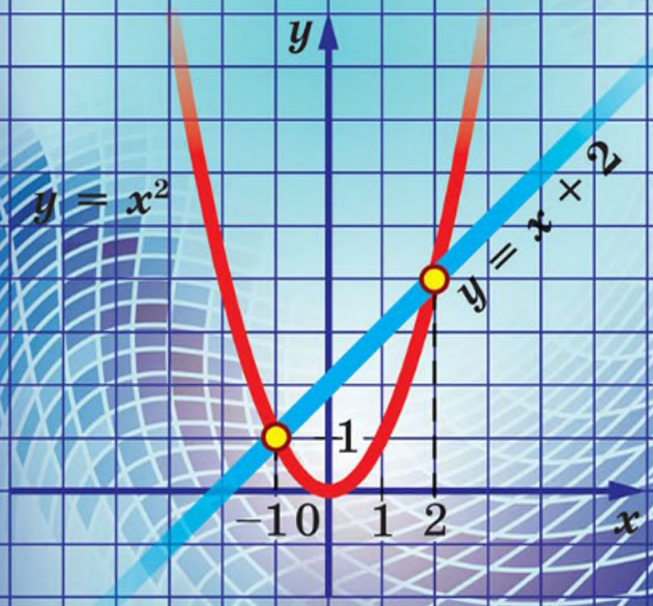
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

8

# АЛГЕБРА




ГІМНАЗІЯ

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
М52

**Мерзляк А. Г.**
М52 Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 240 с. : іл.
ISBN 978-966-474-000-0.

**УДК 373.167.1:512**
**ББК 22.14я721**

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, 2016
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, художнє оформлення, 2016

ISBN 978-966-474-000-0

# Від авторів

## УЧНЯМ

### ЛЮБІ ВОСЬМИКЛАСНИКИ!

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати алгебру. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на три параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Найважливіші відомості виділено **жирним** ***шрифтом*** і *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і важкі задачі (особливо ті, що позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевірте себе».

Кожний пункт завершується рубрикою «Учимося робити нестандартні кроки». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні алгебраїчні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни. Вони допоможуть вам навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не тільки в математиці, а й у житті.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

## УЧИТЕЛЯМ

### ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка й факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

## Умовні позначення

$n^{\circ}$ завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

$n^{*}$ задачі для математичних гуртків і факультативів;

▲ закінчення доведення теореми, розв'язування прикладу;

завдання, які можна виконувати за допомогою комп'ютера;

рубрика «Коли зроблено уроки».

**Зеленим** кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

# § 1 РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з дробами, чисельниками й знаменниками яких є вирази зі змінними; навчитеся додавати, віднімати, множити й ділити такі дроби; ознайомитеся з рівняннями, які складено за допомогою цих дробів.
- Ви дізнаєтеся, за якими правилами можна замінити дане рівняння на більш просте.
- Ви розширите свої уявлення про поняття «степінь», навчитеся підносити числа до степеня із цілим від'ємним показником.
- Ви навчитеся будувати математичні моделі процесів, у яких збільшення (зменшення) однієї величини в кілька разів приводить до зменшення (збільшення) другої величини в таку саму кількість разів.

## 1. Раціональні дроби

**Перед вивченням цього пункту рекомендуємо повторити зміст п. 1 на с. 216 і п. 6 на с. 218.**

У курсі алгебри 7 класу було розглянуто цілі вирази, тобто вирази, що складені із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення та ділення на відмінне від нуля число.

Ось приклади цілих виразів:

$$x - y,\ \frac{a+b}{5},\ m^2 + 2m + n^2,\ \frac{1}{3}x - 4,\ \frac{c}{4} + \frac{d}{7},\ x : 5,\ y,\ 7.$$

У курсі алгебри 8 класу ми розглянемо **дробові вирази**.

Дробові вирази відрізняються від цілих тим, що вони *містять ділення на вираз зі змінними*.

Наведемо приклади дробових виразів:

$$2x + \frac{a}{b},\ (x - y) : (x + y),\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},\ \frac{5}{x}.$$

Цілі та дробові вирази називають **раціональними виразами**.

Якщо в раціональному виразі замінити змінні числами, то отримаємо числовий вираз. Проте *ця заміна можлива лише тоді, коли вона не приводить до ділення на нуль*.

Наприклад, вираз $2+\frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не має змісту, тобто числового значення цього виразу при $a = 1$ не існує. При всіх інших значеннях $a$ цей вираз має зміст.

**Означення. Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального виразу, називають усі значення змінних, при яких цей вираз має зміст.**

Наприклад, у розглянутому вище виразі допустимими значеннями для змінної $a$ є всі числа, крім 1.

Допустимими значеннями змінних, які входять до цілого виразу, є всі числа.

Окремим видом раціонального виразу є **раціональний дріб**. Це дріб, чисельником і знаменником якого є многочлени[1]. Так, раціональні вирази

$$\frac{x}{7},\ \frac{x^2-2xy}{x+y},\ \frac{12}{a},\ \frac{a+b}{5}$$

є прикладами раціональних дробів.

Зазначимо, що раціональний дріб може бути як цілим виразом, так і дробовим.

Знаменник раціонального дробу не може бути **нульовим многочленом**, тобто многочленом, який тотожно дорівнює нулю.

Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального дробу, є всі значення змінних, при яких значення знаменника дробу не дорівнює нулю.

Схема на рисунку 1 ілюструє зв'язок між поняттями, що розглядаються в цьому пункті.

**Рис. 1**

[1] Нагадаємо, що числа й одночлени вважають окремими випадками многочленів (див. п. 6 на с. 218).

**ПРИКЛАД** Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-5}$.

*Розв'язання.* Дріб $\frac{1}{x}$ має зміст при всіх значеннях $x$, крім $x = 0$, а дріб $\frac{3}{x-5}$ має зміст при всіх значеннях $x$, крім $x = 5$.

Отже, шуканими допустимими значеннями змінної є всі числа, відмінні від 0 і 5. ▲

?

1. Чим відрізняються дробові вирази від цілих?
2. Як разом називають цілі та дробові вирази?
3. Які значення змінних називають допустимими?
4. Які дроби називають раціональними?
5. Окремим випадком яких виразів є раціональні дроби?
6. Який многочлен не може бути знаменником раціонального дробу?

## ВПРАВИ

**1.°** Які з виразів $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ є:

1) цілими виразами; 2) дробовими виразами; 3) раціональними дробами?

**2.°** Чому дорівнює значення дробу $\frac{c^2-4c}{2c+1}$, якщо:

1) $c = -3$; 2) $c = 0$?

**3.°** Знайдіть значення виразу $\frac{2m-n}{3m+2n}$, якщо:

1) $m = -1$, $n = 1$; 2) $m = 4$, $n = -5$.

**4.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $\frac{a^2-1}{a-5}$ при $a = -4$; 2) $\frac{x+3}{y}-\frac{y}{x+2}$ при $x = -5$, $y = 6$?

**5.°** Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу:

1) $2x - 5$; 3) $\frac{9}{x-5}$; 5) $\frac{2+y}{1+y}$;

2) $\frac{18}{m}$; 4) $\frac{x-5}{9}$; 6) $\frac{1}{x^2+4}$;

7) $\frac{5}{x^2-4}$; 9) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{x+1}$; 11) $\frac{x}{|x|+1}$;

8) $\frac{5}{|x|-4}$; 10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$; 12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$.

**6.°** При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{9}{y}$; 3) $\frac{m-1}{m^2-9}$; 5) $\frac{4}{x-8}+\frac{1}{x-1}$;

2) $\frac{x+7}{x+9}$; 4) $\frac{x}{|x|-3}$; 6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$?

**7.•** Запишіть раціональний дріб, який містить змінну $x$ і має зміст при всіх значеннях $x$, крім:

1) $x = 7$; 2) $x = -1$; 3) $x = 0$ і $x = 4$.

**8.•** Запишіть раціональний дріб, який містить змінну $y$, допустимими значеннями якої є:

1) усі числа, крім 5; 3) усі числа, крім 3, −3 і 6;

2) усі числа, крім −2 і 0; 4) усі числа.

**9.•** Автомобіль проїхав по шосе $a$ км зі швидкістю 75 км/год і по ґрунтовій дорозі $b$ км зі швидкістю 40 км/год. За який час автомобіль проїхав увесь шлях? Складіть вираз і знайдіть його значення при $a = 150$, $b = 20$.

**10.•** Учень придбав зошити по 8 грн, заплативши за них $m$ грн, і по 14 грн, заплативши за них $n$ грн. Скільки зошитів придбав учень? Складіть вираз і знайдіть його значення при $m = 24$, $n = 56$.

**11.•** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної $x$ значення дробу:

1) $\frac{1}{x^2}$ додатне; 2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ від'ємне.

**12.•** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної $x$ значення дробу:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ недодатне; 2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ невід'ємне.

**13.•** Відомо, що $5x - 15y = 1$. Знайдіть значення виразу:

1) $x - 3y$; 3) $\frac{18y-6x}{9}$;

2) $\frac{8}{2x-6y}$; 4) $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$.

**14.•** Відомо, що $4a + 8b = 10$. Знайдіть значення виразу:

1) $2b + a$; 2) $\frac{5}{a+2b}$; 3) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}$.

**15.**•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{1}{4-\dfrac{4}{x}}$; 2) $y=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}$.

**16.**•• При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\dfrac{x}{x-\dfrac{9}{x}}$; 2) $\dfrac{10}{2+\dfrac{6}{x}}$?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**17.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{5}{15}$; 2) $\dfrac{12}{18}$; 3) $\dfrac{27}{45}$; 4) $\dfrac{30}{48}$.

**18.** Зведіть дріб:

1) $\dfrac{3}{7}$ до знаменника 14; 2) $\dfrac{8}{15}$ до знаменника 60.

**19.** Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $a^5a^3$; 2) $(a^5)^3$; 3) $a^5 : a^3$; 4) $(a^8)^4 : (a^2)^8$.

**20.** Розкладіть на множники:

1) $6a - 15b$;
2) $2a + ab$;
3) $7am + 7bn$;
4) $4x^2 - 12xy$;
5) $a^6 + a^2$;
6) $12m^2n - 4mn$;
7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;
8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$.

**21.** Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $ab - ac + bd - cd$;
2) $3m + 3n - mx - nx$;
3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b$.

**22.** Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $a^2 - 8a + 16$;
2) $9x^2 + 6x + 1$;
3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;
4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2$.

**23.** Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 9$;
2) $25 - 4y^2$;
3) $36m^2 - 49n^2$;
4) $a^2b^2 - 81$;
5) $100m^6 - 1$;
6) $a^{10} - b^6$;
7) $c^3 - d^3$;
8) $a^3 + 8$;
9) $27m^6 - n^9$.

**24.** Розкладіть на множники:

1) $7a^2 - 7$;
2) $3b^3 - 3b$;
3) $2x^3 - 2xy^2$;
4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$;
5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$;
6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4$.

**25.** Яка з рівностей є тотожністю:

1) $3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3(x - 6y)^2$;
2) $4m^3 - 500n^6 = 4(m - 5n)(m - 5mn + 25n^2)$?

**Поновіть у пам'яті зміст п. 2 на с. 216.**

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**26.** Дано два числа: $a = \underbrace{44\ldots4}_{m \text{ цифр}}$, $b = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ цифр}}$. Чи можна підібрати такі $m$ і $n$, щоб:

1) число $a$ було дільником числа $b$;
2) число $b$ було дільником числа $a$?

# 2. Основна властивість раціонального дробу

Рівність $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ є тотожністю, оскільки вона виконується при будь-яких значеннях $a$.

Рівність $\frac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \frac{5a + 4}{a + 1}$ також природно вважати тотожністю. Але вона виконується не при будь-яких значеннях $a$. При $a = -1$ раціональні дроби, які входять у дану рівність, не мають змісту.

Уточнимо прийняті в 7 класі означення тотожно рівних виразів і означення тотожності.

**Означення. Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в них входять, називають тотожно рівними.**

**Означення. Рівність, яка виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в неї входять, називають тотожністю.**

Наприклад, рівність $\frac{a - 2}{a - 2} = 1$ є тотожністю, оскільки вона виконується при всіх допустимих значеннях $a$, тобто при всіх $a$, крім $a = 2$.

У 7 класі ми розглядали тотожні перетворення цілих виразів. Тепер розглянемо тотожні перетворення дробових виразів.

Як ви знаєте, основна властивість відношення виражається такою рівністю:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm},$$

де $a$, $b$ і $m$ — деякі числа, причому $b \neq 0$ і $m \neq 0$.

Раціональні дроби мають властивість, аналогічну основній властивості відношення:

***якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити на один і той самий ненульовий многочлен, то отримаємо дріб, тотожно рівний даному.***

Цю властивість називають **основною властивістю раціонального дробу** й записують:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},$$

де $A$, $B$ і $C$ — многочлени, причому многочлени $B$ і $C$ ненульові.

Відповідно до цієї властивості вираз $\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$ можна замінити на тотожно рівний йому дріб $\frac{A}{B}$. Таке тотожне перетворення називають **скороченням дробу** на множник $C$.

