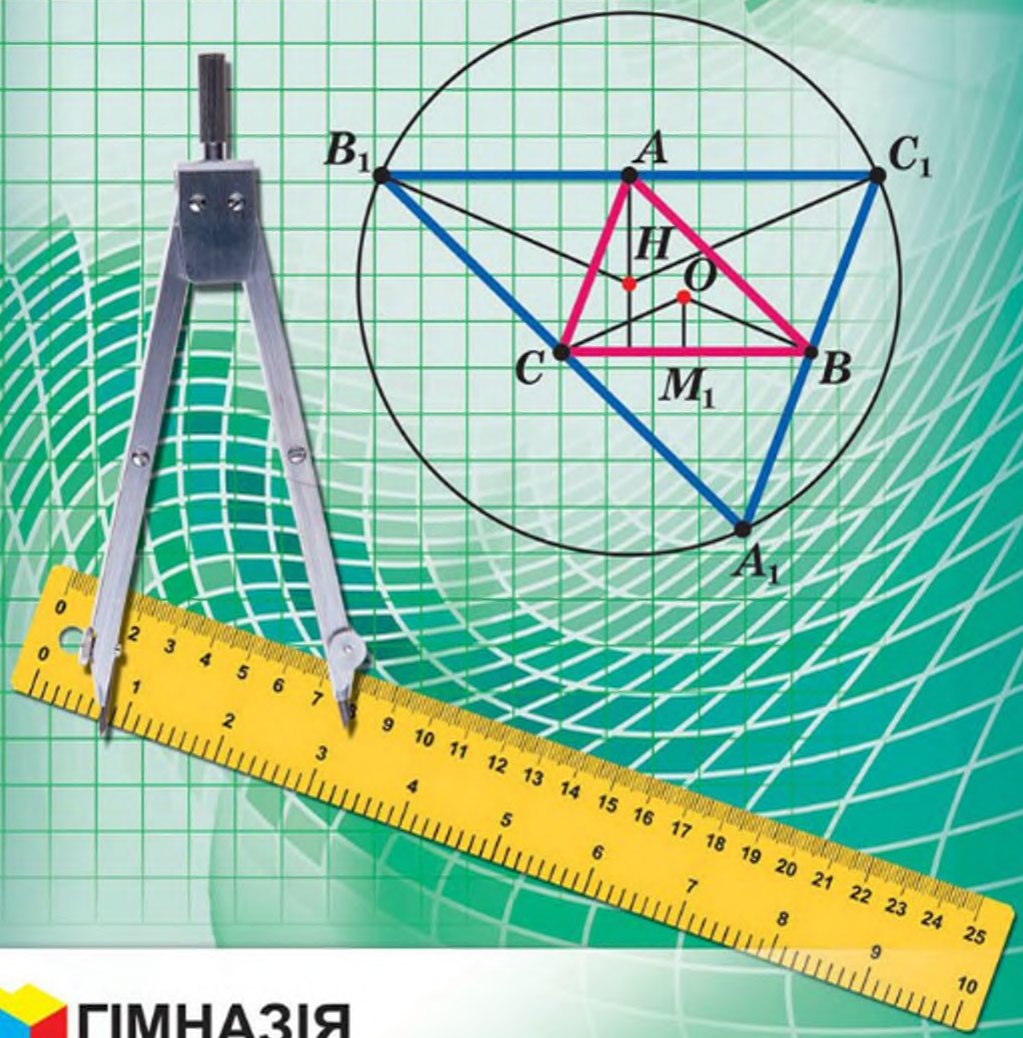
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

8

ГЕОМЕТРІЯ



ГІМНАЗІЯ

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
М52

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 208 с. : іл.
ISBN 978-966-474-000-0.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, 2016
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, художнє оформлення, 2016

ISBN 978-966-474-000-0

ВІД АВТОРІВ

Любі восьмикласники!

У цьому навчальному році ви продовжуватиме вивчати геометрію. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу і красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, що позначено «зірочкою» (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі, розміщені в кінці кожного параграфа.

Кожний пункт завершується рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни: вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Звертаємо увагу на те, що в підручнику наявні задачі на побудову. Вони не є обов'язковими для розгляду. Цей матеріал доцільно використовувати лише в тому разі, коли учні вже ознайомлені з відповідним розділом з курсу геометрії 7 класу.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Тож перетворімо разом шкільний курс геометрії в зрозумілий і привабливий предмет.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;

доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;

доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;

▲ закінчення доведення теореми;

● закінчення розв'язання задачі;

рубрика «Коли зроблено уроки».

ЧОТИРИКУТНИКИ §1.

У цьому параграфі розглядається знайома вам геометрична фігура **чотирикутник**. Ви ознайомитеся з окремими видами чотирикутника: паралелограмом, прямокутником, ромбом, квадратом, трапецією, вивчите властивості цих фігур і дізнаєтеся про ознаки, за допомогою яких серед чотирикутників можна розпізнати зазначені фігури.

Ви вивчите властивості відрізка, який сполучає середини сторін трикутника, і переконаєтеся в тому, що ці властивості можуть слугувати ключем до розв'язування цілого ряду задач.

Як виміряти дугу кола? Навколо якого чотирикутника можна описати коло? У який чотирикутник можна вписати коло? Опанувавши матеріал цього параграфа, ви отримаєте відповіді й на ці запитання.

1. Чотирикутник та його елементи

На рисунку 1 відрізки AB і BC мають тільки одну спільну точку B, яка є кінцем кожного з них. Такі відрізки називають **сусідніми**. На рисунку 2 кожні два відрізки є сусідніми.

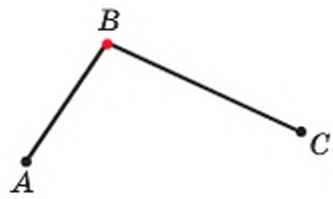


Рис. 1

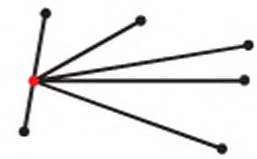


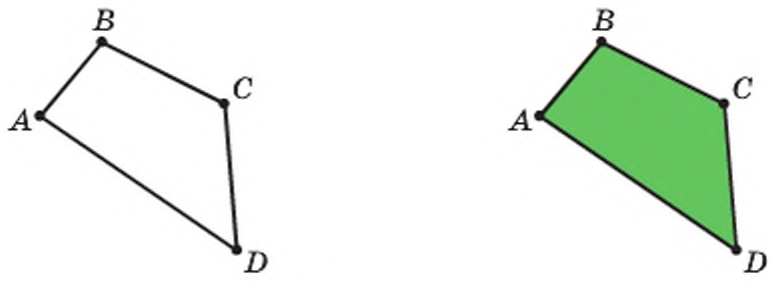
Рис. 2

Відрізки AB і CD на рисунку 3 не є сусідніми.

а *б*

Рис. 3

Розглянемо фігуру, яка складається із чотирьох точок A, B, C, D і чотирьох відрізків AB, BC, CD, DA таких, що ніякі два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок (рис. 4, *а*).



а *б*

Рис. 4

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 4, *б* зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB, BC, CD і DA називають **чотирикутником**. Точки A, B, C, D називають **вершинами** чотирикутника, а відрізки AB, BC, CD, DA — **сторонами** чотирикутника.

На рисунку 5 зображено фігури, що складаються із чотирьох відрізків AB, BC, CD, DA та частини площини, яку вони обмежують. Проте ці фігури не є чотирикутниками. Поясніть чому.

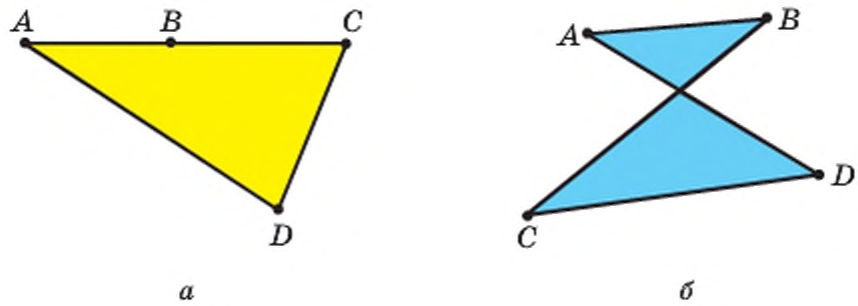


Рис. 5

Сторони чотирикутника, які є сусідніми відрізками, називають **сусідніми сторонами** чотирикутника. Вершини, які є кінцями однієї сторони, називають **сусідніми вершинами** чотирикутника. Сторони, які не є сусідніми, називають **протилежними сторонами** чотирикутника. Несусідні вершини називають **протилежними вершинами** чотирикутника.

На рисунку 6 зображено чотирикутник, у якому, наприклад, сторони MQ і MN є сусідніми, а сторони NP і MQ — протилежними. Вершини Q і P — сусідні, а вершини M і P — протилежні.

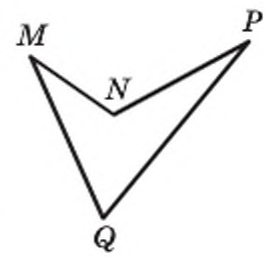
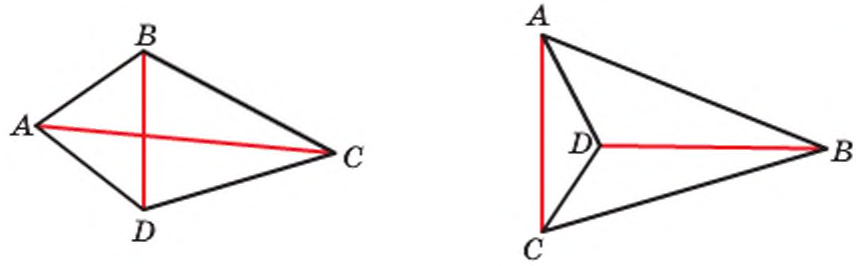


Рис. 6

Чотирикутник називають і позначають за його вершинами. Наприклад, на рисунку 4, *б* зображено чотирикутник $ABCD$, а на рисунку 6 — чотирикутник $MNPQ$. У позначенні чотирикутника букви, що стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам чотирикутника. Наприклад, чотирикутник, зображений на рисунку 6, можна позначити ще й так: $PQMN$, або $MQPN$, або $NPQM$ тощо.

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають **периметром** чотирикутника.



а *б*

Рис. 7

Відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника, називають **діагоналлю**. На рисунку 7 відрізки AC і BD — діагоналі чотирикутника $ABCD$.

Кути ABC, BCD, CDA, DAB (рис. 8) називають **кутами** чотирикутника $ABCD$. У цьому чотирикутнику всі вони менші від розгорнутого кута. Такий чотирикутник називають **опуклим**. Однак існують чотирикутники, у яких не всі кути менші від розгорнутого. Наприклад, на рисунку 9 кут B чотирикутника $ABCD$ більший за 180°. Такий чотирикутник називають **неопуклим**[1].

Кути ABC і ADC називають **протилежними кутами** чотирикутника $ABCD$ (рис. 8, 9). Також протилежними є кути BAD і BCD.

