Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

Кафедра механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к расчетно-графическим заданиям
для студентов очной формы обучения специальности 21.05.01

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2015

УДК 531.01 (073)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: Методические указания к расчетно-графическим заданиям / Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». Сост.: *Е.В. Шишкин, В.Н. Монахов*. СПб, 2015. 29 с.

Приведены методические указания и варианты расчетных заданий по курсу «Теоретическая механика», примеры с решениями типовых задач.

Предназначены для студентов специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия».

Научный редактор проф. *В.Г. Гореликов*

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теоретическая механика» является общеинженерной и играет существенную роль в подготовке инженерно-технических кадров любых специальностей.

Целью преподавания этой дисциплины является формирование у будущих специалистов представлений об общих законах механики, равновесия и движения твердых тел. Задача курса теоретической механики, являющейся первой в цикле читаемых в университете механических дисциплин, состоит в том, чтобы на ее основе иметь возможность изучать другие инженерные дисциплины (сопротивление материалов, теорию механизмов и машин, строительную механику, теорию колебаний и др.). В рамках данного курса студенты должны освоить проведение расчетов типовых конструкций, научиться определять реакции опор, усилия в стержневых системах, параметры движения материальной точки.

Курс теоретической механики базируется на учебных дисциплинах «Математика», «Физика», «Начертательная геометрия».

Работы необходимо выполнять на листах бумаги формата А4, оформляя при помощи ПК (рисунки допускается чертить карандашом). Вариант задания устанавливается преподавателем при выдаче его студенту.

1. СОСТАВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Задание. Найти опорные реакции и реакции промежуточных шарниров составной конструкции, которая испытывает воздействие внешней нагрузки (рис. 1.1).

Пример. Дано $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 12$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 36$ кН·м. Найти реакции заделки A и шарниров C, B и D. Геометрические размеры указаны в метрах.

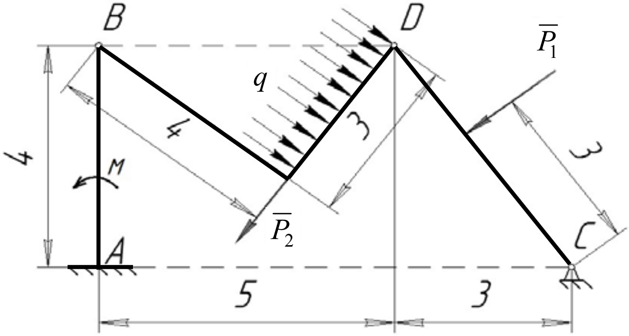

Рис. 1.1

Решение. Рассматриваемая задача является статически неопределимой, так как число неизвестных реакций в опорах A и C – 5, а число уравнений равновесия произвольной плоской системы сил – 3. Для решения задачи разобьём составную конструкцию на отдельные тела: AB, BD и DC (рис. 1.1.1). К каждому из тел приложены задаваемые (активные) силы и реакции связей.

Так как направления составляющих реакций заранее не известны, покажем их направленными произвольно для каждой части конструкции. Истинные направления реакций определяются по знаку ответа: знак плюс укажет на то, что истинные их направления соответствуют показанным на рисунке. Общее количество неизвестных реакций в задаче – 13 ($\overline{x}_A$, $\overline{y}_A$, M_A, $\overline{x}_{B_1}$, $\overline{x}_{B_2}$, $\overline{y}_{B_1}$, $\overline{y}_{B_2}$, $\overline{x}_{D_1}$, $\overline{x}_{D_2}$, $\overline{y}_{D_1}$, $\overline{y}_{D_2}$, $\overline{x}_C$, $\overline{y}_C$).