**ПРИКЛАД 1** Скоротіть дріб: 1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$.

*Розв'язання.* 1) Одночлени $6a^3b^2$ і $24a^2b^4$ мають спільний множник $6a^2b^2$. Тоді можна записати:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}=\frac{a\cdot 6a^2b^2}{4b^2\cdot 6a^2b^2}=\frac{a}{4b^2}.$$

2) Розкладемо чисельник даного дробу на множники:

$$\frac{3x+15y}{3x}=\frac{3(x+5y)}{3x}.$$

Отже, чисельник і знаменник даного дробу мають спільний множник 3, скоротивши на який отримуємо:

$$\frac{3(x+5y)}{3x}=\frac{x+5y}{x}.$$

3) Розклавши попередньо чисельник і знаменник даного дробу на множники та скоротивши на спільний множник $y+2$, отримуємо:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}=\frac{(y+2)^2}{y(y+2)}=\frac{y+2}{y}.\ ▲$$

З основної властивості дробу випливає, що

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}\ \text{і}\ \frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}.$$

Кожен із дробів $\frac{-A}{B}$ і $\frac{A}{-B}$ можна записати у вигляді виразу $-\frac{A}{B}$, тобто $\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$.

**ПРИКЛАД 2** Скоротіть дріб $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

*Розв'язання.* Маємо:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2}=\frac{4(a-5)}{a(5-a)}=\frac{4(a-5)}{-a(a-5)}=-\frac{4}{a}.\ ▲$$

**ПРИКЛАД 3** Зведіть дріб:

1) $\frac{a^2}{5bc^3}$ до знаменника $15ab^3c^5$;

2) $\frac{a}{a+2b}$ до знаменника $a^2 - 4b^2$;

3) $\frac{a-b}{2a-3b}$ до знаменника $3b - 2a$.

*Розв'язання.* 1) Оскільки $15ab^3c^5 = 5bc^3 \cdot 3ab^2c^2$, то новий знаменник відрізняється від знаменника даного дробу множником $3ab^2c^2$. Отже, чисельник і знаменник даного дробу треба помножити на **додатковий множник** $3ab^2c^2$. Маємо:

$$\frac{a^2}{5bc^3} = \frac{a^2 \cdot 3ab^2c^2}{5bc^3 \cdot 3ab^2c^2} = \frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

2) Запишемо: $\frac{a}{a+2b} = \frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)} = \frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}$.

3) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на число $-1$, отримуємо:

$$\frac{a-b}{2a-3b} = \frac{(a-b)\cdot(-1)}{(2a-3b)\cdot(-1)} = \frac{b-a}{3b-2a}. \blacktriangle$$

**ПРИКЛАД 4** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2m}{9a^2b^6}$ і $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ і $\frac{1}{a-b}$; 3) $\frac{4a^2}{a^2-36}$ і $\frac{6}{a^2+6a}$.

*Розв'язання.* 1) Можна взяти за спільний знаменник даних дробів добуток їхніх знаменників, який дорівнює $54a^6b^9$. Проте зручніше за спільний знаменник узяти одночлен $18a^4b^6$, сконструйований таким чином: його коефіцієнт 18 є найменшим спільним кратним коефіцієнтів 9 і 6 знаменників даних дробів, а кожну зі змінних $a$ і $b$ узято в степені з найбільшим показником степеня, з яким вона входить у знаменники даних дробів.

Оскільки $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то додатковим множником для дробу $\frac{2m}{9a^2b^6}$ є одночлен $2a^2$. Ураховуючи, що $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, отримуємо, що додатковим множником для дробу $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ є одночлен $3b^3$.

Отже, отримуємо:

$$\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6};$$

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Тут спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їхніх знаменників. Маємо:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{a^2-b^2};$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Щоб знайти спільний знаменник раціональних дробів, буває корисним попередньо розкласти їхні знаменники на множники:

$$a^2-36=(a+6)(a-6),\ a^2+6a=a(a+6).$$

Отже, спільним знаменником даних дробів може слугувати вираз $a(a+6)(a-6)$.

Тоді

$$\frac{4a^2}{a^2-36}=\frac{\overset{a/}{4a^2}}{(a+6)(a-6)}=\frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)}=\frac{4a^3}{a^3-36a};$$

$$\frac{6}{a^2+6a}=\frac{\overset{a-6/}{6}}{a(a+6)}=\frac{6(a-6)}{a(a+6)(a-6)}=\frac{6a-36}{a^3-36a}.\ ▲$$

**ПРИКЛАД 5** Побудуйте графік функції $y=\frac{x^2-1}{x-1}$.

*Розв'язання.* Дана функція визначена при всіх значеннях $x$, крім 1. Маємо:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,$$

тобто $y=x+1$, де $x\neq 1$.

Отже, шуканим графіком є всі точки прямої $y=x+1$, за винятком однієї точки, абсциса якої дорівнює 1 (рис. 2). ▲

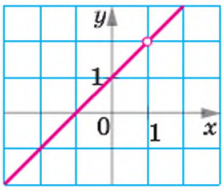



**Рис. 2**

**ПРИКЛАД 6** Для кожного значення $a$ розв'яжіть рівняння $(a^2-9)x=a+3$.

*Розв'язання.* Запишемо дане рівняння у вигляді $(a+3)(a-3)x=a+3$ і розглянемо три випадки.

1) $a=3$.

Тоді отримуємо рівняння $0x=6$, яке не має коренів.

2) $a=-3$.

У цьому випадку отримуємо рівняння $0x=0$, коренем якого є будь-яке число.

3) $a\neq 3$ і $a\neq -3$.

Тоді $x=\frac{a+3}{(a+3)(a-3)}=\frac{1}{a-3}$.

*Відповідь*: якщо $a=3$, то рівняння не має коренів; якщо $a=-3$, то коренем є будь-яке число; якщо $a\neq 3$ і $a\neq -3$, то $x=\frac{1}{a-3}$. ▲

**?**

**1.** Які вирази називають тотожно рівними?

**2.** Що називають тотожністю?

**3.** Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.

## ВПРАВИ

**27.°** Якому з наведених виразів тотожно дорівнює дріб $\frac{6a^2}{24a}$:

1) $\frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{a}{4}$; 3) $\frac{12a^3}{48a}$; 4) $\frac{3a^4}{12a^2}$?

**28.°** Чи є тотожністю рівність:

1) $\frac{3m^2}{7m}=\frac{3m}{7}$;

2) $\frac{4x^8}{16x^4}=\frac{x^2}{4}$;

3) $\frac{2b}{5c^3}=\frac{8b}{20c^5}$;

4) $\frac{8m^2}{9n}=\frac{8m^5}{9nm^3}$?

**29.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{14a^3}{21a}$; 3) $\frac{5x}{20x}$; 5) $\frac{4abc}{16ab^4}$; 7) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\frac{8b^3c^2}{12bc^3}$; 4) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$; 6) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 8) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

**30.°** Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть отриманий дріб:

1) $6a : (18a^5)$; 2) $16b^7 : (48b^4)$; 3) $35a^8b^6 : (-49a^6b^8)$.

**31.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x}{21y}$; 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\frac{16ab^4}{40ab^2}$; 7) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\frac{5x^2}{6x}$; 4) $\frac{2m^4}{m^3}$; 6) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 8) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

**32.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{-a}{-b}$; 2) $-\frac{-a}{b}$; 3) $-\frac{a}{-b}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$.

**33.°** Відновіть рівності:

1) $\frac{a}{3}=\frac{\quad}{6a}=\frac{\quad}{9a^3}=\frac{\quad}{5b}=\frac{4a^2c^3}{\quad}$;

2) $\frac{m}{n}=\frac{4m}{\quad}=\frac{\quad}{2n^2}=\frac{\quad}{mnp}=\frac{3m^4n^3}{\quad}$.

**34.°** Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{b^3}$ до знаменника $b^5$;

2) $\frac{m}{9n}$ до знаменника $27n^4$;

3) $\frac{6}{7x^2y}$ до знаменника $35x^3y^2$;

4) $\frac{5k}{6p^5}$ до знаменника $24p^9c$.

**35.°** Зведіть дріб:

1) $\frac{x}{y^2}$ до знаменника $y^8$;
2) $\frac{a}{3b}$ до знаменника $6b^3$;
3) $\frac{9}{4m^2n}$ до знаменника $12m^3n^2$;
4) $\frac{11c}{15d^6}$ до знаменника $30bd^7$.

**36.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$;
2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$;
3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$;
4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$;
5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$;
6) $\frac{4a-20b}{12ab}$;
7) $\frac{6x+12}{6x}$;
8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$;
9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$;
10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;
11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;
12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

**37.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$;
2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$;
3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$;
4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$;
5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;
6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

**38.°** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$;
2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$;
3) $\frac{4x-16y}{16y}$;
4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$;
5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$;
6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$;
7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;
8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;
9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

**39.°** Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{a+2}$ до знаменника $4a + 8$;
2) $\frac{m}{m-3n}$ до знаменника $m^2 - 9n^2$;
3) $\frac{x}{2x-y}$ до знаменника $7y - 14x$;
4) $\frac{5b}{2a+3b}$ до знаменника $4a^2 + 12ab + 9b^2$;
5) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ до знаменника $x^3 - 1$.

**40.°** Подайте вираз $x - 5y$ у вигляді дробу зі знаменником:

1) 2; 2) $x$; 3) $4y^3$; 4) $x^2 - 25y^2$.

**41.°** Зведіть дріб $\frac{6}{b-4}$ до знаменника:

1) $5b - 20$; 2) $12 - 3b$; 3) $b^2 - 4b$; 4) $b^2 - 16$.

**42.°** Подайте дані дроби у вигляді дробів з однаковими знаменниками:

1) $\frac{1}{8ab}$ і $\frac{1}{2a^3}$;
2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ і $\frac{4y}{3m^2n^4}$;
3) $\frac{a+b}{a-b}$ і $\frac{2}{a^2-b^2}$;
4) $\frac{3d}{m-n}$ і $\frac{8p}{(m-n)^2}$;
5) $\frac{x}{2x+1}$ і $\frac{x}{3x-2}$;
6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ і $\frac{a}{a^2-b^2}$;
7) $\frac{3a}{4a-4}$ і $\frac{2a}{5-5a}$;
8) $\frac{7a}{b-3}$ і $\frac{c}{9-b^2}$.

**43.°** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ і $\frac{1}{10x^3y}$;
2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ і $\frac{d}{9ab^2}$;
3) $\frac{x}{y-5}$ і $\frac{z}{y^2-25}$;
4) $\frac{m+n}{m^2-mn}$ і $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$;
5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ і $\frac{y-1}{xy-y^2}$;
6) $\frac{6a}{a-2b}$ і $\frac{3a}{a+b}$;
7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ і $\frac{c}{4-c}$;
8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ і $\frac{m}{m-5}$.

**44.•** Скоротіть дріб:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;
2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;
3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$;
4) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$.

**45.•** Скоротіть дріб:

1) $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$;
2) $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$;
3) $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$.

**46.•** Знайдіть значення дробу, попередньо скоротивши його:

1) $\frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}$, якщо $a = -2$, $b = 0{,}4$;
2) $\frac{9b^2-4c^2}{12b^2c-8bc^2}$, якщо $b=\frac{1}{3}$, $c = -6$;
3) $\frac{36x^2-12xy+y^2}{y^2-36x^2}$, якщо $x = 1{,}2$, $y = -3$;
4) $\frac{a^8-a^6}{a^9+a^8}$, якщо $a = -0{,}1$.

**47.•** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{16x^2-4y^2}{6x-3y}$ при $x = 2{,}5$, $y = -2$;
2) $\frac{49c^2-9}{49c^2+42c+9}$ при $c = -4$.

**48.**• Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2p}{5p-15}$ і $\frac{1}{p^3-27}$;

2) $\frac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ і $\frac{a-2}{9a^2-1}$;

3) $\frac{a}{a^2-7a}$ і $\frac{a+3}{a^2-14a+49}$;

4) $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x^2-2x+1}$ і $\frac{4}{x^2+2x+1}$;

5) $\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}$, $\frac{b}{2a-2b}$ і $\frac{ab}{4a-4c}$.

**49.**• Запишіть у вигляді дробів з однаковими знаменниками:

1) $\frac{3a}{3a-2}$, $\frac{a}{9a+6}$ і $\frac{a^2}{9a^2b-4b}$;

2) $\frac{1}{a-5b}$, $\frac{1}{a^2+7ac}$ і $\frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}$.

**50.**•• Знайдіть значення виразу $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, якщо $\frac{x}{y}=2$.

**51.**•• Знайдіть значення виразу $\frac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$, якщо $\frac{a}{b}=5$.

**52.**•• Відомо, що $2a-6b=1$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{8}{a-3b}$;

2) $\frac{a^2-9b^2}{0,5a+1,5b}$.

**53.**•• Знайдіть значення виразу $\frac{2m-1,5n}{32m^2-18n^2}$, якщо $4m+3n=8$.

**54.**•• Чи існує таке значення $a$, при якому дріб $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ набуває від'ємного значення?

**55.**•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{x^2-4}{x+2}$;

2) $y=\frac{x-3}{3-x}$;

3) $y=\frac{x^2-10x+25}{x-5}-\frac{2x^2-4x}{x}$;

4) $y=\frac{2}{x+4}-\frac{2}{x+4}$.

**56.**•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{x^2-8x+16}{x-4}$;

2) $y=x-\frac{x}{x}$;

3) $y=\frac{x^2-3x}{x}-\frac{2x^2-2}{x^2-1}$.

**57.**•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{|x|}{x}$;

2) $y=\frac{x^2-1}{|x|-1}$.

**58.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{x+1}=1$;

2) $\frac{x^2-25}{x-5}=10$;

3) $\frac{x+6}{|x|-6}=0$.