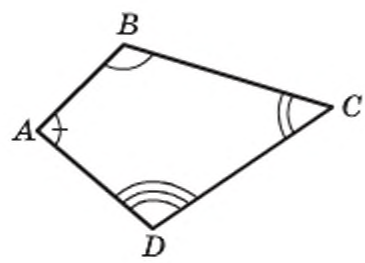


Рис. 8

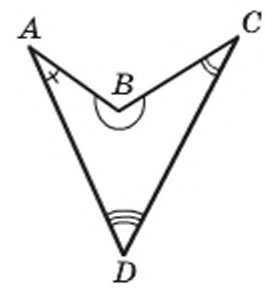
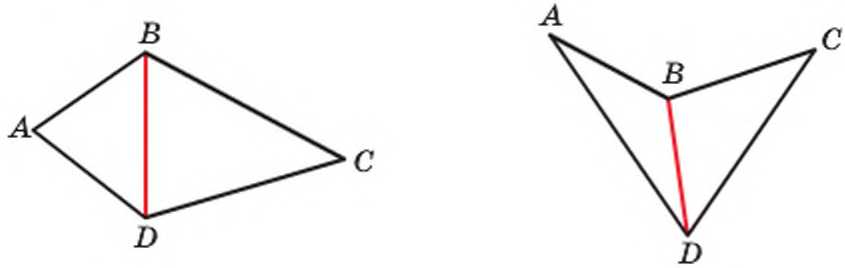


Рис. 9

Теорема 1.1. ***Сума кутів чотирикутника дорівнює*** **360°.**

Доведення. ⊙ Проведемо в чотирикутнику діагональ, яка розбиває його на два трикутники. Наприклад, на рисунку 10 це діагональ BD. Тоді сума кутів чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі кутів трикутників ABD і CBD. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то сума кутів чотирикутника дорівнює 360°. ▲

[1] Докладніше з поняттям «опуклість» ви ознайомитеся в п. 19.



а *б*

Рис. 10

Наслідок. ***У чотирикутнику тільки один із кутів може бути більшим за розгорнутий.***

Доведіть цю властивість самостійно.

Задача 1. Доведіть, що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін.

Розв'язання. Розглянемо довільний чотирикутник $ABCD$ (рис. 11). Покажемо, наприклад, що $AB < AD + DC + CB$.

Проведемо діагональ AC. Застосовуючи нерівність трикутника для сторін AB і AC відповідно трикутників ABC і ADC, отримуємо нерівності: $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

Звідси $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Отже, $AB < AD + DC + CB$.

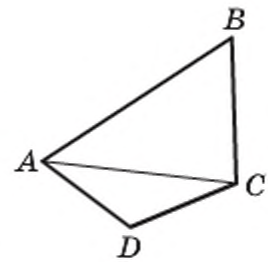


Рис. 11

Задача 2. Побудуйте чотирикутник за двома сусідніми сторонами та чотирма кутами, кожний з яких менший від розгорнутого.[1]

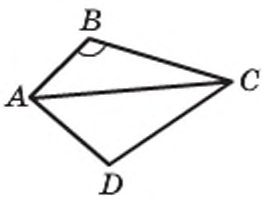


Рис. 12

Розв'язання. На рисунку 12 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому відомо довжини сторін AB і BC, а також усі його кути.

У трикутнику ABC відомо дві сторони AB і BC та кут B між ними. Отже, цей трикутник можна побудувати. Тепер можемо від променів AB і CB відкласти кути, які дорівнюють кутам чотирикутника при вершинах A і C.

Проведений аналіз показує, як будувати шуканий чотирикутник.

[1] У підручнику задачі на побудову не є обов'язковими для розгляду.

Будуємо трикутник за двома даними сторонами чотирикутника та кутом між ними. На рисунку 12 це трикутник ABC. Далі від променів AB і CB відкладаємо два відомих кути чотирикутника. Два побудованих промені перетинаються в точці D. Чотирикутник $ABCD$ — шуканий.

1. Поясніть, які відрізки називають сусідніми.
2. Поясніть, яку фігуру називають чотирикутником.
3. Які сторони чотирикутника називають сусідніми? протилежними?
4. Які вершини чотирикутника називають сусідніми? протилежними?
5. Як позначають чотирикутник?
6. Що називають периметром чотирикутника?
7. Що називають діагоналлю чотирикутника?
8. Який чотирикутник називають опуклим?
9. Сформулюйте теорему про суму кутів чотирикутника.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1.° Накресліть чотирикутник, у якому:
1) три кути тупі;
2) кути при сусідніх вершинах прямі, а два інших не є прямими;
3) одна діагональ точкою перетину діагоналей ділиться навпіл, а друга не ділиться навпіл;
4) діагоналі перпендикулярні.

2.° Накресліть довільний чотирикутник, позначте його вершини буквами M, K, E, F. Укажіть пари його сусідніх сторін, протилежних сторін, протилежних вершин. Запишіть які-небудь три позначення цього чотирикутника.

3.° Накресліть чотирикутник, у якому:
1) три кути гострі;
2) два протилежних кути прямі, а два інших не є прямими;
3) діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

ВПРАВИ

4.° Серед фігур, зображених на рисунку 13, укажіть чотирикутники.

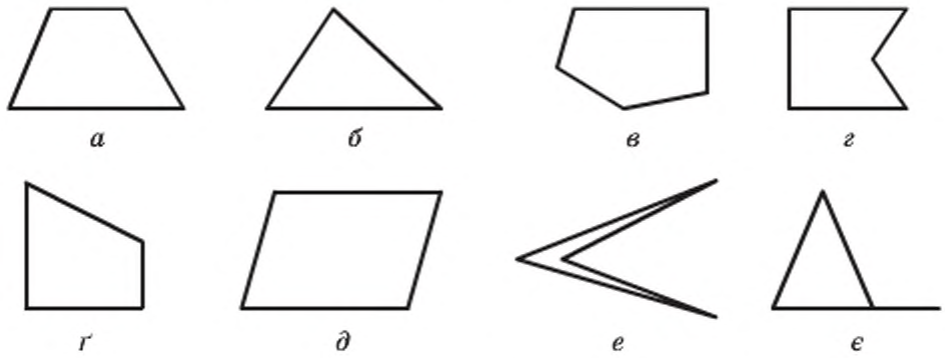


Рис. 13

5.° Наведіть чотири яких-небудь позначення чотирикутника, зображеного на рисунку 14. Укажіть:

1) вершини чотирикутника;
2) його сторони;
3) пари сусідніх вершин;
4) пари протилежних вершин;
5) пари сусідніх сторін;
6) пари протилежних сторін;
7) діагоналі чотирикутника.

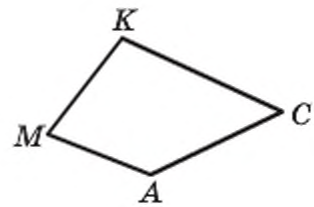


Рис. 14

6.° Серед чотирикутників, зображених на рисунку 15, укажіть опуклі.

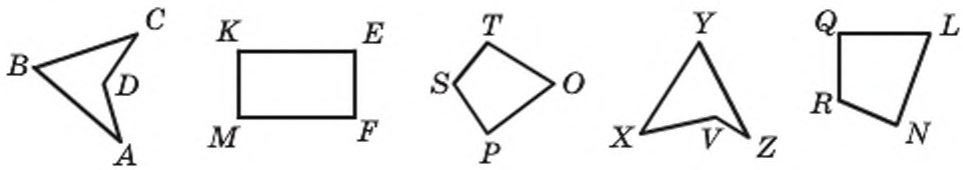


Рис. 15

7.° Чому дорівнює четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють 78°, 89° і 93°?

8.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони рівні між собою.

9.° У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle B = 150°$, $\angle A = \angle C = \angle D$. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

10.° Один із кутів чотирикутника у 2 рази менший від другого кута, на 20° менший від третього та на 40° більший за четвертий. Знайдіть кути чотирикутника.

11.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 10 і 21. Чи є цей чотирикутник опуклим?

12.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо три його кути пропорційні числам 4, 5 і 7, а четвертий кут дорівнює їхній півсумі. Чи є цей чотирикутник опуклим?

13.° Чи може чотирикутник мати:
1) три прямих кути й один гострий;
2) три прямих кути й один тупий;
3) чотири прямих кути;
4) чотири гострих кути;
5) два прямих і два тупих кути;
6) два прямих кути, один гострий та один тупий?
У разі ствердної відповіді нарисуйте такий чотирикутник.

14.° Периметр чотирикутника дорівнює 63 см. Знайдіть його сторони, якщо друга сторона становить $\frac{2}{3}$ першої, третя — 50 % другої, а четверта — 150 % першої.

15.° Знайдіть сторони чотирикутника, якщо одна з них на 2 см більша за другу, на 6 см менша від третьої, у 3 рази менша від четвертої, а периметр дорівнює 64 см.

16.° У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і BC рівні, а діагональ BD утворює із цими сторонами рівні кути. Доведіть, що сторони CD і AD теж рівні.

17.° Діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, одна з його сторін дорівнює 6 см. Чому дорівнює протилежна їй сторона чотирикутника?

18.° У чотирикутнику $MNKP$ відомо, що $MN = NK$, $MP = PK$, $\angle M = 100°$. Знайдіть кут K.

19.° У чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC утворює зі сторонами AB і AD рівні кути та зі сторонами CB і CD також рівні кути, $AB = 8$ см, $BC = 10$ см. Знайдіть периметр чотирикутника $ABCD$.

20.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Бісектриси AK і BM трикутника перетинаються в точці O. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

21.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Висоти AE і BF трикутника перетинаються в точці H. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

22.• Знайдіть діагональ чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 80 см, а периметри трикутників, на які ця діагональ розбиває даний чотирикутник, дорівнюють 36 см і 64 см.

23.• Чи можуть сторони чотирикутника дорівнювати:
1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

24.•• У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = \angle C = 90°$. Доведіть, що бісектриси двох інших кутів чотирикутника або паралельні, або лежать на одній прямій.

25.•• Доведіть, що коли бісектриси двох протилежних кутів опуклого чотирикутника паралельні або лежать на одній прямій, то два інших кути чотирикутника рівні.

26.•• Побудуйте чотирикутник за його сторонами та одним із кутів.

27.•• Побудуйте чотирикутник за трьома сторонами та двома діагоналями.

28.•• Побудуйте чотирикутник за його сторонами та однією з діагоналей.

29.* Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за кутами A і B, сторонами AB і BC та сумою сторін AD і CD.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

30. Пряма c перетинає кожну з прямих a і b (рис. 16). Укажіть пари різносторонніх і пари односторонніх кутів, які при цьому утворилися. Яке взаємне розміщення прямих a і b, якщо: 1) $\angle 1 = \angle 4$; 2) $\angle 1 = 20°$, $\angle 3 = 170°$?

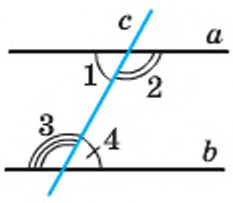


Рис. 16

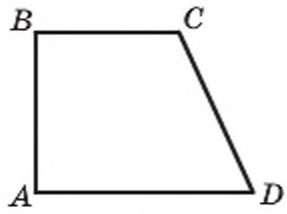


Рис. 17

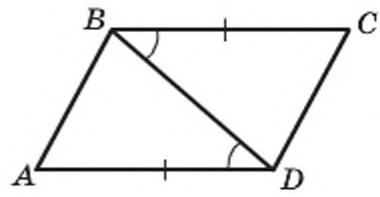


Рис. 18

31. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 17) $\angle C = 110°$, $\angle D = 70°$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

32. У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle C = 100°$. Чи є паралельними прямі: 1) BC і AD; 2) AB і CD?

33. На рисунку 18 $AD = BC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Доведіть, що $AB = CD$ і $AB \parallel CD$.

34. Відрізок BK — бісектриса трикутника ABC. Пряма DK паралельна стороні AB і перетинає сторону BC у точці D, $\angle BDK = 116°$. Знайдіть кут BKD.

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 12, 13, 14 на с. 188, 189.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

35. Білу площину довільно забризкано чорною фарбою. Доведіть, що на площині знайдеться відрізок завдовжки 1 м, кінці якого зафарбовано одним кольором.

ДЕРЗАЙТЕ!