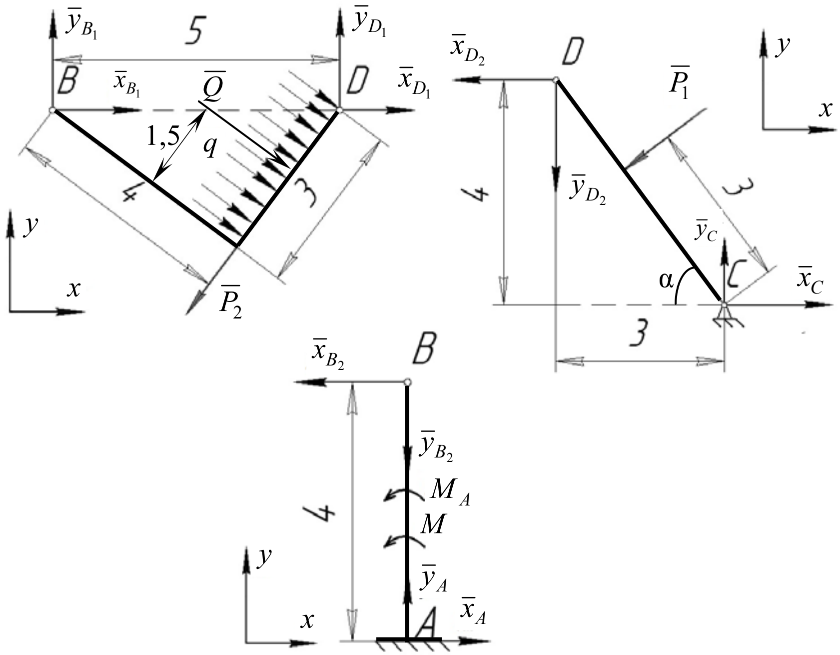

Рис. 1.1.1

Для каждого из трёх тел может быть составлено три независимых уравнения равновесия, что даст в совокупности девять уравнений. Для того, чтобы получить недостающие четыре уравнения рассмотрим силы, приложенные в точках B и D. Из закона о равенстве действия и противодействия вытекает, что геометрическая сумма этих сил должна быть ранва нулю. Следовательно, сумма проекций на любую ось всех сил, приложенных в точках B и D, должна быть равна нулю. Эти уравнения дополняют уравнения равновесия системы до 13 уравнений.

Рассмотрим сначала систему уравновешенных сил, приложенных к телу DC (рис. 1.1.1):

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = -x_{D_2} + x_C - P_1 \sin\alpha = 0; \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = -y_{D_2} + y_C - P_1 \cos\alpha = 0; \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_C(\overline{F}_i) = y_{D_2} \cdot 3 + x_{D_2} \cdot 4 + P_1 \cdot 3 = 0. \tag{1.3}$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к телу *BD*:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = x_{B_1} + x_{D_1} - P_2 \cos\alpha + Q \sin\alpha = 0; \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = y_{B_1} + y_{D_1} - P_2 \sin\alpha - Q \cos\alpha = 0; \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B(\overline{F}_i) = y_{D_1} \cdot 5 - P_2 \cdot 4 - Q \cdot 1{,}5 = 0. \tag{1.6}$$

Здесь $Q = 3q = 3 \cdot 3 = 9$ кН.

Уравнения равновесия сил, приложенных к телу *AB*:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = -x_{B_2} + x_A = 0; \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = -y_{B_2} + y_A = 0; \tag{1.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = M + M_A + x_{B_2} \cdot 4 = 0. \tag{1.9}$$

Уравнения, вытекающие из аксиомы о равенстве действия и противодействия:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{B_i} = x_{B_1} - x_{B_2} = 0; \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = y_{B_1} - y_{B_2} = 0; \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = x_{D_1} - x_{D_2} = 0; \tag{1.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = y_{D_1} - y_{D_2} = 0. \tag{1.13}$$

Решая последовательно уравнения (1.6), (1.5), (1.11), (1.13), (1.2), (1.3), (1.1), (1.12), (1.4), (1.10), (1.7)-(1.9) получим числовые значения искомых величин:

$$y_{D_1} = \frac{P_2 \cdot 4 + Q \cdot 1{,}5}{5} = \frac{12 \cdot 4 + 9 \cdot 1{,}5}{5} = 12{,}3\ \text{кН};$$

$$y_{B_1} = -y_{D_1} + P_2 \sin\alpha + Q\cos\alpha = -12{,}3 + 12 \cdot \frac{4}{5} + 9 \cdot \frac{3}{5} = 2{,}7\ \text{кН};$$