**59.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-16}{x+4}=-8$;

2) $\frac{|x|-7}{x-7}=0$.

**60.*** Для кожного значення $a$ розв'яжіть рівняння:

1) $ax = 1$;
2) $ax = a$;
3) $(a - 6)\,x = a^2 - 12a + 36$;
4) $(a^2 - 4)\,x = a - 2$.

**61.*** Для кожного значення $a$ розв'яжіть рівняння:

1) $(a + 3)\,x = 3$;
2) $(a^2 - 9a)\,x = a^2 - 18a + 81$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**62.** Спростіть вираз:

1) $(x + 2)(x - 9) - 3x(3 - 2x)$;
2) $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$;
3) $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$;
4) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$;
5) $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$;
6) $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$.

**63.** Побудуйте графік функції:

1) $y = 2$;
2) $y = 2x$;
3) $y = 2x - 1$.

**64.** Якого найменшого значення та при яких значеннях $a$ і $b$ набуває вираз $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$?

**65.** Відстань від села Вишневе до залізничної станції на 14 км менша від відстані від села Яблуневе до тієї самої станції. Час, за який автобус долає відстань від села Вишневе до станції, становить 45 хв, а час, за який легковий автомобіль проїжджає від села Яблуневе до станції, на 5 хв більше, при цьому швидкість автомобіля на 12 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автобуса та швидкість легкового автомобіля.

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**66.** Виконайте дії:

1) $\frac{7}{18} + \frac{5}{18}$;
2) $\frac{9}{16} + \frac{7}{16}$;
3) $\frac{23}{32} - \frac{15}{32}$;
4) $4 - 1\frac{3}{11}$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**67.** На сторонах квадрата записано чотири натуральних числа. У кожній вершині квадрата записано число, яке дорівнює добутку чисел, записаних на сторонах, для яких ця вершина є спільною. Сума чисел, записаних у вершинах, дорівнює 55. Знайдіть суму чисел, записаних на сторонах квадрата.

# 3. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Ви знаєте правила додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\ \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

За такими самими правилами додають і віднімають раціональні дроби з однаковими знаменниками.

***Щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.***

***Щоб відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий.***

**ПРИКЛАД 1** Виконайте віднімання:

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}$; 2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

*Розв'язання*

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}=\frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2}=\frac{7x-5-3x+5}{8x^2}=\frac{4x}{8x^2}=\frac{1}{2x}$.

2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=$

$=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}$.

3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=\frac{4+2a-3}{2a-1}=\frac{2a+1}{2a-1}$. ▲

**ПРИКЛАД 2** Відомо, що $\frac{m}{n}=-3$. Знайдіть значення виразу $\frac{2m+n}{m}$.

*Розв'язання.* Подамо даний дріб у вигляді суми цілого та дробового виразів:

$$\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}.$$

Якщо $\frac{m}{n}=-3$, то $\frac{n}{m}=-\frac{1}{3}$. Отже, $\frac{2m+n}{m}=2+\frac{n}{m}=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}$. ▲

**ПРИКЛАД 3** Знайдіть усі натуральні значення $n$, при яких значення виразу $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ є цілим числом.

*Розв'язання.* Подамо даний дріб у вигляді різниці цілого та дробового виразів:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}-\frac{15}{n}=2n+3-\frac{15}{n}.$$

Вираз $2n+3$ набуває натуральних значень при будь-якому натуральному $n$. Тому вираз $2n+3-\frac{15}{n}$ набуває цілих значень, якщо значення виразу $\frac{15}{n}$ є цілими числами. Це можливо лише при таких натуральних значеннях $n$: 1, 3, 5, 15.

*Відповідь*: $n = 1$, або $n = 3$, або $n = 5$, або $n = 15$. ▲

?

1. Як додати раціональні дроби з однаковими знаменниками?
2. Як відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками?

## ВПРАВИ

**68.°** Виконайте дії:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$;
2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$;
4) $\frac{6c}{d}-\frac{2c}{d}$;
5) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$;
6) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;
7) $-\frac{5c+4d}{cd}+\frac{4d+9c}{cd}$;
8) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

**69.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{7k}{18p}-\frac{4k}{18p}$;
2) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;
3) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;
4) $\frac{x-7y}{xy}-\frac{x-4y}{xy}$;
5) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;
6) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

**70.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;
2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;
3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;
4) $\frac{5x+9}{x^2-1}-\frac{4x+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$;  6) $\frac{c^2}{c-7}-\frac{14c-49}{c-7}$.

**71.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$;  3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;

2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$;  4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

**72.°** Виконайте дії:

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$;  4) $\frac{81b^2}{9b-a}+\frac{a^2}{a-9b}$;

2) $\frac{5m}{m-n}+\frac{5n}{n-m}$;  5) $\frac{t^2}{3t-6}+\frac{4}{6-3t}$;

3) $\frac{2x-4y}{x-3y}-\frac{4x-14y}{3y-x}$;  6) $\frac{y^2}{y-1}-\frac{1-2y}{1-y}$.

**73.°** 1) $\frac{x}{y-1}+\frac{2}{1-y}$;  3) $\frac{3m+2n}{2m-3n}-\frac{m-8n}{3n-2m}$;

2) $\frac{3c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}$;  4) $\frac{b^2}{2b-14}+\frac{49}{14-2b}$.

**74.•** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a^2-48}{a-8}-\frac{16}{a-8}$ при $a=32$;  2) $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\frac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

**75.•** Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5x+3}{x^2-16}+\frac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$;  2) $\frac{a^2+a}{a^2-9}-\frac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

**76.•** Спростіть вираз:

1) $\frac{5n-1}{20n}-\frac{7n-8}{20n}-\frac{8n+7}{20n}$;  3) $\frac{3k}{k^3-1}+\frac{4k+1}{1-k^3}+\frac{k^2}{1-k^3}$.

2) $\frac{9m+2}{m^2-4}-\frac{m-9}{4-m^2}+\frac{1-7m}{m^2-4}$;

**77.•** Спростіть вираз:

1) $\frac{6a-1}{16a-8}+\frac{4a-7}{16a-8}+\frac{-2a-2}{8-16a}$;  2) $\frac{2a^2+12a}{a^2-25}+\frac{8a-9}{25-a^2}-\frac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

**78.•** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{15-8a}{(a-1)^2}-\frac{14-7a}{(1-a)^2}$;  3) $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$.

2) $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\frac{12b}{(2-b)^3}$;

**79.•** Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\frac{2x+49}{(7-x)^4}$;  2) $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\frac{y+36}{(6-y)(2+y)}$.

**80.**• Доведіть тотожність:

1) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}=1$; 2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

**81.**• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної $x$ значення виразу $\frac{12x-25}{20x-15}+\frac{8x+10}{20x-15}$ не залежить від значення $x$.

**82.**• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної $y$ значення виразу $\frac{17y+5}{21y-3}-\frac{9-11y}{21y-3}$ не залежить від значення $y$.

**83.**• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{a^2-6}{(a-2)^4}-\frac{7a-4}{(a-2)^4}+\frac{3a+6}{(a-2)^4}$ набуває додатних значень.

**84.**• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{2-b^2}{(b-5)^6}-\frac{7-3b}{(b-5)^6}+\frac{7b-20}{(b-5)^6}$ набуває від'ємних значень.

**85.**•• Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого та дробового виразів:

1) $\frac{x+3}{x}$; 2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

**86.**•• Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого та дробового виразів:

1) $\frac{4a-b}{a}$; 2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

**87.**•• Відомо, що $\frac{x}{y}=4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{y}{x}$; 2) $\frac{2x-3y}{y}$; 3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

**88.**•• Відомо, що $\frac{a}{b}=-2$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a-b}{a}$; 2) $\frac{4a+5b}{b}$; 3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

**89.**•• Знайдіть усі натуральні значення $n$, при яких значення виразу є цілим числом:

1) $\frac{n+6}{n}$; 2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$; 3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

**90.**•• Знайдіть усі натуральні значення $n$, при яких значення виразу є цілим числом:

1) $\frac{8n-9}{n}$; 2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$; 3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**91.** Із двох сіл, відстань між якими дорівнює 9 км, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти й зустрілися через 20 хв. Якби велосипедисти їхали в одному напрямі, то один із них наздогнав би другого через 3 год. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

**92.** Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - 4(x + 1) = 1{,}8 - 1{,}6x$;

2) $3(0{,}5x - 4) + 8{,}5x = 10x - 11$.

**93.** Доведіть, що вираз $(a + 4)(a - 8) + 4(2a + 9)$ при всіх значеннях $a$ набуває невід'ємних значень.

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**94.** Замість зірочки запишіть такий одночлен, щоби справджувалася рівність:

1) $a^2b \cdot * = a^2b^2$;

2) $5xy^3 \cdot * = 10x^4y^6$;

3) $6x^5 \cdot * = 12x^{10}$.

**95.** Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоби справджувалася рівність:

1) $* \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)^2$;

2) $(a + 10b) \cdot * = a^3 - 10ab^2$.

**96.** Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{1}{3a}$ і $\frac{2}{3b}$;

2) $\frac{4m}{p^3q^2}$ і $\frac{3n}{p^2q^3}$;

3) $\frac{5}{m-n}$ і $\frac{6}{m+n}$;

4) $\frac{6x}{x-2y}$ і $\frac{y}{x+y}$;

5) $\frac{y}{6y-36}$ і $\frac{1}{y^2-6y}$;

6) $\frac{1}{a^2-1}$ і $\frac{1}{a^2+a}$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**97.** Чи може парне число мати непарних дільників більше, ніж парних?

## 4. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками

Застосовуючи основну властивість раціонального дробу, додавання і віднімання дробів з різними знаменниками можна звести до додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Нехай треба додати два раціональних дроби $\frac{A}{B}$ і $\frac{C}{D}$.

Можна записати: $\frac{A}{B}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}$, $\frac{C}{D}=\frac{C\cdot B}{D\cdot B}$.

Тоді $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}+\frac{C\cdot B}{D\cdot B}=\frac{A\cdot D+C\cdot B}{B\cdot D}$.

Тут за **спільний знаменник вибрано вираз, який дорівнює добутку знаменників даних дробів.**

Зазначимо, що добуток знаменників даних дробів не завжди є найзручнішим спільним знаменником.

Нагадаємо, щоб знайти спільний знаменник звичайних дробів, ми знаходили найменше спільне кратне знаменників, розкладаючи їх на прості множники. Аналогічно, **щоб знайти спільний знаменник раціональних дробів, може виявитися зручним попередньо розкласти знаменники на множники.**

**ПРИКЛАД 1** Спростіть вираз:

1) $\frac{b+1}{abc}+\frac{1-a}{a^2c}$;

2) $\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}$;

3) $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}$;

5) $\frac{x}{x-4}-\frac{x+2}{x-2}$.

*Розв'язання.* 1) Спільним знаменником даних дробів є одночлен $a^2bc$. Отже,

$$\overset{a/}{\frac{b+1}{abc}}+\overset{b/}{\frac{1-a}{a^2c}}=\frac{ab+a+b-ab}{a^2bc}=\frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Розклавши попередньо знаменники даних дробів на множники, отримуємо:

$$\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}=\overset{m-n/}{\frac{m}{7(m+n)}}-\overset{m+n/}{\frac{n}{7(m-n)}}=$$

$$=\frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)}=\frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)}=\frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) Маємо: $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}=\frac{10n+14}{(n-7)(n+7)}-\overset{n+7/}{\frac{6}{n-7}}=\frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)}=$

$$=\frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)}=\frac{4n-28}{(n-7)(n+7)}=\frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{4}{n+7}.$$

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}=\frac{2a}{(5-a)^2}-\frac{1}{3(a-5)}=$

$$=\overset{3/}{\frac{2a}{(a-5)^2}}-\overset{a-5/}{\frac{1}{3(a-5)}}=\frac{6a-a+5}{3(a-5)^2}=\frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) У цьому випадку спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їхніх знаменників. Тоді

$$\overset{x-2/}{\frac{x}{x-4}}-\overset{x-4/}{\frac{x+2}{x-2}}=\frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)}=\frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)}=$$

$$=\frac{8}{(x-4)(x-2)}.\ ▲$$

**ПРИКЛАД 2** Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{21c^2}{7c-2}-3c$.

*Розв'язання.* Подавши вираз $3c$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$\frac{21c^2}{7c-2}-3c=\frac{21c^2}{7c-2}-\overset{7c-2/}{\frac{3c}{1}}=\frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2}=\frac{6c}{7c-2}.\ ▲$$

Зауважимо, що сума й різниця двох раціональних дробів є раціональними дробами.

?

1. Як виконати додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками?
2. Що є сумою та різницею двох раціональних дробів?

## ВПРАВИ

**98.°** Виконайте дії:

1) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}$;
2) $\frac{5b}{14}-\frac{b}{7}$;
3) $\frac{m}{8}-\frac{n}{6}$;
4) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}$;
5) $\frac{m}{4n}+\frac{m}{6n}$;
6) $\frac{c}{b}-\frac{d}{3b}$;
7) $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{ab^4}$;
8) $\frac{11}{5a}-\frac{2c}{15ab}$;
9) $\frac{m}{abc}+\frac{c}{abm}$.

**99.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{x}{8}-\frac{y}{12}$;
2) $\frac{4a}{7}+\frac{a}{4}$;
3) $\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$;
4) $\frac{x^2}{2y}+\frac{y}{8x}$;
5) $\frac{7}{cd}+\frac{k}{cp}$;
6) $\frac{6a}{35c^5}-\frac{9b}{14c^2}$.