Задачу 29 позначено «зірочкою» (*). Це означає, що вона належить до задач підвищеної складності. Хоча таких задач не буде на самостійних і контрольних роботах, їх у підручнику чимало. У вас може виникнути запитання: «Навіщо ж витрачати час і сили на складні задачі, якщо вони не є обов'язковими для розв'язування, а високу оцінку можна заробити й значно меншими зусиллями?» На нашу думку, найкращу відповідь на це запитання можна знайти в книзі «Математика й романтика» відомого українського геометра та педагога Миколи Івановича Кованцова. Він писав: «Любі друзі! Беріться за розв'язування складних математичних задач! І тих, які щойно поставлені, і тих, які вже багато десятиліть або століть не піддаються розв'язуванню. Вас спіткають страждання й розчарування, коли здаватиметься, що ви марно витратили роки на пошуки примари, яка від вас ухиляється. Усе може бути. Але ви будете сторицею винагороджені, коли одного чудового дня опинитеся перед тією завітною ціллю, до якої так довго й складно йшли. Не будьте байдужими, інакше на вас чекає духовна смерть».

М. І. Кованцов
(1924–1988)

М. І. Кованцов майже 30 років очолював кафедру геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Його перу належить понад 200 наукових і науково-популярних праць.

Микола Іванович виховав десятки вчених, які сьогодні працюють як в Україні, так і в багатьох країнах світу.

2. Паралелограм. Властивості паралелограма

Означення. Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

На рисунку 19 зображено паралелограм $ABCD$. За означенням паралелограма маємо: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Розглянемо деякі властивості паралелограма.

Теорема 2.1. ***Протилежні сторони паралелограма рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 19 зображено паралелограм $ABCD$. Доведемо, що $AB = CD$ і $BC = AD$.

Проведемо діагональ AC. Доведемо, що трикутники ABC і CDA рівні (рис. 20).

У цих трикутниках сторона AC — спільна, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC, кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC. Отже, трикутники ABC і CDA рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$ і $BC = AD$. ▲

Теорема 2.2. ***Протилежні кути паралелограма рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 19 зображено паралелограм $ABCD$. Доведемо, що $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$.

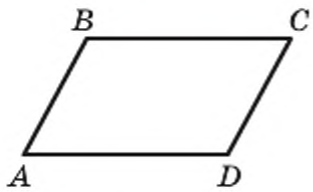


Рис. 19

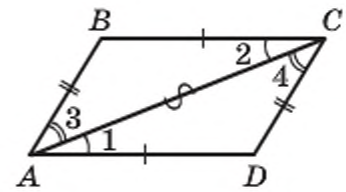


Рис. 20

Під час доведення попередньої теореми було встановлено, що $\Delta ABC = \Delta CDA$ (рис. 20). Звідси $\angle B = \angle D$. З рівності кутів 1 і 2 та рівності кутів 3 і 4 випливає, що $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Отже, $\angle BAD = \angle BCD$. ▲

Теорема 2.3. ***Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.***

Доведення. ⊙ На рисунку 21 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що $AO = OC$ і $BO = OD$.

Розглянемо трикутники AOD і COB.

Маємо: $\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як різносторонні при паралельних прямих AD і BC

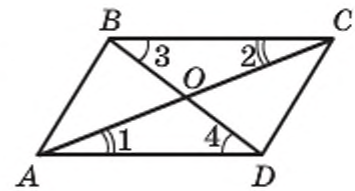


Рис. 21

та січних AC і BD відповідно. З теореми 2.1 отримуємо: $AD = BC$. Отже, трикутники AOD і COB рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AO = OC$, $BO = OD$. ▲

Означення. Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.

На рисунку 22 кожний із відрізків AF, QE, BM, PN, CK є висотою паралелограма $ABCD$.

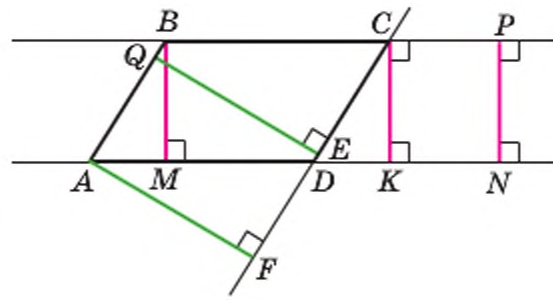


Рис. 22

Із курсу геометрії 7 класу ви знаєте, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої. Тому $AF = QE$ і $BM = PN = CK$.

Говорять, що **висоти** BM, CK, PN **проведено до сторін** BC і AD, а висоти AF, QE — до сторін AB і CD.

Задача 1. Доведіть, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Через кожну вершину даного трикутника ABC проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 23).

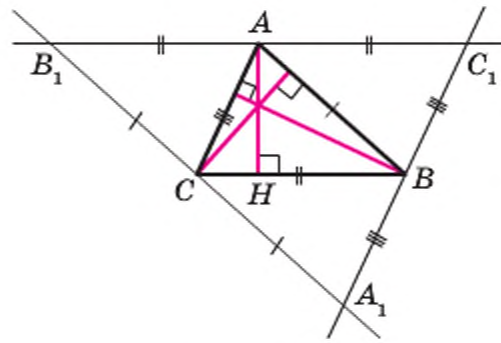


Рис. 23

Із побудови випливає, що чотирикутники AC_1BC і $ABCB_1$ — паралелограми. Звідси $AC_1 = BC = AB_1$. Отже, точка A є серединою відрізка B_1C_1.

Оскільки прямі B_1C_1 і BC паралельні, то висота AH трикутника ABC перпендикулярна до відрізка B_1C_1. Таким чином, пряма AH — серединний перпендикуляр сторони B_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно можна довести, що прямі, які містять дві інші висоти трикутника ABC, є серединними перпендикулярами сторін C_1A_1 і A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$.

Оскільки серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці, то твердження задачі доведено.

Задача 2. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 60 см.

Розв'язання. Нехай бісектриса тупого кута B паралелограма $ABCD$ (рис. 24) перетинає сторону AD у точці M. За умовою $AM : MD = 2 : 1$.

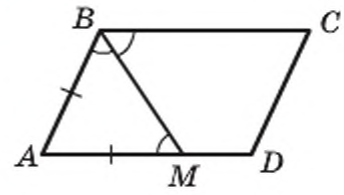


Рис. 24

Кути ABM і CBM рівні за умовою.

Кути CBM і AMB рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній BM.

Тоді $\angle ABM = \angle AMB$. Отже, трикутник BAM рівнобедрений, звідси $AB = AM$.

Нехай $MD = x$ см, тоді $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то його периметр дорівнює $2(AB + AD)$. Ураховуючи, що за умовою периметр паралелограма дорівнює 60 см, отримуємо:

$$2(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Отже, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

Відповідь: 12 см, 18 см.

1. Який чотирикутник називають паралелограмом?
2. Яку властивість мають протилежні сторони паралелограма?
3. Яку властивість мають протилежні кути паралелограма?
4. Яку властивість мають діагоналі паралелограма?
5. Що називають висотою паралелограма?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

36.° На рисунку 25 зображено паралелограм $ABCD$. Зробіть такий рисунок у зошиті. Проведіть із точок B і M висоти паралелограма до сторони AD, а з точки K — висоту до сторони AB.

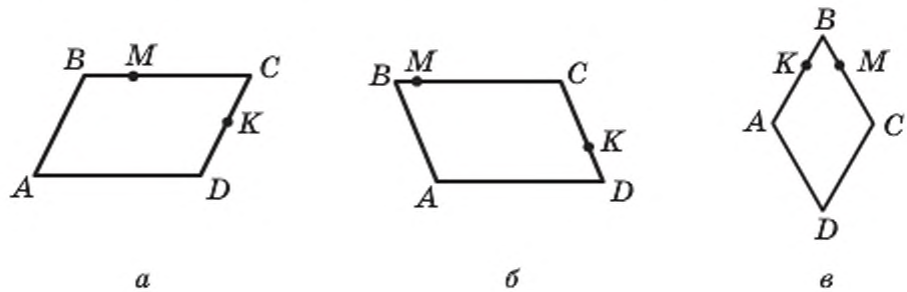


Рис. 25

ВПРАВИ

37.° Дві паралельні прямі перетинають три інші паралельні прямі. Скільки при цьому утворилося паралелограмів?

38.° На рисунку 26 зображено паралелограми. Визначте, не виконуючи вимірювань, на яких рисунках величини кутів або довжини відрізків позначено неправильно (довжини відрізків наведено в сантиметрах).

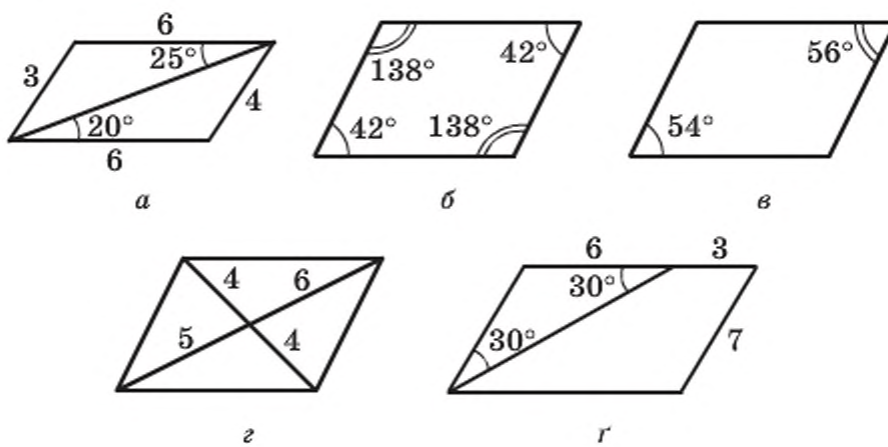


Рис. 26

39.° Чи вистачить 40 см дроту, щоб виготовити з нього паралелограм зі сторонами: 1) 14 см і 8 см; 2) 16 см і 4 см; 3) 12 см і 6 см?

40.° Периметр паралелограма дорівнює 112 см. Знайдіть його сторони, якщо: 1) одна з них на 12 см менша від другої; 2) дві його сторони відносяться як 5 : 9.

41.° Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них у 5 разів більша за другу, а периметр паралелограма дорівнює 96 см.

42.° У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, O — точка перетину його діагоналей. Знайдіть периметр трикутника COD.

43.° Доведіть, що сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.

44.° Знайдіть кути паралелограма, якщо:
1) один із них дорівнює 70°;
1) сума двох його кутів дорівнює 100°;
2) різниця двох його кутів дорівнює 20°;
3) два його кути відносяться як 3 : 7.

45.° Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них:
1) у 2 рази більший за другий;
2) на 24° менший від другого.

46.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 35°$. Через довільну точку, яка належить стороні BC, проведено дві прямі, паралельні сторонам AB і AC трикутника. Визначте вид чотирикутника, що утворився, та знайдіть усі його кути.

47.° Знайдіть кути паралелограма $ABCD$ (рис. 27), якщо $\angle ABD = 68°$, $\angle ADB = 47°$.

48.° У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC утворює зі стороною AB кут, який дорівнює 32°, $\angle BCD = 56°$. Знайдіть кути CAD і D.

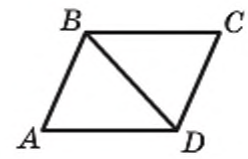


Рис. 27

49.° Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці M. Визначте величину кута M трикутника ABM.

50.° Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 10 см. Чи може одна з його діагоналей дорівнювати 16 см?

51.• Висота BK паралелограма $ABCD$ ділить його сторону AD на відрізки AK і KD такі, що $AK = 4$ см, $KD = 6$ см. Знайдіть кути й периметр паралелограма, якщо $\angle ABK = 30°$.

52.• Один із кутів паралелограма дорівнює 45°. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 3 см і ділить

сторону паралелограма навпіл. Знайдіть цю сторону паралелограма та кути, які утворює діагональ, що сполучає вершини тупих кутів, зі сторонами паралелограма.

53.• У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $\angle C = 30°$, висота BH, проведена до сторони CD, дорівнює 7 см, а периметр паралелограма — 46 см. Знайдіть сторони паралелограма.

54.• Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник MKN. Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle N$?

55.• Доведіть, що вершини B і D паралелограма $ABCD$ рівновіддалені від прямої AC.

