есть взять множество множеств), или в любую степень – мощность не изменяется. Причем доказательства здесь на уровне школьной олимпиады для 6-го класса.

В «парадоксе бесконечности» мощность множества порций по 10 шаров равна мощности множества шаров, вот и все. Хотя к сути задачи это отношения не имеет…

Тогда как же второй вариант ответа?

Он – не на заданный вопрос.

Подходящий вопрос может звучать так: если в ящике *уже* находится бесконечное множество натуральных чисел, и мы теперь каждому числу сопоставляем группу из 10 чисел – останутся ли «лишние» числа? Нет, разумеется.

Хорошо. Множество вещественных чисел, как я слышал, имеет бóльшую мощность – мощность континуума.

Что относится не только к множеству чисел на всей числовой оси, но и к множеству на ограниченном промежутке (например, отрезке [0, 1], который любят рассматривать математики).

Задача. Предложить разбиение отрезка $[0,1]$ на счетное множество отрезков ненулевой длины.

Попытка разделить на отрезки *одинаковой* длины ни к чему не приведет. Но решение существует, и очень простое.

Разобьем $[0,1]$ пополам точкой $\frac{1}{2}$, и возьмем в качестве первой доли половину отрезка: $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Остаток снова делим пополам, получаем вторую долю: $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right]$, и так далее. Задача решена, не правда ли?

Итак, мы будем рассматривать множества с бесконечным числом элементов?

Неправильно: не множества с бесконечным числом элементов, а *бесконечные множества*.

В теории множеств вообще не говорят о количестве элементов. Тем более о бесконечном; как сказано, числа «бесконечность» не существует. Множества сравнивают только по мощности. Кантор вводил еще одну характеристику для множеств: *ординальное число* (нам здесь не понадобится).

<u>О бесконечностях и бесконечном</u>

У начинающих отношение к бесконечностям двоякое. С одной стороны, «бесконечность» кажется мистикой, и тянет на философствование. С другой – бесконечности привычны даже по школе, представляются чем-то естественным, наглядным: бесконечность – как бы «очень-очень много».

И что тут не так?

Ошибочно и то, и другое. Ничего таинственного в бесконечных множествах нет, это математические объекты (абстрактные – как и любые другие в математике).

Однако они отнюдь не сводятся к обиходным представлениям, а вводятся строго. Постулируют существование множеств, из которых можно сколько угодно раз изымать по одному элементу – мощность не изменится. Их-то и называют бесконечными. Пока что просто термин; мы даже не знаем, «больше» они конечных множеств, или нет.

А разве не больше, ведь они же бесконечные?

Опираясь на определение, легко доказать, что бесконечное множество содержит конечное подмножество любой заданной мощности. То есть мощность бесконечного множества и в самом деле «больше», чем мощность любого конечного. Но оно вовсе не вытекает из «лингвистики», из смысла слова. Это – теорема. Следствие существования множеств, равномощных своему собственному подмножеству.

Понятно, что собственному, а чьему же еще?

Вы не поняли, *собственное подмножество* – термин. Подмножеством любого множества является, во-первых, оно само. Во-вторых, пустое множество. Все остальные подмножества, кроме названных двух, именуются собственными.

Мысленно мы представляем множества, как нечто наглядное. Не забывая об ограниченности такого взгляда. К примеру, любую «открытую» фигуру на плоскости можно представить объединением кругов – одно уже способно озадачить. Еще более странно, что ее можно с равным успехом представить объединением треугольников или иных фигур. Представление, исходящее из рассмотрения конечных множеств фигур, здесь пасует – к отсутствию наглядности придется относиться с пониманием.

Существуют ли бесконечности, «большие», чем континуум?

Да. Ряд мощностей неограничен. Можно доказать, что, множество всех подмножеств имеет мощность, большую мощности исходного множества.

Для лучшей доступности возьмем игрушечную модель. Множество X будет у нас коллективом людей. Его подмножества назовем группами. Предположим, что у каждого члена коллектива есть на примете группа, членов которой он считает умными людьми. И, соответственно, для любой группы, избранной из коллектива, существует один и только один человек, считающий ее группой умных. Вот вам и биекция. Мы легко докажем, что предположение биекции приводит к противоречию.

Выделим множество людей, не включивших в группу умных самого себя – назовем их скромниками. Остальные (нескромные) причисляют к умным и себя тоже. Для группы всех скромных, как для любой, по условию существует некто, относящий данную группу к умным. Зададим простой вопрос: этот «некто» скромен или нет?

На вопрос не существует ответа! Если он скромный, то должен числиться в подмножестве скромных… но скромный не вправе фигурировать в своей группе умников! Аналогично и нескромный не проходит.

Получается «парадокс брадобрея», который *бреет тех, кто не бреется сам*, так что неясно, должен ли он брить себя. Разновидность так называемой *антиномии Рассела*.

Задача. Выше мы доказали, что между X и 2^X нельзя установить биекцию. Докажите, что при этом мощность 2^X больше мощности X.

Для начала следует разобраться, как сравниваются мощности. Возьмем определение. Мощность A больше мощности B, если:

1) можно установить биекцию между B и собственным подмножеством A («отобразить» B на подмножество A);

2) но отобразить A на собственное подмножество B невозможно.

В нашем случае сопоставим: элементы $x \in X$ – и множества $\{x\}$, состоящие из одного такого элемента. Биекция очевидна. Но $\{x\}$ являются некоторыми из подмножеств 2^X, так что первый пункт выполнен.

Второй пункт проверять не требуется, ведь неравенство мощностей уже доказано. Задача решена.

В природе все количества конечны. Не значит ли это, что бесконечные множества – надуманная абстракция?

Конечно, абстракция, как и все в математике! Однако логика математики подталкивает к идее бесконечных множеств. К примеру, какое натуральное число ни взять, всегда можно прибавить единицу и получить следующее. Другой пример: между двумя разными точками прямой, как бы тесно ни были расположены, всегда можно взять промежуточную.

А главное, развитие теории бесконечных множеств дает огромной мощи инструментарий – функциональный анализ. Открывает обширный мир, в котором обычный, старый математический анализ кажется незначительным уголком, вдобавок не самым интересным.

Множества на примерах

Сейчас решим несколько задач из задачника.

Задача 1. Доказать, что множество интервалов (a, b) на действительной прямой, таких, что никакие два не пересекаются между собой, счетно. (Оно может быть и конечным, но мы на этом не заостряемся).

Имеем интервалы, расставленные последовательно на числовой оси. Ясно, что их можно занумеровать, переходя от одного к другому, вот и все.

Правда, цепочка интервалов может идти из бесконечности в бесконечность... Но если доказана счетность «половинки» цепочки, то добавление второго счетного множества не меняет мощности.

Дадим несколько более формализованное рассуждение. Внутри каждого интервала можно указать рациональную точку (причем уникальную для каждого, раз не пересекаются). Между множеством таких точек и множеством отрезков установлена биекция. Ну а множество рациональных точек не более чем счетно.

Заметьте: немалая часть доказательств в функциональном анализе – легкие, могут быть поняты даже школьником! Нужна лишь определенная настройка мозгов.

Задача 2. Как изменится предыдущий вывод применительно к множеству – уже не интервалов, а отрезков $[a, b]$?

На первый взгляд, никак. Интервал можно превратить в отрезок добавлением концов. Он даже как бы «расширился» – и вроде нет оснований думать, что отрезков на прямой разместится больше, чем интервалов…

В таком рассуждении есть логическая ошибка. Каждый интервал можно превратить в отрезок, добавив граничные точки. Но отсюда не следует обратное!

Рассмотрим отрезки типа $[a, a]$ (с совпадающими концами). Им не соответствуют какие-либо интервалы, они же просто точки! Их одних может быть столько, сколько вещественных чисел (при том, что они не перекрываются). Получается мощность континуума. Первое, скоропалительное суждение оказалось ошибочным.

Задача 3. Доказать счетность множества точек разрыва монотонной функции $f(x)$ на прямой x.

Поскольку функция монотонна, интервалы непрерывности на «оси игрек» перекрываться не могут. И они именно интервалы, ситуацию $a = b$ мы не рассматриваем (тогда не было бы и разрыва).

Между точками разрыва и участками непрерывности существует биекция. А дальше ссылаемся на первую задачу применительно к промежуткам непрерывности.

Задача 4. На окружности задано счетное множество точек X. Поворотом множества как целого на угол α (вокруг центра) оно переводится в множество X'. Существует ли такой поворот α, при котором никакие точки множеств X и X' не совпадут: $X \cap X' = \varnothing$?

Поставим обратную задачу: будем искать повороты, при которых имеет место совмещение точек $X\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ и $X'\{x'_1, x'_2, x'_3, ...\}$.

Так точка x'_1 при повороте может совместиться с x_2, с x_3, с x_4, и так далее – счетное множество ситуаций. Точка x'_2 может наложиться на x_1, на x_3, на x_4, и так далее. Счетное множество счетных множеств (множество поворотов, при которых реализуется наложение точек) – счетно. Некоторые из ситуаций, очевидно, совпадают – тем лучше.

А множество возможных углов поворота α в диапазоне от 0 до 2π континуально. Следовательно, поворот на угол α такой, что $X \cap X' = \varnothing$, не только существует – множество таких углов представляет собой континуум.

Что такое отображение

Понятие *отображение* в общем-то синоним *функции*.

Знаю: если каждому *x* можно поставить в соответствие некоторый *y*, то говорят, что задана функция $y = f(x)$.

Верно, только надо уточнить формулировку: функция, принимая любой *x* из *области определения*, возвращает некоторый *y*.

В обычном анализе *x* и *y* – действительные числа, бывают также функции комплексного переменного. Функциональный анализ расширяет понятие функции, теперь *x* и *y* – элементы множеств. Таким образом, функция $f(x)$ преобразует элементы множества *X* в элементы из *Y*. Что принято обозначать так: $f: X \to Y$.

Хорошо, но почему «отображение»?

Терминология, выражающая новый взгляд на функции. Теперь нам малоинтересно значение $f(x)$ для одного конкретного значения *x*. Будем оперировать множествами, и говорить, к примеру, что функция «отображает» множество *X* в множество *Y*, которое называют тогда *образом X*.

В свою очередь, *X* является для *Y прообразом*. Что нередко записывают в виде обратной функции: $f^{-1}: Y \to X$. Разумеется, запись имеет смысл, только если разным *x* соответствуют разные *y* (подобное отображение называют *инъекцией*).

Но ведь тут устанавливается по сути взаимно-однозначное соответствие, вы называли его биекцией.

Почти что так, но есть некоторая тонкость. *Y* как образ *X* может охватывать не все пространство: функция принимает не все возможные значения. Говорят, что отражение, хотя и инъективно, но *не сюръективно* (а значит, не биективно), существуют «неиспользуемые» *y*. Например, на множестве действительных чисел отображение $y = e^x$ не сюръективно, значения $y \le 0$ не получаются ни при каких *x*.

Такого рода детали важны в теории *операторов* (кстати, вот еще одно название для функции), а пока можно особо не вникать.

Эквивалентность и упорядоченность

В дальнейшем придется прибегать к одному трюку: считать различные элементы какого-то множества, эквивалентные в некотором смысле, за один элемент. Он будет элементом нового множества, которое называют *фактор-множеством* – множество *классов* эквивалентных элементов (классов эквивалентности).

Переход к фактор-множеству – распространенный способ «укрупнить» первоначальное множество. Проигнорировать различие элементов по факторам, которые в данной задаче не играют роли.

Что за эквивалентность такая?

Неважно. Но для того, чтобы деление на классы было однозначно и непротиворечиво, любое отношение эквивалентности (~) должно удовлетворять трем естественным требованиям:

1) рефлексивность ($x \sim x$);

2) симметричность (если $x \sim y$, то и $y \sim x$);

3) транзитивность (если $x \sim y$ и $y \sim z$, то и $x \sim z$).

А разве возможно иное?

Легче легкого. Например, некий чудак решит условиться, что x эквивалентно y в том случае, если $x > y$. Такое (явно нелепое) определение не пройдет перечисленным критериям, начиная прямо с первого. Три вышеупомянутых требования гарантируют, что классы эквивалентных элементов никогда не будут попарно пересекаться – вот в чем их смысл.

Заметим, что эквивалентность – частный пример общего понятия: бинарного отношения. То есть элемент x может находиться в некотором общем отношении к элементу y.

Что значит – общем?

Значит, что существует множество пар, в которых x и y связаны между собой одним и тем же отношением.

Задача. На множестве действительных чисел установлено следующее бинарное отношение между x и y: «число $x - y$ рационально». Является ли оно отношением эквивалентности?

Проверяем по пунктам.

Рефлексивность: $x - x = 0$ – рациональное число, проходит.

Симметричность: если $x - y$ рационально, то и $y - x$ тоже. И здесь порядок.

Транзитивность. Пусть $x - y$ рационально, $y - z$ тоже. Тогда и $x - z = (x - y) + (y - z)$ рационально, как сумма рациональных.

Ответ положительный. Что и понятно. Если в качестве одного из x взять любое рациональное число, то наш класс эквивалентности вберет в себя все вообще рациональные числа.

Однако если x иррационально, то же самое бинарное отношение определит класс эквивалентности, состоящий исключительно из иррациональных чисел. Всех ли? Подумайте.

Еще одним примером бинарного отношения является *частичная упорядоченность*. Речь идет об отношении, напоминающем $\leq$ или $\geq$.

Почему «частичная»?

Во-первых, отношения упорядоченности могут быть заданы не между всеми элементами. То есть элементы некоторых пар могут быть *несравнимыми*.

Во-вторых, частично упорядоченное множество (или его подмножество) может не иметь наименьшего элемента.

Бывает и полная упорядоченность?

Бывает. Множество вполне упорядочено, если:

1) в нем нет несравнимых элементов;

2) в каждом его подмножестве есть наименьший элемент.

Второе требование сомнительно. Конечно, множество натуральных чисел в этом смысле «вполне упорядочено»: любое его подмножество начинается с какого-то элемента. А вот другие...

Ваш вопрос давайте обсудим применительно к аксиоме выбора.

Аксиома выбора

Тема серьезная. Во-первых, из аксиомы выбора вытекают важные следствия. Во-вторых, разбор ее поможет лучше понять особенности подхода к множествам.

Прочтем формулировку: в любом семействе F непустых множеств A в каждом $A \in F$ можно выбрать по одному элементу.

Непонятно: раз множества непустые, значит, хотя бы один-то элемент в каждом имеется. Получается, что утверждение тривиально?

Но ведь аксиома не об этом.

Она утверждает совсем не то, что каждое из непустых множеств A содержит хотя бы один элемент (что действительно тавтология). Она говорит о том, что его *можно выбрать*.

Но ведь если он существует – значит, его можно и выбрать?

Скажите – как.

Ну... Просто показать. Пальцем.

Хорошо. Принимается!

Однако семейство бесконечно – по умолчанию. Значит, и выбранные элементы должны составить бесконечное множество.

Вспомните: бесконечное множество нельзя задать непосредственным указанием на его элементы (как вы вознамерились). Его можно задать только обобщенно. Должна быть какая-то функция $f(A)$, каждому множеству семейства ставящая в соответствие «выбранный» элемент. Совокупность последних и образует множество выбранных элементов. Аксиома утверждает, что такая *функция выбора* всегда существует.

Сформулируем по-другому: должно существовать некое свойство, которому удовлетворяет ровно один элемент в каждом из множеств A.

Да, теперь понимаю. Но тогда утверждение совсем не очевидно.

Как раз потому вокруг аксиомы и велись когда-то споры. Тем более что она не отвечает ведь на вопрос, откуда взять такую функцию выбора. Она *неконструктивна*. А иначе, впрочем, была бы бесспорной.

Теперь все ясно?

Честно говоря, не совсем. Кажется странным, что какое-то особое значение придается субъективному вроде бы моменту. По-моему, главное – что элементы существуют. А можем ли мы их выбрать, или не можем, какая разница... Не можем сегодня – сумеем завтра.

Ваше сомнение понятно. Оно происходит из укоренившейся школярской привычки представлять математические объекты как нечто реальное, объективно существующее. Что должно быть лишь описано особым математическим языком.

Если множество нельзя описать (в нашем смысле – то есть указать общий признак, по которому отбираются в него элементы), значит, оно не предмет математики, его просто нет. Тут придется, вероятно, преодолеть определенный познавательный рубеж, без чего далее будет трудно.

Вы обещали, что все это будет иметь отношение к упорядочиванию.

Верно. Возьмем, например, теорему (или аксиому) Цермело: на всяком множестве X можно ввести такое отношение порядка (вполне упорядочить X), при котором у любого подмножества $A \subset X$ будет наименьший элемент $x^0 \in A$.

Да ведь она прямо следует из аксиомы выбора: если в любом A можно выбрать один элемент, значит, его-то мы и можем назначить наименьшим.

Вот так фокус!

Из оставшихся можно опять выбрать элемент – он будет следующим по порядку, и так далее. То есть, из аксиомы выбора вытекает, что любое множество можно вполне упорядочить.

Вообще-то странно: например, интервал (*a, b*) не имеет наименьшего элемента...

Да – при общепринятом отношении $\geq$. Но если ввести другой метод упорядочения, «минимальный» элемент может быть. Хотя построить такое упорядочение, честно говоря, никому еще не удалось. Впрочем, напоминаю, что аксиома выбора неконструктивна, как и эквивалентные ей утверждения. Она устанавливает *существование*, не отвечая на вопрос: где взять или как сделать.

Зачем нужны аксиомы, которые утверждают одно только существование, какая от них польза?

Польза есть. Откажись мы от аксиомы выбора – придется отказаться от многих уже привычных инструментов анализа. Без нее не удастся строго доказать, например, что счетное множество счетных множеств счетно (счетность не означает упорядоченность, и тогда доказательство из школьной олимпиады буксует).

С другой стороны, некоторые следствия аксиомы весьма парадоксальны.

Необязательно знать аксиомы арифметики Пеано, чтобы выполнять арифметические действия. В теории множеств тоже есть своя аксиоматика, ее принято условно называть ZFC (Цермело, Френкель, *choice*). Однако она лежит в стороне от основной линии. Достаточно знать, что есть сторонники и других аксиоматических систем – «конструктивистского» направления, не принимающего аксиому выбора.

Я слышал про «наивную теорию множеств» – это что?

Дело в том, что первичное, канторовское понятие множества как совокупности элементов, обладающих общим свойством, приводит к противоречиям типа «парадокса брадобрея» – когда само множество подходит под признак своего же элемента. Теория перестала быть «наивной» с появлением аксиом (ZF или ZFC), исключающих подобное.

Функция выбора

Текущий и следующий параграфы смело могут быть пропущены: они служат лишь для расширения кругозора.

Зададимся вопросом: функция выбора – отображение чего на что?

Что-то не понял…

Вспомним общее понятие функции: $f: X \to Y$: она отображает множество X на множество Y. Вопрос номер один: что такое у нас X?

Рассуждаем: функция выбора присваивает каждому множеству из семейства множеств определенный элемент…

Тогда X и есть это семейство. Его элементы – всевозможные множества A из X. Которые и «подаются на вход» функции.

Теперь разбираемся с Y, то есть с тем, что «получается на выходе». Каждому элементу X (т. е. множеству A) ставится в соответствие элемент множества.

Который одновременно является элементом и X, вот и ответ.

Ошибка! Элементами семейства X являются его множества, а элементы множеств в совокупности составляют новое множество $\bigcup X$, помните?

Думаю, нужно внести уточнение. Каждому множеству семейства наша функция сопоставляет не просто какой-то элемент из всех множеств гуртом. А элемент одного, именно данного множества.

Справедливо.

Имеется понятие *прямого* (или *декартова*) *произведения* множеств. Если даны множества A, B, C, …, то прямое произведение $A \times B \times C \times \ldots$ – множество наборов элементов, по одному из каждого. Например, прямое произведение трех осей декартовых координат (трех множеств чисел) – множество точек трехмерного пространства, где каждая точка характеризуется упорядоченной тройкой чисел, по одному от каждой из осей. Отсюда и название.

Функция выбора в сущности и выдает такой набор элементов: каждому входящему множеству соответствует один элемент из него же, а всем множествам семейства – упорядоченный набор.

Если теперь исключить выбранные элементы, из оставшихся опять можно выбрать по одному элементу из каждого (так говорит аксиома). И продолжать сколько угодно раз. Возможность такого продолжения устанавливается эквивалентной формулировкой аксиомы выбора: декартово произведение непустых множеств непусто.

Запись высказываний

В серьезных книгах вы встретите язык формулирования высказываний на основе *кванторов*.

Мы обходимся без них, но все же дадим понятие об этом формальном языке – возможно, пригодится. В качестве примера разберем формулировку аксиомы выбора. Вот запись, заимствованная из Википедии:

$$\forall X\left[\varnothing \notin X \Rightarrow \exists f : X \to \bigcup X \mid \forall A \in X (f(A) \in A)\right].$$

Приводим ее «перевод».

$\forall X[...]$: для любого множества X утверждается то, что стоит в квадратных скобках. ($\forall$ – *квантор всеобщности*).

$\varnothing \notin X \Rightarrow$: если пустое множество не содержится в X в качестве элемента, то… ($\Rightarrow$ – знак *импликации*). Мимоходом намек на то, что элементами X являются множества, X – семейство множеств.

$\exists f : X \to \bigcup X$: существует функция *f*, отображающая семейство множеств X на объединение всех элементов входящих множеств $\bigcup X$. То есть, любому множеству семейства она ставит в соответствие элемент, входящий в какое-то из множеств. ($\exists$ – *квантор существования*). Далее идет описание функции.

$\forall A \in X(...)$: для любого множества A из семейства X функция выполняет то, что стоит в круглых скобках.

$f(A) \in A$: функция, принимая множество *A*, возвращает элемент, содержащийся в A.

Окончательно сформулируем аксиому с опорой на обозначения.

Для любого семейства X непустых множеств справедливо следующее:

$\forall X[\varnothing \notin X \Rightarrow ...]$

существует такая функция,

$\exists f : X \to \bigcup X$

которая для любого множества *A*, принадлежащего семейству X

$\forall A \in X(...)$

выбирает один элемент, принадлежащий A.

