Кинетический момент в СТО

Вращательное движение даже в обычной механике доставляет трудности; в специальной теории относительности к нему и подступаться страшно. Но мы попытаемся!

Для понимания материала обязательно владение тензорным аппаратом.

Тензор момента

В классической механике известен *кинетический момент* (*момент импульса*), сохраняющийся для замкнутой системы, что является следствием изотропности пространства. Примем для начала, что физическая система состоит из единственной материальной точки (частицы), текущее расстояние от начала координат $\mathbf{r}$. Вектор момента импульса определяется как векторное произведение:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rp}].$$

Отметим, что кинетический момент всегда отнесен к опорной точке. При сдвиге начала пространственных координат (*трансляции*) он изменится. Так обстоит дело в нерелятивистской механике; в СТО, как увидим, момент меняется и при смещении начала отсчета времени.

Вектор $\mathbf{M}$ (как векторное произведение) аксиальный, или псевдовектор. Значит, в полном виде момент является трехмерным антисимметричным тензором 2-го ранга:

$$\begin{bmatrix} 0 & -M_z & M_y \\ M_z & 0 & -M_x \\ -M_y & M_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Или, раскрывая векторное произведение покомпонентно:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_y p_x - x_x p_y & x_z p_x - x_x p_z \\ x_x p_y - x_y p_x & 0 & x_z p_y - x_y p_z \\ x_x p_z - x_z p_x & x_y p_z - x_z p_y & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь перейдем к 4-представлению, для чего дополним данный тензор до 4-мерного – просто продолжив нумерацию на нулевой индекс:

$$M^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & x^1 p^0 - x^0 p^1 & x^2 p^0 - x^0 p^2 & x^3 p^0 - x^0 p^3 \\ x^0 p^1 - x^1 p^0 & 0 & x^2 p^1 - x^1 p^2 & x^3 p^1 - x^1 p^3 \\ x^0 p^2 - x^2 p^0 & x^1 p^2 - x^2 p^1 & 0 & x^3 p^2 - x^2 p^3 \\ x^0 p^3 - x^3 p^0 & x^1 p^3 - x^3 p^1 & x^2 p^3 - x^3 p^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Разумеется, здесь участвуют уже компоненты 4-мерного импульса, иначе не получилось бы тензора.

Совершенно аналогично тензору поля, помимо трехмерного псевдовектора $\mathbf{M}$ является еще один трехмерный истинный вектор с компонентами:

$$(x^0 p^1 - x^1 p^0,\ x^0 p^2 - x^2 p^0,\ x^0 p^3 - x^3 p^0),$$

заполняющий левый столбец и верхнюю строку.

Что это за вектор? Подставим, как положено:

$$p^0 = \frac{\mathscr{E}}{c},\ x^0 = ct.$$

Тогда компоненты нашего нового вектора получают вид:

$$\left(ctp^1 - x^1\frac{\mathscr{E}}{c}, ctp^2 - x^2\frac{\mathscr{E}}{c}, ctp^3 - x^3\frac{\mathscr{E}}{c}\right).$$

Попросту имеем здесь разность: $ct\mathbf{p} - \dfrac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c}$.

Окончательно, тензор четырехмерного момента можно записать точно так же, как делается для тензора поля. Как образованный двумя трехмерными векторами:

$$M^{ik} = (\mathbf{N}, \mathbf{M}),\ \text{где}\ \mathbf{N} = ct\mathbf{p} - \frac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c}.$$

Кажется, странно: один из членов пропорционален t, и как бы неограниченно нарастает… Вообще тензоры вводятся для того, чтобы отвязаться от произвольного выбора систем координат; но тензор момента весьма своеобразный! Хотя и является характеристикой физической системы, но «привязан» к системе отсчета (как по координатам, так и по времени). Посему ценность момента лишь в том, что для *замкнутых систем* (изолированных от внешних взаимодействий) он сохраняется: $\dfrac{dM^{ik}}{dt} = 0$.

А так как сохраняется $\mathbf{M}$, то, следовательно, и «новый» вектор $\mathbf{N}$.