**100.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a+7}{12}+\frac{a-4}{9}$;
2) $\frac{2b-7c}{6}-\frac{3b+2c}{15}$;
3) $\frac{3x-2}{x}-\frac{3y-1}{y}$;
4) $\frac{6p+1}{p}-\frac{2p+8}{3p}$;
5) $\frac{5m-n}{14m}-\frac{m-6n}{7m}$;
6) $\frac{x+4}{11x}-\frac{y-3}{11y}$;
7) $\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}$;
8) $\frac{2}{p^2}+\frac{p-1}{p}$;
9) $\frac{k+4}{k}-\frac{3k-4}{k^2}$;
10) $\frac{x-y}{x^3}-\frac{y-x^2}{x^2y}$;
11) $\frac{2m-3n}{m^2n}+\frac{7m-2n}{mn^2}$;
12) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

**101.°** Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{9-5b}{b}-\frac{7-5c}{c}$;
2) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$;
3) $\frac{5-k}{5p}-\frac{p+10}{5k}$;
4) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$;
5) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$;
6) $\frac{c^2-16}{c^6}-\frac{c-9}{c^5}$;
7) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$;
8) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

**102.°** Виконайте дії:

1) $\frac{2}{x}+\frac{3x-2}{x+1}$;
2) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$;
3) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$;
4) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$;
5) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$;
6) $\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{a+b}$.

**103.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$;
2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$;
3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

**104.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{b(a-b)}-\frac{1}{a(a-b)}$;
2) $\frac{5}{a}+\frac{30}{a(a-6)}$;
3) $\frac{3}{x-2}-\frac{2x+2}{x(x-2)}$;
4) $\frac{y}{2(y+3)}-\frac{y}{5(y+3)}$;
5) $\frac{5m+3}{2(m+1)}-\frac{7m+4}{3(m+1)}$;
6) $\frac{c-a}{a(a+b)}+\frac{c+b}{b(a+b)}$.

**105.°** Виконайте дії:

1) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}$;
2) $\frac{4}{b}-\frac{8}{b(b+2)}$;
3) $\frac{x}{5(x+7)}-\frac{x}{6(x+7)}$;
4) $\frac{4n+2}{3(n-1)}-\frac{5n+3}{4(n-1)}$.

**106.°** Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{a}{a-2}-\frac{3a+1}{3a-6}$;
2) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$;
3) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$;
4) $\frac{d-1}{2d-8}+\frac{d}{d-4}$;
5) $\frac{m+1}{3m-15}-\frac{m-1}{2m-10}$;
6) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$;
7) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;
8) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}-\frac{3y-x}{xy-2y^2}$.

**107.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{b}{b-5}-\frac{4b-1}{4b-20}$;
2) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$;
3) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$;
4) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;
5) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$;
6) $\frac{c-4}{4c+24}+\frac{4c+9}{c^2+6c}$.

**108.°** Виконайте дії:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$;
2) $\frac{a^2}{a^2-64}-\frac{a}{a-8}$;
3) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$;
4) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;
5) $\frac{m}{m+5}-\frac{m^2}{m^2+10m+25}$;
6) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

**109.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$;
2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;
3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;
4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

**110.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a}{b}+1$;
2) $\frac{x}{y}-x$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;
4) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$;
5) $2-\frac{3b+2a}{a}$;
6) $\frac{3b+4}{b-2}-3$;
7) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;
8) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

**111.°** Виконайте дії:

1) $a-\frac{4}{a}$;
2) $\frac{1}{x}+x-2$;
3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;
4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;
5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;
6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

**112.**• Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;
2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;
3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;
4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;
5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;
6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;
7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;
8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

**113.**• Спростіть вираз:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;
2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;
3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;
4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;
5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;
6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

**114.**• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення даного виразу не залежить від значення змінної:

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$;
2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

**115.**• Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $1-a+\frac{a^2-2}{a+2}$;
2) $\frac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;
3) $\frac{c^2+9}{c-3}-c-3$;
4) $\frac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

**116.**• Спростіть вираз:

1) $b+7-\frac{14b}{b+7}$;
2) $5c-\frac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

**117.**• Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\frac{7}{2a-4}-\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a+2}$, якщо $a=5$;
2) $\frac{2c+3}{2c^2-3c}+\frac{2c-3}{2c^2+3c}-\frac{16c}{4c^2-9}$, якщо $c=-0{,}8$;
3) $\frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2}-\frac{m+4n}{2m-8n}$, якщо $m=3$, $n=0{,}5$.

**118.**• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{6}{5x-20}-\frac{x-5}{x^2-8x+16}$, якщо $x=5$;
2) $\frac{2y-1}{2y}-\frac{2y}{2y-1}-\frac{1}{2y-4y^2}$, якщо $y=-2\frac{3}{7}$.

**119.**• Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0;$

2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1};$

3) $\frac{2a^2+4}{a^2-1}-\frac{a-2}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}=\frac{1}{a-1}.$

**120.**• Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}=\frac{1}{3a-2b};$

2) $\frac{c+2}{c^2+3c}-\frac{1}{3c+9}-\frac{2}{3c}=0.$

**121.**• Знайдіть різницю дробів:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1};$ 2) $\frac{1}{b+3}-\frac{b^2-6b}{b^3+27}.$

**122.**• Спростіть вираз:

1) $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n};$ 2) $1-\frac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\frac{2b}{2b+1}.$

**123.**• Доведіть тотожність: $\frac{3a^2+24}{a^3+8}-\frac{6}{a^2-2a+4}-\frac{1}{a+2}=\frac{2}{a+2}.$

**124.**•• Спростіть вираз:

1) $\frac{4b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{b^2-ab};$ 3) $\frac{1}{(a-5b)^2}-\frac{2}{a^2-25b^2}+\frac{1}{(a+5b)^2};$

2) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{x^2+4}{8x-2x^3};$ 4) $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\frac{x+5}{y-2}.$

**125.**•• Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-3}{3a+9}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{a-3}{3a};$ 2) $\frac{b-4}{2a-1}-\frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\frac{2}{2a-1}.$

**126.**•• Доведіть тотожність

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0.$$

**127.**•• Доведіть тотожність

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

**128.**• Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}.$$

**129.**• Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)}.$$

**130.*** Доведіть тотожність

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

**131.*** Доведіть тотожність

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}.$$

**132.*** Доведіть, що коли $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, то $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**133.** Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$; 2) $\frac{x-4}{2}-\frac{x-1}{5}=3$.

**134.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

**135.** За перший день триденної гонки велосипедисти проїхали $\frac{4}{15}$ усього маршруту, за другий день — $\frac{2}{5}$ усього маршруту, а за третій — решту 90 км. Яку відстань проїхали велосипедисти за 3 дні?

**136.** (*З болгарського фольклору.*) П'ятеро братів хотіли поділити 20 овець так, щоб кожен із них одержав непарну кількість овець. Чи можливо це?

**137.** Чи є правильним твердження, що при будь-якому натуральному $n$ значення виразу $(5n+7)^2-(n-1)^2$ ділиться націло на 48?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**138.** Укажіть число, обернене до числа:

1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12.

**139.** Знайдіть значення добутку:

1) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{20}$; 2) $6\cdot\frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

**140.** Виконайте ділення:

1) $\frac{5}{18}:\left(-\frac{25}{27}\right)$; 2) $8:\frac{4}{17}$; 3) $-\frac{8}{15}:(-24)$; 4) $1\frac{3}{5}:5\frac{1}{3}$.

**141.** Знайдіть значення степеня:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 3) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**142.** Два пороми одночасно відпливають від протилежних берегів річки та перетинають її перпендикулярно до берегів. Швидкості поромів сталі, але різні. Пороми зустрічаються на відстані 720 м від одного з берегів, після чого продовжують рух. Діставшись берегів, пороми відразу починають рухатися назад і через деякий час зустрічаються на відстані 400 м від другого берега. Яка ширина річки?

## ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

**1.** Який із наведених виразів є цілим?

А) $\frac{m+n}{m}$; Б) $\frac{m+n}{7}$; В) $\frac{m+n}{7m}$; Г) $m+\frac{n}{7m}$.

**2.** При якому значенні змінної не має змісту вираз $\frac{3a}{2a-10}$?

А) 0; Б) 10; В) 5; Г) 0; 5.

**3.** При яких значеннях аргументу функція $y=\frac{x+2}{x^2-1}$ не визначена?

А) −1; 1; Б) 1; В) −2; −1; 1; Г) −2; 1.

**4.** Скоротіть дріб $\frac{21a^6}{14a^3}$.

А) $\frac{3a^3}{2}$; Б) $\frac{3a^2}{2}$; В) $\frac{3}{2a^3}$; Г) $\frac{3}{2a^2}$.

**5.** Якому з наведених дробів тотожно дорівнює дріб $\frac{5b-15}{b^2-9}$?

А) $\frac{b-3}{5}$; Б) $\frac{b+3}{5}$; В) $\frac{5}{b-3}$; Г) $\frac{5}{b+3}$.

**6.** Скоротіть дріб $\frac{12c^2-4c}{3c-1}$.

А) $4c$; Б) $-4c$; В) $\frac{1}{4c}$; Г) $-\frac{1}{4c}$.

**7.** Виконайте віднімання: $\frac{5x}{x-2}-\frac{10}{x-2}$.

А) $\frac{x+2}{x-2}$; Б) $\frac{5x+10}{x-2}$; В) 5; Г) −5.

**8.** Виконайте додавання: $\frac{4-m}{m-3}+\frac{2m-5}{3-m}$.

А) $\frac{m-1}{m-3}$; Б) $\frac{1-3m}{m-3}$; В) 3; Г) −3.

**9.** Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{3n^2}{n-6}-3n$.

А) $\frac{3n}{n-4}$; Б) $\frac{3n}{4-n}$; В) $\frac{18n}{n-6}$; Г) $\frac{18}{6-n}$.

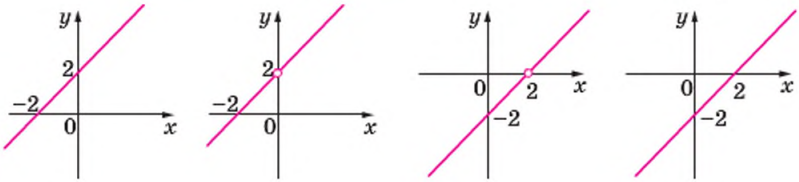
**10.** Спростіть вираз $\frac{2m+1}{3m-2}-\frac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$.

А) $\frac{1}{(3m-2)^2}$; Б) $\frac{1}{3m-2}$; В) $\frac{m}{(3m-2)^2}$; Г) $\frac{m}{3m-2}$.

**11.** Спростіть вираз $\frac{a-12}{a^2+4a}-\frac{a-4}{a}+\frac{a}{a+4}$.

А) $\frac{4}{a}$; Б) $\frac{1}{a}$; В) $a$; Г) $a+4$.

**12.** На якому рисунку зображено графік функції $y=\frac{x^2-4x+4}{x-2}$?




А) Б) В) Г)

## 5. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня

Ви знаєте правила множення і ділення звичайних дробів. Їх можна виразити такими рівностями: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

За аналогічними правилами виконують множення і ділення раціональних дробів.

***Добутком двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник — добутку їхніх знаменників.***

***Часткою двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника діленого та знаменника дільника, а знаменник — добутку знаменника діленого та чисельника дільника.***

**ПРИКЛАД 1** Виконайте дії:

1) $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4}$;

2) $(2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36}$;

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27}$;

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7)$.

*Розв'язання.* 1) Маємо: $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4} = \frac{21c^6 \cdot b^2}{b^8 \cdot 14c^4} = \frac{3c^2}{2b^6}$.

2) Подавши многочлен $2x - 12$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$(2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2x-12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2(x-6) \cdot 4x}{(x-6)^2} = \frac{8x}{x-6};$$

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27} = \frac{a(a+2b)}{a+9} \cdot \frac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{3a}{a-2b}$;

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7) = \frac{5c^2-35c}{c+2} : \frac{c-7}{1} = \frac{5c(c-7)}{c+2} \cdot \frac{1}{c-7} = \frac{5c}{c+2}$. ▲

Правило множення двох дробів можна узагальнити для випадку, коли треба знайти добуток трьох і більше раціональних дробів. Наприклад, для трьох дробів маємо:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

**ПРИКЛАД 2** Спростіть вираз $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}$.

*Розв'язання.* Маємо:

$$\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} = \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} = \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5b^3c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2b^3c^4} = \frac{3a^3}{7c}. ▲$$

Застосовуючи правило множення дробів, можна отримати правило піднесення раціональних дробів до степеня. Для натурального $n$, $n > 1$, маємо:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множників}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{n \text{ множників}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n = 1$ домовилися, що $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$.

Отже,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n},$$

де $n$ — натуральне число.

***Щоб піднести раціональний дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник. Перший результат записати як чисельник, а другий — як знаменник дробу.***

**ПРИКЛАД 3** Подайте у вигляді дробу вираз $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

*Розв'язання.* $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\left(\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}$. ▲

?

1. Що є добутком двох раціональних дробів?
2. Що є часткою двох раціональних дробів?
3. Як піднести раціональний дріб до степеня?

## ВПРАВИ

**143.°** Якому з наведених виразів дорівнює добуток $\frac{a^3}{c^8} \cdot \frac{c^4}{a^3}$?

1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

**144.°** Виконайте множення:

1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$;
2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$;
3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$;
4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$;
5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$;
6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$;
7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$;
8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$.