$f(A) \in A$

Желаю успехов в освоении специфического языка!

Что такое пространство

В функциональном анализе повсюду имеют дело с *пространствами*. Говорят о метрических пространствах, топологических, линейных, банаховых – перечню нет конца.

Существует определение пространства?

Такого нет. Можно пояснить, что пространство, во-первых, универсальное множество, объемлющее любое другое, и образующее «игровое поле»: вне пространства как бы ничего уже нет. В конкретной задаче или классе задач все множества, которые предстоит рассматривать, будут подмножествами определенного пространства.

Во-вторых, множество становится пространством, когда задана какая-то структура, свойства. Само по себе «пространство» – не более чем слово. В каждой задаче смотрят: нельзя ли ввести метрику? линейные операции? топологию? норму? или хотя бы систему полунорм? Не является ли пространство полным? сепарабельным? гильбертовым?

А зачем это нужно?

Каждое сужение игрового поля предоставляет все более мощные средства.

Масса реальных задач связана с пространствами, элементами которых являются функции. Потому говорят о *функциональных пространствах* – чтобы не возникало путаницы с геометрическими.

Кстати, имея дело с пространством, элементы его логично называть *точками*.

И еще одно. В дальнейшем мы нередко будем говорить о дополнении множества. Если в пространстве X задано множество A, то множество $X \setminus A$ (X за вычетом A) называют *дополнением* A до X. Так, дополнением множества рациональных чисел в пространстве вещественных являются иррациональные.

2. Теория пределов

В функциональном анализе, как и в традиционном, многое строится на понятии предела. Потому вопрос близости – ключевой. Вопросы близости принято называть топологическими. Метрика – один из способов задания топологии. Не единственный (рассматриваются также топологические пространства, пространства сходимости).

Понятие метрического пространства можно принять как продолжение множества действительных (вещественных) чисел, на котором базировался анализ, известный из вузовского курса.

Метрические пространства

Множество является *метрическим пространством*, если на нем задана *метрика*. Речь идет о своеобразном «расстоянии» между двумя точками x и y.

Расстояние – понятно, а зачем его называть какой-то «метрикой»?

Согласитесь, не можем же мы перечислить всевозможные пары точек, чтобы каждой паре назначить расстояние. Должна быть некая функция от x и y: $\rho(x, y)$, выдающая расстояние автоматически. Она и называется метрикой.

Пространство с заданной метрикой приобретает уже определенные свойства. А состоящее из тех же самых элементов, но с другой метрикой – будет совсем другим пространством.

Метрика задается произвольно?

В принципе, да. Но не совсем.

Во-первых, далеко не любое пространство *метризуемо*, что весьма досаждает математикам, вынуждая их придумывать некоторые заменители метрики.

Во-вторых, задание метрики связано с природой элементов множества и существом конкретной задачи. Есть элемент искусства – установить не просто какую-то, а удачную метрику. Так, чтобы задача попала в естественную среду и легко решалась.

В-третьих, должны удовлетворяться довольно очевидные требования (аксиомы) метрики:

1) из $\rho(x, y) = 0$ следует, что $x = y$, и наоборот;

2) аксиома симметрии: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) аксиома треугольника: $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(y, z)$.

И еще одно: ρ – величина действительная и неотрицательная (*положительная определенность* метрики).

В реальных задачах главная морока всегда с проверкой выполнения аксиомы треугольника.

В таком случае, насколько она обязательна?

Основная цель введения метрики – определение близости, и в этом контексте аксиома треугольника ключевая. Ее можно перефразировать так: две точки, близкие к некоторой третьей, близки и между собой. Стоит отказаться от постулата, и вся система рассыплется. В частности, окажется, что последовательность может иметь больше одного предела...

Метрика ассоциируется с геометрическим расстоянием, где чудес не ожидаешь. Однако аксиомы метрики свободно допускают довольно странные варианты. Как вам такая метрика:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0\ \textit{если}\ x=y\\ 1\ \textit{если}\ x\neq y\end{cases}.$$

Заметьте: аксиомы выполнены. И, однако же, в данной «дискретной» метрике любая точка внутри шара является его центром.

Зачем нужна на практике подобная экзотика?

Скорее всего ни зачем, просто необходимо будоражить мозги, склонные упираться в простые житейские аналогии.

Задача 1. Доказать, что вторая аксиома (симметрии) является следствием других.

Из аксиомы треугольника, принимая $z=x$:

$\rho(x,y)\le\rho(x,x)+\rho(y,x)$.

Учитывая первую аксиому, получаем:

$\rho(x,y)\le\rho(y,x)$

На том же основании $\rho(y,x)\le\rho(x,y)$. Отсюда требование симметрии.

Задача 2. Убедиться, что $\rho(x,y)=\max|x(t)-y(t)|$ является метрикой в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a,b]$. (Подразумевается максимальное значение функции.)

Положительная определенность налицо. Проверяем выполнение аксиом.

1. Из $x(t)=y(t)$ очевидно следует $\rho(x,y)=0$. Обратное также верно.

2. Вторая аксиома выполняется по причине взятия модуля.

3. Допустим, что $|x(t)-y(t)|$ принимает максимальное значение при некотором t_0, $|y(t)-z(t)|$ также. Тогда $|x(t)-z(t)|=|x(t)-y(t)+y(t)-z(t)|$ тоже достигнет максимума при t_0, и он будет равен:

$$\max|x(t)-z(t)|=\max|x(t)-y(t)|+\max|y(t)-z(t)|=\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Если же $|x(t)-y(t)|$ и $|y(t)-z(t)|$ достигают максимума при разных значениях *t*, то $\max|x(t)-z(t)|$ будет меньше данной величины. Аксиома треугольника соблюдается.

Заметим на будущее, что рассмотренное пространство имеет общепринятое обозначение $C[a,b]$ (*continuous* = непрерывный).

Задача 3. Проверить, является ли метрикой в пространстве функций, заданных на отрезке, следующее выражение:

$$\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b[x(t)-y(t)]^2dt}\ .$$

Имеются в виду функции, для которых интеграл существует. Кстати же, и данное пространство имеет свое обозначение: L_2 (*Lebesgue* = лебегово, а откуда такое – узнаете со временем).

Из $x(t)=y(t)$ следует $\rho(x,y)=0$. Но обратное неверно! Например, пусть $x(t)=y(t)$ всюду, кроме единственной точки t_0: $x(t_0)\neq y(t_0)$. Уникальная точка не скажется на значении интеграла, которое по-прежнему будет нулевым. То же будет, если добавить еще одну «особую» точку. И даже счетное множество таких точек…

Получаем, что $x(t)\neq y(t)$ вовсе не гарантирует $\rho(x,y)\neq 0$. Ответ на вопрос отрицательный. И однако…

Однако можно убедиться, что остальные требования к метрике выполнены. В подобных случаях – когда из $\rho(x, y) = 0$ не всегда следует $x = y$ – говорят о *полуметрике*. Полуметрику можно превратить в метрику знакомым приемом: все различающиеся функции, находящиеся, тем не менее, на нулевом «расстоянии», объявляем эквивалентными. И теперь имеем дело не пространством функций, а с укрупненным *фактор-пространством* классов эквивалентности.

Задача 4. Дано множество плоских фигур. Установить, является ли метрикой площадь симметрической разности:

$$\rho(x, y) = S(x\Delta y).$$

Что первые два свойства метрики выполняются, видно сходу. Предстоит проверить аксиому треугольника:

$$S(x\Delta z) \le S(x\Delta y) + S(y\Delta z).$$

Вот случай, когда выручат «огурцы». Пронумеруем подмножества, как на рисунке. Теперь для площадей – проследите:

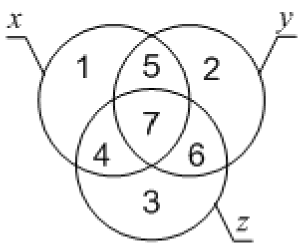
$$S(x\Delta y) = S_1 + S_4 + S_2 + S_6;$$

$$S(y\Delta z) = S_5 + S_2 + S_3 + S_4;$$

$$S(x\Delta z) = S_1 + S_5 + S_3 + S_6.$$

Тогда: $S(x\Delta y) + S(y\Delta z) = S_1 + 2S_2 + S_3 + 2S_4 + S_5 + S_6$.

Сравнение последнего результата с $S(x\Delta z)$ не требует комментариев. Ответ на задачу положительный.



Круги Эйлера строятся так, чтобы представить самый общий случай

Предельная точка

В этом разделе занимаемся исключительно метрическими пространствами. Есть объемлющее метрическое пространство *X*. В нем рассматриваем множества (которые являются, конечно, подмножествами пространства).

Основополагающее понятие – предельная точка. Точка $u \in X$ является *предельной точкой* множества *U*, если любая окрестность точки содержит бесконечно много точек из *U*.

Впрочем, можно сформулировать иначе: «... если любая ее *проколотая окрестность* содержит хотя бы одну точку из *U*». «Проколотая» означает – «исключая саму *u*».

Разве это то же самое?

Абсолютно то же: всегда ведь можно так сузить окрестность, чтобы наша «одна точка» оказалась вне ее. Но и тут, по определению, еще «одна точка, но не *u*» должна существовать внутри; таким образом, мы и приходим к бесконечному множеству точек. Согласны?

Да, пожалуй.

Просто первая формулировка нам впоследствии будет удобнее.

Важно то, что предельная точка множества может принадлежать ему, а может и не принадлежать.

Впрочем, надо еще дать определение, что такое окрестность.

В общем-то понятно...

… поскольку у каждого перед мысленным взором нечто вроде фигур на плоскости. Такая интерпретация полезна – облегчает усвоение. Но простота может оказаться и обманчивой.

Итак, *окрестностью* точки называют открытый шар с центром в этой точке. В свою очередь, *открытый шар* радиуса R с центром u – совокупность точек x пространства, для которых $\rho(x,u) < R$.

Если $\rho(x,u) \le R$, имеем *замкнутый шар*.

Замкнутые множества

Множество $\overline{U}$, полученное присоединением к U всех его предельных точек, называется *замыканием* U.

А нельзя ли сказать проще: замыкание – совокупность всех предельных точек *U*?

Это не эквивалентное определение: множество может иметь *изолированные точки*, которые вовсе не являются предельными. И они не должны потеряться при замыкании! Нередко предельные точки плюс изолированные – называют в совокупности *точками прикосновения*. Здесь уже можно говорить, что замыкание – совокупность всех точек прикосновения U.

И вот теперь определение: множество U *замкнуто*, если оно совпадает со своим замыканием: $U = \overline{U}$. Иначе говоря, если оно содержит все свои предельные точки.

Замыкание любого множества есть замкнутое множество.

Масло масляное?

Не тут-то было! Используя определения, перефразируем утверждение: если к множеству присоединить все его предельные точки, полученное *новое* множество будет содержать все *свои* предельные точки. Теперь тезис не очевиден: у нового множества могут образоваться новые предельные точки... Так что он, хотя и в самом деле справедлив, но доказывается.

Задача. Доказать, что все пространство X, а также пустое множество замкнуты.

Понятно, что все пространство содержит все свои предельные точки: ведь вне его вообще никаких точек нет.

Теперь пустое множество $\varnothing$: предположение о его незамкнутости означало бы наличие предельных точек, не принадлежащих множеству. Но у пустого множества $\varnothing$ никаких предельных точек не может быть, просто по их определению.

Еще один тезис: любое множество, состоящее из конечного числа точек, замкнуто. Потому что у него вообще не может быть предельных точек – опять же по их определению (требующему бесконечного множества точек в окрестности). Вот вам случай изолированных точек.

Теперь обозначим важную теорему: объединение двух и пересечение любого множества замкнутых множеств – замкнуты.

Впрочем, где объединение двух, там и любого конечного числа: результат объединения двух можно объединить с третьим, и так далее.

Но тогда вместо «двух» можно тоже написать «объединение любого числа»?

Любого, но конечного. Нельзя расширить формулировку на объединение бесконечного множества множеств.

Впрочем, докажем предложенную теорему.

Начнем с пересечения

Пусть $U = \bigcap U_i$ – пересечение замкнутых множеств. Рассмотрим произвольную точку *u* – предельную для *U*. Если мы докажем, что она обязательно принадлежит *U*, это и значит, что *U* замкнуто.

Раз *u* предельная точка, значит, любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек из *U*. Любые точки *U* (пересечения) принадлежат и каждому из U_i. Получается, что эта точка – предельная и для всех исходных множеств.

Теперь вспомним, что эти множества замкнутые, значит, сама *u* принадлежит им всем (по определению замкнутости).

Значит, принадлежит и пересечению. Теорема доказана, точнее, одна ее часть.

Заметьте, в доказательстве не играло никакой роли число пересекающихся множеств.

Перейдем к объединению. Будем доказывать от противного.

Пусть $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ – объединение *n* замкнутых множеств; допустим, что оно не замкнуто. Значит, существует точка *u* – предельная для *U*, но не принадлежащая *U*. Ясно, что она не может принадлежать и ни одному из U_i. А раз они замкнуты, то не может быть ни для одного предельной (по определению замкнутости).

А теперь внимание. Раз она не предельная, значит, можно построить такую ее окрестность (пусть свою для каждого U_i), что в ней окажется не более чем конечное число точек из U_i.

Правда, окрестностей несколько, и непонятно, что с ними делать. Но мы можем взять их пересечение. Раз все они с общим центром, пересечением окажется самая маленькая.

Понятно, что в ней не может быть больше точек, чем суммарно во всех окрестностях. Конечное число, умноженное на конечное, есть конечное. Вот теперь начальный тезис опровергнут: точка *u* – не предельная для *U*. Значит, *U* замкнуто.

Как видите, здесь конечное число объединяющихся множеств принципиально.

Открытые множества

Определение. Множество $U \subset X$ открыто, если вместе с каждой точкой $u \in U$ оно содержит некоторую окрестность *u*.

Формулируют и короче: множество называется *открытым*, если все его точки – внутренние.

Все пространство *X*, а также пустое множество – открыты.

Как так? Вы же говорили, что они замкнуты!

Здесь нет противоречия. Открытость и замкнутость не взаимоисключающие свойства, а иначе – зачем бы мы вводили определение, приведенное выше? Могли тогда сказать: если множество не замкнуто, оно открыто.

И верно.

Существуют множества, не являющиеся ни замкнутыми, ни открытыми.

К примеру, на числовой прямой – отрезок [0, 1] замкнут. Интервал (0, 1) открыт. А вот полуинтервал [0, 1), слева включающий в себя конец, а справа не включающий – не подходит ни под одно, ни под другое.

Задача. Докажите, что не являются ни замкнутыми, ни открытыми: множество рациональных чисел; множество иррациональных чисел.

Наконец, существуют множества, и открытые, и замкнутые одновременно. Разве у всего пространства X – каждая его точка не внутренняя?

Согласен.

Впрочем, открытые и замкнутые множества все же взаимосвязаны. Легко доказывается, что дополнение замкнутого (открытого) множества до всего пространства $X \setminus A$ есть, наоборот, открытое (замкнутое) множество. Кстати, можно ввести альтернативное определение: множество считается замкнутым, если его дополнение открыто. Такое определение не опирается на метрику, а потому подходит для пространств, в которых метрика не введена. (Ну а открытые множества можно ввести аксиоматически – уклонение в сторону, развивать которое не будем.)

Отметим себе очередную теорему. Объединение любого множества открытых множеств и пересечение двух (или конечного числа) есть открытое множество.

Она перекликается с предыдущей; видимо, и доказывается похоже?

Ее вовсе не надо доказывать.

Для множеств существует *принцип двойственности*: пересечение дополнений равно дополнению объединения; объединение дополнений равно дополнению пересечения. Если мы сопоставим с тем, что сказано выше...

Понятно, в общем.

Обратимся за иллюстрацией к числовой прямой. Если изымем из нее отрезок [0, 1] (замкнутое множество), то, что осталось: $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$ – составит открытое множество.

Задача 1. Доказать, что открытый шар открыт.

Вопрос кажется издевательским… Но вспомним определение открытого шара: совокупность точек x, для которых $\rho(x, y) < R$ (где y – центр). Термин, не связанный с открытостью множеств, просто слово похожее! Что он еще и открытое множество – требует доказательства.

Доказываем через определение открытого множества, разумеется. Любая его точка должна иметь окрестность, принадлежащую множеству.

Возьмем любую точку шара x. По определению, $\rho(x, y) < R$. Можем построить вокруг x окрестность, чтобы она не вылезла за «границу» шара?

Расстояние точки x до «границы» $R - \rho(x, y)$. Возьмем окрестность радиуса ε, где, например, $\varepsilon = \frac{1}{2}[R - \rho(x, y)]$.

Никакая точка внутри окрестности не может отстоять от центра больше, чем на $\rho(x, y) + \varepsilon$ (по аксиоме треугольника). Вот и все доказательство.

Задача 2. Может ли замкнутый шар может быть открыт?

Ответ: может, если он является «всем пространством». Ведь все пространство открыто.

Тем не менее, он не сделается открытым шаром!

Задача 3. Рассмотрим теорему: легкую, но имеющую важное значение. Доказать, что любое открытое множество может быть представлено объединением открытых шаров.

Для доказательства достаточно вспомнить определение открытого множества: оно вместе с каждой точкой содержит и ее окрестность. А окрестность – открытый шар. Возьмем объединение всех таких окрестностей. Во-первых, любая точка исходного множества содержится в каком-то шаре – просто по построению.

Должно быть еще и «во-вторых». Что шары не выходят за границы исходного множества. Но и это верно по построению!

Значит, множества совпадают. Справедливость теоремы содержится просто в самом определении открытого множества.

Задача 4. Продолжим задачку. Рассмотрим плоские множества, то есть «фигуры» на плоскости. Открытые шары – теперь открытые круги, но справедливо уже доказанное: любую открытую фигуру можно представить как объединение открытых кругов. Требуется доказать, что ее можно представить также как объединение открытых треугольников, прямоугольников и т.п.

Решение очевидно: в окрестность каждой точки (то есть в круг) можно вписать треугольник, да хоть пятиугольник. Ситуация не отличается от уже разобранной.

Можно пойти еще дальше, и утверждать, что открытое множество представимо объединением замкнутых шаров.

Как такое может быть, ведь объединение замкнутых множеств замкнуто.

Нет. Только объединение *конечного* числа замкнутых множеств замкнуто!

Внутрь окрестности точки можно поместить замкнутый шар меньшего радиуса. А дальше рассуждение аналогично предыдущему. И, кстати, необязательно шары: их можно заменить прямоугольниками, например…

Всюду плотные множества

На любом участке действительной числовой прямой нельзя указать отрезок, внутри которого не содержалось бы ни одного рационального числа. Говорят, что на любом таком участке множество рациональных чисел плотно.

Определение: множество *U плотно* в множестве $V \subset X$, если замыкание $\overline{U} \supset V$.

В случае *V* = *X* (то есть, *V* представляет собой все пространство), говорят, что *U всюду плотно*.

Определение звучит туманно. Нельзя ли растолковать понятнее?

Можно.

Когда говорим о том, что *U плотно* в *V*, имеем в виду, что любая окрестность любой точки *V* содержит точку из *U*. Что для любой точки $v \in V$ можно найти точку $u \in U$ такую, что расстояние $\rho(v, u)$ меньше любого заданного числа ε (тут уже все совершенно прозрачно).

А как это вытекает из определения?

Если бы отрезок, упоминающийся в нем, имелся, то, взяв точку, к примеру, посередине, мы могли бы ручаться, что она не является предельной для *U*. Тогда при замыкании *U* – в *V* осталась бы «дыра». А по определению, $\overline{U}$ должна накрыть *V* полностью.

Если *V* – вся числовая ось, то множество рациональных чисел *всюду плотно*. Вообще: если *V* это пространство, то *U* всюду плотно, если $\overline{U} = V$.

Пойдем далее. Множество *U* метрического пространства *X* называется *нигде не плотным*, если любой шар из *X* содержит в себе шар, не пересекающийся с *U*.

Громоздкое определение…

Да, но суть проста: оно определяет множество, состоящее из изолированных точек. То есть, никакая точка множества *U* не имеет окрестности из *U*.

Допустим обратное: некоторая точка имеет окрестность в *U*. Тогда взяв шар в *X*, совпадающий с окрестностью, мы не сможем в нем выделить какого-либо шара, не пересекающегося с *U*: он весь состоит из точек *U*.

Существует и другое определение: множество называется нигде не плотным, если его замыкание не имеет внутренних точек.

Раз «нигде не плотное множество» это изолированные точки, то, по-моему, достаточно сказать, что оно само не имеет внутренних точек, зачем здесь еще замыкание?

Потому что тут лишь необходимое, но не достаточное условие! Так, множество рациональных точек $\mathbb{Q}$ на действительной оси $\mathbb{R}$ не имеет внутренних точек (в любой окрестности рациональной точки найдется иррациональная). Тем не менее, оно всюду плотно, его замыкание – все пространство.

Можно также подумать, что если удалить точки всюду плотного множества, то множество оставшихся точек уже не будет плотным… Нет, конечно! Дополнение множества рациональных чисел $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (то есть, множество иррациональных) тоже всюду плотно на $\mathbb{R}$!

Сходимость и предел

Последовательность $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ точек метрического пространства *X* называется *сходящейся*, если существует точка $x \in X$, для которой: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$.

Возможна другая формулировка: последовательность $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ сходится к *x*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер *N* такой, что $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ для всех $n > N$. Похожая дается в вузовском курсе, но для действительной прямой. Здесь же сходимость устанавливается для любого метрического пространства.

Точку *x* называют *пределом* последовательности. Собственно, эта *x* и есть *предельная точка* множества, из которого берутся x_n. Впрочем, надо еще оговорить: мы не рассматриваем ситуацию, когда все x_n, начиная с какого-то номера, равны точно *x*.

Выходит, понятия предела и предельной точки связаны?