Переходим к замкнутой системе

Замкнутые системы состоят из многих взаимодействующих между собой частиц (кроме одного вырожденного случая, о котором ниже). Значит, пару векторов, составляющих тензор кинетического момента, правильно записать так:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i [\mathbf{r}_i\mathbf{p}_i],\ \mathbf{N} = \sum_i \mathbf{N}_i = \sum_i \left(ct\mathbf{p}_i - \frac{\mathscr{E}_i\mathbf{r}_i}{c}\right).$$

Здесь индекс i – номер частицы. Кстати, можно преобразовать:

$$\mathbf{N} = ct\mathbf{p} - \sum_i \frac{\mathscr{E}_i\mathbf{r}_i}{c},\ \text{где}\ \mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i\ \text{– суммарный импульс.}$$

Далее придется оперировать суммарным импульсом и суммарной энергией частиц. Помня, однако, что они не исчерпывают энергии (а значит, и импульса) системы в целом! Даже невесомые связи между материальными точками запасают в себе энергию «натяжения», то же относится и к полю, удерживающему частицы в системе.

Импульс «связи» нулевой лишь в том случае, если начало координат совмещено с центром инерции (о котором ниже).

$\mathbf{M}$ является привычным аксиальным вектором момента системы, только релятивистским. А что за физический смысл «добавочного» полярного вектора $\mathbf{N}$?

Центр инерции

Чтобы получить ответ, достаточно поделить $\mathbf{N} = ct\mathbf{p} - \sum_i \frac{\mathscr{E}_i \mathbf{r}_i}{c}$ на $\mathscr{E}/c$, где $\mathscr{E}$ та самая суммарная энергия. Первый член: $\frac{c^2 t\mathbf{p}}{\mathscr{E}}$, и, учитывая стандартное соотношение $\mathscr{E}\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2$, имеем попросту $\mathbf{v}t$. Так как $\mathbf{p}$ суммарный импульс частиц, соответствующая скорость $\mathbf{v}$ является скоростью их *центра инерции*. И она – константа, что следует из постоянства $\mathbf{p}$ и $\mathscr{E}$. Центр инерции замкнутой системы движется в ИСО по прямой (в чем не было сомнений).

Второй член дает:

$\sum_i \frac{\mathscr{E}_i \mathbf{r}_i}{\mathscr{E}}$, обозначим эту величину $\mathbf{r}(t)$.

Из $\mathbf{N} = \mathrm{const}$ следует: $\mathbf{v}t - \mathbf{r}(t) = \mathrm{const}$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathrm{const}$.

Итак, точка с радиус-вектором $\mathbf{r}(t) = \sum_i \frac{\mathscr{E}_i \mathbf{r}_i}{\mathscr{E}}$ движется со скоростью $\mathbf{v}$ центра инерции системы, она-то и является этим центром.

В нерелятивистской механике положение центра инерции (или центра масс) определяется иначе:

$\sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{m}$ (m – суммарная масса).

Упоминать «релятивистскую массу» – дурной тон в физике. Но трудно удержаться, чтобы не заметить: СТО на место обыкновенных масс просто помещает релятивистские массы $\mathscr{E}/c^2$.

Решаем задачу

Задача. Найти тензор кинетического момента свободной частицы относительно начала координат.

Надеюсь, что возражений типа: «откуда возьмется момент, если ничего не вращается» – от грамотного читателя не последует. Кстати, перед нами тот «вырожденный случай», когда единственная частица составляет, тем не менее, замкнутую систему.

Зададим движение частицы таким:

$$\mathbf{r}(t) = (vt, y, 0)$$

– в направлении оси *X*, отступив от нее на $y = \mathrm{const}$.

Тогда векторы скорости и импульса:

$\mathbf{v}(t) = (v, 0, 0)$, $\mathbf{p}(t) = (p, 0, 0)$. Конечно, p – релятивистский импульс. И здесь опять пригодится формула $\mathscr{E} = \frac{pc^2}{v}$.

Находим компоненты 3-векторов, составляющих тензор:

$$N_x = ctp^1 - \frac{\mathscr{E} r^1}{c} = ctp - cp\frac{vt}{v} = 0,\ M_x = x^2 p^3 - x^3 p^2 = 0,$$

$$N_y = ctp^2 - \frac{\mathscr{E} r^2}{c} = 0 - \frac{\mathscr{E} y}{c} = -\frac{\mathscr{E}}{c} y,\ M_y = x^3 p^1 - x^1 p^3 = 0,$$

$$N_z = ctp^3 - \frac{\mathscr{E} r^3}{c} = 0,\ M_z = x^1 p^2 - x^2 p^1 = 0 - py = -py.$$

Искомый тензор:

$$M^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mathscr{E}}{c} y & 0 \\ 0 & 0 & py & 0 \\ \frac{\mathscr{E}}{c} y & -py & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все компоненты тензора от времени не зависят, как и положено. Если путь частицы пролегает через начало координат ($y = 0$), тензор момента ноль.