**145.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$;
2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$;
3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$;
4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$;
5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;
6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

**146.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$;
2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;
3) $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}$;
4) $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a}$;

5) $\frac{c-1}{c+6}\cdot\frac{c+6}{c^2-2c+1}$;

6) $\frac{m-2}{m^2-49}\cdot\frac{m+7}{m-2}$;

7) $(a+4)\cdot\frac{a}{2a+8}$;

8) $\frac{x-9}{4x+8}\cdot\frac{x^2+2x}{x-9}$;

9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3}\cdot\frac{a+1}{2a-1}$;

10) $\frac{a^2-25}{4a}\cdot\frac{4a^2}{a^2-5a}$.

**147.°** Виконайте множення:

1) $\frac{3a+b}{4c}\cdot\frac{c}{3a+b}$;

2) $\frac{ab-b^2}{8}\cdot\frac{4a}{b^4}$;

3) $\frac{5x-5y}{x^6}\cdot\frac{x^3}{x-y}$;

4) $\frac{18b}{b^2-16}\cdot\frac{b+4}{3b}$;

5) $\frac{6}{m^2-9n^2}\cdot(m-3n)$;

6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1}\cdot\frac{3c+1}{c-3}$.

**148.°** Якому з наведених виразів дорівнює частка $\frac{3}{c^3}:\frac{12}{c^9}$?

1) $\frac{c^3}{4}$; 2) $\frac{c^6}{4}$; 3) $4c^3$; 4) $4c^6$.

**149.°** Виконайте ділення:

1) $\frac{8m}{n}:\frac{4m}{n}$;

2) $\frac{3b}{8}:b$;

3) $\frac{7c^2}{d}:\frac{c}{d^3}$;

4) $\frac{6a}{5b}:\frac{3a^2}{20b^2}$;

5) $-\frac{9a}{b^5}:\frac{18a^4}{b^3}$;

6) $a^2:\frac{a}{b^2c}$;

7) $24a^3:\frac{12a^2}{b}$;

8) $\frac{36a}{c^3}:(4a^2c)$.

**150.°** Знайдіть частку:

1) $\frac{7}{a^2}:\frac{28}{a^8}$;

2) $\frac{b^9}{8}:\frac{b^3}{48}$;

3) $\frac{27}{m^6}:\frac{36}{m^7n^2}$;

4) $\frac{6x^{10}}{y^8}:(30x^5y^2)$;

5) $49m^4:\frac{21m}{n^2}$;

6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5}:\left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right)$.

**151.°** Спростіть вираз:

1) $\frac{a-b}{7a}:\frac{a-b}{7b}$;

2) $\frac{x^2-y^2}{x^2}:\frac{6x+6y}{x^5}$;

3) $\frac{c-5}{c^2-4c}:\frac{c-5}{5c-20}$;

4) $\frac{x-y}{xy}:\frac{x^2-y^2}{3xy}$;

5) $\frac{a^2-25}{a+7}:\frac{a-5}{a+7}$;

6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2}:(a-2)$;

7) $(p^2-16k^2):\frac{p+4k}{p}$;

8) $\frac{a^2-ab}{a^2}:\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

**152.°** Виконайте ділення:

1) $\frac{5m-2n}{10k}:\frac{5m-2n}{10k^2}$;

2) $\frac{p+3}{p^2-2p}:\frac{p+3}{4p-8}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{2ab}:\frac{a+b}{ab}$;

4) $\frac{a^2-16}{a-3}:\frac{a+4}{a-3}$;

5) $\frac{y-9}{y-8}:\frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;  6) $(x^2-49y^2):\frac{x-7y}{x}$.

**153.°** Виконайте піднесення до степеня:

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9$;  3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$;  5) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$;

2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^8$;  4) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$;  6) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

**154.°** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$;  2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$;  3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$;  4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

**155.•** Спростіть вираз:

1) $\frac{6a^4b^2}{35c^3}\cdot\frac{14b^2}{a^7c^5}\cdot\frac{5a^3c^8}{18b^4}$;  4) $\left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3:\frac{m^{10}n^5}{54p^8}$;

2) $\frac{33m^8}{34n^8}:\frac{88m^4}{51n^4}:\frac{21m^6}{16n^2}$;  5) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4:\left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

3) $\frac{36x^6}{49y^5}:\frac{24x^9}{25y^4}\cdot\frac{7x^2}{30y}$;  6) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2\cdot\left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

**156.•** Спростіть вираз:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5}\cdot\frac{4b^4c^2}{27a^7}:\frac{5b^7}{9a^3c^3}$;  3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4\cdot\frac{b^{18}}{50a^{16}}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2}:\frac{7c^8}{6b^3}:\frac{9ab}{14c^{12}}$;  4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4:\left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

**157.•** Замініть змінну $x$ таким виразом, щоб утворилася тотожність:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2\cdot x=\frac{6a}{b^2}$;  2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3:x=\frac{b^6}{12}$.

**158.•** Виконайте множення і ділення дробів:

1) $\frac{4-a}{8a^3}\cdot\frac{12a^5}{a^2-16}$;  6) $\frac{x^2-9}{x+y}\cdot\frac{5x+5y}{x^2-3x}$;

2) $\frac{4c-d}{c^2+cd}\cdot\frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$;  7) $\frac{m+2n}{2-3m}:\frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;

3) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9}\cdot\frac{b^3+27}{5b-15}$;  8) $\frac{a^3+8}{16-a^4}:\frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

4) $\frac{a^3-16a}{3a^2b}\cdot\frac{12ab^2}{4a+16}$;  9) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21}\cdot\frac{x^2-49}{4x-24}$;

5) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}\cdot\frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$;  10) $\frac{3a+15b}{a^2-81b^2}:\frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

**159.•** Спростіть вираз:

1) $\frac{7a^2}{a^2-25}\cdot\frac{5-a}{a}$;  2) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{b-a}{b+a}$;

3) $\frac{a^4-1}{a^3-a}\cdot\frac{a}{1+a^2}$;

4) $\frac{a^2-8ab}{12b}:\frac{8b^2-ab}{24a}$;

5) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2}:\frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

6) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8}:\frac{2n+12}{6m-12}$;

7) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1}:\frac{a-1}{a^3+1}$;

8) $\frac{4x^2-100}{6x}:(2x^2-20x+50)$.

**160.**• Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\frac{a^2-81}{a^2-8a}:\frac{a-9}{a^2-64}$, якщо $a=-4$;

2) $\frac{x}{4x^2-4y^2}:\frac{1}{6x+6y}$, якщо $x=4{,}2$, $y=-2{,}8$;

3) $(3a^2-18a+27):\frac{3a-9}{4a}$, якщо $a=0{,}5$;

4) $\frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2}:\frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, якщо $a=0{,}8$.

**161.**• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{a^2-ab}:\frac{b}{b^2-a^2}$, якщо $a=2\frac{1}{3}$, $b=-\frac{3}{7}$.

2) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2}:\frac{3a+6b}{2a-6b}$, якщо $a=4$, $b=-5$.

**162.**•• Відомо, що $x-\frac{1}{x}=9$. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$.

**163.**•• Відомо, що $3x+\frac{1}{x}=-4$. Знайдіть значення виразу $9x^2+\frac{1}{x^2}$.

**164.**•• Дано: $x^2+\frac{16}{x^2}=41$. Знайдіть значення виразу $x+\frac{4}{x}$.

**165.**•• Дано: $x^2+\frac{1}{x^2}=6$. Знайдіть значення виразу $x-\frac{1}{x}$.

**166.**•• Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b}:\frac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2}$;

2) $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b}:\frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

**167.**•• Спростіть вираз:

1) $\frac{25-5a+5b-ab}{25+5a-5b-ab}\cdot\frac{ab-5a-5b+25}{ab+5a+5b+25}$;

2) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-4a+4b}:\frac{a^2-ab+4a-4b}{a^2-16}$.

**168.**•• Доведіть тотожність $\frac{8a^2}{a-3b}:\frac{6a^3}{a^2-9b^2}\cdot\frac{3a}{4a+12b}=1$.

**169.**•• Доведіть тотожність $\frac{a^2+a}{2a-12}\cdot\frac{6a+6}{2a+12}:\frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36}=\frac{1}{6}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**170.** Розв'яжіть рівняння:
1) $(2x + 3)^2 - 2x(5 + 2x) = 10$;
2) $(x - 2)(x - 3) - (x - 6)(x + 1) = 12$.

**171.** Доведіть, що рівняння $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{2} = \frac{x+5}{6}$ не має коренів.

**172.** З пункту $A$ в пункт $B$, відстань між якими дорівнює 192 км, зі швидкістю 60 км/год виїхав мотоцикліст. Через 30 хв назустріч йому з пункту $B$ зі швидкістю 75 км/год виїхав другий мотоцикліст. Скільки часу їхав другий мотоцикліст до зустрічі з першим?

**173.** У двох бідонах разом міститься 80 л молока. Якщо з першого бідона перелити 20 % молока у другий бідон, то в обох бідонах молока стане порівну. Скільки літрів молока було в кожному бідоні спочатку?

**174.** (*З підручника «Арифметика» Л. П. Магницького*[1].) Дванадцятеро людей несуть 12 хлібів. Кожний чоловік несе по 2 хліби, жінка — по половині хліба, а дитина — по чверті хліба. Скільки було чоловіків, жінок і дітей?

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**175.** Василь і Петро по черзі заміняють у рівнянні $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ один знак * на деяке число. Першим заміну робить Василь. Петро хоче отримати рівняння, яке має корінь. Чи може Василь йому завадити?

# 6. Тотожні перетворення раціональних виразів

Правила дій з раціональними дробами дають змогу будь-який раціональний вираз перетворити в раціональний дріб.

Розглянемо приклади.

---

[1] Магницький Леонтій Пилипович (1669–1739) — видатний російський математик-педагог, автор знаменитого підручника «Арифметика» (1703), за яким навчалося багато поколінь. «Вратами своєї вченості» вважав «Арифметику» Магницького М. В. Ломоносов.

**ПРИКЛАД 1** Спростіть вираз $\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}$.

*Розв'язання.* Даний вираз можна спростити аналогічно до того, як ми робили це, коли знаходили значення числового виразу, що містить кілька арифметичних дій. Виконуємо дії відповідно до порядку виконання арифметичних дій: спочатку — віднімання виразів, які стоять у дужках, потім — ділення і наприкінці — віднімання:

1) $\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\frac{3a}{a-2}^{a-2/}-\frac{6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}$;

2) $\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=\frac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{a-4}=$
$=\frac{3a(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2}$;

3) $\frac{3a^2+6a}{a-2}-\frac{2a^2+8a}{a-2}=\frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=\frac{a^2-2a}{a-2}=\frac{a(a-2)}{a-2}=a$.

*Відповідь*: $a$. ▲

Перетворення раціонального виразу можна виконувати не окремими діями, а «ланцюжком». Проілюструємо цей прийом на прикладі.

**ПРИКЛАД 2** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}$ не залежить від значення $a$.

*Розв'язання.* Спростимо даний вираз:

$$\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6(3-a)}\cdot\frac{54a}{a(5+a)}=$$
$$=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3(a-3)}{a-3}=3.$$

Отже, при всіх допустимих значеннях $a$ значення даного виразу дорівнює 3. ▲

**ПРИКЛАД 3** Доведіть тотожність $\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{4}{a+1}$.

*Розв'язання.* Перетворимо ліву частину рівності, що доводиться. Тут доцільно розкрити дужки, застосовуючи розподільну властивість множення:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=$$
$$=\frac{1}{a}^{a+1/}+\frac{3a-1}{a(a+1)}=\frac{a+1+3a-1}{a(a+1)}=\frac{4a}{a(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Тотожність доведено. ▲

**ПРИКЛАД 4** Спростіть вираз $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

*Розв'язання.* Записавши даний вираз у вигляді частки від ділення чисельника на знаменник, отримаємо:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Даний вираз можна спростити іншим способом, використовуючи основну властивість дробу, а саме: помножити його чисельник і знаменник на одночлен $abc$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

*Відповідь*: $\dfrac{bc+ac+ab}{c+a+b}$. ▲

## ВПРАВИ

**176.°** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{4}\right)\cdot\frac{6}{a^2}$;

2) $\frac{a^2b}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

3) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\frac{b}{a-b}$;

5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{a}-\frac{a}{b-1}$;

6) $\left(\frac{5}{m-n}-\frac{4}{m+n}\right):\frac{m+9n}{m+n}$;

7) $\frac{x-2}{x+2}\cdot\left(x-\frac{x^2}{x-2}\right)$;

8) $\frac{x^2+x}{4}:\frac{x^2}{4}+\frac{x-1}{x}$;

9) $\frac{6c^2}{c^2-1}:\left(\frac{1}{c-1}+1\right)$;

10) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\cdot\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$.

**177.°** Спростіть вираз:

1) $\left(x+\frac{x}{y}\right):\left(x-\frac{x}{y}\right)$;

2) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}$;

3) $\left(\frac{m}{m-1}-1\right):\frac{m}{mn-n}$;

4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$;

5) $\frac{a}{b}-\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$;

6) $\frac{7x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{84}{x^2-8x}$;

7) $\left(a-\frac{9a-9}{a+3}\right):\frac{a^2-3a}{a+3}$;

8) $\left(\frac{a}{a+2}-\frac{8}{a+8}\right)\cdot\frac{a^2+8a}{a-4}$.