Да, и тесно. Пойдем дальше.

Фундаментальной называется такая последовательность точек метрического пространства, что:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(x_n, x_m) = 0.$$

Говоря опять же попросту: начиная с некоторого номера, все последующие точки окажутся внутри сколь угодно малой области.

Задача. Доказать, что последовательность может иметь лишь один предел.

Допустим обратное, пределов два (*x* и *y*), тогда для любого $\varepsilon > 0$:

1) существует номер *N* такой, что $\rho(x, x_n) < \varepsilon$ для всех $n > N$;

2) существует номер *M* такой, что $\rho(y, x_n) < \varepsilon$ для всех $n > M$.

Значит, найдется номер, начиная с которого $\rho(x, x_n) + \rho(y, x_n) < 2\varepsilon$.

Но по аксиоме треугольника:

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_n) + \rho(y, x_n).$$

Получается: какое бы малое число 2ε ни выбрать, «расстояние» между двумя якобы разными пределами $\rho(x, y)$ все-таки не больше этого числа. Что попросту означает нулевое расстояние, пределы совпадают.

Полнота пространства

Сходящаяся последовательность всегда фундаментальна, а вот наоборот – не факт. Последовательность может быть фундаментальной, но, тем не менее, предел отсутствует (в рассматриваемом пространстве).

Но может и присутствовать…

И тогда пространство называется *полным*. Точнее: пространство полно, если в нем сходится *любая* фундаментальная последовательность.

Рассмотрим теорему о вложенных шарах. Она позволяет доказывать другие важные теоремы: в полном метрическом пространстве X пересечение любой последовательности замкнутых, вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, непусто.

В принципе, верно и обратное: если такое пересечение непусто, то пространство полно. Доказательства несложны, но не будем на них отвлекаться.

Я готов и так поверить. Мне кажется странным: без требования $r_n \to 0$ пересечение вложенных шаров может оказаться пустым? Трудно себе представить.

Что же, приведу иллюстрацию, которая позволит переступить через психологический барьер.

Возьмем обычную плоскость, выбросим из нее замкнутый круг некоторого радиуса. Оставшееся множество примем за пространство (с обычной метрикой).

Теперь представим себе последовательность вложенных кругов, каждый из которых содержит внутри себя эту «дыру». Их пересечение при $n \to \infty$ вполне может быть эквивалентно «дыре», то есть пусто.

Да, представил. Только здесь, мне кажется, жульничество: шар должен иметь центр – по определению шара, а ваши круги его не имеют, ведь он вне пространства.

Верно, есть некоторая натяжка. Но невеликая. В принципе, теорема справедлива, если вместо шаров будут просто вложенные друг в друга замкнутые множеств, диаметры которых стремятся к нулю. Диаметр множества – грубо говоря, наибольшее из расстояний для всех пар точек.

Сейчас мы докажем важное положение. Пространство $C[a, b]$ полно.

Напоминание: $C[a, b]$ – пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с метрикой $\rho(x, y) = \max|x(t) - y(t)|$.

Возьмем любую фундаментальную последовательность функций $x_n(t)$ указанного пространства. «Фундаментальная» – означает: для любого малого числа ε найдутся столь большие номера n и m, что $\rho(x_n, x_m) = \max|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$.

Но отсюда очевидно следует, что $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ для всех t. А это, как известно из обычного анализа, свойство *равномерной сходимости* последовательность функций $x_n(t)$. И функция $x(t)$, к которой последовательность равномерно сходится, является тоже непрерывной.

Если такое действительно «известно», тогда $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$. Фундаментальная последовательность сходится к функции, также принадлежащей $C[a, b]$. Пространство полно.

<u>О пределах в математике</u>

Знаете, когда толкуют о пределах, напрашивается вопрос, для чего оно нужно. Зачем эти последовательности, мало-помалу подползающие к чему-то? Не проще ли сразу прыгнуть в конечную точку?

Пределы – чрезвычайно мощный инструмент: они нужны для конструирования новых математических объектов. А насчет прыгнуть... дело в том, что «конечной точки» может не существовать! Простой пример: производная.

А что с ней такое?

Напомню определение:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Заметьте, фигурирует предел некоторого отношения. Которое в точке $x = x_0$ не имеет смысла (ноль в знаменателе), в нее нельзя «прыгнуть».

Еще пример: сумма бесконечного ряда.

Сумма – она и в Африке сумма…

Ошибаетесь, видимо, подзабыли из вузовского курса.

Есть понятие суммы ряда с конечным числом членов (она и в самом деле просто сумма). А есть понятие суммы бесконечного ряда. Но это вовсе не сумма, просто называется похоже!

Вот тебе раз! А что же тогда?

Должны знать сами: предел последовательности частичных сумм. Предел – атрибут не сумм (частный случай), а фундаментальных последовательностей, которые не обязаны быть суммами, и сам предел, конечно, никакой суммой не является.

Другого и быть не может, сумма бесконечного множества слагаемых – нонсенс. Суммировать можно лишь конечное число слагаемых.

Почему же тогда говорят: «сумма бесконечного ряда», и используют выражения типа: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$?

Во-первых, в математике в ходу условные (иногда обманчивые) термины, и не слишком корректные упрощенные записи, контекст которых понятен сведущим. Например, само слово «предел» нельзя ведь понимать буквально, согласно словарному значению, не так ли?

Вторая причина. Если указанный предел по договоренности считать «как бы суммой», он хорошо ложится на числовую ось, и вообще получается удобное непротиворечивое построение. Возникают полнота и непрерывность, так важные в анализе.

Что отлично видно на примере иррациональных (и вообще вещественных) чисел.

Вроде бы иррациональные числа определяются в школьном курсе как бесконечные непериодические десятичные дроби?

Резон тут есть, но это никоим образом не определение.

Во-первых, «бесконечная дробь» – бесконечный процесс, который никогда не закончится. Нечто потенциальное, а нам нужно завершенное.

К тому же, если они в самом деле *числа*, то должны быть определены арифметические операции над ними. Сложение, умножение... Разумеется, такого нельзя сделать на базе жиденькой идеи, что число – бесконечная десятичная дробь.

И третье. Не стоит потакать ложной иллюзии, что числа – то, что выражается цифрами. Путать собственно числа с тем или иным их представлением.

И вот тут, кстати, полезно отвлечься, чтобы получить понятие о том, что же такое в математике числа.

3. Что такое числа

Для некоторых будет неожиданностью узнать: числа возникают в математике не в качестве аналогов каких-то реальных объектов, не как результаты счета и измерения (хотя первоначальные идеи исходят, несомненно, оттуда). Числа связаны с операциями. Они являются результатом предельно возможного расширения сферы применимости операций. С операций мы и начнем.

Числовое множество

Путь имеем множество чисел, будем их обозначать a, b, c… Что такое эти «числа», пока неважно: просто некоторые элементы множества.

Вводим для чисел операцию *сложение*, которая должна обладать следующими свойствами:

1) $c = a + b$ всегда существует, т.е. c это тоже число;

2) $a + b = b + a$ (коммутативность);

3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность);

4) $a + a_0 = a$ для любого a, где a_0 – особое, выделенное число, называемое «нулем».

Вводим также операцию *умножение*, которая должна обладать следующими свойствами:

5) $c = ab$ всегда существует, т.е. c это тоже число;

6) $ab = ba$ (коммутативность);

7) $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность);

8) $aa_1 = a$ для любого a, где a_1 – особое, выделенное число, называемое «единицей».

Пусть вдобавок выполняется свойство дистрибутивности:

9) $(a + b)c = ac + bc$.

Группа

Вот параграф, который также настоятельно рекомендуется пропустить: он не имеет отношения к излагаемому сюжету. Хотя трудно удержаться от небольшого экскурса.

Присмотревшись к свойствам операций сложения и умножения, любой скажет: свойства чем-то очень схожи. Сейчас мы покажем, что они просто идентичны.

Обозначим операцию (неважно: сложение или умножение), определенную на некотором множестве, значком $\otimes$. И запишем аксиомы:

1) $c = a \otimes b$ всегда существует, т.е. c это тоже элемент множества;

2) $a \otimes b = b \otimes a$ (коммутативность);

3) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ (ассоциативность);

4) $a \otimes I = a$ для любого a, где I – особый, выделенный элемент.

Как видим, записаны универсальные свойства *бинарной* операции (то есть операции, принимающей два аргумента), равно подходящие и к сложению, и к умножению.

Представляют интерес множества, на которых заданы не две, а только одна бинарная операция. Считать ли ее сложением или умножением – безразлично, когда как удобнее.

Однако требование обязательной коммутативности не предъявляется. Вместо него накладывается следующее требование:

2) для каждого элемента *a* существует «обратный» a^{-1}: такой, что $a \otimes a^{-1} = I$.

Множество с операцией, обладающей такими свойствами, называется *группой*. Операцию $\otimes$ называют: *групповая операция* (впрочем, нередко говорят об умножении – условно, конечно).

Теория групп – важный и чрезвычайно мощный раздел математики. Впрочем, вернемся к нашим числам.

Натуральные числа

Примем, что *натуральные числа* (и ноль) возникают просто при счете предметов. Разумеется, их можно ввести строго – аксиоматически, либо, к примеру, как мощности (классы эквивалентности) конечных множеств, но пока отвлекаться не стоит.

Множество натуральных чисел имеет общепринятое обозначение ℕ.

Операции сложения и умножения натуральных чисел известны по школе, их здесь разбирать ни к чему. Хотя такой разбор не был бы тривиальным. Ясно, что для натуральных чисел «единица» это единица ($a_1 = 1$), а «ноль» это просто ноль ($a_0 = 0$). Впрочем, иногда ноль не приписывают к натуральным числам.

Удобно ввести также обратные операции: например, разностью $c = a - b$ будем называть число *c* такое, что $b + c = a$. Для натуральных чисел обратные операции необязательно реализуемы!

Вообще идея, что количество человек и количество яблок может быть выражено единообразно, была значительным этапом развития мышления. Следующим важным рубежом должно быть осознание того, что числа должны отвечать не на вопрос «сколько», а на вопрос «который по порядку». Именно отсюда исходит аксиоматика натуральных чисел.

В данном контексте, к примеру, число 2 – не два яблока или две счетные палочки. «Два» – следующее число после начального (единицы).

Такой подход позволяет преодолеть психологический барьер введения отрицательных чисел и нуля: дескать, числа не настоящие (непонятно, какое количество означают). Напротив, без перехода к целым числам – единица неестественно выпадает из общего строя как число, не имеющее предыдущего.

Целые числа

Помимо соображений, приведенных выше, недостаточность натуральных чисел состоит в том, что не всякое уравнение вида $a = x + b$ имеет в них решение. Например, не имеет решений уравнение $3 = x + 8$. В то же время подобные уравнения появляются в различных задачах.

Потому переходят к другому множеству – множеству *целых чисел* ℤ, в котором всегда существует обратный элемент относительно сложения (подобное множество называют *кольцом*).

Заметьте: целые числа это вообще-то некоторые другие числа, не имеющие отношения к натуральным!

Элементы множества целых чисел будем *условно* обозначать: $+a$ и $-a$, где a натуральное число. То есть, «целые» числа разбиваются на две категории – «положительные» и «отрицательные». Для чисел из разных категорий операции задаются по-разному, чем мы и займемся ниже.

Кстати, «ноль» теперь $+0$ или -0 (считаем одним и тем же числом). Единицей полагаем число $+1$.

Сложение для «целых» чисел определяется так:

$(+a)+(+b)=+(a+b)$ – для положительных чисел;

$(-a)+(-b)=-(a+b)$ – для отрицательных;

$(+a)+(-b)=+(a-b)$ – смешанный случай при $a>b$;

$(+a)+(-b)=-(b-a)$ – при $a<b$.

Определим также умножение:

$(+a)(+b)=+(ab)$;

$(-a)(-b)=+(ab)$;

$(+a)(-b)=-(ab)$.

При таком определении операций сохраняются все их свойства – с 1 по 9, проверьте сами!

Мы могли бы определить операции как-то иначе, к примеру, принять, что произведение двух отрицательных чисел должно быть отрицательным. Увы, тогда не выполнялось бы свойство дистрибутивности:

$(-2)[(-5)+(+4)]=(-10)+(-8)=-18$, но, в то же время:

$(-2)[(-5)+(+4)]=(-2)(-1)=-2$.

Возвращаясь к определению операций над целыми числами, заметим нечто важное. А именно: сложение и умножение для целых положительных чисел действует так же, как и для натуральных – правила точно те же!

Говорят, что подмножество целых положительных чисел *изоморфно* множеству натуральных. Потому их можно в известном смысле отождествить, считать просто совпадающими, одними и теми же. При таком подходе получается, что целые числа – результат расширения множества натуральных. Операции, определенные ранее для натуральных чисел, *продолжены* на более широкую сферу.

Заметим еще одно. Знаки «плюс» и «дефис» при записи целых чисел это не знаки операций, а просто условные метки. Мы могли бы применить другие, например, $\overline{a}$ и $\underline{a}$ соответственно для положительных и отрицательных. Но именно эти удобны: являются *мнемоническими приемами*, подсказывающими правила вычислений.

Так, сумма положительного и отрицательного числа $+8-3$ подсказывает, что надо из 8 вычесть 3 (получится 5).

Рациональные числа

Целых чисел все равно недостаточно для многих задач, потому что не всегда имеют решения уравнения вида $a=bx$. Например, уравнение $3x=-4$ нерешаемо.

Речь идет о том, что операция *деления* на множестве целых чисел выполнима не всегда. Напомним, деление $a:b$ определяется как нахождение решения уравнения: $a=bx$. А вовсе не раскладывание одной кучки поровну на несколько, как объясняют первоклассникам. Именно отсюда вытекает, что $b=0$ (деление на ноль) недопустимо, ведь при таком условии *x* не существует.

Введем числа, которые назовем рациональными, применив для них следующую запись: (a, b), где a и b – целые числа (условимся, что $b \neq 0$). Рациональное число это упорядоченная пара целых чисел – компонент. «Упорядоченная» означает: небезразлично, какое число идет первым, а какое вторым.

Сложение для рациональных чисел определим так:

$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$.

Умножение:

$(a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

Нулем теперь у нас будет число $(0, a)$, где a – любое. Единицей – число, например, $(1, 1)$.

Почему мы оговорили, что вторая компонента рационального числа ненулевая? Пусть все-таки $b = 0$, тогда:

$(a, 0) + (c, d) = (ad, 0)$ – не зависит от c;

$(a, 0)(c, d) = (ac, 0)$ – не зависит от d.

Получается, что различные операнды приведут к одинаковому результату. А значит, обратные операции не существуют (отсутствует однозначность).

Осталось заметить, что числа вида $(a, 1)$ ведут себя (в отношении операций) точно так же, как целые числа a. Проверим, например, сложение:

$(a, 1) + (c, 1) = (a + c, 1)$.

Умножение:

$(a, 1)(c, 1) = (ac, 1)$.

Значит, подмножество рациональных чисел вида $(a, 1)$ изоморфно множеству целых чисел, их можно в известном смысле отождествить, рациональные числа рассматривать как результат расширения множества целых чисел.

Запись рационального числа в виде (a, b) покажется странной. Употребительная запись $\frac{a}{b}$ удобнее мнемонически, что каждый знает из школьных упражнений.

Понятно, что операции для рациональных чисел не выдуманы произвольно. Речь здесь о том, как будут выглядеть операции, если считать, что деление $a : b$ существует всегда. А запись $\frac{a}{b}$ попросту отождествляем с результатом деления.

Вычитание для рациональных чисел получается таким:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Найдем следующую разность:

$$\frac{a}{b} - \frac{ac}{bc} = \frac{abc - abc}{b^2c} = \frac{0}{b^2c}.$$

Результат равен нулю по определению рационального нуля, следовательно, числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{ac}{bc}$ равны. Хотя формально они не совпадают – состоят из разных компонент!

Подобные числа будем считать *эквивалентными*. Не будем различать эквивалентные числа, считая их за один общий элемент (класс). Множество чисел вида (a, b) «укрупнилось», оно разбито теперь на классы эквивалентности.

Определение рациональных чисел придется уточнить: рациональные числа это элементы множества (пространства) *классов эквивалентности* упорядоченных пар целых чисел. Разумеется, его следует дополнить пояснением, в каком смысле понимается эквивалентность.

Отметим, кстати: из изложенного следует, что любое число вида $\frac{a}{a}$, а не только $\frac{1}{1}$, является единицей.

На множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ – любое число будет обратимо относительно умножения (то есть, уравнение $bx = 1$ всегда имеет решение – кроме случая $b = 0$, конечно). Подобное множество называют *полем.*

Можно проверить, что все свойства сложения и умножения соблюдаются, то есть наши новые числа и в самом деле образуют поле.

Вещественные числа

Поле рациональных чисел можно еще расширить. Обычно ссылаются на то, что в рациональных числах не решаются уравнения наподобие $x^2 = 2$. На самом деле потребность в дополнительных числах глубже: связана не с вычислениями (они все равно же ведутся с конечной точностью), а с вопросами анализа, где требуется, чтобы любая фундаментальная последовательность имела предел.

Рассмотрим, к примеру, известный ряд:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Будем брать суммы n членов ряда (n = 1, 2, 3...). Полученная последовательность:

1, 2, 2,5, 2,666, 2,708...

– *фундаментальна*, то есть, разность двух членов последовательности $a_n - a_m$ стремится к нулю с увеличением номеров n и m. Но она не сходится в пространстве рациональных чисел (не имеет рационального предела). Какое бы рациональное число ни взять, при $n \to \infty$ случится одно из двух. Либо очередное число из последовательности превысит его. Либо, наоборот, останется конечный зазор, который уже дальше не сократится.

Итак, пространство рациональных чисел не полно. Вещественные (действительные) числа являются *пополнением* рациональных. Множество вещественных чисел обозначают $\mathbb{R}$.

Вещественными числами будем считать фундаментальные последовательности рациональных чисел $(a_1, a_2, ..., a_i, ...)$. Вещественные числа – элементы множества (пространства) фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Как бы ни казалось странным, что числа это последовательности, придется такое принять. Если не желаем еще более экзотической идеи: что числа это сечения (*сечения Дедекинда*).

Впрочем, определение несовершенно и требует уточнения, к чему мы придем чуть позже.

Операции для вещественных чисел определим таким образом.

Если $A(a_1, a_2, ..., a_i, ...)$ и $B(b_1, b_2, ..., b_i, ...)$ – две фундаментальных последовательности, то их суммой будем называть последовательность:

$$C = A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...),$$

а произведением – последовательность:

$C = AB = (a_1 b_1, a_2 b_2, ...)$.

Нетрудно доказать, что в обоих случаях *C* является тоже фундаментальной последовательностью, а значит, определения корректны.

Каждая из последовательностей *A* и *B* может иметь рациональный предел, и тогда операции сводятся просто к сложению и умножению пределов. Такие последовательности изоморфны рациональным числам, их можно просто отождествить, считая, что рациональные числа являются подмножеством вещественных.

Если же фундаментальная последовательность не имеет рационального предела, то говорят, что она выражает *иррациональное число*.

Понятно, что вещественные числа также образуют поле.

Разностью двух вещественных чисел будет:

$C = A - B = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ...)$. В частном случае, данная последовательность может иметь пределом ноль.

Однако общий член *C*: $a_i - b_i$ – при этом вовсе не обязан быть равным нулю! То есть, в общем случае, $a_i \neq b_i$. Любопытно: последовательности *A* и *B* различны, но выражают одно и то же число (поскольку разность равна нулю).

Значит, как и прежде, будем считать фундаментальные последовательности такого рода эквивалентными, а в нашем пространстве не будем различать эквивалентные последовательности, считая их за один общий элемент (класс). Пространство фундаментальных последовательностей «укрупнилось», оно разбито на классы эквивалентности.

Тогда определение придется уточнить: вещественные числа – элементы множества (пространства) классов эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Разумеется, его следует дополнить пояснением, в каком смысле понимается эквивалентность.

Между прочим, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ в то же время является одномерным *евклидовым пространством*: прямой. Соответственно, плоскость идентифицируется с $\mathbb{R}^2$, и вообще $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство *n* измерений. Что это по существу означает, предстоит узнать впоследствии.

Числа алгебраические и трансцендентные

Введя вещественные числа, мы достигли большего, чем загадывали вначале (чтобы решались уравнения типа $x^2 = 2$). Кстати, в общем случае, может интересовать существование решений любых алгебраических уравнений вида:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, где *a* – рациональные коэффициенты.

Впрочем, так как любая совокупность рациональных коэффициентов приводится здесь к целым (путем подходящего домножения), то a_i можно считать просто целыми.

Корни уравнения будут являться вещественными числами. Множество рациональных чисел счетно, и, как ни комбинируй, множество всевозможных уравнений подобного рода, и их корней будет счетным множеством. Числа, являющиеся решениями указанных уравнений, называются *алгебраическими*. Тот же корень из двух – алгебраическое число.

Но множество всех вещественных чисел несчетно – имеет мощность континуума. Значит, среди вещественных чисел содержатся и другие, помимо алгебраических (и таковых несравненно «больше»!) Эти последние не являются корнями никаких алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами.

Подобные числа называют *трансцендентными*. К ним относятся, в частности, знаменитые числа π и e.

Между прочим, приведенное уравнение может вообще не иметь действительных корней, что крайне неприятно. Значит, нам предстоит сделать следующий шаг.

Комплексные числа

Они появляются в связи с тем, что алгебраические уравнения, как выше, могут не иметь вещественных решений.

Введем числа, которые назовем *комплексными*, применив для них запись: (a, b), где a и b – теперь уже действительные числа. Комплексное число это упорядоченная пара вещественных чисел – компонент. Множество комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$.

Сложение комплексных чисел:

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Умножение комплексных чисел:

$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$.

С учетом того, что «нулем» теперь будет $(0, 0)$, а «единицей» $(1, 0)$, легко проверить, что все свойства операций выполняются: комплексные числа опять образуют поле.