56.• Доведіть, що будь-який відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей паралелограма та кінці якого належать протилежним сторонам паралелограма, ділиться цією точкою навпіл.

57.• Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 24 см, $\angle ABC = 160°$, діагональ AC утворює зі стороною AD кут 10°. Знайдіть сторони паралелограма.

58.• Діагональ BD паралелограма $ABCD$ утворює зі стороною AB кут 65°, $\angle C = 50°$, $AB = 8$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

59.• Знайдіть кути паралелограма $ABCD$, якщо $BD \perp AB$ і $BD = AB$.

60.• Діагональ паралелограма утворює з його сторонами кути 30° і 90°. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 36 см.

61.• Поза паралелограмом $ABCD$ проведено пряму, паралельну його діагоналі BD. Ця пряма перетинає прямі AB, BC, CD і AD у точках E, M, F і K відповідно. Доведіть, що $MK = EF$.

62.• Паралельно діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає відрізки AB і BC у точках M і N, а прямі AD і CD у точках P і K відповідно. Доведіть, що $PM = NK$.

63.• Один із кутів, утворених при перетині бісектриси кута паралелограма з його стороною, дорівнює 24°. Знайдіть кути паралелограма.

64.• Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть периметр даного паралелограма, якщо $AB = 12$ см, $MC = 16$ см.

65.• Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 3 : 5, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 66 см.

66.• Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає сторону CD у точці K так, що відрізок CK у 5 разів більший за відрізок KD. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

67.• У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AD = 12$ см, $AB = 3$ см, бісектриси кутів B і C перетинають сторону AD у точках E і F відповідно. Знайдіть відрізок EF.

68.• Кут між висотою BH паралелограма $ABCD$ і бісектрисою BM кута ABC дорівнює 24°. Знайдіть кути паралелограма.

69.• Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма.

70.• Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, дорівнює тупому куту паралелограма.

71.• Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 30°. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 4 см і 6 см.

72.• Висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, утворюють кут 150°, сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 18 см. Знайдіть висоти паралелограма.

73.• Через довільну точку основи рівнобедреного трикутника проведено прямі, паралельні його бічним сторонам. Доведіть, що периметр утвореного чотирикутника дорівнює сумі бічних сторін даного трикутника.

74.• Через кожну вершину трикутника ABC проведено пряму, паралельну протилежній стороні. Сума периметрів усіх утворених паралелограмів дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

75.• Побудуйте паралелограм:
1) за двома сторонами та кутом між ними;
2) за двома діагоналями та стороною;
3) за стороною, діагоналлю та кутом між ними.

76.• Побудуйте паралелограм:
1) за двома сторонами та діагоналлю;
2) за двома діагоналями та кутом між ними.

77.•• Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Побудуйте паралелограм, вершинами якого є дані точки. Скільки розв'язків має задача?

78.•• Точка перетину бісектрис двох сусідніх кутів паралелограма належить його стороні. Знайдіть відношення сусідніх сторін паралелограма.

79.•• На стороні BC паралелограма $ABCD$ існує така точка M, що $BM = MD = CD$. Знайдіть кути паралелограма, якщо $AD = BD$.

80.•• Побудуйте паралелограм:
1) за стороною, проведеною до неї висотою та діагоналлю;
2) за двома діагоналями та висотою;
3) за гострим кутом і двома висотами, проведеними до двох сусідніх сторін.

81.•• Побудуйте паралелограм:
1) за двома сторонами та висотою;
2) за діагоналлю та двома висотами, проведеними до двох сусідніх сторін.

82.* Із вершини B паралелограма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на діагональ AC. Через точку A проведено пряму m, перпендикулярну до прямої AD, а через точку C — пряму n, перпендикулярну до прямої CD. Доведіть, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.

83.* Побудуйте паралелограм за стороною, сумою діагоналей та кутом між діагоналями.

84.* На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ поза ним побудовано рівносторонні трикутники ABM і BCK. Доведіть, що трикутник MKD рівносторонній.

85.* Через точку, яка належить куту, проведіть пряму так, щоб відрізок цієї прямої, що міститься всередині кута, даною точкою ділився б навпіл.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

86. Довжина відрізка AB дорівнює 24 см. Точка C належить прямій AB, причому $BC = 5AC$. На відрізку AB позначено точку D так, що $AB = 4BD$. Знайдіть відрізок CD.

87. Скільки існує нерівних між собою:
1) прямокутних трикутників зі стороною 5 см і кутом 45°;
2) рівнобедрених трикутників зі стороною 6 см і кутом 30°;
3) прямокутних трикутників зі стороною 7 см і кутом 60°?

88. Діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ є діаметрами кола. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

89. Чи можна квадрат розміром 10×10 клітинок розрізати на 25 фігур, що складаються із чотирьох клітинок і мають такий вигляд, як зображено на рисунку 28?

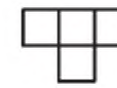


Рис. 28

3. Ознаки паралелограма

Означення паралелограма дає змогу серед чотирикутників розпізнавати паралелограми. Цій самій меті слугують такі три теореми, які називають ознаками паралелограма.

Теорема 3.1 (обернена до теореми 2.1). ***Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. ⊙ На рисунку 29 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = CD$ і $BC = AD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

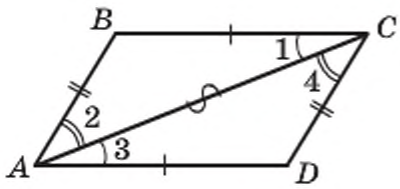


Рис. 29

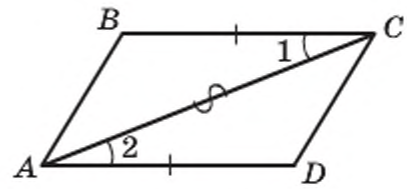


Рис. 30

Проведемо діагональ AC. Трикутники ABC і CDA рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$. Кути 1 і 3 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$. Аналогічно з рівності $\angle 2 = \angle 4$ випливає, що $AB \parallel CD$.

Отже, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони паралельні, а тому цей чотирикутник — паралелограм. ▲

Теорема 3.2. ***Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. ⊙ На рисунку 30 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $BC = AD$ і $BC \parallel AD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Проведемо діагональ AC. У трикутниках ABC і CDA маємо: $BC = AD$ за умовою, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC, а сторона AC — спільна. Отже, трикутники ABC і CDA рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$. Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони рівні. Тому за теоремою 3.1 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

Теорема 3.3 (обернена до теореми 2.3). ***Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.***

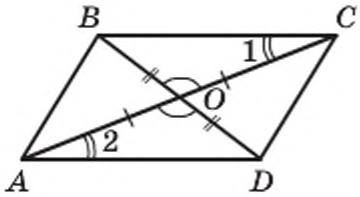


Рис. 31

Доведення. ⊙ На рисунку 31 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому діагоналі AC і BD перетинаються в точці O, причому $AO = OC$ і $BO = OD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Оскільки кути BOC і DOA рівні як вертикальні, $AO = OC$ і $BO = OD$, то трикутники BOC і DOA рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = AD$ і $\angle 1 = \angle 2$. Кути 1 і 2 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$.

Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ дві протилежні сторони рівні й паралельні. За теоремою 3.2 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

Ви знаєте, що трикутник можна однозначно задати його сторонами, тобто задача побудови трикутника за трьома сторонами має єдиний розв'язок. Інша річ — паралелограм. На рисунку 32 зображено паралелограми $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, сторони яких рівні, тобто $AB = A_1B_1 = A_2B_2$ і $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. Проте очевидно, що самі паралелограми не є рівними.

Сказане означає, що коли чотири рейки скріпити так, щоб утворився паралелограм, то отримана конструкція не буде жорсткою.

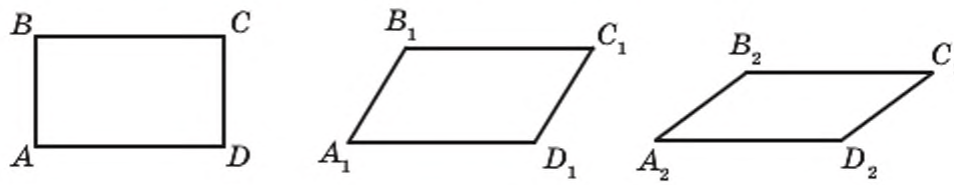


Рис. 32

Цю властивість паралелограма широко використовують на практиці. Завдяки його рухомості лампу можна встановлювати в зручне для роботи положення, а розсувну решітку — відсувати на потрібну відстань у дверному прорізі (рис. 33).

На рисунку 34 зображено схему механізму, який є складовою парової машини. Зі збільшенням швидкості обертання осі кулі віддаляються від неї під дією відцентрової сили, тим самим піднімаючи заслінку, яка регулює кількість пари. Механізм названо **паралелограмом Уатта** на честь винахідника першої універсальної парової машини.

Рис. 33

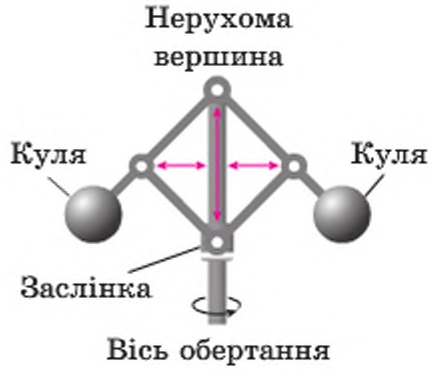


Рис. 34

Задача. Доведіть, що коли в чотирикутнику кожні два протилежні кути рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Розв'язання. На рисунку 35 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

За теоремою про суму кутів чотирикутника $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Ураховуючи, що $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, отримаємо: $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Оскільки кути A і B — односторонні кути при прямих AD і BC та січній AB, а їхня сума дорівнює 180°, то $BC \parallel AD$.

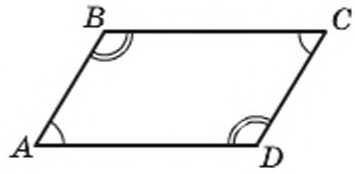


Рис. 35

Аналогічно доводимо, що $AB \parallel CD$.

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

1. Які ознаки паралелограма ви знаєте? Сформулюйте їх.
2. Серед властивостей та ознак паралелограма вкажіть взаємно обернені теореми.
3. Яку властивість паралелограма широко використовують на практиці?

ВПРАВИ

90.° Доведіть, що коли сума кутів, прилеглих до будь-якої із сусідніх сторін чотирикутника, дорівнює 180°, то цей чотирикутник — паралелограм.

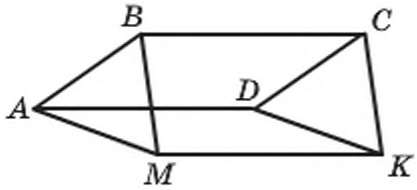


Рис. 36

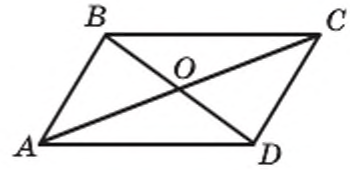


Рис. 37

91.° Чотирикутники $ABCD$ і $AMKD$ — паралелограми (рис. 36). Доведіть, що чотирикутник $BMKC$ — паралелограм.

92.° Відрізок AO — медіана трикутника ABD, відрізок BO — медіана трикутника ABC (рис. 37). Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

93.° На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначили точки M і K так, що $AM = CK$. Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ — паралелограм.

94.° Два кола мають спільний центр O (рис. 38). В одному з кіл проведено діаметр AB, у другому — діаметр CD. Доведіть, що чотирикутник $ACBD$ — паралелограм.

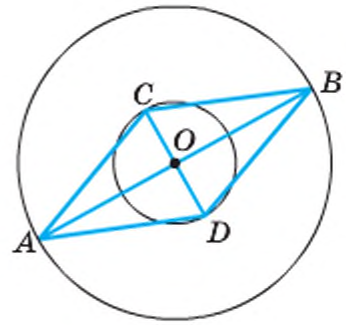


Рис. 38

95.° Точки E і F — відповідно середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

96.° На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CK. Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ — паралелограм.