$$y_{B_2} = y_{B_1} = 2{,}7\ \text{кН};$$

$$y_{D_2} = y_{D_1} = 12{,}3\ \text{кН};$$

$$y_C = y_{D_2} + P_1 \cos\alpha = 12{,}3 + 4 \cdot \frac{3}{5} = 14{,}7\ \text{кН};$$

$$x_{D_2} = -\frac{3}{4} \cdot (y_{D_2} + P_1) = -\frac{3}{4} \cdot (12{,}3 + 4) = -12{,}23\ \text{кН};$$

$$x_C = x_{D_2} + P_1 \sin\alpha = -12{,}23 + 4 \cdot \frac{4}{5} = -9{,}03\ \text{кН};$$

$$x_{D_1} = x_{D_2} = -12{,}23\ \text{кН};$$

$$x_{B_1} = -x_{D_1} + P_2 \cos\alpha - Q\sin\alpha = 12{,}23 + 12 \cdot \frac{3}{5} - 9 \cdot \frac{4}{5} = 12{,}23\ \text{кН};$$

$$x_{B_2} = x_{B_1} = 12{,}23\ \text{кН};$$

$$x_A = x_{B_2} = 12{,}23\ \text{кН};$$

$$y_A = y_{B_2} = 2{,}7\ \text{кН};$$

$$M_A = -M - x_{B_2} \cdot 4 = -36 - 12{,}23 \cdot 4 = -84{,}9\ \text{кН·м}.$$

Результаты вычислений приведём в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Момент в заделке M_A, кН·м	**Реакции, кН**							
	x_A	y_A	x_{B_1}, x_{B_2}	y_{B_1}, y_{B_2}	x_{D_1}, x_{D_2}	y_{D_1}, y_{D_2}	x_C	y_C
-84,9	12,23	2,7	12,23	2,7	-12,23	12,3	-9,03	14,7

Для проверки полученных результатов следует убедиться в том, что соблюдаются уравнения равновесия сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 1.1.2):

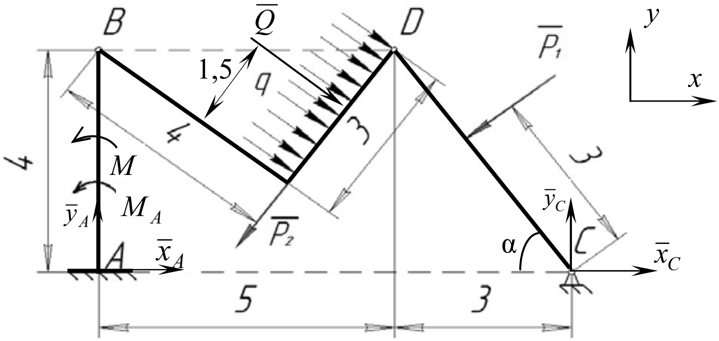

Рис. 1.1.2

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = x_A - P_2\cos\alpha + Q\sin\alpha + x_C - P_1\sin\alpha =$$

$$= 12{,}23 - 12\cdot\frac{3}{5} + 9\cdot\frac{4}{5} + (-9{,}03) - 4\cdot\frac{4}{5} = 12{,}23 - 12{,}23 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = y_A - P_2\sin\alpha - Q\cos\alpha + y_C - P_1\cos\alpha =$$

$$= 2{,}7 - 12\cdot\frac{4}{5} - 9\cdot\frac{3}{5} + 14{,}7 - 4\cdot\frac{3}{5} = 17{,}4 - 17{,}4 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_D(\overline{F}_i) = M_A + M - P_1 \cdot 2 + Q \cdot 1{,}5 + x_A \cdot 4 - y_A \cdot 5 + y_C \cdot 3 + x_C \cdot 4 =$$

$$= -84{,}9 + 36 - 4 \cdot 2 + 9 \cdot 1{,}5 + 12{,}23 \cdot 4 - 2{,}7 \cdot 5 + 14{,}7 \cdot 3 + (-9{,}03) \cdot 4 =$$

$$= 142{,}52 - 142{,}52 = 0.$$

На рис. 1.2-1.31 приведены схемы составных конструкций, а в табл. 1.2. – исходные данные для выполнения задания по вариантам.