Интересно, что подмножество чисел вида $(a, 0)$ изоморфно вещественным числам. Проверим:

$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$;

$(a, 0)(c, 0) = (ac, 0)$.

Выходит, что числа такого вида можно отождествить с вещественными, и считать, что поле комплексных чисел содержит вещественные в качестве подмножества.

Заметим также, что, по правилу перемножения:

$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

Комплексное число $(0, 1)$ принято обозначать i. А с учетом отождествления с действительными числами, приведенное выше соотношение предстает в форме:

$i^2 = -1$.

Конечно, следует понимать, что тут условная запись, при некоторых известных допущениях. Строго говоря, не существует числа, квадрат которого бы давал -1. А вот число, квадрат которого равен $(-1, 0)$, имеется.

Общепринято представление комплексных чисел в форме: $a + ib$. На самом деле это вариант символического обозначения! Но оно является удобной мнемонической записью – прежде всего, при умножении чисел. Не надо запоминать сложную формулу произведения, можно просто как бы перемножать два бинома.

Доказано, что дальнейшее расширение числового поля невозможно, комплексные числа являются в этом отношении пределом. При попытке расширения (гиперкомплексные числа) сталкиваются с проблемами операций. Они становятся, к примеру, некоммутативными.

Между прочим, получается, что алгебраические числа, о коих сказано выше, вообще-то комплексные. И они образуют поле (подполе комплексных чисел), представляя поэтому для математики отдельный интерес.

Определение натуральных чисел

Очередной параграф из тех, какие следует решительно пропускать. Вопрос о том, как вводятся натуральные числа, все же скомкан. Может быть, представит интерес определение натуральных чисел исключительно через множества.

Вспомним, что натуральные числа это следование элементов (неважно, каких) одного за другим. В таком контексте достаточно указать:

1) что считать первым элементом в ряду (нулем);

2) если дан некоторый элемент, то – как образовать следующий.

Считаем, что натуральные числа это множества (больше у нас как бы «ничего нет»). Тогда вот ответы по пунктам:

1) нулем называем пустое множество $\varnothing$;

2) если дано число (множество) N, то следующим за ним числом будет объединение $N \bigcup \{N\}$.

Расшифровка: к предыдущему множеству добавляется оно же в качестве еще одного элемента. Еще раз: множество N объединяется с множеством $\{N\}$, содержащим один-единственный элемент, получается следующее по порядку. «Количество элементов», естественно, увеличивается на один, поскольку множества не перекрываются, ведь в множество не входит в качестве элемента оно само.

Вот как это выглядит:

$0 = \varnothing$;

$1 = \varnothing \bigcup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$ (мощность 1);

$2 = \{\varnothing\} \bigcup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (мощность 2);

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \bigcup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ (мощность 3)…

и так далее.

Заметьте, не задействовано ничего, кроме понятия множества, и еще универсального пустого множества (которое всегда к услугам, не нуждаясь в конкретизации: «множество чего?»). Постоянно в наличии объект, который можно включить в состав множества, чтобы получить очередное «число». А привычные числа – мощности наших множеств.

Все это может показаться странным, непохожим на 0, 1, 2, 3… Но, в конце концов, арабские цифры – просто символы, которые могут быть заменены какими угодно. А здесь показано, что из множеств, по существу как бы «ничего не содержащих», можно строить ряд неограниченной продолжительности, а каждому «числу» указать следующее за ним. Что и требовалось.

4. Пополнение множеств

Тема про числа полезна еще и следующим: переход от рациональных к действительным числам дает хорошую иллюстрацию того, как происходит пополнение множеств. И держать эту картинку перед мысленным взором весьма продуктивно.

Процедура пополнения

Из изложенного должно быть в основном понятно, что такое *пополнение*. Сформулируем определение: полное метрическое пространство $\hat{X}$ называется пополнением пространства X, если X – подпространство $\hat{X}$, причем X всюду плотно в $\hat{X}$.

Последнее условие означает, что $\overline{X} = \hat{X}$.

$\overline{X}$ – это замыкание, не забыли еще? Результат добавления к множеству всех его предельных точек.

Так, похоже, что пополнение – и есть замыкание?

Нет, так говорить неправильно. Вы упускаете, что пополнение обычно применимо к пространству, а замыкание – к множеству в пространстве.

Если рассматриваем пространство рациональных чисел, бессмысленно говорить о его замыкании, любое пространство замкнуто и без того: вне его никаких точек просто нет. Пополнение – всегда переход к другому, более обширному пространству. Которого раньше не существовало.

И только рассматривая рациональные числа иначе: как подпространство, «погруженное» в наличное пространство действительных чисел, – уже можно говорить о замыкании. Им будет, разумеется, все пространство.

Итак, если речь идет о пополнении подпространства в имеющемся более обширном пространстве, тогда, действительно, оно сводится к замыканию. Подпространство X_0 полного метрического пространства X полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в X.

Но в общем случае, как я понял, пополнение происходит через фундаментальные последовательности.

Да, суть дела разобрана выше. Систематизируем основные идеи.

1. Вместо множества элементов рассматриваем множество всех фундаментальных последовательностей элементов.

2. Определяем последовательности, которые сближаются в сколь угодно малую область: $\rho(x_n, y_n) \to 0$ при $n \to \infty$, как эквивалентные.

Таким образом, множество последовательностей разбивается на классы эквивалентных последовательностей.

3. Рассматриваем множество таких классов (фактор-множество). Оно и будет пополнением.

Трудно сразу усвоить – давайте снова вернемся к числам.

Еще раз: в пространстве рациональных чисел имеются фундаментальные последовательности, которые, тем не менее, не сходятся ни к какому рациональному числу. Однако мы можем такую последовательность считать элементом нового множества (пополнения). И все подобные последовательности. Это и есть иррациональные точки.

Но разные последовательности могут сходиться к одному и тому же иррациональному пределу. Потому правильнее все такие последовательности считать эквивалентными (помните?).

Какие «такие»? Ведь иррациональных чисел пока что у нас нет! Порочный логический круг?

Уместное замечание. Мы будем считать эквивалентными последовательности x_n и y_n с таким критерием «одинаковости»: $|x_n - y_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

Значит, вещественные числа (включающие иррациональные) – элементы фактор-множества: а именно, множества классов эквивалентных (в указанном смысле) последовательностей.

Знаете, получается странно: если последовательность не имеет предела, значит, объявим таким пределом ее саму... Жалкая идея.

А чего же вы ждали, фокуса, что ли, какого-то? Так и происходит пополнение множеств. То самое образование новых математических объектов, с которыми потом можно оперировать, как с полноправными (для чего все и делается). Скрупулезное определение действительных чисел требуется для одного: убедиться, что их сумма и произведение имеют смысл.

Хотя одной этой идеи еще недостаточно для пополнения. Важным вопросом является продолжение метрики.

Метрика на пополнении

Мы получили как будто бы совершенно новое множество – множество фундаментальных последовательностей. Но, по определению, прежнее является его подпространством, значит, «старые» элементы должны здесь присутствовать тоже. И где они?

Они никуда не пропали. Некоторые из фундаментальных последовательностей будут сходящимися, их классы соответствуют элементам исходного пространства.

В пространстве «классов эквивалентных последовательностей» – нет, строго говоря, рациональных чисел. Но в нем содержится *изометрический образ* пространства рациональных чисел. То есть множество соответствующих им последовательностей – с теми же самыми расстояниями. Поскольку здесь для нас важна именно метрика, мы вправе считать изометричные пространства идентичными.

Что такое «изометричные»?

Если между элементами пространств *X* и *Y* можно установить взаимно-однозначное соответствие так, чтобы расстояние между элементами *X* равнялось расстоянию между элементами *Y*, то *X* и *Y* называют *изометричными*.

Пополнение это новое пространство, для которого придется заново вводить метрику. Но изометричность обеспечивает нам возможность построить ее как *продолжение*.

Метрика в $\hat{X}$ должна быть построена так, чтобы для элементов из *X* она совпадала с прежней – имела «обратную силу». К примеру, разность между числами в пространстве действительных чисел введена так, что для рациональных она точно соответствует привычной разности.

Логично. Только бы суметь придумать столь удачную метрику.

Ничего придумывать не надо (в чем и сила теории). Метрика для пополнения задается следующим образом:

$$\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Обозначения $\hat{x}$, $\hat{y}$ напоминают, что мы имеем дело с элементами нового пространства – а именно, с классами фундаментальных последовательностей. $\rho(x_n, y_n)$ – расстояние между членами последовательностей.

Каких таких последовательностей? Ведь перед нами не две последовательности, а два класса...

Неважно каких. Любых (из своих классов). *Представителей*, как принято говорить.

Доказывается, что такая метрика оставляет расстояние между точками первоначального пространства *X* тем же самым. Доказывается, что предел просто-напросто существует (тоже требует доказательства, хотя интуитивно сомнений нет) и не зависит от конкретных представителей. Доказывается, что это вообще метрика (выполнены аксиомы метрики).

Разумеется, доказывается, что полученное таким способом пополнение действительно полно. И что оно единственно. И что исходное пространство является его подпространством (с точностью до изометрии, как мы говорили).

Все эти доказательства можно найти в учебниках.

Хорошо, я верю.

Таким образом «жалкая идея», как вы ее назвали, обросла мощным теоретическим обоснованием, а значит, превратилась в могучий инструмент.

Пополнение – на примерах

Предлагаю разобрать несколько примеров из задачника.

Задача 1. Построить пополнение множества $\mathbb{R}$ с метрикой:

$$\rho(x,y) = |arctg\ x - arctg\ y|.$$

Мы говорили, что множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ полно, и значит, не нуждается в пополнении. Но полно только при условии естественной метрики $\rho = |x - y|$. А мы ввели другую!

> С чего начать решение? С того, существуют ли фундаментальные последовательности, не имеющие предела на числовой прямой $\mathbb{R}$.
>
> Интуитивно понятно, что вблизи $x = 0$ ничего интересного не будет, метрика близка к обычной $|x - y|$. Но зато при $x \to \infty$ $arctg\ x \to \frac{\pi}{2}$.
>
> Получается, что, например, последовательность 1, 2, ... n, ... – фундаментальная. И все другие неограниченно возрастающие последовательности. В то же время они не имеют предела! Как бы стремятся к бесконечности… может, она и есть предел? Нет, конечно: ведь «бесконечность» – такого числа в $\mathbb{R}$ нет.
>
> Но тут и напрашивается решение. Пространство не полно. Пополнение его должно включить еще элементы $+\infty$ и $-\infty$ (*несобственные числа*). Это и есть ответ.
>
> Наши $+\infty$ и $-\infty$, в сущности, всего лишь условные обозначения! Если пополнять множество вещественных чисел, то появляются новые элементы. Надо же их как-то обозначить... Говоря формально, $\mathbb{R}$ пополняется просто двумя классами последовательностей: неограниченно возрастающих и неограниченно убывающих. Но такая формулировка меньше дает уму.

Надо сказать, что приведенное решение несколько «кустарное». Некрасивое; да и неполное. Нет доказательства достаточности пополнения: как знать, может, мы что-то упустили, не все фундаментальные последовательности обнаружили? Математик подошел бы к решению иначе.

Рассмотрим отображение множества $\mathbb{R}$ на множество Z, такое, что $z = arctg\ x$ (где $z \in Z$). На новом множестве Z появляется естественная метрика $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Между прочим, функция $z = arctg\ x$ непрерывна, а следовательно, любой фундаментальной последовательности в $\mathbb{R}$ соответствует фундаментальная же в Z.

Но обратное может быть неверным! Отсюда и вытекает возможность того, что в Z появятся новые фундаментальные последовательности, которых в $\mathbb{R}$ не было. Вот где прячется существо задачи пополнения.

Множество Z простирается от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $+\dfrac{\pi}{2}$. Точнее сказать, это интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right)$. Теперь очевиден ответ на задачу: ведь указанному интервалу для полноты не хватает двух предельных точек – концевых. Пополнение в объемлющем пространстве это замыкание, помните? Соответственно, множество $\mathbb{R}$ должно быть пополнено «числами» $tg\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $tg\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Становится ясным, что пополнение действительно исчерпывающе.

Задача 2. Построить пополнение множества целых чисел с метрикой:

$$\rho(n, m) = \left|e^{in} - e^{im}\right|.$$

Если непонятно: i – это мнимая единица.

Можем пойти по тому же пути – опять свести к естественной метрике. Отобразим исходное множество целых чисел на множество Z такое, что $z = e^{in}$. Множество комплексное, конечно.

Используем векторное представление на комплексной плоскости. Тогда e^{in} – единичный вектор. А n – просто угол поворота от начального положения.

Зададимся вопросом: множество концов векторов e^{in} на единичной окружности – является ли:

1) всюду плотным;

2) полным?

Полным точно не является: например, в точку «π» от нулевого положения – вектор никогда не попадет: никакое целое число не может быть кратно π. Точнее, чтобы он попал в эту точку, нужно, чтобы: $n = (2k+1)\pi$, где k – тоже целое число. Такое невозможно из-за иррациональности π, в то же время, очевидно, что можно приблизиться к данной точке сколь угодно близко.

Значит, множество точек на окружности не полно, но всюду плотно. Похоже на ситуацию рациональных чисел на прямой. Что и подсказывает ответ на задачу: искомое пополнение – все без исключения точки единичной окружности комплексной плоскости.

Пополнением целых чисел оказались комплексные, но ничего удивительного тут нет. Заметьте, что и сами первоначальные целые числа предстают здесь комплексными (лишнее напоминание о том, что пополнение – вообще говоря, множество другой природы). Но они сохраняют изометрический образ множества целых чисел – с указанной метрикой, конечно.

Задача 3. Она будет потруднее. Построить пополнение множества бесконечно дифференцируемых функций на отрезке [0, 1] с метрикой:

$$\rho(x, y) = \max\left|x(t) - y(t)\right|,$$

удовлетворяющих добавочным условиям:

$$x(0) = 0,\ x(1) = 0,\ x'(0) = 0,\ x'(1) = 0.$$

Свести к естественной метрике тут никак не удастся, надо идти другим путем.

Задумаемся: указанная выше метрика задает только функции, оговоренные условиями задачи, и никакие иные? Нет, конечно: метрика годится вообще для широкого класса функций; ну разве что они не должны иметь разрывов второго рода, чтобы $x(t)$ и $y(t)$ существовали для любого t.

Таким образом, имеем пространство, заданное метрикой – пространство упомянутых функций на [0, 1] в котором условиями задачи определено некое подпространство. Вспомните, что пополнение подпространства в объемлющем пространстве сводится к замыканию!

Вот и идея решения. Присовокупим еще одно: сходимость функций по указанной метрике известна в анализе как *равномерная сходимость* – ее изучают в стандартных курсах. Формально – решение уже готово: заданное множество надо пополнить, добавив к нему предельные точки: те функции (всюду существующие), к которым функции множества сходятся равномерно.

Попробуем немного уточнить ответ.

Во-первых, известно, что непрерывные функции (а бесконечно дифференцируемые непрерывны) равномерно сходятся к непрерывной же. Далее: если функции исходного множества равны нулю на концах отрезка, то их пределом тоже будут функции, равные нулю при $t = 0$ и $t = 1$.

Вспомним, что в этих точках равны нулю также первые производные. Просто по непрерывности – значения производных, равные 0 для любого n,будут равны нулю и в пределе. Или (в крайнем случае) могут не существовать: тоже не будет ничему противоречить.

Вот мы и построили искомое замыкание, оно же пополнение: множество непрерывных функций на [0, 1] (не обязательно дифференцируемых), равных нулю на концах отрезка, производные которых в тех же точках равны нулю либо не существуют.

Категории Бэра

Рассмотрим определение.

Множество $U \subset X$ называется множеством первой категории, если оно представимо в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств. В противном случае оно будет множеством второй категории.

Что такое «нигде не плотные множества», мы определили ранее.

Множество рациональных точек вещественной прямой является множеством первой категории, а иррациональных – второй.

Почему?

Насчет рациональных – все просто. Рассмотрим множества:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \ldots$$

... и так далее.

Каждое из них нигде не плотно – это изолированные точки. Множество этих множеств счетно. И все они в совокупности представляют рациональные числа.

Ясно. А иррациональные?

Сначала рассмотрим теорему Бэра: полное метрическое пространство есть множество второй категории.

Доказательство существует, естественно.

Имеет ли все это реальное значение? Категории какие-то…Выглядит глуповато.

Имеет. Например, известное канторово доказательство несчетности множества вещественных чисел (диагональное) некоторые считают отчасти уязвимым. В то же время эта несчетность прямо вытекает из теоремы Бэра.

Интересно. Как же?

Исходим из того, что множество вещественных чисел – полное метрическое пространство.

Одна точка, очевидно, является нигде не плотным множеством. Допустим (от противного), что множество вещественных чисел счетно. Счетное множество точек по определению – множество первой категории. Что противоречит теореме Бэра.

Кстати, именно отсюда получается, что множество иррациональных чисел – множество второй категории. Ведь очевидно, что объединение двух множеств первой категории было бы тоже множеством первой категории.

5. Знакомимся с мерой

Теория меры – важный раздел функционального анализа. Для начала можно представлять, что мера имеет отношение к таким вещам, как длина, площадь, объем, далее – интеграл. Точнее, она касается математически строгого их определения, а также обобщения этих понятий. Здесь, в качестве первого шага, введение в тему; за пример возьмем измерение площадей.

Что такое мера

Начнем с того, что мера – *функция множества*: $\mu(A)$.

Функция – то есть, каждому множеству ставится в соответствие мера?

Не обязательно каждому: функция имеет, как полагается, область определения. Система множеств, для которых введена мера, объединяет *измеримые* множества, но могут существовать и неизмеримые – не входящие в систему.

Но продолжим определение. Мера действительна и неотрицательна. И, наконец, мера *аддитивна*, то есть:

$\mu(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(A_k)$, если $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ является объединением *непересекающихся* множеств A_k. Вам понятно, что означает «непересекающихся»?

Вроде бы да. Если фигуры на плоскости не налезают друг на друга, то площадь объединенной фигуры равна сумме площадей – вот что записано.

Уточним: непересекающиеся A_k – значит, всегда $A_i \bigcap A_j =\varnothing$. В подобных случаях принято говорить о *разложении* множества A в сумму конечного числа множеств A_k. И A, и все A_k принадлежат системе множеств, на которых задана мера (а иначе требование аддитивности теряет смысл).

Добавим кстати, что *мера пустого множества равна нулю*.

Еще один постулат?

Скорее просто следствие аддитивности меры, потому что $A\bigcup\varnothing=A$, причем пересечение A и $\varnothing$ пусто. Кстати, очевидно и свойство *монотонности меры*: если $A\supset B$, то $\mu(A)\ge\mu(B)$.

Задача. На семействе F всех подмножеств пространства X: $A\subset X$ задана следующая мера:

$$\mu(A)=\begin{cases}0 \text{ если } x_0\notin A\\ 1 \text{ если } x_0\in A\end{cases},$$

где $x_0\in X$ – некоторая выделенная точка.

Доказать, что $\mu(A)$ действительно является мерой.

То, что $\mu(A)\ge 0$, очевидно. Проверяем аддитивность: $\mu(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(A_k)$.

У нас объединение непересекающихся множеств, значит, точка x_0 или входит в одно (только одно!) из множеств A_k (тогда слева и справа единица), или не входит ни в одно (слева и справа ноль). Все в порядке.

Между прочим, мы познакомились с *мерой Дирака*. Несмотря на ее экстравагантность, она может являться ответом на некоторые понятные вопросы. К примеру, о весе фигуры, вырезанной из листа невесомого материала, к которому в каком-то месте приклеена точка единичного веса.

Для чего вы вводили в задаче обозначение *F*, которое дальше все равно не используется?

Чтобы лишний раз напомнить различие. F – семейство (множество множеств), для него справедливо $A \in F$. X – объединение всех своих подмножеств, для него справедливо $A \subset X$.

Ладно, определение меры мы имеем. А в чем состоит сама теория?

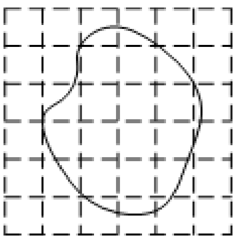
Хороший вопрос. Даю хороший ответ. Начинаем с того, что постулируем меру для какой-то системы самых простых множеств. А потом пытаемся *продолжить* меру, расширяя ее «сферу применения» на более обширные системы.

Мера Жордана

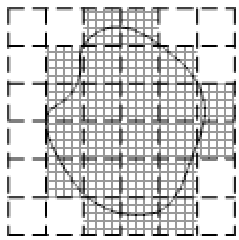
Какая проблема в измерении – скажем, той же площади? Геометрия прекрасно справляется с делом.

Да, когда имеет дело с регулярными фигурами: прямоугольник, круг… Уже фигура с произвольной границей доставит трудности. Плоские множества могут вообще не являться привычными фигурами.

Условимся, что в дальнейшем рассматриваем измерение площадей внутри квадрата X (1×1) – он и будет нашим «игровым полем» единичной площади. В нем имеем некую фигуру («плоское множество»). Разобьем поле на множество мелких клеток, как принято в рукоделии – см. рисунок.



Каждая сторона поля разбита на *n* равных частей – получилась канва *n*×*n*



Заштрихованные клетки целиком накрывают фигуру: внешняя мера

Логичный ход.

С площадью одной клетки ясно, не так ли? Тогда и дальнейшее несложно: отметим клетки, которые (хотя бы своей частью) накрывают точки нашего множества. Суммируем площади клеток, они дадут приближенно искомую площадь фигуры.

Понимаю, а при $n \to \infty$ получаем точное значение площади.

Если только предел существует… Впрочем, он существует, ведь последовательность частных значений площади монотонна и ограничена.

Примерно в таком духе ввел некогда понятие площади Кантор. Результат, который здесь получается, математика сейчас называет *внешней мерой*.

И чем она не искомая площадь? Все просто и ясно.