97.° На сторонах паралелограма $ABCD$ (рис. 39) відклали рівні відрізки AM, BK, CE і DF. Доведіть, що чотирикутник $MKEF$ — паралелограм.

98.• У трикутнику ABC на продовженні медіани AM за точку M відклали відрізок MK, який дорівнює відрізку AM. Визначте вид чотирикутника $ABKC$.

99.• У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

100.• Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M, а бісектриса кута C — сторону AD у точці K. Доведіть, що чотирикутник $AMCK$ — паралелограм.

101.• На рисунку 40 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $\angle BCP = \angle DAE$. Доведіть, що чотирикутник $APCE$ — паралелограм.

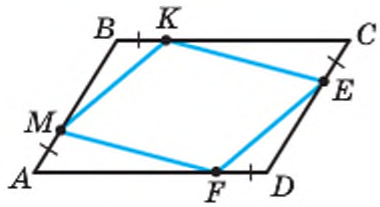


Рис. 39

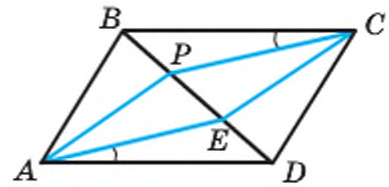


Рис. 40

102.• На рисунку 41 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $\angle BEC = \angle DFA$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

103.• Із вершин B і D паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляри BM і DK до діагоналі AC. Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ — паралелограм.

104.• Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають його діагональ BD у точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

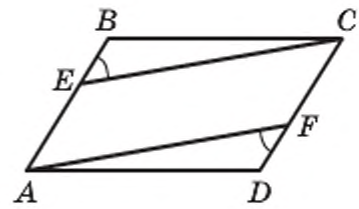


Рис. 41

105.•• Через середину O діагоналі NP паралелограма $MNKP$ проведено пряму, яка перетинає сторони MN і KP у точках A і B відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ANBP$ — паралелограм.

106.•• Через точку перетину діагоналей паралелограма $CDEF$ проведено дві прямі, одна з яких перетинає сторони CD і EF у точках A і B відповідно, а друга — сторони DE і CF у точках M і K відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AMBK$ — паралелограм.

107.•• Точки M, N, K і P — середини сторін AB, BC, CD і AD паралелограма $ABCD$ відповідно. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є точки перетину прямих AN, BK, CP і DM, — паралелограм.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

108. Прямі, на яких лежать бісектриси AK і BM трикутника ABC, перетинаються під кутом 74°. Знайдіть кут C.

109. Кут, протилежний основі рівнобедреного трикутника, дорівнює 120°, а висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см. Знайдіть основу трикутника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

110. Учитель запропонував учневі вирізати з листа картону розміром 8×8 клітинок вісім квадратів розміром 2×2 клітинки за умови не псувати клітинки, що залишилися. Потім виявилося, що потрібен ще один такий самий квадрат. Чи завжди можна це зробити із залишків листа?

НЕОБХІДНО І ДОСТАТНЬО

Із курсу геометрії 7 класу ви дізналися, що більшість теорем складається з двох частин: умови (те, що дано) і висновку (те, що треба довести).

Якщо твердження, що виражає умову, позначити буквою A, а твердження, що виражає висновок, — буквою B, то формулювання теореми можна зобразити такою схемою:

якщо A, то B.

Наприклад, теорему 2.3 можна сформулювати так:

	A		B
якщо	чотирикутник є паралелограмом,	**то**	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл

Тоді теорему 3.3, обернену до теореми 2.3, можна сформулювати так:

	A		B
якщо	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл,	**то**	чотирикутник є паралелограмом

Часто в повсякденному житті у своїх висловлюваннях ми користуємося словами «необхідно», «достатньо». Наведемо кілька прикладів.

- Для того щоб уміти розв'язувати задачі, *необхідно* знати теореми.
- Якщо ви на математичній олімпіаді правильно розв'язали всі запропоновані задачі, то цього *достатньо* для того, щоби посісти перше місце.

Уживання слів «необхідно» і «достатньо» тісно пов'язане з теоремами.

Розглянемо теорему:

	A		*B*
якщо	натуральне число кратне 10,	**то**	це число кратне 5

Умова *A* є достатньою для висновку *B*. Разом з тим подільність числа націло на 5 (твердження *B*) необхідна для подільності числа націло на 10 (твердження *A*).

Наведемо ще один приклад:

	A		*B*
якщо	два кути є вертикальними,	**то**	ці кути рівні

У цій теоремі твердження *A* є **достатньою умовою** для твердження *B*, тобто для того, щоб два кути були рівними, *достатньо*, щоб вони були вертикальними. У цій самій теоремі твердження *B* є **необхідною умовою** для твердження *A*, тобто для того, щоб два кути були вертикальними, *необхідно*, щоб вони були рівними. Зазначимо, що твердження *B* не є достатньою умовою для твердження *A*. Справді, якщо два кути рівні, то це зовсім не означає, що вони вертикальні.

Отже, у будь-якій теоремі виду **якщо *A*, то *B*** твердження *A* є достатнім для твердження *B*, а твердження *B* — необхідним для твердження *A*.

Якщо справедлива не тільки теорема

якщо *A*, то *B*,

але й обернена теорема

якщо *B*, то *A*,

то *A* є **необхідною і достатньою** умовою для *B*, а *B* — необхідною і достатньою умовою для *A*.

Наприклад, теореми 3.3 і 2.3 є взаємно оберненими. Мовою «необхідно — достатньо» цей факт можна сформулювати так:

для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл.

Наголосимо, що коли в теоремі є слова «необхідно» і «достатньо», то вона об'єднує дві теореми: пряму й обернену (прямою теоремою може бути будь-яка з двох теорем, тоді друга буде оберненою). Отже, доведення такої теореми має складатися з двох частин: доведень прямої та оберненої теорем. Теорему, яка об'єднує пряму та обернену теореми, називають **критерієм**.

Іноді замість «необхідно і достатньо» говорять «тоді й тільки тоді». Наприклад, взаємно обернені теореми 2.1 і 3.1 можна об'єднати в такий критерій:

чотирикутник є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли кожні дві його протилежні сторони рівні.

Сформулюйте самостійно теорему 2.2 та ключову задачу з пункту 3 у вигляді теореми-критерію.

4. Прямокутник

Паралелограм — це чотирикутник, проте очевидно, що не кожний чотирикутник є паралелограмом. У цьому разі говорять, що паралелограм — це окремий вид чотирикутників. Рисунок 42 ілюструє цей факт.

Існують також окремі види паралелограмів.

Означення. Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

На рисунку 43 зображено прямокутник $ABCD$.

З означення випливає, що прямокутник має всі властивості паралелограма. *У прямокутнику:*

- *протилежні сторони рівні;*
- *діагоналі точкою перетину діляться навпіл.*

Проте прямокутник має свої особливі властивості, яких не має паралелограм, відмінний від прямокутника. Так, з означення випливає, що всі кути прямокутника рівні. Ще одну властивість прямокутника встановлює така теорема.

Теорема 4.1. ***Діагоналі прямокутника рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 44 зображено прямокутник $ABCD$. Доведемо, що його діагоналі AC і BD рівні.

У прямокутних трикутниках ABD і DCA катети AB і DC рівні, а катет AD спільний. Тому трикутники ABD і DCA рівні за двома катетами. Звідси $BD = AC$. ▲

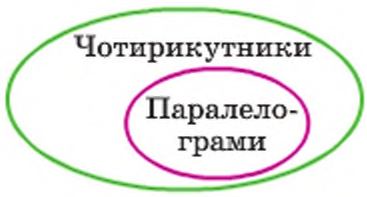


Рис. 42

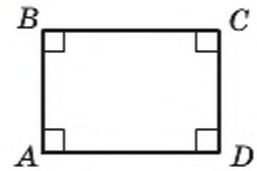


Рис. 43

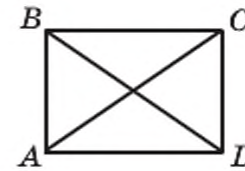


Рис. 44

Означення прямокутника дає змогу серед паралелограмів розпізнавати прямокутники. Цій самій меті слугують такі дві теореми, які називають ознаками прямокутника.

Теорема 4.2. ***Якщо один із кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 4.3. ***Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведення. ⊙ На рисунку 45 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі AC і BD якого рівні. Доведемо, що паралелограм $ABCD$ — прямокутник.

Розглянемо трикутники ABD і DCA. У них $AB = CD$, $BD = AC$, AD — спільна сторона. Отже, ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle BAD = \angle CDA$. Ці кути є односторонніми при паралельних прямих AB і DC та січній AD. Таким чином, $\angle BAD + \angle CDA = 180°$. Тоді $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Тому за теоремою 4.2 паралелограм $ABCD$ — прямокутник. ▲

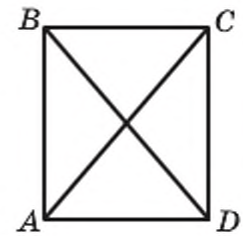


Рис. 45

1. Яку фігуру називають прямокутником?
2. Які властивості має прямокутник?
3. Яку особливу властивість мають діагоналі прямокутника?
4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є прямокутником?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

111.° Накресліть прямокутник. Користуючись лише лінійкою, знайдіть точку, яка рівновіддалена від його вершин.

ВПРАВИ

112.° Доведіть, що чотирикутник, усі кути якого прямі, є прямокутником.

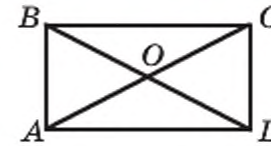


Рис. 46

113.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутники AOB і AOD рівнобедрені.

114.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються в точці O, $\angle ABD = 64°$. Знайдіть кути COD і AOD.

115.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються в точці O, $\angle ADB = 30°$, $BD = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника AOB.

116.° Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 60°, а менша сторона прямокутника дорівнює 8 см. Знайдіть діагональ прямокутника.

117.• На діагоналі AC прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CK (точка M лежить між точками A і K). Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ — паралелограм, відмінний від прямокутника.

118.• На продовженні діагоналі BD прямокутника $ABCD$ за точку B позначили точку E, а на продовженні за точку D — точку F так, що $BE = DF$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм, відмінний від прямокутника.

119.• Точка M — середина сторони BC прямокутника $ABCD$, $MA \perp MD$, периметр прямокутника дорівнює 36 см. Знайдіть сторони прямокутника.

120.• Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 30 см. Бісектриси кутів A і D перетинаються в точці M, яка належить стороні BC. Знайдіть сторони прямокутника.

121.• Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 55 см. Прямокутник $ABCD$ побудовано так, що дві його вершини A і D належать гіпотенузі, а дві інші — катетам даного трикутника. Знайдіть сторони прямокутника, якщо $AB : BC = 3 : 5$.

122.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = BC = 6$ см. Прямокутник $CMKN$ побудовано так, що точка M належить катету AC, точка N — катету BC, а точка K — гіпотенузі AB. Знайдіть периметр прямокутника $CMKN$.

123.• Доведіть, що коли діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з однією з його сторін, то цей паралелограм є прямокутником.

124.• Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

125.• Побудуйте прямокутник:
1) за двома сторонами;
2) за діагоналлю та кутом між діагоналлю та стороною.

126.• Побудуйте прямокутник:
1) за стороною та діагоналлю;
2) за діагоналлю та кутом між діагоналями.

127.•• Серединний перпендикуляр діагоналі AC прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M так, що $BM : MC = 1 : 2$. Знайдіть кути, на які діагональ прямокутника ділить його кут.

128.•• У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$, $AC = 18$ см. Знайдіть відстань від точки C до діагоналі BD.