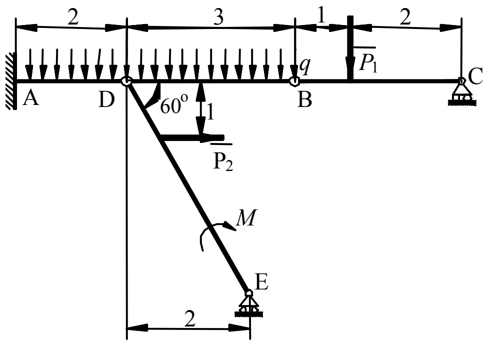
2
3
1
2
q
$\overline{P}_1$
C
A
D
60°
1
B
$\overline{P}_2$
M
E
2

Рис .1.2

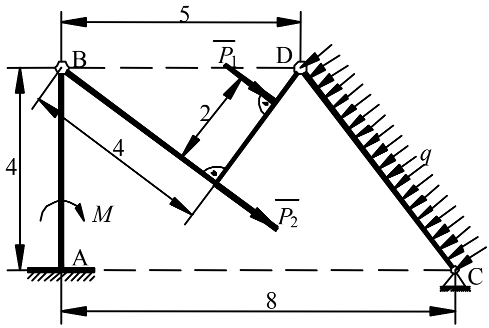
5
B
$\overline{P}_1$
D
2
4
4
q
M
$\overline{P}_2$
A
C
8