В тривиальных случаях (привычные фигуры) способ работает. Но в других – возникают неувязки, и вот типичная. Возьмем для измерения множество точек квадрата $1{\times}1$, имеющих только рациональные координаты. Как ни измельчать сетку, в каждую клетку обязательно попадут точки нашего множества – ведь оно «всюду плотно». И выходит, что любая частная площадь здесь равна единице. Но тогда ей же равен и предел.

Значит, такова и есть площадь данного множества.

Уверены? Хорошо, давайте рассмотрим дополнение нашего странного множества. Что это будет за множество?

Видимо, множество точек, наоборот, с иррациональными координатами.

Неправильно: множество точек, у которых хотя бы одна координата иррациональна.

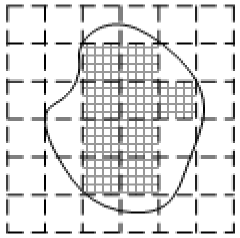
А, ну да… Разумеется.

Площадь множества тоже равна 1, ведь и оно всюду плотно.

Но тогда не соблюдается аддитивность меры! Множества не перекрываются, значит, сумма их площадей должна составлять весь квадрат *X*, то есть 1:

$\mu(A) + \mu(X \setminus A) = 1$.

А у нас: $1+1=1$? Такое не отвечает даже естественным представлениям о площадях.



Заштрихованные клетки целиком лежат внутри фигуры: внутренняя мера

Значение: единица минус внешняя мера дополнения – называется *внутренней мерой*. Мы получим внутреннюю меру, если будем принимать во внимание только клетки, целиком лежащие внутри измеряемой фигуры (см. рисунок). А затем опять $n \to \infty$.

Так вот, аддитивность требует, чтобы внешняя и внутренняя мера были равны между собой. То есть, при $n \to \infty$ площади фигур из квадратиков должны сойтись. А в нашем хитром примере внутренняя мера равна нулю.

И как же быть?

Пока просто принять, что существуют неизмеримые множества. Если же внешняя и внутренняя меры равны, множество объявляется измеримым. А само значение внешней меры представляет собственно меру – в данном случае площадь.

Или внутренней меры.

Или внутренней.

То, что здесь описано, называется *мера Жордана*.

Она кажется естественной – как бы просто подсчет клеток.

Однако находятся неизмеримые множества, и они (как мы убедились) прямо на виду.

Но подступимся к нашему множеству, состоящему из точек с рациональными координатами, с другой стороны. Множество счетно, значит, площадь можно выразить как сумму ряда. Каждый член равен нулю (площадь точки нулевая). Тогда и ряд сходится к нулю – вот вам мера.

В то же время внешняя мера дала единицу – это говорит об очевидном несовершенстве процедуры Жордана. Если вдуматься, то понятно, где беда. Как бы ни увеличивали разбиение, на любом этапе число клеток конечно. Жордан действовал в духе традиционного анализа. Однако сколько ни наращивать *n*, конечным числом клеток нельзя накрыть бесконечное множество точек!

Мера Лебега

Решение нашел Лебег. Он придумал: возьмем сразу же бесконечное множество квадратиков (но счетное).

Почему обязательно счетное?

Чтобы можно было образовать ряд (и пользоваться суммой ряда).

Теперь справиться с измерением площади того, экзотического множества не составит труда, ведь можно каждую из его точек накрыть индивидуальным квадратиком нулевого размера, сумма ряда даст ноль. Площадь дополнения по-прежнему равна единице, аддитивность соблюдена ($0+1=1$), множество измеримо.

В общем же случае процедура образования *меры Лебега* следующая. Сетки теперь нет, просто накрываем измеряемое множество совокупностью квадратиков (можно и прямоугольников) – конечной или счетной, она даст некоторое значение площади (суммы ряда). И даже неважно, что прямоугольнички будут перекрываться!

Таких разных покрытий существует множество, и, соответственно, множество частных сумм будет иметь «точную нижнюю грань» – упрощенно говоря, предел, ниже которого никакая сумма не опускается. Назовем ее внешней мерой.

Аналогично получаем внутреннюю меру (рассматривая всевозможные покрытия дополнения). И опять, если внешняя и внутренняя меры равны, множество объявляется измеримым, а значение внешней (или внутренней) меры считается его мерой.

Что мешало Жордану взять не конечное, а счетное число клеток?

Консерватизм мышления; полагали, что процедура получения меры должна быть обязательно *конструктивной*. По Жордану вроде бы понятно, как получить значение меры, есть четкий алгоритм.

Успех Лебега коренился в отказе от конструктивности. Ниже, говоря о понятиях точных граней, мы увидим, что в общем случае как бы нет способа их реально получить. Отсутствует конкретная процедура, позволяющая «вычислить» меру Лебега, но это и неважно.

Почему неважно, разве цель – не получение значения меры?

Разочарую, но цель другая. Не землемеры же мы, да и землемеры обойдутся без Лебега.

Позвольте, а для чего же тогда служит теория меры?

Главное в ней – само существование меры. Измеримость множеств. Обоснование законности дальнейших построений. По Лебегу – мы лишь доказываем, что мера существует.

Важна также структура *системы* измеримых множеств. Вообще говоря, в функциональном анализе основное – установить принадлежность к определенной системе множеств, к пространству. И такая принадлежность не усложняет, а наоборот, упрощает выводы. Нам еще предстоит убедиться, как эффективно работает, например, понятие *кольца*.

Вы сказали, что по Жордану вроде бы понятно, как получить значение меры. Почему «вроде бы»?

Строго говоря, любой предел уже неконструктивен, в том смысле, что связан с процедурой, которая никогда не закончится. В обычном анализе понятие предела настолько привычно, что особо не вдумываешься. Скажем, для вычисления интеграла нужно суммировать площади столбиков, которые как ни сужай, всегда получаешь лишь приближенное значение.

Но в действительности никто не собирается суммировать столбики, не так ли? Они остаются в определении, и нужны только для того, чтобы вывести свойства интеграла. Из которых получаются правила интегрирования. К примеру, формула: $\int \sin x dx = \cos x + C$ дает решение $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$ – абсолютно точное, и ничуть не приближенное. Теория работает!

Мера через пополнение

Взглянем на дело с неожиданной стороны. На множестве плоских фигур, состоящих из прямоугольников, введем метрику:

$$\rho(x, y) = m(x\Delta y).$$

Здесь m это мера (в данном случае площадь). То, что выражение является метрикой, доказано в одной из задач. И вы, надеюсь, не забыли, что Δ – символ симметрической разности множеств.

А почему обязательно – состоящих из прямоугольников?

Потому что для них мера (площадь) известна. Если хотите – постулирована.

Получили метрическое пространство фигур. Вопрос: оно полно?

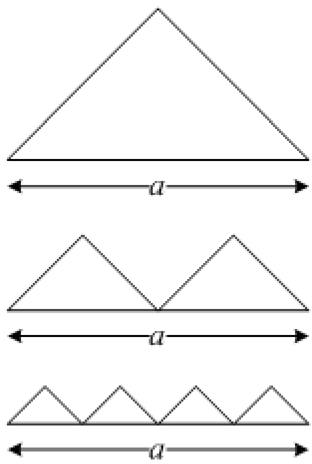
Думаю, что нет. Фигура из прямоугольников, если их измельчать, может очень близко подходить к кругу – вот вам фундаментальная последовательность. Но никогда с кругом не совпадет.

Правильно. Пространство можно пополнить. Пополнение – и есть искомая система измеримых множеств. Если нашим фигурам позволено состоять из счетного множества прямоугольников (а не только из конечного) – в результате пополнения имеем систему множеств, измеримых по Лебегу.

Вот и все?

Пока – ровным счетом ничего. Вспомните, что пополнение множества это всего лишь добавление фундаментальных последовательностей в качестве элементов. В данном случае последовательностей «прямоугольных» фигур, к чему-то подползающих. А вот к чему, к той ли фигуре, что нас интересует? Короче: существует ли предел, чем он является?

А что может быть такого сложного с пределом?



Зубчатая линия «стремится» к прямой… но ее длина постоянна

Многое. Например, при приближении разными способами, с разных сторон – он может оказаться разным. Г. Шварц изящно показал, что для площади цилиндра получается произвольное значение – в зависимости от того, каким образом строится предел (пример есть в книгах).

Трудно себе представить такое.

Хорошо, вот вам абсолютно прозрачный пример. Представьте прямоугольный треугольник, опирающийся на гипотенузу длиной a. Теперь заменим его чередой треугольников – все более мелких, но суммарно опирающихся на тот же отрезок a, как на рисунке

Если число зубьев устремить к бесконечности, пилообразная линия будет сколь угодно близка к отрезку a, не так ли?

Конечно.

Но общая длина-то ее всегда постоянна, равна $a\sqrt{2}$ и ничуть не приближается к a!

Да, точно... Странно.

И, наконец, главное: окажется ли результат мерой? То есть, будет ли выполняться аддитивность.

Вспомним определение сходимости. Последовательность «прямоугольных» фигур A_n будет сходиться к «гладкой» фигуре A (как к пределу), если:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(A, A_n) = 0.$$

Учитывая принятую метрику, записываем уже конкретно:

$$\lim_{n\to\infty} m(A \Delta A_n) = 0.$$

Ну, вот и предел…

Нет, чепуха. Потому что никакой меры для A (а значит, и $A\Delta A_n$) нет!

Задача-то не на пополнение, а на замыкание. «Объемлющее» пространство у нас в наличии: пространство всевозможных фигур. Проблема в том, что в нем пока нет метрики! Она введена только для подпространства фигур из прямоугольников.

По сей причине невозможно указать на предельные точки (измеримые множества).

Тогда как же быть?

Вот как: вместо меры $m(A\Delta A_n)$ возьмем внешнюю меру.

Про нее мимоходом обмолвились…

А теперь рассмотрим детальнее.

Точные грани

В функциональном анализе есть важные математические понятия *точной нижней грани* inf, и *точной верхней грани* sup. Про них тоже доводилось упоминать.

Применительно к множеству чисел, точной нижней гранью (*инфимумом*) подмножества A (inf A) – называется наибольшее из чисел, которые меньше (или равны) всех элементов из A.

Верно ли я понимаю: если в A есть наименьшее число, то оно и будет точной нижней гранью A?

Верно.

А если нет...

Например, точной нижней гранью открытого подмножества всех положительных чисел $(0, \infty)$ будет ноль, не принадлежащий этому подмножеству.

Сформулируем определение иначе: $\inf A$ считается точной нижней гранью A, если найдется такой элемент $a \in A$, что $a - \inf A < \varepsilon$ для любого сколь угодно малого положительного ε (но всегда $\inf A \leq a$). То есть, числа из множества подползают к точной грани сколь угодно близко.

К чему альтернативное определение, если и первое понятно?

Настанет момент, когда оно сработает – вот увидите!

Аналогично, точной верхней гранью (*супремумом*) A (sup A) будет наименьшее из чисел, которые больше (или равны) всех элементов из A.

По-моему, какие-то никчемные, детские понятия.

Вы не правы, понятия очень мощные. Во-первых, они лежат в русле идеи множеств, и иначе не могли быть введены.

Почему?

Да потому что опираются на представление о состоявшейся бесконечности: множество A принимается существующим сразу, целиком. Не надо искусственно выстраивать последовательность, чтобы получить предельную точку.

Во-вторых, они тесно связаны с полнотой; к примеру, точные грани могут существовать только на множестве действительных чисел, а у рациональных – точных граней может просто не быть (потому-то мера и определена как вещественное число).

Но мне кажется, что все это очень близко к понятиям максимума и минимума.

Есть существенные отличия. Максимум и минимум могут не существовать: так, интервал (0, 1) не имеет минимального и максимального числа. А вот точные грани имеются: 0 и 1. Для ограниченных множеств они существуют всегда, не требуя каких-то оговорок и условий.

Кстати (если уж зашла речь), *ограниченным* называется множество, содержащееся в некотором шаре.

К тому же запись типа $\sup f(x)$ не несет ненужной иллюзии конструктивности.

В каком смысле?

Запись обозначает не результат какой-то процедуры, а только существование числа – и ничего более.

Ради иллюстрации рассмотрим одно определение. Диаметром ограниченного множества A в метрическом пространстве X называют число $\sup \rho(x, y)$. Имеется в виду, что $x, y \in A$.

Заметим: приведенная «формула» отнюдь не позволяет вычислить диаметр для любого множества. Но устанавливает его существование!

Из ограниченности вытекает, что точная верхняя грань всегда существует. Но замени мы sup на max – открытые множества не имели бы диаметра!

Внешняя и внутренняя меры

Понятие внешней меры множества очень важно в теории меры. Внешняя мера является временным «суррогатом» собственно меры, с чего мы и начали тему.

Предварительно определим понятие покрытия, которое уже использовали на интуитивном уровне: система множеств $\{P_n\}$ является *покрытием* множества A, если $A \subset \bigcup P_n$.

Ясно: как плитки черепицы являются покрытием крыши.

Можно представить и так. Плитки укладываются внахлест, свешиваются с краев, главное – чтобы не было незакрытых участков.

Внешняя мера – численная функция множества, неотрицательная (и равная нулю для пустого множества). Она определена для всех абсолютно множеств пространства. У нас пространством, если не забыли, служит единичный квадрат.

Эта функция μ^* вообще должна обладать свойством *полуаддитивности*: если $\bigcup P_n$ – покрытие ($A \subset \bigcup P_n$), то:

$$\mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(P_n).$$

Здесь может подразумеваться бесконечный ряд (счетная полуаддитивность), но если она не выполняется, то останавливаются на конечной полуаддитивности.

Свойство мне тоже понятно: площадь крыши не больше суммарной площади кусков черепицы.

Если внешняя мера системы множеств является не полуаддитивной, а аддитивной, множества считаются *измеримыми по Каратеодори*. Иначе говоря, условие измеримости – уже знакомое нам:

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = 1.$$

Ну а сама внешняя мера μ^* объявляется тогда собственно мерой μ.

Вы издеваетесь? Еще одна мера – теперь Каратеодори какого-то!

Не пугайтесь. Речь идет не о еще одной мере. А о некотором общем методе построения систем измеримых множеств. Меры Жордана и Лебега – они как раз «по Каратеодори». Разница в том, как строится внешняя мера.

Теперь перейдем к собственно построению внешней меры. Есть элементарные множества P_n – наши «плитки черепицы», для которых мера (например, площадь) известна. Из них образуем всевозможные покрытия (накрывающие *A*). Для каждого покрытия вычисляем $\sum_n m(P_n)$, то есть, как бы суммарную площадь кусочков. Здесь $m(P_n)$ – мера каждого кусочка.

Эта сумма ограничена снизу. Почему?

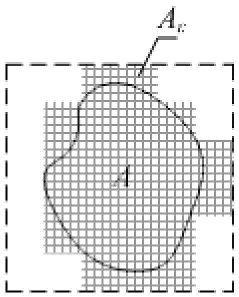
Ясно: она же не может быть меньше площади фигуры, которую покрываем.

На интуитивном уровне так… Но не слишком строго. Обладает ли данная фигура площадью – и есть камень преткновения! Скажем иначе: ограничена просто потому, что не может быть меньше нуля.

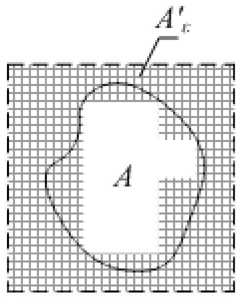
Из ограниченности следует существование точной нижней грани. Она и будет внешней мерой множества *A*:

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(P_n).$$

Или, иначе: $\mu^*(A) = \inf m(A_\varepsilon)$, если A_ε является объединением непересекающихся прямоугольников (что иллюстрируется рисунком). Индекс ε означает какую-то конкретную «прямоугольную» фигуру, нас интересует инфимум множества площадей всевозможных таких фигур.



Фигура накрыта объединением непересекающихся прямоугольников



Дополнение фигуры накрыто объединением непересекающихся прямоугольников

Узнаю нашу первую попытку определить площадь. Только вместо предела теперь стоит точная грань.

Такая замена и позволяет перейти от Жордана к Лебегу.

Полезным является понятие *внутренней меры*. Напомню, что для множеств внутри единичного квадрата *X* внутренняя мера – мера квадрата за вычетом внешней меры дополнения к *A*, то есть $\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X \setminus A)$.

Подставим определение внешней меры, и тогда:

$\mu_*(A) = 1 - \inf \sum_n m(P'_n)$, где прямоугольники P'_n составляют покрытие дополнения $X \setminus A$. Или, иначе: $\mu_*(A) = 1 - \inf m(A'_\varepsilon)$, где A'_ε – фигура (совокупность прямоугольников), покрывающая $X \setminus A$.

Заметьте, что $B_\varepsilon = X \setminus A'_\varepsilon$ (белое поле на рисунке) соответствует фигурам, наоборот, вписанным в *A*! Понятно, что $1 - \inf m(A'_\varepsilon)$ соответствует $\sup m(B_\varepsilon)$, вот вам другое выражение для внутренней меры.

Условие измеримости предстает в виде:

$$\inf m(A_\varepsilon) = \sup m(B_\varepsilon).$$

Множество как бы зажимается изнутри и снаружи.

Да – фигурами, чья мера известна. Если в пределе меры сходятся, множество измеримо.

Возвращаемся к мере Лебега

А для чего все это надо?

Нам предстоит продолжить меру на более обширное множество. Фигуры, образованные прямоугольниками, не представляют интереса. Желательно уметь получать, например, меру «гладких» фигур, покрывая их фигурами, состоящими из прямоугольников. А также меру совершенно негладких…

Поскольку условие сходимости в изначальной форме $\lim\limits_{n\to\infty} m(A \Delta A_n) = 0$, как вы помните, непригодно, запишем так:

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A \Delta A_n) = 0.$$

Здесь $A_n = \bigcup P_k$.

И оно уже пригодно?

Да. Во-первых, внешняя мера всегда существует. Во-вторых, если измеряемое множество *A* само состоит из прямоугольников, таковой же будет и множество $A \Delta A_n$. И тогда $\mu^*(A \Delta A_n) = m(A \Delta A_n)$: ситуация изначального существования предела. Убедились, что мера, которую пытаемся ввести, является *продолжением*, имеет «обратную силу».

Собственно, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(A \Delta A_n) = 0$ является условием измеримости.

Только неясно, что такое здесь *n*.

Ясно только для меры Жордана. Вспомните: это параметр разбиения на клетки. Каждому *n* соответствует новая фигура A_n, площадь которой стремится к пределу.

По Лебегу никакой сетки нет. Но предел можно записать в эквивалентном виде, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую совокупность непересекающихся прямоугольников A_ε, что:

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Это и есть условие измеримости по Лебегу.

Погодите, условием измеримости было равенство внешней и внутренней мер: $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

Оно эквивалентно. Если не лень, можете разобраться ниже.

$\inf m(A_\varepsilon) = \sup m(B_\varepsilon)$ означает (по альтернативному определению точных граней), что существует число, к которому сколь угодно близки и $m(A_\varepsilon)$, и $m(B_\varepsilon)$.

Но B_ε целиком вложено в A_ε, значит, $m(A_\varepsilon) = m(B_\varepsilon) + m(A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon)$. Тогда выходит, что $\inf m(A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon) = 0$. Говоря иначе, для любого ε найдутся A_ε и B_ε такие, что $m(A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$. Или $\mu^*(A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$ (для множеств, состоящих из прямоугольников, мера и внешняя мера совпадают).

Обращаясь к картинкам, можно проследить, что $A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon = (A_\varepsilon \Delta A) \bigcap (B_\varepsilon \Delta A)$ – объединение непересекающихся множеств. Значит, и подавно найдется такое A_ε, что для $\varepsilon > 0$ будет справедливо: $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Хорошая новость: с понятием меры мы познакомились, и на довольно адекватном уровне. Тем не менее, в следующем разделе мы пройдем то же самое несколько более углубленно.

Задача. В свое время доказано, что каждое открытое плоское множество представимо объединением прямоугольников (неважно – открытых или замкнутых). Требуется доказать более сильное утверждение: каждое открытое множество представимо объединением *счетного* множества прямоугольников.

Начнем с известного представления открытого множества объединением прямоугольников, как бы окружающих каждую точку множества. Понятно, что таких прямоугольников – континуум.

Однако среди них много «лишних», целиком перекрывающихся с другими. Пусть останутся только такие прямоугольники, что если убрать любой из них, образуется «дыра». Точнее, дыра ненулевой меры (иное нас не очень-то волнует).

Такому прямоугольнику можно поставить в соответствие уникальную точку с рациональными координатами, взятую именно из дыры. А множество точек с рациональными координатами счетно.

6. Системы множеств

Переходим к системам множеств – важному и интересному предмету. Предстоит преодолеть очередной рубеж, перейдя на более высокую ступень абстрактного мышления.

Часто упоминаемыми системами множеств являются кольцо и полукольцо.

Что такое системы множеств

Я понимаю так, что это множества множеств?

Да, но с некоторой оговоркой.

Допустим, среди жителей города интересует множество таких, кто имеет рост не ниже 180 см. Рассмотрев любого из граждан, можно сразу сказать, принадлежит он множеству «рослых», или нет.

А если нас интересует множество дружащих между собой жителей?

Понял! Тут нельзя по данному жителю судить, принадлежит ли он множеству. Надо сначала предъявить других, уже принадлежащих.

Аналогично, принадлежит ли множество системе – определяется тем, «дружит» ли оно с другими множествами, входящими в систему. Понятие системы множеств будем связывать с «замкнутостью» относительно некоторых операций над ними.

А для начала рассмотрим просто числа. Над которыми определены алгебраические операции: сложение и умножение, имеющие известные свойства.

Что за «известные»?

Хорошо, напомню их.

1. Коммутативность сложения: $x+y=y+x$.

2. Ассоциативность сложения: $(x+y)+z=x+(y+z)$.

3. Существование нуля: $x+0=x$.

4. Существование противоположного элемента: $x+(-x)=0$.

5. Коммутативность умножения: $x\cdot y=y\cdot x$.

6. Ассоциативность умножения: $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$.

7. Существование единицы: $x\cdot 1=x$.

8. Дистрибутивный закон: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.