**178.**• Виконайте дії:

1) $\frac{a+2}{a^2-2a+1}:\frac{a^2-4}{3a-3}-\frac{3}{a-2}$;

2) $\frac{b^2+3b}{b^3+9b}\cdot\left(\frac{b-3}{b+3}+\frac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\frac{3c+1}{3c-1}-\frac{3c-1}{3c+1}\right):\frac{2c}{6c+2}$;

4) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2}-\frac{1}{4b^2-a^2}\right):\frac{2a}{a^2-4b^2}$;

5) $\left(\frac{a-8}{a^2-10a+25}-\frac{a}{a^2-25}\right):\frac{a-20}{(a-5)^2}$;

6) $\left(\frac{2x+1}{x^2+6x+9}-\frac{x-2}{x^2+3x}\right):\frac{x^2+6}{x^3-9x}$.

**179.**• Виконайте дії:

1) $\frac{b+4}{b^2-6b+9}:\frac{b^2-16}{2b-6}-\frac{2}{b-4}$;

2) $\left(\frac{m-1}{m+1}-\frac{m+1}{m-1}\right):\frac{4m}{m^2-1}$;

3) $\frac{2x}{x^2-y^2}:\left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2}-\frac{1}{y^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4}-\frac{a-1}{a^2-2a}\right):\frac{a^2-2}{a^3-4a}$.

**180.**• Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{15}{x-7}-x-7\right)\cdot\frac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(a-\frac{5a-16}{a-3}\right):\left(2a-\frac{2a}{a-3}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{a}{b^2}\right)\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{2}{b-a}$;

4) $\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right):\frac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

5) $\left(\frac{x+2y}{x-2y}-\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{16y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{4y}{x+2y}$;

6) $\left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4}+\frac{1}{a+2}-\frac{4a-28}{a^3+8}\right)\cdot\frac{a^2-4}{4}$.

**181.**• Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2+14x+49}{x+6}:\left(\frac{13}{x+6}-x+6\right)$;

2) $\left(c-\frac{2c-9}{c+8}\right):\frac{c^2+3c}{c^2-64}+\frac{24}{c}$;

3) $\left(\frac{36}{x^2-9}-\frac{x-3}{x+3}-\frac{3+x}{3-x}\right):\frac{6}{3-x}$;

4) $\left(\frac{2y-1}{y^2+2y+4}+\frac{9y+6}{y^3-8}+\frac{1}{y-2}\right)\cdot\frac{y^2-4}{18}$.

**182.**• Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right):\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{4}$;

2) $\left(\frac{8a}{4-a^2}-\frac{a-2}{a+2}\right):\frac{a+2}{a}+\frac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\frac{3}{36-c^2}+\frac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\frac{(c-6)^2}{2}+\frac{3c}{c+6}=2.$

**183.**• Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{b}{a^2-ab}-\frac{2}{a-b}-\frac{a}{b^2-ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{4}{a+b};$

2) $\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\frac{a}{(a-b)^2}+\frac{a}{b^2-a^2}\right)+\frac{3a+b}{a+b}=3.$

**184.**• Чи залежить значення виразу від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right):\frac{3a+3}{a^2-a};$

2) $\left(\frac{a}{a^2-49}-\frac{1}{a+7}\right):\frac{7a}{a^2+14a+49}-\frac{2}{a-7}?$

**185.**• Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\frac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\frac{6x+1}{x-3}+\frac{6x-1}{x+3}\right);$

2) $\frac{3}{2a-3}-\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}\right).$

**186.**• Спростіть вираз:

1) $\frac{a-\frac{a^2}{a+1}}{a-\frac{a}{a+1}};$ 2) $\frac{a-\frac{6a-9}{a}}{1-\frac{3}{a}};$ 3) $\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}};$ 4) $\frac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a+b}{b}-1}+\frac{3-\frac{b}{a}}{\frac{3a}{b}-1}.$

**187.**• Спростіть вираз:

1) $\frac{\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a}};$ 2) $\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a+1}}}.$

**188.**•• Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a^2}{b^3-ab^2}+\frac{a-b}{b^2}-\frac{1}{b}\right):\left(\frac{a+b}{b-a}-\frac{b-a}{a+b}+\frac{6a^2}{a^2-b^2}\right);$

2) $\left(\frac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\frac{2-a}{1-8a^3}\cdot\frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\frac{1}{1-2a}\right)^2-\frac{8a-1}{2a^2+a}.$

**189.**•• Спростіть вираз:

$$\left(\frac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\frac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\frac{3y-1}{y}-\frac{5-6y}{3y-1}\right).$$

**190.**•• Доведіть тотожність:

1) $\frac{16}{(a-2)^4}:\left(\frac{1}{(a-2)^2}-\frac{2}{a^2-4}+\frac{1}{(a+2)^2}\right)-\frac{8a}{(a-2)^2}=1;$

2) $\frac{a+11}{a+9}-\left(\frac{a+5}{a^2-81}+\frac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\frac{a+3}{a-9}\right)^2=1.$

**191.**•• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\frac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{b-3}+\frac{6}{9-b^2}-\frac{3}{b^2+3b}\right)$ набуває додатних значень.

**192.**•• Підставте замість $x$ даний вираз і спростіть отриманий вираз:

1) $\frac{x-a}{x-b}$, якщо $x=\frac{ab}{a+b}$; 2) $\frac{a-bx}{b+ax}$, якщо $x=\frac{a-b}{a+b}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**193.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x-1)(4x+5)-(2x+3)(6x+1)=4$;

2) $8x(2x+7)-(4x+3)^2=15$.

**194.** Доведіть, що значення виразу $2^{14}-2^{12}-2^{10}$ ділиться націло на 11.

**195.** Доведіть, що при будь-якому натуральному $n$ значення виразу $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ ділиться націло на 10.

**196.** На першому складі було картоплі в 3 рази більше, ніж на другому. Коли з першого складу вивезли 400 кг картоплі, то на ньому залишилося картоплі у 2 рази менше, ніж було на другому. Скільки картоплі було на першому складі спочатку?

**197.** Куртка коштувала на 200 грн менше від костюма. Під час сезонного розпродажу куртка подешевшала на 10 %, а костюм — на 20 %, після чого куртку та костюм можна було придбати за 1010 грн. Якою була початкова ціна куртки та якою — ціна костюма?

**198.** З пункту $A$ в пункт $B$ автомобіль їхав зі швидкістю 60 км/год, а повертався з пункту $B$ у пункт $A$ зі швидкістю 70 км/год іншою дорогою, яка на 15 км коротша від першої. На зворотний шлях автомобіль витратив на 30 хв менше, ніж на шлях з пункту $A$ у пункт $B$. За який час він доїхав з пункту $A$ у пункт $B$?

**199.** Робітник мав виготовляти щодня 10 деталей. Проте він виготовляв щодня 12 деталей, і вже за 2 дні до закінчення терміну роботи йому залишилося виготовити 6 деталей. Скільки деталей мав виготовити робітник?

**200.*** (*З українського фольклору.*) За 30 монет купили 30 птахів. Скільки купили птахів кожного виду, якщо за трьох горобців платили одну монету, за двох голубів — теж одну монету, а за одну горлицю — дві монети, причому купили хоча б одну пташку кожного виду?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**201.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+7}{4}=\frac{x+5}{3}$;
2) $x^2+6x=0$;
3) $0{,}21x-0{,}7x=0$;
4) $x^2-16=0$;
5) $25x^2-36=0$;
6) $x^2+4=0$.

**202.** При якому значенні змінної не має змісту вираз:

1) $\frac{6}{3x-9}$;
2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$;
3) $\frac{x+4}{3x^2+12x}$;
4) $\frac{8}{x+7}+\frac{4}{x-2}$;
5) $\frac{x}{x^2-10x+25}$;
6) $\frac{x+2}{(x+10)(x-12)}$?

**203.** При якому значенні змінної значення дробу дорівнює нулю:

1) $\frac{x-8}{9}$;
2) $\frac{x-2}{x+2}$;
3) $\frac{4}{x-5}$?

**Поновіть у пам'яті зміст пп. 14, 15 на с. 220.**

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**204.** На дошці написано многочлени $x+2$ і $2x+1$. Дозволяється записати суму, різницю або добуток будь-яких двох з уже написаних многочленів. Чи може на дошці з'явитися многочлен $2x^3+x+5$?

## ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

**1.** Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{12m^4}{n^{10}}\cdot\frac{n^5}{36m^8}$.

А) $\frac{1}{3m^2n^2}$; Б) $\frac{1}{3m^4n^5}$; В) $\frac{3}{m^2n^2}$; Г) $\frac{3}{m^4n^5}$.

**2.** Виконайте множення: $(a+5b)\cdot\frac{8}{a^2-25b^2}$.

А) $8(a-5b)$; Б) $8(a+5b)$; В) $\frac{8}{a+5b}$; Г) $\frac{8}{a-5b}$.

**3.** Спростіть вираз $\frac{b^2-6b+9}{b-7}\cdot\frac{b-7}{b-3}$.

А) $b+3$; Б) $b-3$; В) $\frac{1}{b-3}$; Г) $\frac{1}{b+3}$;

**4.** Виконайте ділення: $\frac{5a^6}{b^8}:(10a^3b^2)$.

А) $\frac{2a^9}{b^6}$; Б) $\frac{b^6}{2a^9}$; В) $\frac{2b^{10}}{a^3}$; Г) $\frac{a^3}{2b^{10}}$.

**5.** Спростіть вираз $\frac{3x+9}{x^2-2x}:\frac{x+3}{4x-8}$.

А) $\frac{12}{x}$; Б) $\frac{x}{12}$; В) 12; Г) $x$.

**6.** Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{n^2-3n}{64n^2-1}:\frac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$.

А) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$; В) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$;

Б) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$; Г) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$.

**7.** Виконайте піднесення до степеня: $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^4$.

А) $\frac{8a^8}{b^{12}}$; Б) $-\frac{8a^8}{b^{12}}$; В) $\frac{16a^8}{b^{12}}$; Г) $-\frac{16a^8}{b^{12}}$.

**8.** Спростіть вираз $\left(\frac{1}{a-6}-\frac{1}{a+6}\right):\frac{2}{a+6}$.

А) $\frac{6}{a+6}$; Б) $\frac{6}{a-6}$; В) $6\ (a-6)$; Г) $6\ (a+6)$.

**9.** Якому числу при всіх допустимих значеннях $a$ дорівнює значення виразу $\left(\frac{30a}{9a^2-25}+\frac{5}{5-3a}\right):\left(\frac{3a-5}{3a+5}-1\right)$?

А) $\frac{1}{2}$; Б) 2; В) $-\frac{1}{2}$; Г) $-2$.

**10.** Чому дорівнює значення виразу $\frac{a^2-4ab}{b^2}$, якщо $3a-5b=0{,}2\ (2a+b)$?

А) 4; Б) $-4$; В) 3; Г) $-3$.

**11.** Відомо, що $x+\frac{1}{x}=6$. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$.

А) 36; Б) 38; В) 34; Г) 35.

**12.** Спростіть вираз $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}}$.

А) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; Б) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; В) $\frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$; Г) $\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

# 7. Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння

Розглянемо два рівняння: $x^2 = 4$ і $|x| = 2$.

Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: $-2$ і $2$.

Говорять, що рівняння $x^2 = 4$ і $|x| = 2$ **рівносильні**.

Наведемо ще приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ і } 2x = 0;$$

$$2x = 4 \text{ і } 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ і } (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Розглянемо рівняння $x^2 = -5$ і $|x| = -3$. Кожне із цих рівнянь не має коренів. Такі рівняння також прийнято вважати рівносильними.

**Означення. Два рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені або кожне з рівнянь не має коренів.**

Число 2 є коренем кожного з рівнянь $(x - 2)(x + 1) = 0$ і $x - 2 = 0$. Проте ці рівняння не є рівносильними, оскільки перше рівняння має ще один корінь, що дорівнює $-1$, який не є коренем другого рівняння.

У 7 класі ви вивчили властивості рівнянь з однією змінною. Тепер, використовуючи поняття «рівносильні рівняння», ці властивості можна сформулювати так.

- ***Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***
- ***Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***
- ***Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Розглянемо таку задачу. Автомобіль, проїхавши 180 км шляху, збільшив швидкість на 10 км/год і решту 210 км проїхав за той самий час, що й першу частину шляху. Знайдіть початкову швидкість автомобіля.

Нехай $x$ км/год — шукана швидкість. Тоді швидкість автомобіля на другій частині шляху дорівнює $(x + 10)$ км/год. Автомобіль подолав першу частину шляху за $\frac{180}{x}$ год, а другу — за $\frac{210}{x+10}$ год.

Рівняння $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$ є математичною моделлю розглянутої реальної ситуації. Обидві частини отриманого рівняння є раціональними виразами.

**Означення. Рівняння, ліва й права частини якого є раціональними виразами, називають раціональним.**

З означення випливає, що, розв'язуючи задачу, ми отримали раціональне рівняння.

Зауважимо, що лінійне рівняння з однією змінною, тобто рівняння виду $ax = b$, є раціональним.

Розглянемо раціональне рівняння виду $\frac{A}{B}=0$, де $A$ і $B$ — многочлени.

Ви знаєте, що *дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля*. Тому, щоб розв'язати рівняння виду $\frac{A}{B}=0$, треба вимагати *одночасного* виконання двох умов: $A = 0$ і $B \neq 0$. Це означає, що під час розв'язування рівнянь указаного виду слід керуватися таким алгоритмом:

- розв'язати рівняння $A = 0$;
- перевірити, які зі знайдених коренів задовольняють умову $B \neq 0$;
- корені, які задовольняють умову $B \neq 0$, включити до відповіді.