Рис .1.3

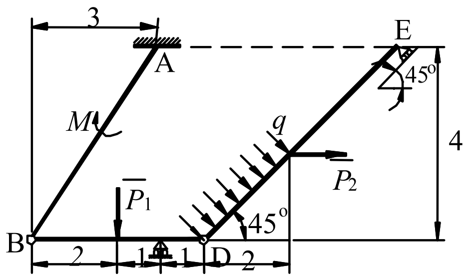

Рис. 1.4

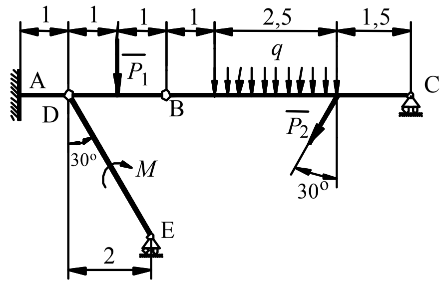

Рис. 1.5

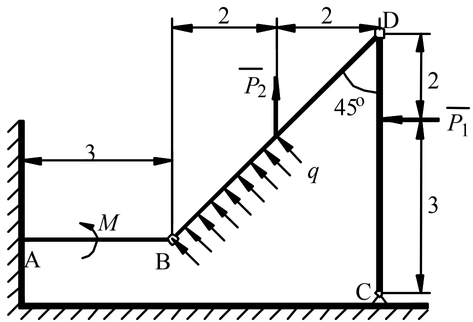

Рис. 1.6

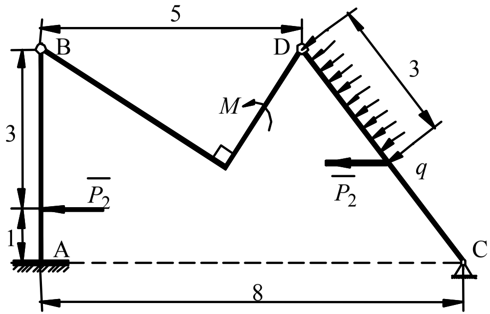

Рис. 1.7

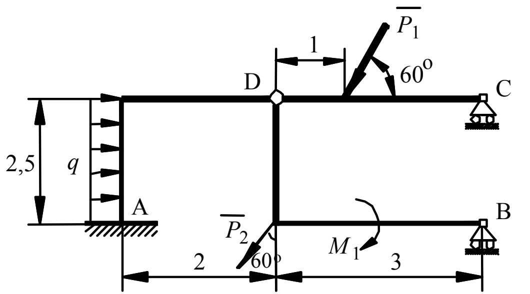

Рис. 1.8

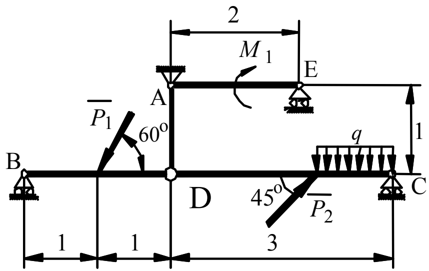

Рис. 1.9

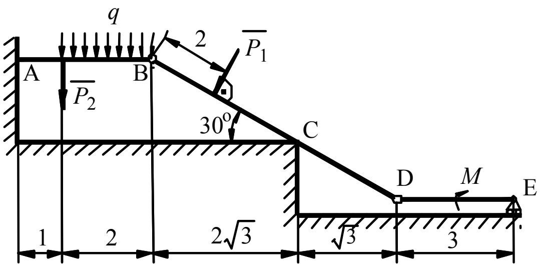

Рис. 1.10

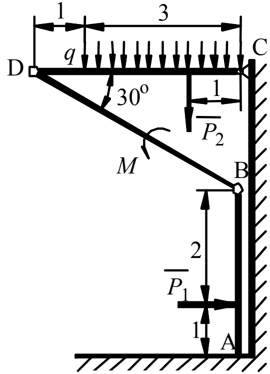

Рис. 1.11

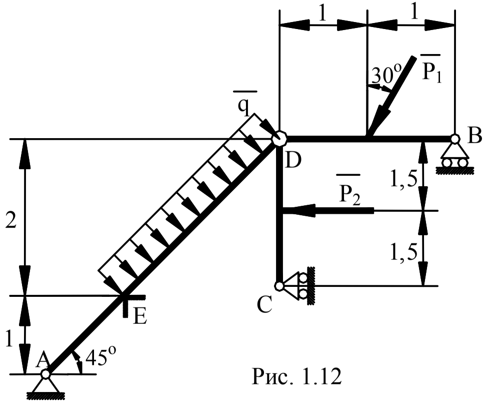

Рис. 1.12

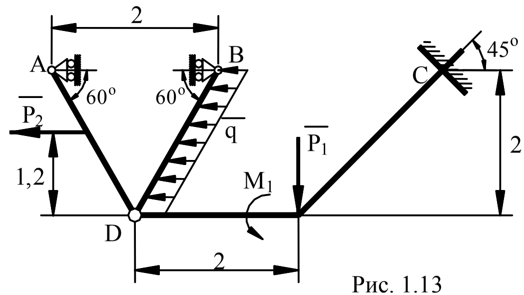

Рис. 1.13