Теперь проделаем один фокус. Возьмем множество A всего из двух чисел, ноль и единица: $A\{0,1\}$.

Результат операции $1+1$ не содержится в данном множестве! Назовем его «2», и добавим в A. Аналогично придется добавить 3, 4 и так далее.

Но среди всех этих чисел нет противоположного единице. Значит, в A следует занести также $-1,\ -2,\ \ldots$

В итоге имеем множество целых чисел $\mathbb{Z}$, все элементарно.

Но зато теперь никакие операции над элементами множества $\mathbb{Z}$ больше не выведут за его пределы! Если x и y принадлежат $\mathbb{Z}$, то ему принадлежат также $x+y$ и $x\cdot y$. Множество «замкнулось» относительно алгебраических операций. Потому оно называется *кольцом*.

Математик выразит мысль так: взяли произвольное множество $A\{0,1\}$ и надстроили над ним *минимальное кольцо* $\mathbb{Z}$.

Почему минимальное?

Потому что никакое «меньшее» множество (содержащее A, но само содержащееся в $\mathbb{Z}$) кольцом не является.

Теперь добавим к нашему множеству $\mathbb{Z}$ число, к примеру, $\frac{2}{3}$. Новое множество – будет ли кольцом?

Нет, конечно. Операции между числами приведут к новым и новым дробным числам, которых в $\mathbb{Z}$ не было.

Так и есть, кольцо разомкнулось! Минимальным кольцом над таким множеством будет уже множество некоторых рациональных чисел.

Всех рациональных?

Не факт, что всех. Сейчас мы убедимся, что добавление к рациональным числам одного иррационального вовсе не приводит к кольцу всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

Задача. Проверить, что множество чисел типа $a+b\sqrt{2}$ (где a и b принадлежат $\mathbb{Q}$) является кольцом.

Просто проверяем, что сумма и произведение принадлежат множеству.

$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$,

$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}$.

Числа в скобках справа тоже рациональные. Значит, заданное множество – в самом деле кольцо.

Интересно, что множество чисел вида $a+b\sqrt[3]{2}$ кольца не образует – проверьте!

Кольцо множеств

Подобия алгебраических операций могут быть введены не только на множестве чисел, но и на множестве множеств. А именно:

1) «сложением» множеств считаем симметрическую разность Δ;

2) «умножением» множеств считаем пересечение множеств $\bigcap$.

Странно, мне казалось, что аналогом сложения должно быть объединение.

Нет, и сейчас поймете, почему. Проверим, как выполняются свойства сложения и умножения.

1. Коммутативность сложения: $A\Delta B=B\Delta A$.

2. Ассоциативность сложения: $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.

3. Существование нуля (за него принято пустое множество): $A\Delta\varnothing=A$.

4. Существование противоположного элемента: $A\Delta(-A)=\varnothing$, если за $(-A)$ принять A. Заметьте: взяв $\bigcup$ вместо Δ, данное свойство мы бы не обеспечили. Объединение непустых множеств никогда не может быть пусто!

5. Коммутативность умножения: $A\bigcap B=B\bigcap A$.

6. Ассоциативность умножения: $(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$.

7. Существование единицы: $A\bigcap X=A$, если за «единицу» X принять «все пространство».

8. Дистрибутивный закон: $A\bigcap(B\Delta C)=(A\bigcap B)\Delta(A\bigcap C)$.

Выполнение этих свойств легко проверить – хотя бы на «огурцах».

Не понял, что такое здесь *X*?

Как и ранее, рассматриваем подмножества некоторого объемлющего множества (пространства) X.

Кстати, для *множества всех подмножеств* множества X имеется особое условное обозначение: 2^X. Догадываетесь, почему такое?

Догадаться несложно: если множество конечно, и имеет X элементов, то выбрать из него разные подмножества можно как раз 2^X способами – комбинаторика!

Итак, *кольцо* это система множеств, для которых операции симметрической разности и пересечения не выводят за рамки системы: если A и B принадлежат кольцу, то ему принадлежат также $A \bigcap B$ и $A \Delta B$.

Впрочем, используя свойства операций, мы придем к выводу, что кольцо замкнуто относительно всех основных операций. Иногда варьируют определение кольца: говорят, что если A и B принадлежат кольцу, то ему принадлежат также $A \bigcup B$ и $A \setminus B$. Что совершенно эквивалентно первоначальному.

Разумеется, все вообще подмножества X образуют кольцо. Но это тривиально. Интереснее, когда существуют более узкие системы множеств (не совпадающие с 2^X), тоже являющиеся кольцом.

Задача. Имеются два непересекающихся множества A и B. Надстроить над ними минимальное кольцо $\Re$.

$A \bigcap B = \varnothing$, но пустое множество принадлежит кольцу и просто по определению.

$A \Delta B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B) = (A \bigcup B) \setminus \varnothing = (A \bigcup B)$.

Комбинация $A \bigcup B$ с A или B возвращает к тем же множествам.

Итак, искомое кольцо содержит четыре множества: $\Re\{\varnothing, A, B, A \bigcup B\}$.

Разумеется, возможны и другие кольца, содержащие данные множества, но мы построили минимальное. Об этом подробнее.

Минимальное кольцо

Пересечение колец – тоже кольцо.

Неужели?

Проверим. Пусть множества A и B оба принадлежат и кольцу $\Re_1$, и кольцу $\Re_2$. А значит, и пересечению колец – оно-то нам и нужно. Пересечение $A \bigcap B$ также принадлежит и $\Re_1$, и $\Re_2$ (по свойствам кольца), а значит, пересечению $\Re_1 \bigcap \Re_2$.

То же рассуждение справедливо для симметрической разности. Пересечение колец удовлетворяет обоим свойствам кольца.

Факт немаловажный! Возьмем произвольную систему множеств. Оно может не быть кольцом. Но всегда существует кольцо, включающее в себя эту систему.

Откуда известно?

Так ведь одно такое кольцо заведомо есть: все пространство X – кольцо.

Допустим, что существует множество разных колец, включающих нашу систему. Возьмем пересечение всех этих колец. Оно тоже является кольцом, и к тому же *минимальным*.

Итак, для любой системы множеств существует минимальное кольцо, включающее данную систему.

Несложные задачки, которые мы здесь разберем, очень пригодятся в дальнейшем.

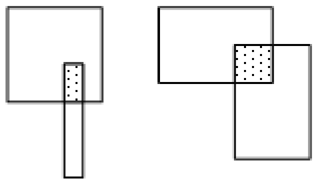
Задача 1. Система всех открытых множеств – является ли кольцом?

Пересечение двух открытых множеств открыто, значит, один признак кольца сработал.

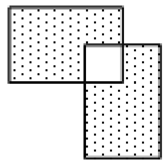
А вот с симметрической разностью, похоже, ничего не получится. Например, если A это интервал прямой (0, 10), а B – (0, 8), то $A\Delta B$ это [8, 10) – не является открытым! Отсюда ответ: система кольцом не является.

Задача 2. Рассмотрим множество фигур – всевозможных прямоугольников. Является ли оно кольцом?

Нет, разумеется (см. рисунки).

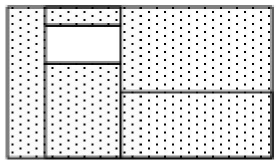


Пересечение прямоугольников является прямоугольником



А симметрическая разность не является!

Однако множество прямоугольников обладает взамен другим свойством – см. рис.



Если из прямоугольника вырезать прямоугольник, оставшуюся фигуру можно заполнить конечным числом неперекрывающихся прямоугольников

Если проще – вы хотите сказать, что прямоугольник можно составить из нескольких меньших прямоугольников?

Нет, я выдвигаю более сильное утверждение: что начальный прямоугольник из этих «нескольких» может быть взят произвольным.

Система множеств с подобными свойствами называется *полукольцом*.

Кольцо и полукольцо

Полукольцо – система множеств с более слабыми (относительно кольца) требованиями. Так что любое кольцо это полукольцо тоже! А вот обратное необязательно.

Так что полукольцо – более узкая система множеств.

Что-то у меня не связывается. Более слабые требования – значит, наоборот, более широкая сфера охвата?

А вот и нет. Не путайте: речь о требованиях не к отдельным множествам, а к системе.

Опять аналогия: некий коллектив характеризуется тем, что любые двое имеют в нем общего знакомого. Если повысить планку, потребовав, чтобы любые двое имели общего друга (знакомый может не быть другом), придется привлечь в компанию дополнительных людей – расширить круг.

Подытожим определение полукольца:

1) это система множеств, замкнутая относительно пересечений;

2) это система множеств – такая, что, если A и $A_1 \subset A$ принадлежат системе, то дополнение $A \setminus A_1$ можно представить в виде объединения конечного числа неперекрывающихся множеств системы.

Задача 1. Имеется система всех интервалов прямой (a, b). Построить минимальное полукольцо, содержащее эту систему (полукольцо над множеством интервалов).

С пересечениями все в порядке. А вот при вычитании интервала из интервала (второе свойство полукольца) получаются множества типа $(a, b]$ или $[a, b)$. Их уже не составить из неперекрывающихся интервалов, так что придется включить в нашу систему.

Но от пересечения $(a, b]$ и $[c, d)$ может получиться отрезок $[c, b]$! Вот теперь уже точно ничего больше не упустили.

Итак, искомое полукольцо – система всех *промежутков* на прямой (промежуток – это общее название для отрезков, интервалов и полуинтервалов).

Задача 2. Построить минимальное кольцо, содержащее данное полукольцо.

Кольцо замкнуто относительно объединений. Значит, все объединения промежутков войдут в кольцо.

Также и все разности промежутков... Но разность двух промежутков будет тоже промежутком (или двумя промежутками) – это ничего нового не прибавит, такие случаи учтены.

Итак, кольцо получено, оно образовано объединениями промежутков на прямой.

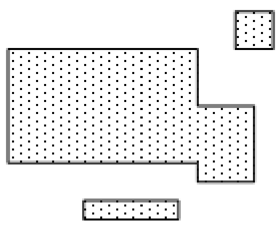
Заметим: все, что образовано объединениями промежутков, может быть получено объединениями *неперекрывающихся* промежутков. Важное обстоятельство!

Почему?

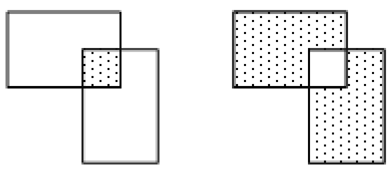
Разберемся после рассмотрения еще одной задачи.

Задача 3. Модифицируем условие задачи из предыдущего параграфа: рассмотрим фигуры, являющиеся объединением конечного числа неперекрывающихся прямоугольников. Является ли множество таких фигур кольцом?

Да, является! Иллюстрация на рисунках.



Фигуры образованы объединением непересекающихся прямоугольников



И пересечение, и симметрическая разность не выводят за пределы объединений неперекрывающихся прямоугольников

Вот уже второй пример, когда полукольцо легко расширяется до кольца.

А в чем проблема? Мы знаем, что любую систему множеств можно расширить до минимального кольца.

Да – в принципе. Но мы не знаем, как это сделать конкретно.

Существование минимального кольца не вызывает сомнений, но вот определить его для произвольной системы проблематично. Однако если исходная система – полукольцо, задача становится простой! Доказано, что тогда минимальное кольцо – не что иное, как система множеств, каждое из которых может быть представлено конечным объединением непересекающихся элементов из полукольца. Называют: *кольцо, порожденное полукольцом*.

К примеру, когда полукольцо образовано всевозможными прямоугольниками на плоскости, кольцо будут образовывать плоские фигуры, образованные объединением конечного числа неперекрывающихся прямоугольников – те самые ступенчатые «многоугольники» с рисунка.

Хочу подчеркнуть два очевидных, но важных момента:

1) это кольцо содержит в себе первоначальное полукольцо;

2) это кольцо является и полукольцом тоже!

Алгебра, сигма-кольцо и сигма-алгебра

Следует добавить: если и само «объемлющее» множество X (единица) тоже принадлежит кольцу, такое кольцо особо называют *кольцом с единицей*, или *алгеброй*.

Какой здесь глубокий смысл?

Наличие «единицы», как мы видели, превращает операции с множествами в полноценные алгебраические. Имеем теперь *алгебраическую систему*.

Формальное требование «чистой математики»?

Но требование весьма существенное. Пусть имеем семейство множеств $\{A_\alpha\}$. Надстроим над ним кольцо.

Операции пересечения и симметрической разности не выведут полученные новые множества за пределы $\bigcup A_\alpha$. Будем повторять операции с полученными результатами – все их продукты и подавно будут лежать внутри $\bigcup A_\alpha$. Кольцо, содержащее семейство множеств, ограничено: оно целиком заключено внутри объединения множеств.

Если же мы присовокупим сюда все пространство X (а значит, и все $X \setminus A_\alpha$!), то полученное кольцо не ограничено ничем, «занимает» все пространство X.

А раз X входит в кольцо и постулируется как измеримое, получается, что алгебра множеств обязательно измерима.

Задача 1. Кольцо промежутков, полученное выше в задаче 2 – является ли алгеброй?

> Единицей, то есть множеством, содержащим в себе любые множества кольца, может быть только вся числовая прямая $(-\infty, \infty)$. Но вот входит ли она в кольцо?
>
> Не входит, потому что:
>
> 1) сама не является промежутком (a и b должны быть конкретными числами);
>
> 2) не может быть получена конечным объединением промежутков.
>
> Таким образом, алгебры здесь нет.

Пригодится также понятие σ-кольца. Кольцо множеств называется *σ-кольцом*, если из принадлежности к кольцу последовательности множеств $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ – следует принадлежность ему и объединения $\bigcup_n A_n$.

Так ведь это свойство любого кольца.

Да, для случая объединения конечного числа множеств. Но здесь-то речь идет о *счетной* последовательности!

Задача 2. Что изменится, если в первой задаче мы будем рассматривать σ-кольцо промежутков?

> Теперь вся числовая прямая тоже войдет в состав кольца: ее можно составить объединением счетного множества отрезков, примыкающих друг к другу. Получилась σ-алгебра.

А начиналось все с множества интервалов…

Минимальная σ-алгебра над всеми интервалами прямой называется системой *борелевских множеств*. Очень важное понятие.

Борелевские множества можно построить также как σ-алгебру над отрезками [a, b], или как σ-алгебру над «полупрямыми» вида $(-\infty, a]$, где a – любое число. В самом деле: разность двух таких полупрямых даст промежуток, ну и так далее.

Продолжение меры на кольцо

Легко заметить, что на множествах полукольца легко задается мера.

Пожалуй. Длина промежутка на прямой, площадь прямоугольника – вещи очевидные.

Ну да. Если берем прямоугольники, то мера может задаваться по-школьному: $m(P) = a \cdot b$ (хотя может и как-то иначе, лишь бы соблюдалась аддитивность!)

Но нам нужно большее, чем эти простые фигуры. Вторым шагом будет продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. На наши «многоугольники» A мера продолжается очевидно:

$m(S) = \sum_n m(P_n)$ – площадь фигуры как сумма площадей составляющих прямоугольников.

Доказывается, что, во-первых, такое продолжение является мерой.

Как это – является мерой?

Обратитесь к определению меры. Имеется в виду аддитивность.

Во-вторых, что является продолжением меры.

То есть?

Поясню. Из прямоугольников может составиться опять-таки прямоугольник. Скажите, чему будет равна его мера (площадь)?

Надо просуммировать площади составляющих фигур… Хотя, раз он прямоугольник, то и суммировать не обязательно, можно просто взять $a \cdot b$.

Вот именно! А вы уверены, что эти два способа дадут одно и то же? Это и есть вопрос, получили ли мы продолжение меры.

В-третьих, что продолжение единственно: два любых продолжения (удовлетворяющие требованиям к мере) обязательно совпадут.

Итак, множества, которые мы научились измерять, образуют кольцо. А поскольку мы рассматриваем задачу в единичном квадрате, можно говорить также, что они образуют *алгебру*.

Но и минимальное кольцо нас не устраивает, мы хотим измерять еще более широкий класс множеств. Надо двигаться дальше. Перед третьим шагом стоим на распутье: действовать по Жордану или по Лебегу.

Продолжение меры по Жордану

Введем понятие *внешней меры Жордана* множества A:

$\mu^*(A) = \inf m(A_n)$.

Здесь A_n – множество минимального кольца, покрывающее A, имеющее меру m. Для примера с площадями: фигура, состоящая из *конечного* числа прямоугольников, так, что $A_n \supset A$.

Совершенно очевидно, что если A принадлежит минимальному кольцу (является одним из A_n), то $\mu^*(A) = m(A)$.

Критерий измеримости по Жордану: $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = 1$ – попросту выражение требования аддитивности. Его можно записать иначе: ведь $\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X \setminus A)$ – внутренняя мера, и получаем $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

Внутренняя мера Жордана – точная верхняя грань множества всех «многоугольников» A_n, заключенных внутри *A*, то есть $\sup m(A_n)$.

Введенная таким способом мера $\mu = \mu^*(A) = \mu_*(A)$ – аддитивна для достаточно «хороших» случаев, например, для привычных гладких фигур. Но в общем случае (для произвольного множества) она не аддитивна, что, как помните, мы доказали контрпримером.

Что такое контрпример?

Из логики известно: для того, чтобы опровергнуть общее суждение, достаточно одного примера против. *Контрпример* призван без лишних сложностей отклонить тезис, который с первого взгляда кажется правдоподобным.

Вы, помнится, иллюстрировали схему Жордана построением сетки на $n \times n$ клеток, и далее $n \to \infty$. А здесь никакого *n* нет…

Потому что сразу же применен инструментарий функционального анализа. В сущности, процедура с $n \to \infty$ нужна только для того, чтобы выстроить последовательность, которая должна сходиться к пределу. Понятно, что при $n \to \infty$ мера внешней фигуры уменьшается, а внутренней B_n увеличивается.

Ну да, и в пределе они сойдутся.

Но если рассматривать каждое множество фигур как завершенное, тогда предельные точки можно выразить непосредственно, через inf и sup, как выше. Никаких последовательностей не требуется – это первое. Второе – указанный подход открывает возможность ввести измеримость полнее, так, как сделал Лебег.

Кстати, с сеткой еще одна головная боль: надо доказать, что мера не меняется при повороте сетки (доказательство существует).

Быть может, будет интересно узнать: проблемы с измеримостью по Жордану возникают с теми множествами, *границы* которых имеют ненулевую площадь (меру).

Вот так пояснение! Во-первых, где определение «границы»? Да и странно как-то, что граница может иметь ненулевую площадь...

Может.

Граничные точки множества – те, которые не являются внутренними. То есть, в любой окрестности точки границы имеется «чужая» точка, не принадлежащая данному множеству.

Вспомните наши экзотические множества: *A* (с рациональными координатами) и $X \setminus A$. Все их точки – граничные, каждое из множеств состоят из собственной границы! Тем не менее, площадь $X \setminus A$ равна 1.

А вот по Лебегу все подобные множества измеримы. Да и вообще все конструктивно задаваемые множества измеримы.

Как это понимать?

Дело в том, что найдены примеры множеств, не являющихся измеримыми и по Лебегу (*множество Витали*). Но они требуют для своего построения аксиомы выбора. Которая, как известно, не конструктивна.

Продолжение меры по Лебегу

Лебег по-иному образовал внешнюю меру:

$\mu^*(A) = \inf A_n$, где инфимум берется по всевозможным покрытиям множества A конечными или *счетными* системами прямоугольников.

Непересекающихся, вероятно?

Почему? Совсем необязательно. Пересечения не страшны, если мы приходим в итоге к инфимуму.

В слове «счетными» вся разница. Определение измеримости по Лебегу строится точно так же:

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = 1.$$

Обратите внимание: лебегово определение внешней меры предполагает, что мера не просто аддитивна, а *счетно-аддитивна* (или, как иначе говорят, *σ-аддитивна*). На место суммы встал бесконечный ряд. То есть, Лебег рассматривает более узкую категорию мер.

Почему узкую? Я так понял, что измеримость по Лебегу, наоборот, охватывает более широкую категорию множеств.

Да, но за счет сужения категории разных мер – не путайте. Не любые меры счетно-аддитивны.

Вообще-то для площадей прямоугольников счетную аддитивность можно доказать (хотя доказательство отнюдь не лежит на поверхности). В других случаях ее можно постулировать.

Разумеется, определение измеримости можно переписать аналогично тому, как мы делали ранее. Величину $\mu_* = 1 - \mu^*(X \setminus A)$ назвать *внутренней мерой Лебега*. Она равна $\mu_*(A) = \sup B_n$, где $\{B_n\}$ – множество систем прямоугольников, вписанных внутрь измеряемого множества A. И тогда измеримость по Лебегу:

$$\mu^*(A) = \mu_*(A),$$

а мера измеримых множеств, естественно:

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \mu_*(A).$$

Измеримость по Борелю

Напомню: борелевские множества – множества на числовой прямой ℝ. Берутся всевозможные «промежутки»: $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b). Они образуют полукольцо, не правда ли?

Мы это доказали. Но, пожалуй, понятно и так, ведь имеем как бы «одномерные прямоугольники», что ли. От плоскости просто перешли к прямой, задача даже упростилась.

Что и ценно. Далее построим минимальное кольцо. Помните, что это значит?

Помню: «минимальное» – значит, что каждый его элемент может быть составлен объединением элементов полукольца (у нас – промежутков).

Совершенно верно. Теперь превратим кольцо в алгебру: надо всего-навсего включить в него также и всю прямую. Мы подразумеваем σ-алгебру, то есть, допускается объединение не только конечного, но и счетного числа отрезков.

Элементы полученной σ-алгебры и называются *борелевскими множествами*.

Мне кажется, что при такой широте охвата – любое множество, какое ни придумаешь на прямой, будет непременно борелевским.

Почти так (хотя и не любое, о чем мы скажем дальше).

Но вот зачем это все?

Дело в том, что, если мы интересуемся множествами на прямой, то борелевские – действительно в каком-то смысле «почти все». И борелевские множества измеримы по Лебегу. Этим они и удобны, а ведь очень часто имеют дело именно с мерой на действительной прямой.