**ПРИКЛАД 1** Розв'яжіть рівняння $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$.

*Розв'язання.* Прирівняємо чисельник дробу, який стоїть у лівій частині рівняння, до нуля. Маємо: $(x - 1)(x + 1) = 0$. Коренями цього рівняння є числа $-1$ і $1$.

Перевіримо, чи задовольняють ці корені умову $x^2-4x+3\neq 0$.

При $x = -1$ отримуємо, що $x^2-4x+3=8\neq 0$.

При $x = 1$ отримуємо, що $x^2-4x+3=0$.

Отже, число $-1$ є коренем заданого рівняння, а число $1$ — ні.

*Відповідь*: $-1$. ▲

Як ми вже зазначали вище, розв'язування рівняння виду $\frac{A}{B}=0$ зводиться до розв'язування рівняння $A = 0$ та перевірки умови $B \neq 0$. Говорять, що рівняння $\frac{A}{B}=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} A=0, \\ B\neq 0. \end{cases}$$

Наприклад, рівняння $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases}(x-1)(x+1)=0,\\ x^2-4x+3\neq 0.\end{cases}$$

Як ми з'ясували, розв'язком цієї системи є число $-1$.

Завершимо розв'язування задачі про автомобіль. Маємо:

$$\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}.$$

Переходимо до рівносильного рівняння $\frac{180}{x}-\frac{210}{x+10}=0$.

Звідси

$$\frac{180(x+10)-210x}{x(x+10)}=0;$$

$$\frac{1800-30x}{x(x+10)}=0.$$

Останнє рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}1800-30x=0,\\ x(x+10)\neq 0.\end{cases}$$

Коренем рівняння, яке входить до системи, є число 60; очевидно, що воно задовольняє умову $x(x+10)\neq 0$.

*Відповідь*: 60 км/год.

Як відомо, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді дробу. Тому будь-яке раціональне рівняння можна звести до рівняння виду $\frac{A}{B}=0$. Саме так ми зробили, розв'язуючи рівняння $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$.

**ПРИКЛАД 2** Розв'яжіть рівняння $\frac{3x+5}{6x+3}+\frac{1}{4x^2-1}=\frac{x}{2x-1}$.

*Розв'язання.* Маємо: $\frac{3x+5}{3(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{x}{2x-1}=0$. Подавши ліву частину цього рівняння у вигляді раціонального дробу, отримаємо:

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)}=0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}4x-2=0,\\ 3(2x-1)(2x+1)\neq 0.\end{cases}$

Перепишемо цю систему так: $\begin{cases}4x-2=0,\\ x\neq 0{,}5,\\ x\neq -0{,}5.\end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x = 0{,}5, \\ x \neq 0{,}5, \\ x \neq -0{,}5. \end{cases}$

Отже, дане рівняння не має коренів.

*Відповідь*: коренів немає. ▲

**ПРИКЛАД 3** Розв'яжіть рівняння $\frac{2x^2 - 4x - 16}{x - 4} - x = 0$.

*Розв'язання.* Подамо ліву частину рівняння у вигляді дробу:

$$\frac{2x^2 - 4x - 16 - x^2 + 4x}{x - 4} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = 0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0, \end{cases}$$

звідси отримуємо:

$$\begin{cases} x = 4 \text{ або } x = -4, \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$x = -4.$$

*Відповідь*: −4. ▲

Розглянемо задачу, у якій раціональне рівняння є математичною моделлю реальної ситуації.

**ПРИКЛАД 4** Турист проплив на човні 3 км за течією річки та 2 км проти течії за 30 хв. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

*Розв'язання.* Нехай швидкість човна в стоячій воді дорівнює $x$ км/год. Тоді його швидкість за течією річки становить $(x + 2)$ км/год, а проти течії — $(x - 2)$ км/год. Турист проплив 3 км за течією за $\frac{3}{x+2}$ год, а 2 км проти течії — за $\frac{2}{x-2}$ год. Оскільки весь шлях було пройдено за 30 хв $= \frac{1}{2}$ год, то $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3x - 6 + 2x + 4}{x^2 - 4} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{10x - 4 - x^2 + 4}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\frac{10x - x^2}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ або } x = 10.$$

Корінь $x = 0$ не задовольняє змісту задачі. Отже, швидкість човна в стоячій воді дорівнює 10 км/год.

*Відповідь*: 10 км/год. ▲

?

1. Які два рівняння називають рівносильними?
2. За допомогою яких перетворень даного рівняння можна отримати рівняння, рівносильне даному?
3. Яке рівняння називають раціональним?
4. Сформулюйте умову, за якої дріб дорівнює нулю.
5. Опишіть алгоритм розв'язування рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$, де $A$ і $B$ – многочлени.

## ВПРАВИ

**205.°** Чи є рівносильними рівняння:

1) $x + 2 = 10$ і $3x = 24$;
2) $-2x = -6$ і $\frac{1}{3}x = 1$;
3) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;
4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ і $(0{,}4 - 0{,}1x)(7x + 14) = 0$;
5) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;
6) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$?

**206.°** Складіть рівняння, рівносильне даному:

1) $2x - 3 = 4$; 2) $|x| = 1$; 3) $x + 6 = x - 2$.

**207.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x - 6}{x - 4} = 0$;
2) $\frac{x - 2}{x^2 - 4} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$;
4) $\frac{x - 2}{x - 2} = 1$;

5) $\frac{2x^2+18}{x^2+9}=2;$

6) $\frac{x}{x-5}+\frac{2x-9}{x-5}=0;$

7) $\frac{5x-7}{x+1}-\frac{x-5}{x+1}=0;$

8) $\frac{2x+16}{x+3}-\frac{1-3x}{x+3}=0;$

9) $\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0;$

10) $\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x+3};$

11) $\frac{x}{x-6}=2;$

12) $\frac{x-4}{x-3}=\frac{2x+1}{2x-1};$

13) $\frac{x+8}{x}-\frac{6}{x-2}=0;$

14) $\frac{2x}{x-5}-\frac{x^2+15x}{x^2-25}=0;$

15) $3-\frac{2x^2-5x}{x^2-3x}=0.$

**208.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=0;$

2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=0;$

3) $\frac{x+7}{x-7}-\frac{2x-3}{x-7}=0;$

4) $\frac{10-3x}{x+8}+\frac{5x+6}{x+8}=0;$

5) $\frac{x-6}{x-2}-\frac{x-8}{x}=0;$

6) $\frac{2x-4}{x}-\frac{3x+1}{x}+\frac{x+5}{x}=0;$

7) $\frac{x}{x+6}-\frac{36}{x^2+6x}=0;$

8) $\frac{2x^2+3x+1}{2x+1}-x=1;$

9) $\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x+1}=1.$

**209.°** Яке число треба відняти від чисельника та знаменника дробу $\frac{15}{19}$, щоб отримати дріб, який дорівнює $\frac{2}{3}$?

**210.°** Яке число треба додати до чисельника та знаменника дробу $\frac{25}{32}$, щоб отримати дріб, який дорівнює $\frac{5}{6}$?

**211.•** Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:

1) має один корінь;
2) має два корені;
3) має безліч коренів;
4) не має коренів.

**212.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2x}{x+2}=2;$

2) $\frac{2}{6x+1}+\frac{3}{6x-1}=\frac{30x+9}{36x^2-1};$

3) $\frac{6x+14}{x^2-9}+\frac{7}{x^2+3x}=\frac{6}{x-3};$

4) $\frac{2y^2+5}{1-y^2}+\frac{y+1}{y-1}=\frac{4}{y+1};$

5) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4}{1-4x^2};$

6) $\frac{7}{(x+2)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{3}{(x+2)^2};$

7) $\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}=\frac{6x+64}{x^2-16}+4;$

8) $\frac{2x-6}{x^2-36}-\frac{x-3}{x^2-6x}-\frac{x-1}{x^2+6x}=0.$

**213.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{1-x}=\frac{x^2+27}{x^2-1};$

2) $\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{6}{1-9x^2};$

3) $\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2}$;

4) $\frac{2x^2-2x}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$;

5) $\frac{7}{x^2+2x}+\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+4}{x^2-4}$;

6) $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-5}{x}$.

**214.**• Моторний човен проплив 8 км за течією річки й повернувся назад, витративши на весь шлях 54 хв. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна становить 18 км/год.

**215.**• Теплохід пройшов 28 км проти течії річки й повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 4 хв менше. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.

**216.**• Човен проплив 6 км проти течії річки та 12 км за течією, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки становить 3 км/год.

**217.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\frac{2}{x^2-9}-\frac{1}{2x^2-12x+18}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

3) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x^2+4x+16}$.

**218.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4y+24}{5y^2-45}+\frac{y+3}{5y^2-15y}=\frac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\frac{y+2}{8y^3+1}-\frac{1}{4y+2}=\frac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

**219.**• Для кожного значення $a$ розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x-a}=0$;

2) $\frac{x-a}{x+5}=0$;

3) $\frac{a(x-a)}{x-3}=0$;

4) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;

5) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;

6) $\frac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

**220.**• При яких значеннях $a$ рівняння $\frac{x+a}{x^2-4}=0$ не має коренів?

**221.**• При яких значеннях $a$ рівняння $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ має один корінь?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**222.** На кінець року населення міста становило 72 100 мешканців. Визначте кількість мешканців у цьому місті на початок року, якщо приріст населення за цей час становив 3 %.

**223.** Відстань між двома станціями електропоїзд проходить за 45 хв. Якщо його швидкість збільшити на 10 км/год, то він пройде цю відстань за 40 хв. Яка відстань між станціями?

**224.** Доведіть, що при будь-яких значеннях змінних даний вираз набуває невід'ємного значення:

1) $(a-5)^2-2(a-5)+1$; 2) $(a-b)(a-b-8)+16$.

**225.** Знайдіть значення функції $f(x)=3x-7$ при: 1) $x=-3$; 2) $x=2\frac{1}{3}$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0,2?

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**226.** Знайдіть значення виразу:

1) $4^3+3^4$; 3) $9\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^2$;

2) $(-8)^2-(-1)^{12}$; 4) $(2{,}8-3{,}1)^3\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$.

**227.** Не виконуючи обчислень, порівняйте значення виразів:

1) $(-5{,}7)^2$ і 0; 2) 0 і $(-6{,}9)^3$; 3) $(-23)^5$ і $(-2)^4$; 4) $-8^8$ і $(-8)^8$.

**228.** Подайте у вигляді степеня:

1) з основою 2 числа 4; 8; 16; 32; 64;

2) з основою 10 числа 100; 1000; 10 000; 1 000 000.

**229.** Знайдіть значення виразу:

1) $18a^2$, якщо $a=-\frac{1}{6}$; 3) $16+b^4$, якщо $b=-2$;

2) $(18a)^2$, якщо $a=-\frac{1}{6}$; 4) $(16+b)^4$, якщо $b=-2$.

**Поновіть у пам'яті зміст п. 3 на с. 216.**

## УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

**230.** Чи існує натуральне число, яке при множенні на 2 дає в результаті квадрат натурального числа, а при множенні на 3 — куб натурального числа?

# 8. Степінь із цілим від'ємним показником

Часто для запису великих чисел у компактному вигляді використовують степінь з натуральним показником. Наприклад,

$$129\,140\,163=3^{17},$$
$$282\,475\,249=7^{10}.$$

У науці та практиці для короткого запису великих значень величин використовують степінь числа 10.

Наприклад, відстань від Землі до Полярної зорі приблизно дорівнює 4 470 000 000 000 000 км, або $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км. Маса Сонця дорівнює 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 кг, або $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Це були приклади з макросвіту, тобто світу дуже великих фізичних величин. Наведемо приклади з мікросвіту, тобто світу дуже малих фізичних величин.

Маса атома Гідроґену дорівнює

0,000000000000000000000000001661 кг.

Радіус атома Оксиґену дорівнює 0,0000000066 см.

Для запису цих величин так само можна використовувати степінь числа 10. Маємо:

$$0{,}000000000000000000000000001661 \text{ кг} = \frac{1{,}661}{10^{27}} \text{ кг},$$

$$0{,}0000000066 \text{ см} = \frac{6{,}6}{10^{9}} \text{ см}.$$

Проте якщо домовитися позначити $\frac{1}{10^{27}}$ і $\frac{1}{10^{9}}$ відповідно $10^{-27}$ і $10^{-9}$, то для розглянутих величин отримаємо «одноповерхову» форму запису: $\frac{1{,}661}{10^{27}} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}$, $\frac{6{,}6}{10^{9}} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}$.

Аналогічно можна домовитися, що, наприклад, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0{,}7} = (0{,}7)^{-1}$.

**Означення.** **Для будь-якого числа $a$, яке не дорівнює нулю, і натурального числа $n$**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

З означення випливає, що, наприклад, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$, $(0{,}3)^{-1} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}$.

Отже, ми можемо підносити число до будь-якого цілого степеня, крім нуля. Заповнимо цю прогалину.

**Означення.** **Для будь-якого числа $a$, яке не дорівнює нулю, $a^0 = 1$.**

Наприклад, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

*Вираз $0^n$ при цілих $n$, які менші від нуля або дорівнюють нулю, не має змісту.*

З наведених означень випливає, що при будь-якому $a \neq 0$ та цілому $n$ числа $a^n$ і $a^{-n}$ є взаємно оберненими. Тому рівність

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

виконується при будь-якому цілому $n$.