129.•• Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, у якого сусідні сторони не рівні, перетинаючись, утворюють прямокутник.

130.•• Побудуйте прямокутник за стороною та кутом між діагоналями, який протилежний даній стороні.

131.* Побудуйте прямокутник:
1) за діагоналлю та різницею двох сторін;
2) за периметром і діагоналлю;
3) за периметром і кутом між діагоналями.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

132. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 48°$, відрізки AK і BM — його висоти. Знайдіть кут між прямими AK і BM.

133. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle A = \angle CBD$. Знайдіть кут ABC, якщо трикутники ABD і BCD мають ще одну пару рівних кутів.

134. Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC. Через точку C проведено пряму, яка паралельна прямій AD і перетинає пряму AB у точці E. Визначте вид трикутника ACE.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

135. На площині позначено 1000 точок. Доведіть, що існує пряма, відносно якої у кожній півплощині лежать по 500 точок.

5. Ромб

Ви вже знаєте, що прямокутник — це окремий вид паралелограма. Ознайомимося ще з одним видом паралелограма — ромбом.

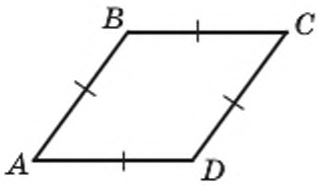


Рис. 47

Означення. Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 47 зображено ромб $ABCD$.

З означення випливає, що ромб має всі властивості паралелограма. *У ромбі:*

- *протилежні кути рівні;*
- *діагоналі точкою перетину діляться навпіл.*

Проте ромб має і свої особливі властивості.

Теорема 5.1. ***Діагоналі ромба перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.***

Доведення. ⊙ На рисунку 48 зображено ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що $BD \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$.

Оскільки за означенням ромба всі його сторони рівні, то трикутник ABC рівнобедрений ($AB = BC$). За властивістю діагоналей паралелограма $AO = OC$. Тоді відрізок BO є медіаною трикутника ABC, а отже, і висотою та бісектрисою цього трикутника. Таким чином, $BD \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$. ▲

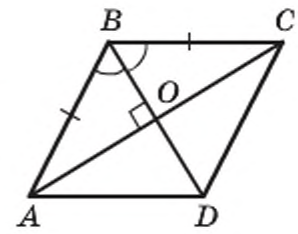


Рис. 48

Розпізнавати ромби серед паралелограмів дають змогу не лише означення ромба, а й такі дві теореми, які називають ознаками ромба.

Теорема 5.2. ***Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб.***

Теорема 5.3. ***Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм — ромб.***

Доведіть ці теореми самостійно.

1. Яку фігуру називають ромбом?
2. Які властивості має ромб?
3. Які особливі властивості мають діагоналі ромба?
4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є ромбом?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

136.° Накресліть ромб зі стороною 5 см і кутом 40°. Проведіть дві висоти з вершини його гострого кута та дві висоти з вершини тупого кута.

ВПРАВИ

137.° Доведіть, що коли дві сусідні сторони паралелограма рівні, то він є ромбом.

138.° Доведіть, що чотирикутник, усі сторони якого рівні, є ромбом.

139.° Діагональ AC ромба $ABCD$ (рис. 49) утворює зі стороною AD кут 42°. Знайдіть усі кути ромба.

140.° У ромбі $ABCD$ відомо, що $\angle C = 140°$, а діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть кути трикутника AOB.

141.° Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Знайдіть кути ромба.

142.° Знайдіть кути ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота — 3 см.

143.° Знайдіть периметр ромба $ABCD$, якщо $\angle A = 60°$, $BD = 9$ см.

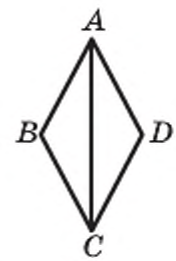


Рис. 49

144.° Кут D ромба $ABCD$ у 8 разів більший за кут CAD. Знайдіть кут BAD.

145.° Кути, які сторона ромба утворює з його діагоналями, відносяться як 2 : 7. Знайдіть кути ромба.

146.° Точки M і K — відповідно середини сторін AB і BC ромба $ABCD$. Доведіть, що $MD = KD$.

147.° Точки E і F — відповідно середини сторін BC і CD ромба $ABCD$. Доведіть, що $\angle EAC = \angle FAC$.

148.° Доведіть, що висоти ромба рівні.

149.• Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Менша діагональ ромба дорівнює 4 см. Знайдіть кути та периметр ромба.

150.• Доведіть, що діагональ ромба ділить навпіл кут між висотами ромба, проведеними з тієї самої його вершини, що й діагональ.

151.• На сторонах AB і AD ромба $ABCD$ відкладено рівні відрізки AE і AF відповідно. Доведіть, що $\angle CEF = \angle CFE$.

152.• Відрізок AM — бісектриса трикутника ABC. Через точку M проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону AB у точці K, та пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону AC у точці D. Доведіть, що $AM \perp DK$.

153.• Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинають його сторони BC і AD у точках F і E відповідно. Визначте вид чотирикутника $ABFE$.

154.• У трикутнику ABC проведено серединний перпендикуляр його бісектриси BD, який перетинає сторони AB і BC у точках K і P відповідно. Визначте вид чотирикутника $BKDP$.

155.• Побудуйте ромб:
1) за стороною та кутом;
2) за двома діагоналями;
3) за висотою та кутом.

156.• Побудуйте ромб:
1) за стороною та діагоналлю;
2) за висотою та діагоналлю.

157.•• У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AD = 9$ см, $\angle BDA = 30°$. На сторонах BC і AD позначено відповідно точки M і K так, що утворився ромб $AMCK$. Знайдіть сторону цього ромба.

158.•• Побудуйте ромб за діагоналлю та кутом, вершина якого належить цій діагоналі.

159.•• Побудуйте ромб за діагоналлю та протилежним їй кутом ромба.

160.* Побудуйте ромб:
1) за сумою діагоналей і кутом між діагоналлю та стороною;
2) за гострим кутом і різницею діагоналей;
3) за гострим кутом і сумою сторони та висоти;
4) за стороною та сумою діагоналей;
5) за тупим кутом і сумою діагоналей;
6) за стороною та різницею діагоналей.

161.* Дано точки M, N і K. Побудуйте ромб $ABCD$ так, щоб точка M була серединою сторони AB, а точки N і K — основами висот, проведених з вершини B до сторони AD і з вершини D до сторони BC відповідно.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

162. На сторонах кута з вершиною в точці A відкладено рівні відрізки AB і AC. Через точки B і C проведено прямі, які пер-

ВПРАВИ

165.° Доведіть, що коли один із кутів ромба прямий, то цей ромб є квадратом.

166.° Доведіть, що коли дві сусідні сторони прямокутника рівні, то цей прямокутник є квадратом.

167.° Діагональ BD квадрата $ABCD$ дорівнює 5 см. Яка довжина діагоналі AC? Чому дорівнюють кути трикутника AOB, де O — точка перетину діагоналей квадрата?

168.° На стороні BC квадрата $ABCD$ (рис. 52) позначили точку K так, що $\angle AKB = 74°$. Знайдіть кут CAK.

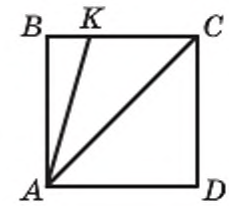


Рис. 52

169.° На стороні BC квадрата $ABCD$ позначили точку K так, що $AK = 2BK$. Знайдіть кут KAD.

170.° Чи є правильним твердження:

1) будь-який квадрат є паралелограмом;
2) будь-який ромб є квадратом;
3) будь-який прямокутник є квадратом;
4) будь-який квадрат є прямокутником;
5) будь-який квадрат є ромбом;
6) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником;
7) якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні, то він є ромбом;
8) існує ромб, який є прямокутником;
9) існує квадрат, який не є ромбом;
10) якщо діагоналі чотирикутника не перпендикулярні, то він не є ромбом;
11) якщо діагоналі паралелограма не рівні, то він не є прямокутником;
12) якщо діагональ прямокутника ділить його кут навпіл, то цей прямокутник є квадратом?

171.• Через вершини квадрата проведено прямі, паралельні його діагоналям. Доведіть, що точки перетину цих прямих є вершинами квадрата.

172.• У прямокутному трикутнику через точку перетину бісектриси прямого кута та гіпотенузи проведено прямі, паралельні катетам. Доведіть, що чотирикутник, який утворився, є квадратом.

173.• Точки M, K, N, P є відповідно серединами сторін AB, BC, CD і AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $MKNP$ — квадрат.

174.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14$ см. Дві сторони квадрата $CDEF$ лежать на катетах трикутника ABC, а вершина E належить гіпотенузі AB. Знайдіть периметр квадрата $CDEF$.

175.• У квадраті $ABCD$ позначено точку M так, що трикутник AMB рівносторонній. Доведіть, що трикутник CMD рівнобедрений.

176.• Доведіть, що коли діагоналі паралелограма рівні та перпендикулярні, то цей паралелограм є квадратом.

177.• Чотирикутники $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$, $SQTV$ — квадрати (рис. 53). Знайдіть суму довжин тих сторін квадратів, які не лежать на прямій AV, якщо довжина відрізка AV дорівнює 16 см.

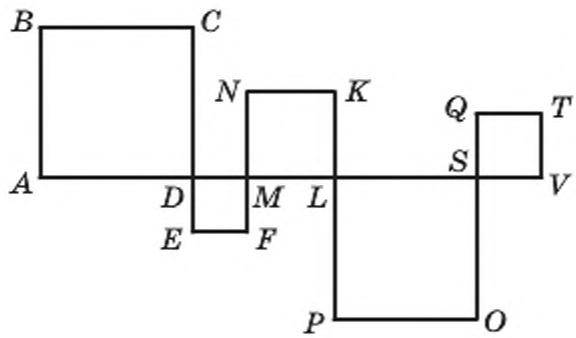


Рис. 53

178.• Побудуйте квадрат за його стороною.

179.•• Доведіть, що точки перетину бісектрис кутів прямокутника, який не є квадратом, є вершинами квадрата.

180.•• Вершини M і K рівностороннього трикутника AMK належать сторонам BC і CD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $MK \parallel BD$.

181.•• Дано точки M і K. Побудуйте квадрат $ABCD$ так, щоб точка M була серединою сторони AB, а точка K — серединою сторони BC.

182.* Через довільну точку, яка належить квадрату, проведено дві перпендикулярні прямі, кожна з яких перетинає дві протилежні сторони квадрата. Доведіть, що відрізки цих прямих, які належать квадрату, рівні.

183.* Побудуйте квадрат:

1) за сумою діагоналі та сторони;
2) за різницею діагоналі та сторони.

184.* У квадраті $ABCD$ позначено точку O так, що $\angle OAD = \angle ODA = 15°$. Доведіть, що трикутник BOC рівносторонній.

185.* На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ позначено точки M і E так, що кути BAM і MAE рівні. Доведіть, що $AE = BM + DE$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

186. На рисунку 54 $AB \parallel CD$, $AB = AE$, $CD = CE$. Доведіть, що $BE \perp DE$.

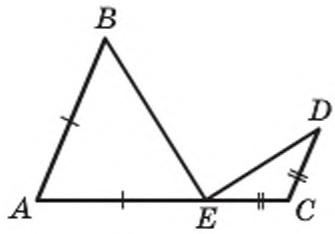


Рис. 54

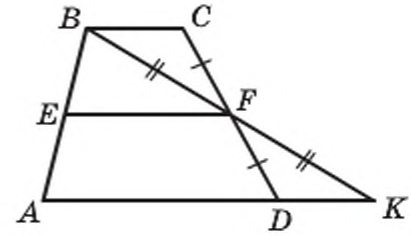


Рис. 55

187. На рисунку 55 $EF \parallel AD$, $BF = KF$, $CF = DF$. Доведіть, що $EF \parallel BC$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

188. Розташуйте на площині вісім точок так, щоб на серединному перпендикулярі будь-якого відрізка з кінцями в цих точках лежало рівно дві із цих точок.