«Почти все» – значит, не все?

Разберемся. Для начала полезно пояснить, что «борелевские множества» – еще и означает: измеримые по Борелю. Ведь Борель как раз и занимался мерой на прямой. Вот она, «борелевская измеримость».

Имеется и какая-то «мера Бореля»?

Да. Мера Бореля на прямой вводится двумя принципами. Во-первых, мера любого промежутка равна $|b-a|$. Во-вторых, мера счетно-аддитивна. Остальное вытекает.

Она отличается от меры Лебега?

Почти нет, но есть одно обстоятельство.

Мера называется *полной*, если для любого измеримого множества, мера которого нуль, любое его подмножество тоже измеримо (его мера тоже нуль, конечно). Меры Лебега и Жордана полны.

Вообще такая «полнота» кажется чем-то само собой разумеющимся.

Тем не менее, борелевская мера как раз и не полна. Математик объяснит: потому, что она строится «не по Каратеодори». Существует контрпример – неборелевское множество, являющееся подмножеством множества нулевой меры по Борелю.

Теперь вернемся к вашему вопросу. Множество, измеримое по Лебегу, все-таки может не являться борелевским. Но тогда оно будет отличаться от борелевского лишь на множество с нулевой мерой (теперь понятно, почему).

Задача. Доказать, что любое открытое множество измеримо (по любой мере). Разумеется, пространство принимаем метрическим, чтобы имела смысл «открытость» и «замкнутость».

> Систему всех открытых множеств, как мы знаем, можно дополнить до кольца, и даже до σ-алгебры (так как все пространство X тоже открыто). А множества σ-алгебры всегда измеримы.

7. Интеграл Лебега

Не всем и ведомо, что «обычный» интеграл называется интегралом Римана, иногда – Коши-Римана. Он предполагает непрерывные функции, или хотя бы кусочно-непрерывные. В то же время встречаются функции, разрывные везде.

К необычным функциям приводят многие реальные задачи, в частности, к ним могут сходиться ряды Фурье. И что же выходит: левая часть равенства интегрируема, а правая – нет? Если классическое понятие интеграла здесь не проходит, то должно быть какое-то другое.

Альтернативное интегрирование

Хрестоматийным примером всюду разрывной служит *функция Дирихле*, равная единице для рациональных x, и нулю для иррациональных.

Если функция столь экзотическая что ее невозможно интегрировать, то на «нет», как говорится, и суда нет...

Однако интуитивно ощущается, что интеграл здесь тоже может существовать.

Что-то моя интуиция ничего такого не подсказывает.

Сейчас я ей помогу.

Впрочем, одно пояснение уже дано. Ряд Фурье (то есть сумма самых обычных функций) сходится к экзотической, не интегрируемой в классическом анализе функции. Не логично ли тогда принять предел суммы соответствующих интегралов – за интеграл этой самой – необычной – функции? Если такой предел существует, конечно.

Да, логично.

А теперь попробую дать пояснения, которым ужаснулись бы математики. Надеюсь, что они помогут наглядно представить, в чем проблема и как она решена Лебегом.

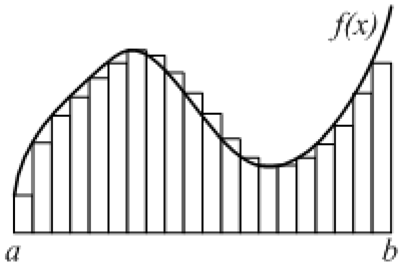
Рассмотрим привычную по учебникам гладкую кривую на отрезке $[a, b]$ оси X. Если нарубить площадь под кривой на узенькие ломтики, заменить каждый (приближенно) прямоугольным столбиком, и просуммировать элементарные площади, мы и получим что-то близкое к площади под кривой, то есть к интегралу на $[a, b]$ (рисунок слева).

Вы сформулировали ужасно, но вообще я согласен (с поправкой, что все надо устремить к пределу...)

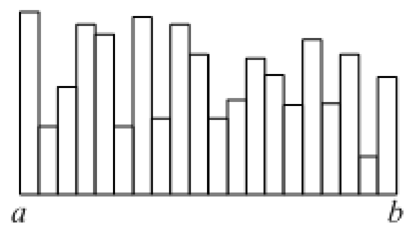
Конечно, но сейчас дело не в том. Представьте себе, что некто перемешал наши столбики на X. Их порядок перетасован хаотически, как на правом рисунке. Не правда ли, получилась модель «везде разрывной» функции?

Пожалуй. От былой гладкости ничего не осталось.

И в то же время суммарная площадь-то кусочков не изменилась!



Интеграл функции это предел площади столбиков



Столбики перетасованы, но площадь не изменилась

Ага, вот она, интуиция. Об интеграле, похоже, можно говорить. Вопрос, как его построить для подобной функции. Ведь в действительности тут даже и столбиков нет (они как бы бесконечно узкие).

Да, проблема… Но есть одна простая идея. Переместить столбики на правильные места.

Ну, какая же тут идея... Ведь на самом-то деле никто ничего не перетасовывал: мы интересуемся функцией, которая была «экзотической» изначально.

Разумеется. Но я же сказал – не на «исходные» места, а на «правильные».

Можно перетасовать порядок столбиков – так, чтобы образовалась относительно гладкая кривая. Имея в виду, что на площадь такое перемещение не повлияет.

Понял: чтобы близкие значения *y* оказались сгруппированы рядом.

Вот вы и уловили мысль. Перейдем к ее реализации. Предстоит пройти несколько этапов.

Простые функции

Предположим вначале, что количество различных значений функции *y* конечно.

Знакомо: в технике такое бывает, если какая-то величина квантована по уровню.

Вывернем привычную ситуацию как бы наизнанку: отталкиваясь от некоторого значения функции y_n, будем интересоваться теми *x*, которым оно соответствует.

А разве это не одно значение *x*?

В частном случае может быть и одно. А вообще-то нет – ну сами подумайте.

Хорошо. Но если *y*(*x*) «экзотическая», тогда может оказаться, что соответствующие *x* будут беспорядочно разбросаны по оси *X*.

Конечно. Однако множество A_n этих *x*, каково бы ни было, может иметь меру: $\mu(A_n)$.

Мера и представляет «ширину» условного столбика, пусть он размазан по *X*. Тому способствует аддитивность меры (и, более того, σ-аддитивность). А высота столбика – y_n. Мера как бы собрала столбики одинаковой высоты вместе в один.

Перейти к площади теперь не составляет проблемы: $\sum_n y_n \mu(A_n)$. Это и есть интеграл!

Задача. Найти интеграл от функции Дирихле на отрезке $[0, 1]$.

Функция принимает два значения: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Ноль имеет место при иррациональных *x*, мера которых на $[0, 1]$: $\mu_1 = 1$. Единица соответствует рациональным *x*: это множество меры нуль, $\mu_2 = 0$. Интеграл Лебега существует и равен:

$$\sum_n y_n \mu(x_n) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Напомним, кстати, что интеграл Римана от функции Дирихле не существует!

Все это хорошо, но пригодно для каких-то примитивных функций.

Их и называют в учебниках «простыми». Они нужны, чтобы перейти к следующему этапу: простые функции, могущие принимать не только конечное, но и счетное множество значений y_n. Формула для площади (то есть, интеграла) не изменится, только будет уже не конечная сумма, а бесконечный ряд.

Кстати, вводим и обозначение:

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \sum_n y_n \mu(A_n),$$

A – область интегрирования на *X*.

Вот мы и определили *интеграл Лебега* (пусть пока лишь для ограниченного класса функций).

Обязательное уточнение: ряд предполагается *абсолютно сходящимся*.

Что такое и почему?

Вы, верно, запамятовали из институтского курса.

Имеется в виду, что непременно должен сходиться ряд $\sum_n |y_n \mu(A_n)| = \sum_n |y_n| \mu(A_n)$, это-то и означает: абсолютно.

Так почему же – непременно?

Потому что если ряд знакопеременный и не сходится абсолютно, то он может сходиться к любому вообще значению, в зависимости от порядка следования членов (*условная сходимость*). И тогда определение ничего не определяет.

Если ряд сходится абсолютно, функцию называют *суммируемой* на *X*.

Теперь самое время отметить, что при таком определении интеграла область интегрирования не обязательно должна быть на действительной прямой (как мы привыкли). Сюрприз: теперь она может быть любым множеством, лишь бы на нем существовала мера.

А она существует, кстати?

Вопрос в самую точку.

Чтобы выражение для суммы имело смысл, нужно еще, чтобы имели смысл $\mu(A_n)$. То есть, чтобы все множества A_n были измеримы на *X*. Вопрос, требующий отдельного рассмотрения.

Измеримые функции

Мы подходим собственно к функциональному анализу, т. е. к анализу функций. В то же время и к познавательному рубежу: необходимо научиться смотреть на функции (их обозначают здесь по типу: $f : X \to Y$) под иным углом, чем в классическом анализе.

Разве функция не трактуется так, что каждому элементу из *X* соответствует определенный элемент из *Y*?

Разумеется, такое верно; но, как уже доводилось пояснять, слишком узко, по-школярски. Математик видит шире: каждому подмножеству *X* соответствует определенное подмножество (*образ*) из *Y*.

Наоборот, если в *Y* определена система подмножеств, то их *прообразы* в *X* могут составлять тоже некую систему. Это называется *измеримостью* функции относительно выбранных систем подмножеств.

Какой интерес в этих прообразах, зачем выворачивать функции наоборот?

Именно «выворачивание» обусловило успех интеграла Лебега.

Корень здесь в том, что, например, прообраз кольца есть кольцо, прообраз σ-алгебры есть σ-алгебра (а вот наоборот – не обязательно): вытекает попросту из однозначности функции.

Иногда дают другое определение: функция $f : X \to Y$ называется измеримой, если в X измерим прообраз любого измеримого в Y множества.

Разве это одно и то же?

Измеримость множества и есть принадлежность его к некоей системе (системе измеримых множеств). Научитесь отвлекаться от взгляда, что измеримость – значит, непременно нужна мера. Помните, мы говорили, что мера – не главное?

Помню, еще бы!

Имейте также в поле зрения, что понятие измеримости функций мы вводим применительно к интегрированию.

И что же отсюда следует?

Две вещи.

Во-первых, функция рассматривается как действительная: $f : X \to \mathbb{R}$. Интеграл ведь берут от действительной функции. Потому есть резон считать, что подмножества на Y всегда борелевские, *измеримы по Борелю*.

Во-вторых, для нас важна мера соответствующих им подмножеств X (прообразов), потому последние должны быть измеримыми (по Лебегу в общем случае).

Вот мы и приходим ко второй формулировке.

Но в ней ничего не говорится о именно борелевской измеримости *Y*.

Чаще всего измеримость функций понимается именно в борелевском смысле (B-измеримость). В отличие от μ-измеримости, когда на Y рассматриваются лебеговы подмножества). Мы говорили, что различие невелико. Но оно все же есть.

Интересно, что непрерывные функции всегда являются B-измеримыми, но могут не быть μ-измеримыми – в специально подобранных случаях, конечно.

Вопрос: зачем рассматривать борелевскую измеримость какую-то, если есть стандартная измеримость по Лебегу?

Да потому, что борелевские множества опознаются очень легко: всевозможные «промежутки» на прямой (отрезки, интервалы и их комбинации в конечном или счетном числе).

В учебниках можно найти еще одно определение измеримости: функция $f : X \to \mathbb{R}$ измерима (B-измерима), если при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ измеримы лебеговские множества $X_\alpha(f) = \{x : f(x) < \alpha\}$.

В переводе: функция измерима, если измерим прообраз любого «луча» $(-\infty, \alpha)$ оси Y. Поскольку такой «луч» – явно борелевское множество, то справедливо, по крайней мере, обратное утверждение: из измеримости функции вытекает измеримость прообразов любых «лучей».

Но доказать прямой тезис тоже легко. Возьмем два различных луча; их вычитанием получим промежуток. Получается, что алгебра, порождаемая всевозможными «лучами», совпадает с алгеброй борелевских множеств, не так ли?

Похоже на то.

Но прообраз алгебры есть алгебра. А измеримые множества всегда составляют алгебру, так что, если измеримы прообразы «лучей», то измеримы и прообразы любых борелевских множеств. Вот и все доказательство.

Хитро, но что-то в этом есть.

«Таков турецкий язык: всего несколько слов, а сказано много» (*Мольер*). Срабатывают понятия кольца, алгебры, в чем их сила.

Приносит свои плоды переход на новый уровень – мышление системами множеств.

Можно приводить другие признаки измеримости; например, измеримость прообразов множеств $\beta < f(x) < \alpha$ для любых α, β.

И что нам в итоге дает «измеримость»?

Вернитесь к интегрированию простых функций. Чтобы определение интеграла работало, требуется, чтобы каждое множество A_n точек *x*, соответствующее одной точке y_n, имело меру $\mu(A_n)$. Что эквивалентно измеримости функции – вспомните определению измеримости. Ведь одна точка y_n измерима!

Интеграл Лебега задается на системе измеримых функций, вот в чем дело.

Все же: измеримых по мере Лебега?

Совсем необязательно. Мера может быть выбрана любой, как увидим.

Попутно отметим следующее:

1) что арифметические действия над измеримыми функциями приводят к измеримой;

2) что измеримая функция от измеримой (*суперпозиция* функций) – измерима;

3) что функция, *эквивалентная* измеримой – измерима;

4) что если последовательность измеримых функций поточечно сходится к некоей функции, то эта функция тоже измерима.

Что значит «эквивалентная»?

Сейчас будет объяснено.

Эквивалентные функции

Функции считают *эквивалентными*, если они совпадают *почти всюду*.

Вот так определение!

Ничего страшного: «почти всюду» – означает: кроме точек, в совокупности имеющих нулевую меру.

Иными словами – кроме конечного или счетного числа точек?

Чаще всего так и есть. Хотя существуют и континуальные множества, тоже имеющие меру нуль.

Идея здесь в том, что во многих случаях (например, применительно к интегралу, к рядам Фурье) эквивалентные функции не различаются: $d\mu = 0$ можно не учитывать при интегрировании (результат-то нулевой). Следовательно, «почти всюду» все равно что «всюду»: эквивалентные функции, будучи поставленными под интегралом, приведут к одному результату. Предмет, уже затрагивавшийся в одной из задач.

Задача. Доказать, что равенство почти всюду является отношением эквивалентности.

Мы должны проверить три требования:

1) $f(x) \overset{п.в.}{=} f(x)$ – не вызывает сомнений;

2) если $f(x) \overset{п.в.}{=} g(x)$, то $g(x) \overset{п.в.}{=} f(x)$ – тоже очевидно;

3) пусть $f(x) \overset{п.в.}{=} g(x)$, $g(x) \overset{п.в.}{=} h(x)$. То есть: $f(x) \neq g(x)$ на множестве *A* меры нуль, $g(x) \neq h(x)$ на множестве *B* меры нуль. Тогда неравенство $f(x) \neq h(x)$ будет на множестве

$A \bigcup B$. Правда, за вычетом таких x_α, что $f(x_\alpha) \neq g(x_\alpha)$ и $g(x_\alpha) \neq h(x_\alpha)$, однако $f(x_\alpha) = h(x_\alpha)$.

Однако $A \bigcup B$ еще до всякого вычитания уже имеет меру нуль по свойству меры. Третий пункт тоже доказан.

Интегрирование произвольных функций

Функцию, теперь уже любую, определяют как *интегрируемую по Лебегу* на *X*, если существует сходящаяся почти всюду (иногда считают: сходящаяся равномерно) к $f(x)$ последовательность суммируемых на *X* простых функций $f_n(x)$.

Предел $\int_X f(x)d\mu$ числовой последовательности $\int_X f_n(x)d\mu$ в этом случае объявляется *интегралом Лебега*.

Интегрируемые функции принято также называть *суммируемыми*.

Между прочим: не замечаете ли жульничества в определении? Оно не бросается в глаза.

Не замечаю…

Пусть существует последовательность простых функций, сходящаяся (в каком-то смысле) к $f(x)$. Но отсюда не следует, что последовательность интегралов тоже имеет предел!

Вообще-то да.

Такое еще надо доказать, иначе определение теряет смысл. Мы это сделаем несколько позже.

Тогда уж еще одна беда. Надо бы вспомнить, что такое сходимость «почти всюду», или «всюду», или «равномерная»…

Тема из вузовского курса, которая, вероятно, забылась.

Речь идет о сходимости последовательностей функций к некоторой функции – пределу:

$f_n(x) \to f(x)$ (при $n \to \infty$).

Если говорим о пределе, значит, надо ввести пространство и метрику в нем?

Верно – в принципе. Но некоторые виды сходимостей унаследованы от обычного анализа, из области действительных чисел. С них и начнем.

Простейшая сходимость – *поточечная*. Функциональная последовательность $f_n(x)$ называется сходящейся поточечно к предельной функции $f(x)$, если для любого *x* (из области определения, разумеется) $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

$f(x)$ – вообще-то функция, но $f(x)$ для конкретного значения *x* является числом. О сходимости числовых последовательностей и говорится. То есть, сходимость имеет место в любой точке *x*, взятой по отдельности.

Я понял.

Сходимость «*почти всюду*» – более слабая. Она означает, что в некоторых точках сходимость (поточечная) может отсутствовать, но множество таких *x* имеет меру нуль.

Тоже вроде бы ясно.

Есть, напротив, более сильная сходимость – *равномерная*. Она означает, что, начиная с какого-то номера *n*, разница $\left|f_n(x) - f(x)\right|$ станет меньше любого малого числа δ – *для всех x*.

Разве здесь не то же самое, как мы определяли поточечную сходимость?

Поточечная сходимость отсюда вытекает. А вот наоборот – нет. Равномерная сходимость требует, чтобы для всех точек *x* значения функции сходились к пределу как бы приблизительно с одинаковой скоростью, «равномерно».

Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ на интервале (0, 1). Понятно, что при $n \to \infty$ она сходится к тождественному нулю для любого *x*, то есть поточечно. Всегда можно выбрать такое *n*, чтобы $\frac{1}{nx}$ оказалось (при фиксированном *x*) меньше наперед заданного положительного числа. Согласны?

Кажется очевидным.

С другой стороны, какую бы константу *c* мы ни задали, при любом *n* найдется такое *x*, что $f_n(x) = \frac{1}{nx} > c$. Равномерная сходимость к нулю отсутствует.

Пора обратиться к уместному замечанию о том, что сходимость предполагает задание метрического пространства. Вспомним пространство $C[0,1]$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с метрикой $\rho(x,y) = \max\left|x(t) - y(t)\right|$. Легко видеть, что сходимость в таком пространстве и есть то, что мы называем равномерной. Так что это – «метрика равномерной сходимости».

Свойства интеграла Лебега

Перечислим свойства интеграла Лебега, для простых функций они очевидны, и легко переносятся на любые интегрируемые.

Во-первых, линейность:

$$\int_A [\alpha f(x) + \beta g(x)] d\mu = \alpha \int_A f(x) d\mu + \beta \int_A g(x) d\mu .$$

Потом элементарное: $\int_A d\mu = \mu(A)$.

Еще: если $m \leq f(x) \leq M$ на всем *A*, то:

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M\mu(a) .$$

И, наконец: $\left|\int_A f(x) d\mu\right| \leq \int_A \left|f(x)\right| dx$.

Свойства, кажется, аналогичны свойствам обычного интеграла.

Да. Но есть и отличия: интегралы Лебега:

$\int_A f(x) d\mu$ и $\int_A \left|f(x)\right| d\mu$ –

или оба существуют, или оба не существуют.

Нельзя ли пояснить?

Сначала отметим, что, если существует интеграл Римана: $\int_a^b f(x)dx$, то существует (и имеет такое же значение) интеграл Лебега: $\int_{[a,b]} f(x)d\mu$. Исключая *несобственные* интегралы.

А это что?

Вот пример несобственного интеграла Римана, который сходится *условно*:

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx.$$

И что в нем такого необычного?

То, что на самом деле речь идет о некоем пределе:

$$\lim \int_1^a \frac{\cos x}{x}dx \text{ при } a \to \infty.$$

Он сходится исключительно в указанном смысле. Если же мы, например, проинтегрируем отдельно положительные «полуволны», а потом отрицательные (с тем, чтобы из первого результата вычесть второй) – ничего не получится, придем к бесконечностям.

Корень тут в том, что $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x}\right|dx$ расходится. Потому-то соответствующий лебегов интеграл не существует.

Мы зашли уже далеко, оттолкнувшись от вопроса: существует ли предел последовательности интегралов $\int_X f_n(x)d\mu$, если $f_n(x)$ – последовательность сходящихся «простых» функций.

Следите за мной: поскольку интеграл – действительное число, то достаточно доказать, что последовательность интегралов фундаментальна, не так ли?

Не могу не согласиться: пространство действительных чисел полно, любая фундаментальная последовательность в нем имеет предел.

Значит, достаточно показать, что:

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu - \int_A f_m(x)d\mu\right| \to 0, \text{ если } f_n(x) \text{ и } f_m(x) \text{ сходятся обе к } f(x).$$

Вроде бы так.

Тогда достаточно показать, что:

$$\int_A |f_n(x) - f_m(x)|d\mu \to 0.$$

Ага, понятно, для чего вам предварительно потребовалось изложить свойства интеграла...

Далее. Полученное выражение, в свою очередь, заведомо не больше, чем $M\mu(A)$, где *M* – наибольшее модуля значение разности функций на *A*. Тоже из тех самых свойств, помните? Ну а эта разность стремится к нулю – из определения равномерной сходимости функций. Доказательство завершено.

Интеграл через пополнение

Догадываюсь, что снова предстоит пополнять пространство, только какое?

Пространство «простых» функций. Чтобы пополнение оказалось пространством любых интегрируемых функций.

Чтобы пополнять, надо иметь метрику. Для пространства функций ее можно ввести разными способами (придем примерно к одному и тому же). Остановимся на таком варианте:

$$\rho(f, g) = \int_A |f(x) - g(x)| d\mu .$$

То, что он годится в качестве метрики, проверьте сами. Кстати, пространство с такой метрикой обозначается L_1 (под интегралом первая степень).