Наприклад, при $n = -2$ маємо: $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

У довідковій літературі ви можете знайти таку інформацію: «Маса Венери дорівнює $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг. Маса Марса дорівнює $6{,}423 \cdot 10^{23}$ кг. Площа поверхні Місяця складає $3{,}8 \cdot 10^7$ км$^2$». Числа, що виражають ці величини, записано в так званому **стандартному вигляді.**

**Означення. Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і $n$ — ціле число.**

Число $n$ називають **порядком** числа, записаного в стандартному вигляді. Наприклад, порядок числа, яке виражає масу Сонця в кілограмах, дорівнює 30, а порядок числа, що виражає масу атома Гідроґену в кілограмах, дорівнює −27.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Наприклад, $171{,}25 = 1{,}7125 \cdot 10^2$; $0{,}00958 = 9{,}58 \cdot 10^{-3}$. Проте на практиці стандартний вигляд числа зазвичай використовують для запису великих і малих значень величин. При цьому порядок числа дає уявлення про величину. Наприклад, якщо порядок числа $m$ дорівнює 3, тобто $m = a \cdot 10^3$, то з урахуванням того, що $1 \leqslant a < 10$, отримуємо: $10^3 \leqslant m < 10^4$.

**ПРИКЛАД 1** Знайдіть значення виразу: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0$.

*Розв'язання.* 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

І взагалі, **якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

2) $1{,}2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 = \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 =$

$= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$. ▲

**ПРИКЛАД 2** Подайте вираз $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})$ у вигляді раціонального дробу.

*Розв'язання.* $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=$

$=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}=\frac{b+a}{a^2b^2(b-a)}=\frac{b+a}{a^2b^3-a^3b^2}.$ ▲

**ПРИКЛАД 3** Запишіть у стандартному вигляді число:
1) 564 000 000; 2) 0,0036.

*Розв'язання.* 1) $564\,000\,000=5{,}64\cdot 100\,000\,000=5{,}64\cdot 10^8$.

2) $0{,}0036=3{,}6\cdot 0{,}001=3{,}6\cdot\frac{1}{1000}=3{,}6\cdot\frac{1}{10^3}=3{,}6\cdot 10^{-3}$. ▲

?

1. Чому дорівнює $a^{-n}$ для будь-якого числа $a$, відмінного від нуля, і натурального числа $n$?
2. Чому дорівнює нульовий степінь будь-якого відмінного від нуля числа?
3. Що називають стандартним виглядом числа?
4. Як у записі числа в стандартному вигляді $a\cdot 10^n$ називають число $n$?

## ВПРАВИ

**231.°** Якому з виразів дорівнює вираз $a^{-6}$:

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

**232.°** Подайте степінь у вигляді дробу:

1) $3^{-8}$; 3) $a^{-9}$; 5) $12^{-1}$; 7) $(a-b)^{-2}$;
2) $5^{-6}$; 4) $d^{-3}$; 6) $m^{-1}$; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

**233.°** Замініть степінь дробом:

1) $14^{-4}$; 2) $p^{-20}$; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

**234.°** Подайте дріб у вигляді степеня із цілим від'ємним показником або у вигляді добутку степенів:

1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;
2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

**235.°** Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником або добутком степенів:

1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

**236.°** Подайте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

**237.°** Подайте у вигляді степеня одноцифрового натурального числа дріб:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

**238.°** Подайте у вигляді степеня з основою 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

**239.°** Подайте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

**240.°** Обчисліть:

1) $5^{-2}$; 3) $(-9)^{-2}$; 5) $1^{-24}$; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

2) $2^{-4}$; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$;

**241.°** Знайдіть значення виразу:

1) $20^{-2}$; 3) $(-6)^{-3}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$;

2) $0{,}3^{-1}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

**242.°** Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$;

2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^{0} - 5^{-2}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

**243.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $2^{-2} + 2^{-1}$; 3) $0{,}03^{0} + 0{,}7^{0}$;

2) $3^{-2} - 6^{-1}$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

**244.°** Яке з даних чисел записане в стандартному вигляді:

1) $12 \cdot 10^{4}$; 2) $1{,}2 \cdot 10^{4}$; 3) $0{,}12 \cdot 10^{4}$?

**245.°** Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0{,}86 \cdot 10^{3}$;

2) 15; 5) 0,73; 8) $0{,}23 \cdot 10^{4}$;

3) 0,0046; 6) $250 \cdot 10^{2}$; 9) $9300 \cdot 10^{5}$.

**246.°** Використовуючи стандартний вигляд числа, запишіть:
1) швидкість світла у вакуумі дорівнює 300 000 км/с;
2) висота Говерли, найвищої гори України, дорівнює 2061 м;
3) площа України становить 603 700 км$^2$;
4) середня відстань від Землі до Сонця становить 149,6 млн км;
5) атмосферний тиск на висоті 100 км становить 0,032 Па;
6) діаметр молекули води дорівнює 0,00000028 мм.

**247.°** Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:
1) 45 000; 3) 0,00024; 5) $0{,}059 \cdot 10^8$;
2) 260; 4) 0,032; 6) $526 \cdot 10^4$.

**248.°** Число подано в стандартному вигляді. Запишіть його у вигляді натурального числа або десяткового дробу:
1) $1{,}6 \cdot 10^3$; 2) $5{,}7 \cdot 10^6$; 3) $2{,}1 \cdot 10^{-2}$; 4) $1{,}1 \cdot 10^{-5}$.

**249.°** Число подано в стандартному вигляді. Запишіть його у вигляді натурального числа або десяткового дробу:
1) $2{,}4 \cdot 10^2$; 2) $4{,}8 \cdot 10^5$; 3) $1{,}4 \cdot 10^{-3}$; 4) $8{,}6 \cdot 10^{-4}$.

**250.•** Доведіть, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

**251.•** Знайдіть значення виразу:
1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1{,}5)^{-3}$;
2) $(2{,}5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0{,}1^{-1}$.

**252.•** Розташуйте вирази в порядку спадання їхніх значень:
1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) $4^{-1}, 4^3, 4^0, 4^{-2}$.

**253.•** Розташуйте вирази в порядку зростання їхніх значень:
1) $7^{-2}, 7^2, 7^{-1}, 7^0$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{3}\right)^0, \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

**254.•** Порівняйте значення виразів:
1) $12^0$ і $(-6)^0$; 4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ і $21^{-1}$;
2) $0{,}2^3$ і $0{,}2^{-3}$; 5) $5^{-1} - 7^{-1}$ і $2^{-1}$;
3) $4^6$ і $0{,}25^{-6}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ і $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

**255.•** Порівняйте значення виразів:
1) $3^{-2}$ і $(-3)^0$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ і $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.
2) $3^{-1} + 2^{-1}$ і $5^{-1}$;

**256.**• Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $ab^{-1} + a^{-1}b$;
2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;
3) $m^2n^2\ (m^{-3} - n^{-3})$;
4) $(a+b)^{-1} \cdot (a^{-1}+b^{-1})$;
5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c+d)$;
6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$.

**257.**• Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;
3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c-d)^{-2}$;
4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$.

**258.**• Порядок деякого натурального числа дорівнює 4. Скільки цифр містить десятковий запис цього числа?

**259.**• Десятковий запис деякого натурального числа складається із семи цифр. Чому дорівнює порядок цього числа?

**260.**• Яке число більше:

1) $9{,}7 \cdot 10^{11}$ або $1{,}2 \cdot 10^{12}$;
2) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ або $4{,}8 \cdot 10^{-6}$;
3) $2{,}34 \cdot 10^{6}$ або $0{,}23 \cdot 10^{7}$;
4) $42{,}7 \cdot 10^{-9}$ або $0{,}072 \cdot 10^{-7}$?

**261.**• Яке число менше:

1) $6{,}1 \cdot 10^{19}$ або $6{,}15 \cdot 10^{18}$;
2) $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ або $0{,}9 \cdot 10^{-8}$?

**262.**• У таблиці наведено відстані від Сонця до планет Сонячної системи.

| Планета | Відстань, км |
|---|---|
| Венера | $1{,}082 \cdot 10^{8}$ |
| Земля | $1{,}495 \cdot 10^{8}$ |
| Марс | $2{,}280 \cdot 10^{8}$ |
| Меркурій | $5{,}790 \cdot 10^{7}$ |
| Нептун | $4{,}497 \cdot 10^{9}$ |
| Сатурн | $1{,}427 \cdot 10^{9}$ |
| Уран | $2{,}871 \cdot 10^{9}$ |
| Юпітер | $7{,}781 \cdot 10^{8}$ |

1) Яка планета знаходиться на найменшій відстані від Сонця, а яка — на найбільшій?
2) Яка з планет, Марс або Сатурн, знаходиться далі від Сонця?
3) Складіть таблицю, записавши в лівому стовпці назви планет у порядку збільшення відстані від них до Сонця, а в правому — відстані від них до Сонця, виражені в мільйонах кілометрів.

**263.**• У таблиці наведено маси атомів деяких хімічних елементів.

| Елемент | Маса атома, кг | Елемент | Маса атома, кг |
|---|---|---|---|
| Нітроґен | $2{,}32 \cdot 10^{-26}$ | Аурум | $3{,}27 \cdot 10^{-25}$ |
| Алюміній | $4{,}48 \cdot 10^{-26}$ | Купрум | $1{,}05 \cdot 10^{-25}$ |
| Гідроґен | $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ | Натрій | $3{,}81 \cdot 10^{-26}$ |
| Гелій | $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ | Станум | $1{,}97 \cdot 10^{-25}$ |
| Ферум | $9{,}28 \cdot 10^{-26}$ | Уран | $3{,}95 \cdot 10^{-25}$ |

1) Маса атома якого з наведених елементів найменша, а якого — найбільша?
2) Маса атома якого з елементів, Купруму чи Натрію, більша?
3) Складіть таблицю, упорядкувавши елементи в порядку зменшення маси їхніх атомів.

**264.**• У таблиці наведено запаси деяких речовин у мінеральних ресурсах світу.

| Речовина | Запаси, т | Речовина | Запаси, т |
|---|---|---|---|
| Алюміній | $1{,}1 \cdot 10^{9}$ | Нікель | $6{,}8 \cdot 10^{7}$ |
| Вольфрам | $1{,}3 \cdot 10^{6}$ | Олово | $4{,}76 \cdot 10^{6}$ |
| Залізо | $8{,}8 \cdot 10^{10}$ | Ртуть | $1{,}15 \cdot 10^{5}$ |
| Золото | $1{,}1 \cdot 10^{4}$ | Фосфати | $1{,}98 \cdot 10^{10}$ |
| Марганець | $6{,}35 \cdot 10^{8}$ | Хром | $4{,}4 \cdot 10^{9}$ |
| Мідь | $2{,}8 \cdot 10^{9}$ | Цинк | $1{,}12 \cdot 10^{8}$ |

1) Запаси якої з наведених речовин найбільші, а якої — найменші?
2) Запаси якої з речовин, нікелю чи цинку, більші?
3) Складіть таблицю мінеральних ресурсів, розмістивши речовини в порядку зменшення їхніх запасів.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**265.** Маса чавунної болванки 16 кг. Яка найменша кількість болванок потрібна, щоб відлити 41 деталь масою 12 кг кожна?

## ЗМІСТ

*Від авторів* ..... 3
*Умовні позначення* ..... 4

**§ 1. Раціональні вирази** ..... 5
1. Раціональні дроби ..... 5
2. Основна властивість раціонального дробу ..... 10
3. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками ..... 19
4. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками ..... 24

*Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі* ..... 31
5. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня ..... 32
6. Тотожні перетворення раціональних виразів ..... 38

*Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі* ..... 44
7. Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння ..... 46
8. Степінь із цілим від'ємним показником ..... 53
9. Властивості степеня із цілим показником ..... 61
10. Функція $y=\frac{k}{x}$ та її графік ..... 69

*Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі* ..... 79
*Головне в параграфі 1* ..... 80

**§ 2. Квадратні корені. Дійсні числа** ..... 83
11. Функція $y = x^2$ та її графік ..... 83
12. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь ..... 88
- Чи ростуть у городі радикали? ..... 98
- Перша задача першої математичної олімпіади в Україні ..... 99

13. Множина та її елементи. Підмножина ..... 100
14. Числові множини ..... 105
- Відкриття ірраціональності ..... 113

15. Властивості арифметичного квадратного кореня ..... 115
16. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені ..... 122
17. Функція $y=\sqrt{x}$ та її графік ..... 132
*Завдання № 4 «Перевірте себе» в тестовій формі* .... 138
*Головне в параграфі 2* ..... 139

**§ 3. Квадратні рівняння** ..... 141
18. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь ..... 141
19. Формула коренів квадратного рівняння..... 148
20. Теорема Вієта ..... 157
*Завдання № 5 «Перевірте себе» в тестовій формі* ... 165
21. Квадратний тричлен..... 166
22. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь..... 172
• Розв'язування рівнянь методом заміни змінної ..... 177
• Таємна зброя Сципіона дель Ферро ..... 180
23. Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій ..... 181
• Перша ЕОМ в Європі ..... 188
*Завдання № 6 «Перевірте себе» в тестовій формі* .... 190
*Головне в параграфі 3*..... 192
Вправи для повторення курсу алгебри 8 класу..... 194
• Дружимо з комп'ютером ..... 209
Відомості з курсу алгебри 7 класу..... 216
Відповіді та вказівки до вправ..... 227
Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі ..... 233
Предметний покажчик ..... 234