7. Середня лінія трикутника

Означення. Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

На рисунку 56 відрізки MN, NE, EM — середні лінії трикутника ABC.

Теорема 7.1. ***Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.***

Доведення. Нехай MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 57). Доведемо, що $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

На прямій MN позначимо точку E так, що $MN = NE$ (рис. 57). Сполучимо відрізком точки E і C. Оскільки точка N є серединою відрізка BC, то $BN = NC$. Кути 1 і 2 рівні як вертикальні. Отже,

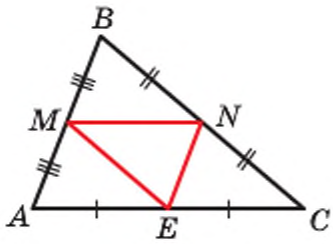


Рис. 56

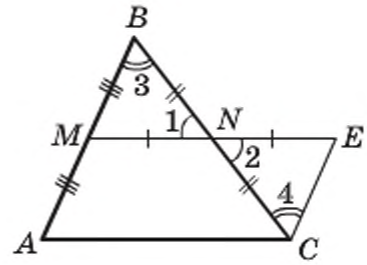


Рис. 57

трикутники MBN і ECN рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $MB = EC$ і $\angle 3 = \angle 4$. Ураховуючи, що $AM = BM$, отримаємо: $EC = AM$. Кути 3 і 4 є різносторонніми при прямих AB і EC та січній BC. Тоді $AB \parallel EC$.

Таким чином, у чотирикутнику $AMEC$ сторони AM і EC паралельні та рівні. Отже, за теоремою 3.2 чотирикутник $AMEC$ є паралелограмом. Звідси $ME \parallel AC$, тобто $MN \parallel AC$.

Також $ME = AC$. Оскільки $MN = \frac{1}{2}ME$, то $MN = \frac{1}{2}AC$. ▲

Задача. Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

Розв'язання. У чотирикутнику $ABCD$ точки M, N, K і P — середини сторін AB, BC, CD і AD відповідно (рис. 58).

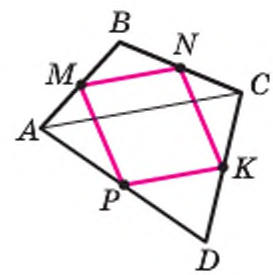


Рис. 58

Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC. За властивістю середньої лінії трикутника $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

Відрізок PK — середня лінія трикутника ADC. За властивістю середньої лінії трикутника $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2}AC$.

Оскільки $MN \parallel AC$ і $PK \parallel AC$, то $MN \parallel PK$.

З рівностей $MN = \frac{1}{2}AC$ і $PK = \frac{1}{2}AC$ отримуємо: $MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

Отже, у чотирикутнику $MNKP$ сторони MN і PK рівні та паралельні, тому чотирикутник $MNKP$ — паралелограм. ●

1. Що називають середньою лінією трикутника?
2. Скільки середніх ліній можна провести в трикутнику?
3. Які властивості має середня лінія трикутника?

ВПРАВИ

189.° Чи є відрізок MK середньою лінією трикутника ABC (рис. 59)?

190.° Чи є відрізок EF середньою лінією трикутника MKP (рис. 60)?

Рис. 59

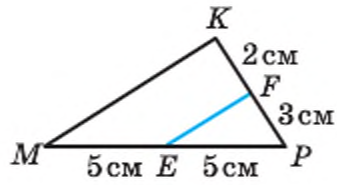


Рис. 60

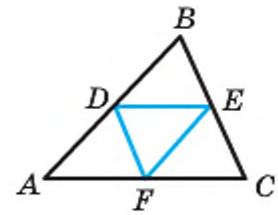


Рис. 61

191.° Відрізки DE і DF — середні лінії трикутника ABC (рис. 61). Чи є відрізок EF середньою лінією цього трикутника?

192.° Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 12 см. Знайдіть середні лінії цього трикутника.

193.° Точки M і K — середини сторін AB і AC трикутника ABC відповідно. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника MAK дорівнює 17 см.

194.° Доведіть, що периметр трикутника, сторони якого є середніми лініями трикутника ABC, дорівнює половині периметра трикутника ABC.

195.° Визначте вид трикутника, у якому середні лінії рівні між собою.

196.° Доведіть, що середні лінії трикутника розбивають його на чотири рівних трикутники.

197.° Точки E і F — відповідно середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть сторону AC, якщо вона на 7 см більша за відрізок EF.

198.° Доведіть, що середня лінія DE трикутника ABC (точки D і E належать сторонам AB і BC відповідно) та його медіана BM точкою перетину діляться навпіл.

199.° Доведіть, що висота AM трикутника ABC перпендикулярна до його середньої лінії, яка сполучає середини сторін AB і AC.

200.• Знайдіть кути трикутника, дві середні лінії якого рівні та перпендикулярні.

201.• Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, дорівнює 6 см. Знайдіть сторони даного трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

202.• Сума діагоналей чотирикутника дорівнює 28 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін даного чотирикутника.

203.• Вершинами чотирикутника є середини сторін ромба з діагоналями 8 см і 14 см. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його сторони.

204.• Вершинами чотирикутника є середини сторін прямокутника з діагоналлю 12 см. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його сторони.

205.• Доведіть, що вершини трикутника рівновіддалені від прямої, на якій лежить його середня лінія.

206.•• На сторонах AB і BC трикутника позначено відповідно точки M і K так, що $AM = 3BM$, $CK = 3BK$. Доведіть, що $MK \parallel AC$, і знайдіть відрізок MK, якщо $AC = 16$ см.

207.•• Кути BAD і BCE — зовнішні кути трикутника ABC. Із вершини B проведено перпендикуляри BM і BK до бісектрис кутів BAD і BCE відповідно. Знайдіть відрізок MK, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 18 см.

208.•• Побудуйте трикутник за серединами трьох його сторін.

209.•• Побудуйте паралелограм за серединами трьох його сторін.

210.* Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведено прямі, перпендикулярні відповідно до сторін DC і BC. Доведіть, що точка перетину проведених прямих належить прямій AC.

211.* Сторони AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$ рівні. Через середини діагоналей AC і BD проведено пряму, яка перетинає сторони AB і CD у точках M і N відповідно. Доведіть, що $\angle BMN = \angle CNM$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

212. До кола із центром O через точку C проведено дотичні CA і CB (A і B — точки дотику). Відрізок AD — діаметр кола. Доведіть, що $BD \parallel CO$.

213. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle B = 32°$, AK — бісектриса трикутника. Через точку K проведено пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону AC у точці M. Знайдіть кут AKM.

214. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ є його висотою та дорівнює стороні BC. Знайдіть сторону CD паралелограма, якщо точка B віддалена від прямої CD на 4 см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

215. П'ять точок належать рівносторонньому трикутнику, сторона якого дорівнює 1 см. Доведіть, що із цих точок можна вибрати дві, відстань між якими не більша за 0,5 см.

8. Трапеція

Означення. Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Кожний із чотирикутників, зображених на рисунку 62, є трапецією.

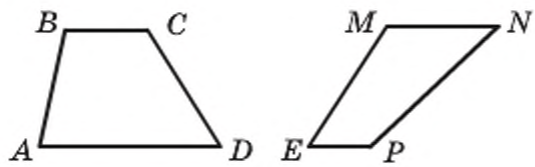


Рис. 62

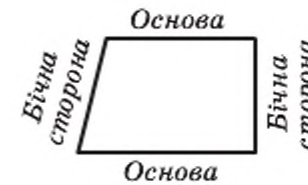


Рис. 63

Паралельні сторони трапеції називають **основами**, а непаралельні — **бічними сторонами** (рис. 63).

У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) кути A і D називають **кутами при основі** AD, а кути B і C — кутами при основі BC.

Означення. Висотою трапеції називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, що містить другу основу.

На рисунку 64 кожний із відрізків BM, EF, DK, PQ є висотою трапеції $ABCD$. Довжини цих відрізків дорівнюють відстані між паралельними прямими BC і AD. Тому $BM = EF = DK = PQ$.

На рисунку 65 зображено трапецію $ABCD$, у якої бічні сторони AB і CD рівні. Таку трапецію називають **рівнобічною** або **рівнобедреною**.

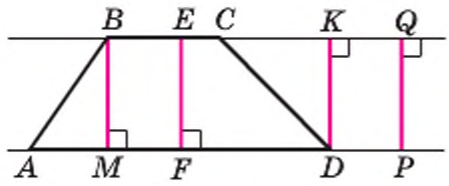


Рис. 64

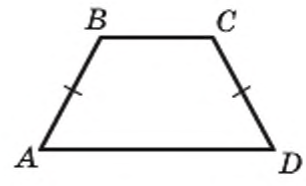


Рис. 65

Якщо бічна сторона трапеції є її висотою, то таку трапецію називають **прямокутною** (рис. 66).

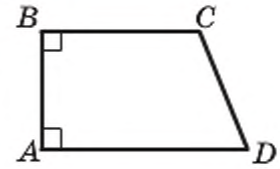


Рис. 66

Трапеція — це окремий вид чотирикутника. Зв'язок між чотирикутниками та їхніми окремими видами показано на рисунку 67.

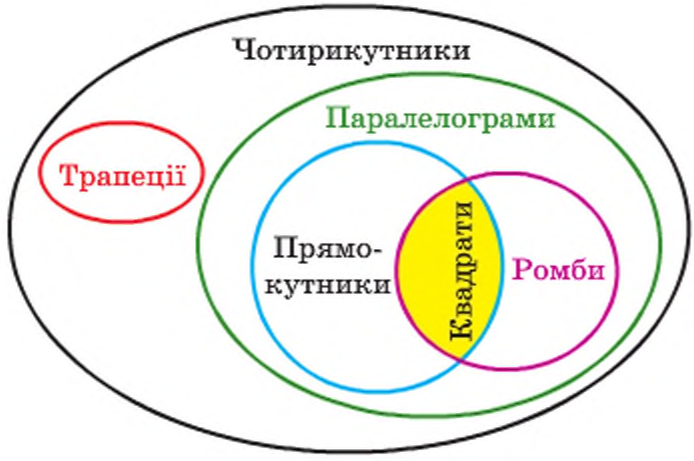


Рис. 67

Означення. Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

На рисунку 68 відрізок MN — середня лінія трапеції $ABCD$.

Теорема 8.1. ***Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює половині їхньої суми.***

Доведення. Нехай MN — середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 69). Доведемо, що $MN \parallel AD$ і $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Проведемо пряму BN і точку її перетину з прямою AD позначимо буквою E.

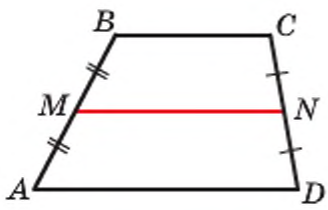


Рис. 68

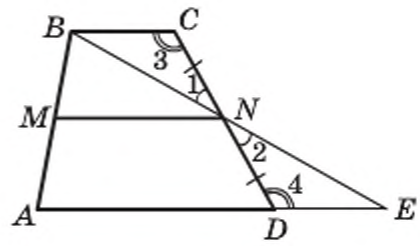


Рис. 69

Оскільки точка N — середина відрізка CD, то $CN = ND$. Кути 1 і 2 рівні як вертикальні, а кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AE та січній CD. Отже, трикутники BCN і EDN рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = DE$ і $BN = NE$. Тоді відрізок MN — середня лінія трикутника ABE. Із цього випливає, що $MN \parallel AE$, тобто $MN \parallel AD$, і $MN = \frac{1}{2}AE$. Маємо:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \blacktriangle$$

Задача (властивості рівнобічної трапеції). Доведіть, що в рівнобічній трапеції:

1) кути при кожній основі рівні;

2) діагоналі рівні;

3) висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить основу трапеції на два відрізки, менший з яких дорівнює половині різниці основ, а більший — половині суми основ (середній лінії трапеції).