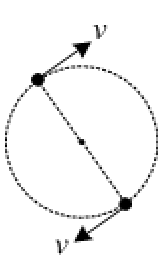
Самостоятельно проверьте, что центр инерции частицы совпадает с ней самой. Кстати, такая проверка послужит подтверждением догадки, что $\mathbf{r}(t)$ является центром инерции системы (в общем-то тут была догадка, не заметили?)

Преобразование центра инерции

При $t = 0$ вектор $\mathbf{N}$ (с точностью до постоянного множителя $\mathscr{E}/c$) соответствует $\mathbf{r}(0)$. Вот вам и физический смысл $\mathbf{N}$: радиус-вектор центра инерции в нулевой момент времени. Поразительно, $\mathbf{N}$ не зависит от времени, но изменяется при смене начала отсчета времени! Откуда и удивившее нас t в явном виде. Как и ожидалось, в СТО тензор момента зависит от положения начала отсчета четырехмерных координат.

Очевидно, если начало координат совпадает с центром инерции системы, то всегда $\mathbf{N} = 0$.

Конечно, вектор $\mathbf{r}(t) = \sum_i \frac{\mathscr{E}_i \mathbf{r}_i}{\mathscr{E}}$ не лоренц-инвариантен. Он не является пространственной частью какого-либо 4-вектора. При смене системы отсчета положение центра масс системы «относительно ее самой», как правило, смещается. Что увидим на примере.



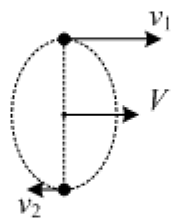
Пара идентичных частиц связаны так, что совершают круговое движение на расстоянии r от общего центра вращения, расположенного в начале координат, как на рисунке. Имеем замкнутую систему. Из соображений симметрии: $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$, индексы – номера частиц. Суммарный тензор момента:

$M^{ik} = (0, \mathbf{M})$, где $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$.

$\mathbf{N} = 0$ по понятной причине.

Вводя привычную систему координат (ось *X* вправо, *Y* вверх, *Z* на нас), по «правилу буравчика» определяем, что вектор $\mathbf{M}$ имеет единственную составляющую M_z отрицательного знака – «от нас».

Перейдем в другую ИСО, в которой наша система совершает, как целое, поступательное движение вдоль оси *X* со скоростью *V*. На втором рисунке зафиксирован момент, когда оба тела находятся на одной вертикали. Траектория движения частиц претерпела «лоренцево сжатие», скорости изменились соответственно правилам преобразования.



Мы хотим преобразовать в новую ИСО вектор $\mathbf{N}$, что сделаем весьма оригинально. Данный вектор преобразуется как вектор электрического поля $\mathbf{E}$. Точнее, как $-\mathbf{E}$. Сравните тензоры: момента – $M^{ik} = (\mathbf{N}, \mathbf{M})$, поля – $F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$.

Формула преобразования для $\mathbf{E}$ известна:

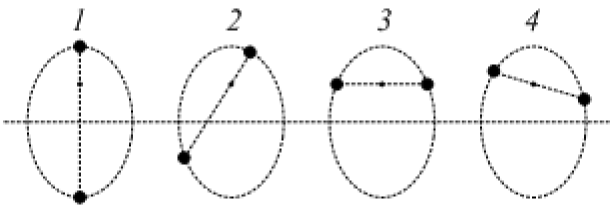
$E'_y = E_y + \dfrac{V}{c} H_z$. У нас:

$N'_y = N_y - \dfrac{V}{c} M_z$ (минус по понятной причине).

Взята компонента $\mathbf{N}$, которой соответствует единственная ненулевая компонента $\mathbf{M}$.

Учитывая, что $N_y = 0$, делим на $\mathcal{E}/c$, и имеем в итоге: $y(0) = -\dfrac{V}{\mathcal{E}} M_z = \dfrac{V}{\mathcal{E}} M$. Здесь $y(0)$ вертикальная (и единственная!) компонента вектора $\mathbf{r}(0)$ – положения центра инерции при $t = 0$.

Вывод? Траектория центра инерции, совпадавшая первоначально с осью *X*, при переходе в новую систему отсчета приподнялась на $\dfrac{V}{\mathcal{E}} M$. На рисунке показаны «кадры» положений тел; в каждое мгновение они лежат на концах отрезка, проходящего через центр инерции. Перемещение по часовой стрелке.



По рисунку отлично видно, как тело, находящееся «впереди» по ходу движения, как бы отстает от «заднего». Так и должно быть!