Извините, поправка: здесь полуметрика.

Да, разумеется, из $\rho(f, g) = 0$ не следует, что $f(x) \equiv g(x)$. Будем, как и прежде, рассматривать фактор-пространство классов эквивалентности. Иными словами, эквивалентные функции (совпадающие почти всюду) считаем за одну функцию.

После этой оговорки можно выстроить фундаментальные последовательности – такие, что:

$$\rho(f_m, f_n) = \int_A |f_m - f_n| d\mu \to 0 \text{ при } m \to \infty \text{ и } n \to \infty .$$

Напомним, что речь идет о простых функциях, интеграл для которых – попросту сумма.

К сожалению, пополнение пространства снова ничего не даст, как и в случае с мерой.

Понимаю: фундаментальные последовательности сходятся… к фундаментальным последовательностям же. А надо, чтобы сходились к функциям.

Совершенно верно! Метрика для интересующих нас функций отсутствует: интеграл для них еще только предстоит ввести.

Но можно пойти знакомой дорогой: зажать функцию между простыми.

Пусть $f_n > f > g_n$. Здесь, ясное дело, f_n и g_n простые функции, интегралы от левой и правой частей существуют.

Очевидно: если $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ и $g_n \xrightarrow{п.в.} f$, то и $f_n \xrightarrow{п.в.} g_n$ (аксиома треугольника). Но в таком случае:

$$\rho(f_n, g_n) = \int_A |f_n - g_n| d\mu \to 0 .$$

По знакомому свойству интеграла:

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A g_n d\mu \right| \to 0 .$$

Вывод: если существуют последовательности простых функций f_n и g_n, сходящиеся к произвольной функции почти всюду, то интегралы $\int_A f_n d\mu$ и $\int_A g_n d\mu$ сливаются в одно число. Его и принимают за $\int_A f d\mu$.

Хитро.

В принципе, возможен менее замысловатый путь. Допустим, что *U* и *V* – множества всех простых функций, соответственно, всюду меньших и всюду больших нашей *f*. Даже еще сильнее: почти всюду меньших и почти всюду больших. Тогда если $\sup\int_A u d\mu = \inf\int_A v d\mu$ для $u \in U$ и $v \in V$, значит, *f* интегрируема, и понятно, чему равен интеграл.

Идея зажимания функции между простыми выступает здесь кристально прозрачной. Но если выстраивание ряда все же имеет какую-то видимость конструктивности, то последняя формулировка (совершенно в духе функционального анализа) выглядит уже совершенно неконструктивной. Можем предположить, что существуют функции *f*, для которых условие соблюдается, но непонятно, что это за функции, и велик ли их запас.

Для чего нужен интеграл Лебега

Я так и не понял: как нужно интегрировать по Лебегу?

Чаше всего никак не нужно. Впрочем, один интеграл (уровня детского упражнения) мы, если помните, вычислили.

Тогда зачем все это было?

Повторяю: важен сам факт существования интеграла от таких функций, которые не поддавались традиционному анализу. Важны свойства интеграла. И важны системы интегрируемых функций.

Интегрирование – настолько мощный математический аппарат, что одна только возможность записи в виде интеграла уже позволяет решать серьезные задачи. Интеграл Лебега – обоснование правомерности.

И все-таки, чтобы не было досадно, найдем еще один интеграл.

Задача. Пусть X – пространство с мерой Дирака. На множестве $A \subset X$ задана функция $f(x)$. Найти интеграл $\int_A f(x) d\mu$.

Рекомендуется вернуться назад, чтобы вспомнить, что такое мера Дирака.

Первый вопрос, который надо себе задать: функция $f(x)$ измерима? Вспомним: функция измерима, если в *X* измерим прообраз любого измеримого в *Y* множества. Но относительно меры Дирака измеримы вообще все множества из *X*. Так что ответ положительный.

Движемся дальше: очевидно, что если $x_0 \notin A$ (область интегрирования не содержит той самой выделенной точки x_0), интеграл всегда равен нулю, так как мера *A* нулевая. Половина задачи решена.

Рассмотрим теперь *A*, содержащие x_0. Подобное множество целесообразно разбить на два неперекрывающихся подмножества:

1) $B\{x_0\}$ – состоящее из единственной точки x_0;

2) $C = A \setminus B$ – весь остаток.

И воспользуемся одним свойством интеграла, о котором пока умолчали:

$\int_A f(x) d\mu = \int_B f(x) d\mu + \int_C f(x) d\mu$, если $A = B \cup C$ и $B \cap C = \varnothing$. То есть, если *B* и *C* – взаимно непересекающиеся подмножества *A*.

Разумеется, множества *B* и *C* предполагаются измеримыми. Да и слагаемых может быть более двух.

Как раз такие подмножества у нас и есть! Первое слагаемое справа дает $f(x_0)$ (мера равна единице), второе ноль. Ответ: $\int_A f(x) d\mu = f(x_0)$.

Ради объективности стоит добавить, что имеются другие обобщения интеграла Римана кроме лебеговского. Интересующиеся могут посмотреть, например, *интеграл Даниеля*.

8. Компактность

В оптимизационных задачах нередко возникает одна проблема. Состоящая в том, что искомого максимума (минимума), как оказывается, не существует. Такое свойственно бесконечномерным функциональным пространствам.

И с этой проблемой приходится что-то делать.

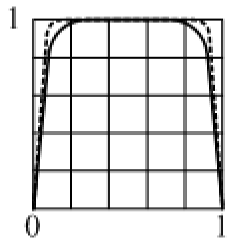
Следует оговориться: материал данного раздела впоследствии, скорее всего, не потребуется. Его следует рассматривать как факультативный.

Катастрофа с оптимизацией

С указанными трудностями сталкиваются, например, *вариационные* задачи.

Что такое вариационные?

Задачи на нахождение функции, доставляющей максимум или минимум (короче говоря: *экстремум*) некоторому функционалу, обычно выражаемому определенным интегралом.



Для любой функции можно привести другую функцию (штриховая линия), площадь под графиком которой еще ближе к 1

Вот пример. На отрезке $[0,1]$ рассматриваются непрерывные функции $f(x)$ – такие, что: $f(0)=f(1)=0$ и $f(x)\le 1$. Надо найти $f(x)$, для которой интеграл $\int_0^1 f(x)dx$ имеет наибольшее значение.

Очевидно, что такой функции не существует – см. рисунок.

Пожалуй, что так. Но не видно большой беды, если мы возьмем не теоретический оптимум, а близко к нему.

Бывают менее прозрачные случаи. Решая задачу из ложной предпосылки, что экстремум существует, можно проморгать просто катастрофические ошибки.

Продолжим наш пример. Вообразим, что $f(x)$, для которой интеграл $\int_0^1 f(x)dx$ максимален, все же существует. Рассмотрим новую функцию: $2f(x)-f^2(x)$. Легко разобраться, что она, во-первых, тоже удовлетворяет заданным условиям. Во-вторых, всегда лежит выше $f(x)$, кроме двух случаев их совпадения: $f(x)\equiv 0$ и $f(x)\equiv 1$ (второй вариант отбрасываем, как противоречащий условию $f(0)=f(1)=0$). Но поскольку принято, что выше $f(x)$ уже ничего нет, приходим к странному выводу, что наибольшая площадь под кривой – у функции, представляющей собой тождественный ноль.

Фантастика! В чем же корень проблемы?

Корень ошибки в том, что доказательство исходит из ложной посылки о существовании максимума. А корень отсутствия максимума в том, что множество рассматриваемых функций бесконечномерно, и при этом не компактно.

Однако сначала разберемся, что у нас делается в привычных, конечномерных пространствах.

Экстремумы в *n*-мерном пространстве

В обычном анализе есть три утверждения (теоремы), относящиеся к одному кругу проблем, и даже отчасти взаимозаменяемые.

Первое из них – *теорема Вейерштрасса*: непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ ограничена на данном отрезке и достигает на нем максимального и минимального значения.

Кажется очевидным: раз непрерывная, значит, не уходит в бесконечность, то есть ограничена. Ну а отсюда прямо следует, что где-то есть максимум и минимум.

Нет, это не доказательство. То, что непрерывная на отрезке функция ограничена сверху и снизу – уже требует строгого доказательства.

Но вторая часть утверждения ведь просто следует из ограниченности. Функция ограничена снизу, значит, где-то достигает минимума?

Не значит. Например, множество положительных чисел ограничено снизу. Назовите наименьшее число.

Ах, да... Согласен.

Из ограниченности следует только наличие верхней и нижней грани, помните? Но не факт, что функция обязана ее достигать. Нужна еще *замкнутость* множества значений, которые она принимает. Впрочем, на самом-то деле факт, и мы его позже докажем.

А пока важно напомнить то, что иллюстрировалось примером: функционал (то есть действительная функция) на ограниченной области *бесконечномерного функционального пространства* – отнюдь не имеет максимума/минимума по умолчанию! Хотя такое было бы крайне удобно.

Вы упомянули три теоремы.

Вторая – *лемма Больцано–Вейерштрасса*: из всякой ограниченной последовательности точек числовой прямой можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Тезис кажется не слишком правдоподобным.

Тем не менее, легко доказывается. Вы и сами сумеете, если я дам начальную подсказку. Надеюсь, понимаете, что речь идет как всегда о бесконечных последовательностях.

Последовательность ограничена – значит, все ее точки лежат внутри отрезка $[a, b]$. Поделим его пополам. Согласны, что хотя бы в одной из половин окажется бесконечное множество точек?

Согласен. Впрочем, я догадался: теперь эту половину снова делим пополам, и так далее. Длина кусочка будет неограниченно уменьшаться, но внутри по-прежнему остается бесконечное множество точек, вот вам и предел.

Точнее, получили фундаментальную последовательность. А то, что имеется предел, следует из полноты числовой прямой.

Тогда уж упомянем и третье утверждение, оно тоже пригодится. *Лемма Гейне–Бореля*: из любого покрытия отрезка $[a, b]$ интервалами можно выделить конечное подпокрытие.

Она находится в родстве с леммой Больцано–Вейерштрасса.

Совсем непохожа.

Смотрите: пусть отрезок покрыт бесконечным множеством интервалов. Оставим лишь минимально необходимое подпокрытие, когда ни один из интервалов нельзя больше удалить: образуется дыра. Мы уже подобным занимались! И можно в каждой такой дыре поставить точку.

Допустим (от противного), что подпокрытие бесконечно. Больцано–Вейерштрасс говорят нам, что среди поставленных точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Дальше понял: раз она сходящаяся, значит, начиная с некоторого номера – все остальные точки будут уже внутри одного какого-то интервала: противоречие!

Верно, поскольку (по построению) каждая точка лежит в одном-единственном интервале.

Перейдем к теореме Вейерштрасса, с которой начали. Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ ограничена на $[a, b]$. Возьмем произвольную последовательность $\{y\}$. Ей будет соответствовать $\{x\}$, не так ли?

Конечно.

Согласно Больцано–Вейерштрассу, в $\{x\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\{x_n\} \to x_0$.

Но, значит, $\{y_n\} \to y_0$ (по определению непрерывности)! Таким образом, любая последовательность из $\{y\}$ сходится, множество значений функции замкнуто. Что и требовалось доказать: замкнутое множество имеет предельную точку – максимум.

Я не уловил: зачем нам теорема Вейерштрасса?

Она дает ответ на важнейший вопрос о *существовании* экстремума. В этой связи докажем полезное следствие: если непрерывная функция $y = f(x)$ неограниченно растет при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$, то в некоторой точке она имеет минимум.

Кажется очевидным…

Однако требует доказательства. Которое несложно: просто проведем горизонталь на уровне $y = \text{const}$, так, чтобы она пересекла график функции. Пересечение всегда возможно по условию! Отрезок $[a, b]$ ограничит то, что ниже горизонтали, а дальше работает теорема Вейерштрасса.

Пересечение может быть не в двух, а в 4, в 6 точках…

Значит, выберем минимальный из минимумов. Или поднимем нашу горизонталь.

Польза теоремы в том, что она (достаточно очевидно) продолжается на функции многих переменных. И во многих задачах позволяет установить существование минимума (или же максимума, если все перевернуть).

Идея компактности

А что делать в бесконечномерных пространствах, где изложенное выше не работает? Идея: определить множества, которые были бы аналогичны отрезку действительной прямой по своим свойствам. Имеется в виду – в отношении тех трех теорем.

Скажем, лемма Больцано–Вейерштрасса справедлива не только на отрезке, но и на любом замкнутом ограниченном множестве в пространстве любого числа n измерений $\mathbb{R}^n$, доказательство на уровне очевидности. Но в бесконечномерных пространствах может быть совсем не так!

Возьмем бесконечномерный замкнутый шар, являющийся ограниченным просто по определению. В то же время на нем можно бесконечно указывать точки, каждый раз – на новой координатной оси, благо запас осей неисчерпаем. Каждая такая новая точка будет располагаться на фиксированном расстоянии от всех предыдущих точек. И их множество не выказывает намерения куда-нибудь сходиться! Говорят, что шар не компактен.

Убедительно...

Теперь определение. Множество $M \subset X$ метрического пространства X называется *компактным*, либо *компактом*, если всякая последовательность в M содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M.

Честно говоря, компактное множество и компакт не одно и то же – в общем случае. Но в метрическом пространстве эти понятия совпадают.

Если рассматривать компакт как новое пространство, то оно всегда полно.

Почему?

Ну, тут уж совсем просто: потому что иначе найдутся последовательности, не сходящиеся к элементу из M. Противоречит определению.

А, ну да... Но тогда, мне кажется, можно утверждать (на том же основании), что компакт обязательно замкнут?

Да, требование необходимое… но не достаточное! Все пространство X замкнуто, но не является компактом.

Почему?

Ну, возьмите хотя бы числовую прямую (она замкнута). Последовательность целых чисел на ней – не имеет сходящейся подпоследовательности.

Имеется более сильное утверждение: *компактное множество всегда ограничено и замкнуто*. Но и оно не является достаточным признаком, посему ищут признаки компактности.

Помните, когда-то мы рассматривали теорему о вложенных шарах?

Да: в полном метрическом пространстве пересечение любой последовательности замкнутых, вложенных друг в друга шаров непусто, если только радиусы стремятся к нулю.

Верно, но для компактных множеств такое пересечение непусто всегда, требование $r \to 0$ излишне. Доказательство опустим.

Понятие об ε-сети

Множество U метрического пространства X называется ε-сетью множества $M \subset X$, если для любого $x \in M$ найдется такой элемент $y \in U$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Иными словами, на множество M «накинута сеть» U, такая, что любая точка множества находится на расстоянии, меньшем ε, от какого-нибудь «узла» сети.

Вы объяснили очень наглядно. А для чего это нужно?

Дело в том, что существует *теорема Хаусдорфа*. Замкнутое подмножество M полного метрического пространства X компактно тогда и только тогда, если при любом $\varepsilon > 0$ у M существует конечная ε-сеть.

В частности, очевидно, что любое замкнутое ограниченное подмножество евклидова пространства компактно. В самом деле, раз оно ограничено, его можно поместить внутрь гиперкуба (n-мерного куба), ребра которого разбить сколь угодно мелкими делениями. Получится сеть узлов в пространстве – как угодно частая, но в конечномерном случае всегда конечная.

То есть, имеем признак компактности?

Вот именно. Разберем его применение при решении задачи, заимствованной из книги.

Доказать, что множество M последовательностей вида $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, подчиненных требованию:

$|x_1| \le 1$, $|x_2| \le \dfrac{1}{2}$, ... , $|x_n| \le \dfrac{1}{2^{n-1}}$, ...

– компактно.

Изюминка в том, что придется построить последовательно две ε-сети. Разберемся с первой: рассмотрим все последовательности $\{x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots\}$ (очевидно, что они содержатся в M). Их множество обозначим U . Эти точки составляют ε-сеть множества M , где $\varepsilon = \dfrac{1}{2^{n-2}}$.

Вроде бы так.

Но есть проблема: эта ε-сеть не является конечной. Тут-то и срабатывает следующий хитрый прием.

Множество U , состоящее из $\{x_1, \dots, x_n\}$ конечномерно. Потому что является множеством точек из $\mathbb{R}^n$ – n-мерного евклидового пространства. А поскольку еще и ограничено, то компактно. Значит, и у него существует конечная ε-сеть: сеть для сети.

Что конкретно за сеть?

Неважно, достаточно признания ее существования!

Таким образом, любая точка (то есть последовательность) из M находится на расстоянии не больше чем ε от точки из U, а она, в свою очередь, на расстоянии не больше чем ε от той самой конечной ε-сети. Значит, последняя является ε-сетью и для исходного множества. Доказательство окончено.

Если вас смущает, что вроде бы $\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon$, то возьмите первоначально $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Нет, не смущает, я же понимаю, что ε произвольно.

Предкомпактность

Вернемся к задаче, с которой начали тему. Имея в виду функционал $\int_0^1 f(x)dx$, по которому ищем оптимум, будем рассматривать пространство функций с метрикой $\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$. Если помните, это пространство L_1.

Осталось ввести дополнительные условия, предусмотренные задачей, сохраняя метрику. Получившееся множество функций, очевидно, некомпактно, так как не замкнуто.

Почему?

Последовательность функций, все более приближающихся к прямоугольнику, фундаментальна (все меньше отличается по метрике), но не имеет предела.

Ну как же, предел есть: сам прямоугольник.

Но он ведь не принадлежит нашему множеству, хотя является элементом L_1. В зависимости от того, как мы определим «концы», функция либо имеет на концах разрывы, либо не обращается там в ноль.

То, на что вы указали, называется (как вы помните) предельной точкой множества.

Понятно: предельная точка может не принадлежать самому множеству, что здесь и имеем.

Тем не менее, ситуация небезнадежна. Если множество все-таки дополнить предельной точкой (той самой «прямоугольной» функцией), оно станет замкнутым.

Множество считается *предкомпактным*, если его замыкание компактно. Полезно знать другое (эквивалентное) определение: множество называется предкомпактным, если у любой его последовательности существует фундаментальная подпоследовательность.

Наше множество функций предкомпактно, поэтому:

1) либо можно поступиться принципами, и считать оптимумом предельную точку – прямоугольник (хотя он и не удовлетворяет условиям);

2) либо к оптимуму можно подойти как угодно близко.

О чем я и сказал сразу!

Но не всякое множество предкомпактно, вот где трудность.

Решим задачу из задачника. Предкомпактно ли множество функций в пространстве $C[0,1]$: $x(t) = \sin nt$?

Заметим, $\sin nt$ не что иное как множество гармоник; при $n \to \infty$ они становятся все более «частыми». Вопрос: любая ли подпоследовательность при $n \to \infty$ будет фундаментальной?

Нет, и я могу привести контрпример: берем n = 1, 2, 4, 8, ... , тогда для любой пары рядом стоящих гармоник найдется точка, где колебания будут в «противофазе». Расстояние $\rho(x_n, x_{n+1})$ всегда равно двум.

Все верно. Так что ответ отрицательный.

Задача. Предкомпактно ли множество функций $x(t) = \sin(t+n)$?

> Имеем здесь гармонику с одной частотой, меняется только ее сдвиг фазы. Но заметьте: фаза на самом деле будет равна остатку от деления n на 2π. При $n \to \infty$ это число может быть каким угодно. Ясно интуитивно, что из него можно выбрать и фундаментальную последовательность.
>
> Говоря более строго, фаза будет равна $n - 2k\pi$. Всегда найдутся n и k такие, что рациональное $\frac{n}{k}$ будет сколь угодно близко к любому действительному числу. Правда, это еще не говорит о близости по метрике. Но и она не вызывает сомнений.
>
> Значит, множество предкомпактно.

Раз ответ таков, то интересно: что же является пополнением множества $\sin(t+n)$? Ответ очевиден: множество функций $\sin(t+n)$, у которого n уже любые действительные числа.

Теорема Арцела

Не всякое множество компактно, но уже предкомпактность, как мы видели, отчасти спасает положение. Поэтому важно иметь мощные критерии предкомпактности.

Удобным инструментом может оказаться *теорема Арцела*. Она относится к множеству функций, заданных в пространстве $C[a,b]$. Помните, что это?

Уже сто раз встречалось. Пространство непрерывных функций на отрезке, причем задана «метрика равномерной сходимости».

Теорема устанавливает условия предкомпактности множества функций. Но предварительно следует ввести два новых термина.

Функции $x(t)$ множества $M \subset C[a,b]$ называются *равномерно ограниченными*, если $|x(t)| < K$, где константа K общая для всех $x(t) \in M$.

Функции $x(t)$ множества $M \subset C[a, b]$ называются *равностепенно непрерывными*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что при $|t_1 - t_2| < \delta$ выполняется $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ …

Обычное условие непрерывности из учебника матанализа.

Но теперь добавляем: …выполняется для всех $x(t) \in M$. Для всех разом!

Хорошо, в чем же теорема?

С ней теперь просто. Множество функций $M \subset C[a, b]$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно:

1) равномерно ограничено;

2) равностепенно непрерывно.

Надеюсь, доказывать теорему не придется?

Это излишне. Зато посмотрим, не упростит ли она решение пары наших задач – с анализом множеств $x(t) = \sin nt$ и $x(t) = \sin(t + n)$. Оба множества равномерно ограничены.

Естественно, раз все функции не выходят по модулю за единицу.

Осталось разобраться с равностепенной непрерывностью. Функции из второго множества различаются только сдвигом. Поэтому достаточно требования непрерывности каждой, которое обеспечено.

С первым множеством не так. При $n \to \infty$ синусоиды идут все «круче». Поэтому если для каких-то функций выполнилось $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$, всегда можно найти такое n, при котором данное условие нарушится. Равностепенная непрерывность отсутствует, множество не предкомпактно.

* * *

Получив начальные сведения, мы готовы перейти к важному разделу функционального анализа: линейной теории (теории линейных пространств, в особенности функциональных). Именно это и ждет нас впереди.