Розв'язання. Розглянемо рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$).

1) Проведемо висоти BM і CK (рис. 70). Оскільки $AB = CD$ і $BM = CK$, то прямокутні трикутники AMB і DKC рівні за катетом і гіпотенузою. Тоді $\angle A = \angle D$.

Маємо: $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle ABC = 180°$, $\angle D + \angle DCB = 180°$. Отже, $\angle ABC = \angle DCB$.

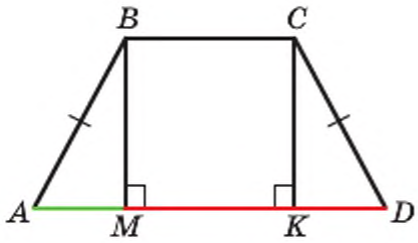


Рис. 70

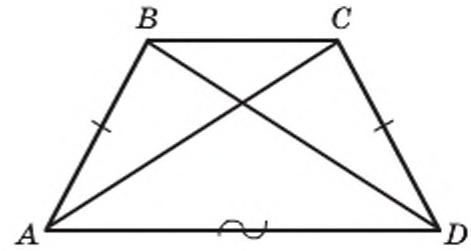


Рис. 71

2) Розглянемо трикутники ACD і DBA (рис. 71).

Маємо: $AB = CD$, AD — спільна сторона, кути BAD і CDA рівні як кути при основі рівнобічної трапеції. Отже, трикутники ACD і DBA рівні за двома сторонами та кутом між ними. Тоді $AC = BD$.

3) У чотирикутнику $BMKC$ (рис. 70) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, кут BMK прямий. Отже, цей чотирикутник є прямокутником. Звідси $MK = BC$.

З рівності трикутників AMB і DKC випливає, що $AM = KD$. Тоді

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

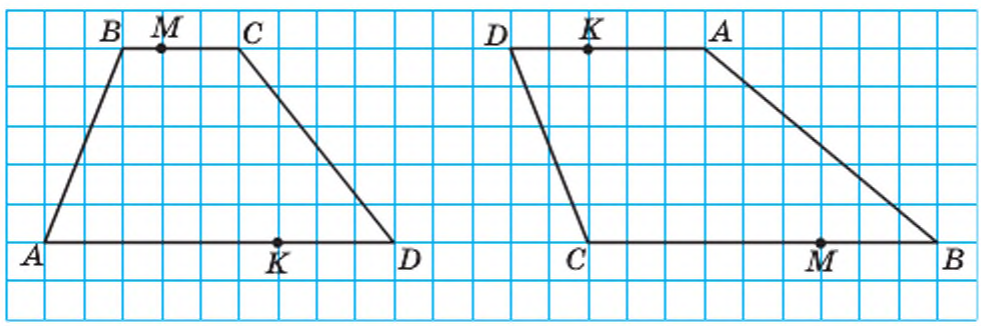
$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

1. Який чотирикутник називають трапецією?
2. Які сторони трапеції називають основами? бічними сторонами?
3. Що називають висотою трапеції?
4. Які існують види трапецій?
5. Яку трапецію називають рівнобічною?
6. Яку трапецію називають прямокутною?
7. Що називають середньою лінією трапеції?
8. Сформулюйте теорему про властивості середньої лінії трапеції.
9. Сформулюйте властивості рівнобічної трапеції.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

216.° Накресліть, використовуючи клітинки зошита, трапецію:
1) рівнобічну;
2) прямокутну;
3) яка не є ні прямокутною, ні рівнобічною;
4) у якої один із кутів при основі гострий, а другий кут при цій самій основі тупий.

217.° Перерисуйте в зошит рисунок 72, проведіть висоти трапеції, одним із кінців яких є відповідно точки B, M, K і D.

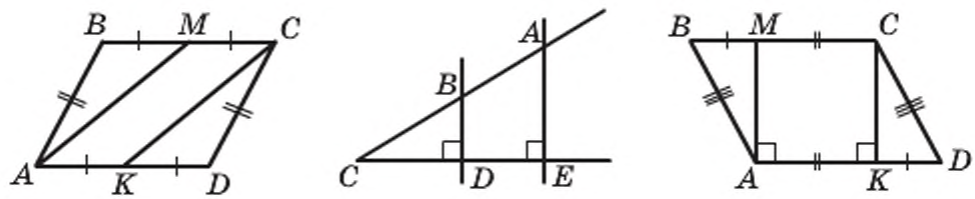


а *б*

Рис. 72

ВПРАВИ

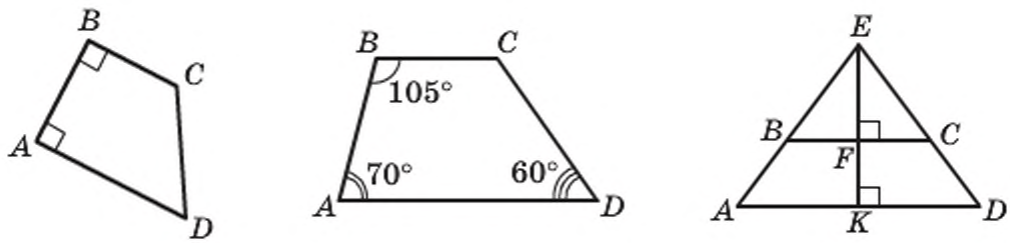
218.° Знайдіть на рисунку 73 трапеції, укажіть їхні основи та бічні сторони.



а *б* *в*

Рис. 73

219.° Чи є чотирикутник $ABCD$, зображений на рисунку 74, трапецією? У разі ствердної відповіді вкажіть основи та бічні сторони трапеції.



а *б* *в*

Рис. 74

220.° Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 52 см, основи — 13 см і 21 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

219.° Периметр трапеції дорівнює 49 см, бічні сторони — 5,6 см і 7,8 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 7,4 см більша за другу.

222.° Доведіть, що сума кутів трапеції, прилеглих до її бічної сторони, дорівнює 180°.

223.° 1) Знайдіть кути A і C трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, якщо $\angle B = 132°$, $\angle D = 24°$.

2) Знайдіть кути трапеції $ABCD$, прилеглі до бічної сторони AB, якщо кут A менший від кута B на 38°.

224.° Знайдіть кути трапеції $ABCD$, прилеглі до бічної сторони CD, якщо $\angle C : \angle D = 8 : 7$.

225.° Один із кутів рівнобічної трапеції дорівнює 46°. Знайдіть решту її кутів.

226.° Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює 20°.

227.° У рівнобічній трапеції кут між бічною стороною та висотою, проведеною з вершини тупого кута, дорівнює 23°. Знайдіть кути трапеції.

228.° Чи можуть у трапеції бути:
1) три прямих кути;
2) три гострих кути;
3) два протилежних кути тупими;
4) два протилежних кути прямими;
5) два протилежних кути рівними?

229.° Чи можуть:
1) основи трапеції бути рівними;
2) діагоналі трапеції точкою перетину ділитися навпіл?

230.° Доведіть, що коли кути при одній з основ трапеції рівні, то дана трапеція є рівнобічною.

231.° Доведіть, що сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°. Чи є правильним обернене твердження: якщо сума протилежних кутів трапеції дорівнює 180°, то дана трапеція є рівнобічною?

232.° Середня лінія рівностороннього трикутника зі стороною 6 см розбиває його на трикутник і чотирикутник. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його периметр.

233.° Висота рівнобічної трапеції, проведена з кінця меншої основи, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть основи трапеції.

234.° Один із кутів рівнобічної трапеції дорівнює 60°, бічна сторона — 18 см, а сума основ — 50 см. Знайдіть основи трапеції.

235.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 10 см і 24 см, а один із кутів — 45°. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.

236.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а один із кутів — 60°. Знайдіть більшу бічну сторону трапеції.

237.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $AB = CD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 50°$. Знайдіть кути ACB і ACD.

238.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $\angle ABD = 80°$. Знайдіть кути трапеції.

239.° У трапеції $ABCD$ менша основа BC дорівнює 6 см. Через вершину B проведено пряму, яка паралельна стороні CD і перетинає сторону AD у точці M. Знайдіть периметр трапеції, якщо периметр трикутника ABM дорівнює 16 см.

240.° Через вершину C трапеції $ABCD$ проведено пряму, яка паралельна бічній стороні AB і перетинає більшу основу AD у точці E. Знайдіть кути трапеції, якщо $\angle D = 35°$, $\angle DCE = 65°$.

241.° Основи трапеції дорівнюють 9 см і 15 см. Чому дорівнює її середня лінія?

242.° Середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а одна з основ — 5 см. Знайдіть другу основу трапеції.

243.° Одна з основ трапеції на 8 см більша за другу, а середня лінія дорівнює 17 см. Знайдіть основи трапеції.

244.° Основи трапеції відносяться як 3 : 4, а середня лінія дорівнює 14 см. Знайдіть основи трапеції.

245.° Кожну з бічних сторін трапеції $ABCD$ (рис. 75) поділено на чотири рівні частини: $AE = EF = FK = KB$, $DN = NM = MP = PC$. Знайдіть відрізки EN, FM і KP, якщо $AD = 19$ см, $BC = 11$ см.

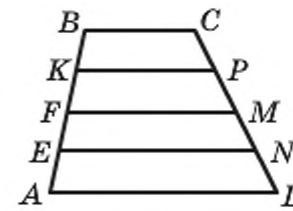


Рис. 75

246.° Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 7 см і 5 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть середню лінію трапеції.

247.° Середня лінія прямокутної трапеції дорівнює 9 см, а висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки, один з яких у 2 рази більший за другий, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть основи трапеції.

248.• Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) перетинаються в точці O. Доведіть, що $AO = OD$ і $BO = OC$.

249.• Висота рівнобічної трапеції дорівнює h, а бічну сторону видно з точки перетину діагоналей під кутом[1] 60°. Знайдіть діагональ трапеції.

250.• Основи рівнобічної трапеції відносяться як 2 : 5, а діагональ ділить тупий кут трапеції навпіл. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 68 см.

---

[1] Нехай дано відрізок AB і точку M поза прямою AB таку, що $\angle AMB = \alpha$. У такому випадку говорять, що відрізок AB видно з точки M під кутом α.

251.• У трапеції $ABCD$ відомо, що $AB = CD$, $AD = 24$ см, $\angle ADB = \angle CDB$, а периметр дорівнює 60 см. Знайдіть невідомі сторони трапеції.

252.• Сторони трапеції дорівнюють a, a, a і $2a$. Знайдіть кути трапеції.

253.• У трапеції $ABCD$ діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD і є бісектрисою кута BAD, $\angle D = 60°$, периметр трапеції дорівнює 40 см. Знайдіть основи трапеції.

254.• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть кути трапеції.

255.• За якої умови висота рівнобічної трапеції дорівнює половині різниці основ?

256.• Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною та кутом між ними.

257.• Побудуйте прямокутну трапецію за основами та меншою бічною стороною.

258.• Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною та діагоналлю.

259.• Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 6 см, більша основа — 10 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60°.

260.• Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 14 см і утворює з основою кут 60°. Знайдіть середню лінію трапеції.

261.• Середня лінія трапеції $ABCD$ розбиває її на дві трапеції, середні лінії яких дорівнюють 15 см і 19 см. Знайдіть основи трапеції $ABCD$.

262.•• Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії трапеції.

263.•• Доведіть, що коли висота рівнобічної трапеції дорівнює її середній лінії, то діагоналі трапеції перпендикулярні.

264.•• Діагональ прямокутної трапеції розбиває її на два трикутники, один з яких є рівностороннім зі стороною a. Знайдіть середню лінію трапеції.

265.•• Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.

266.•• У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відомо, що $AC \perp BD$, $\angle CAD = 30°$, $BD = 8$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

267.•• Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, належить прямій, яка містить її середню лінію.