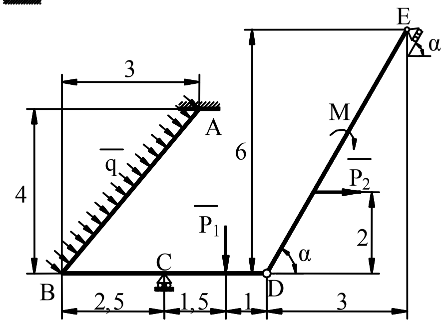

Рис. 1.14

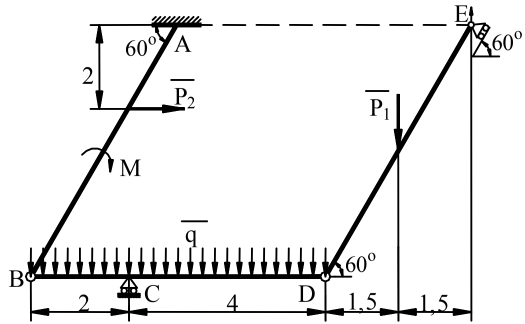

Рис. 1.15

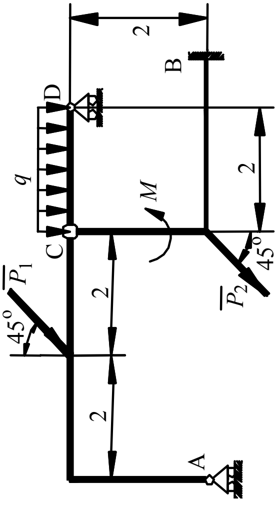

Рис. 1.16

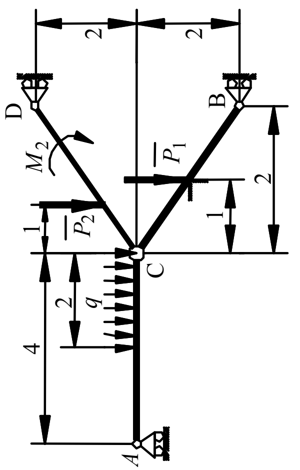

Рис. 1.17

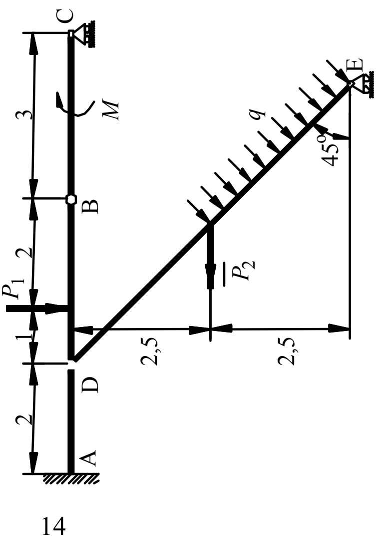

Рис. 1.18

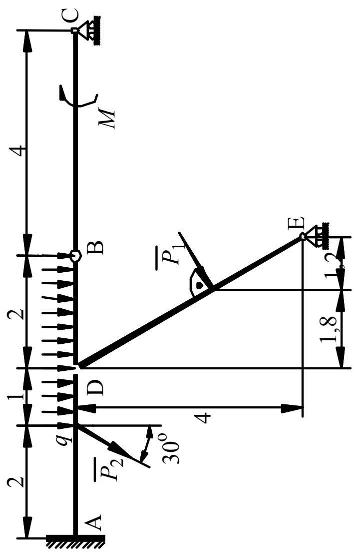

Рис. 1.19

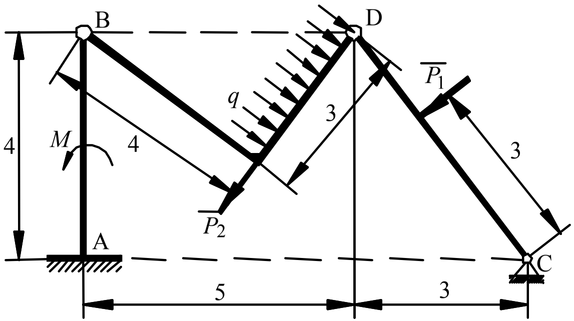

Рис. 1.20

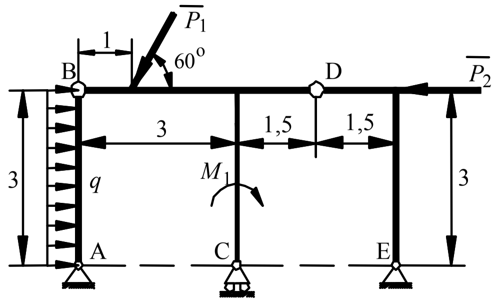

Рис. 1.21

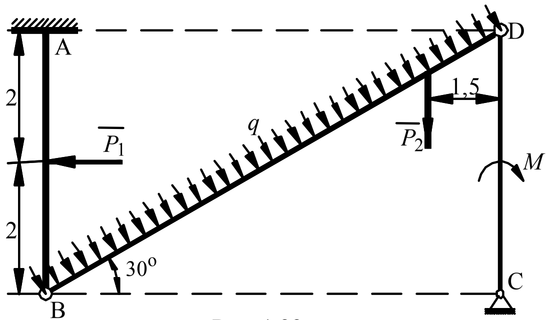

Рис. 1.22

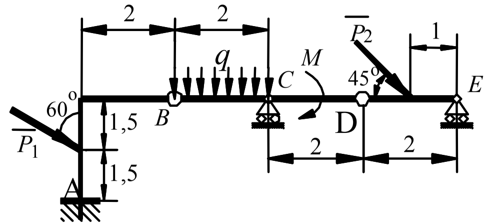

Рис. 1.23

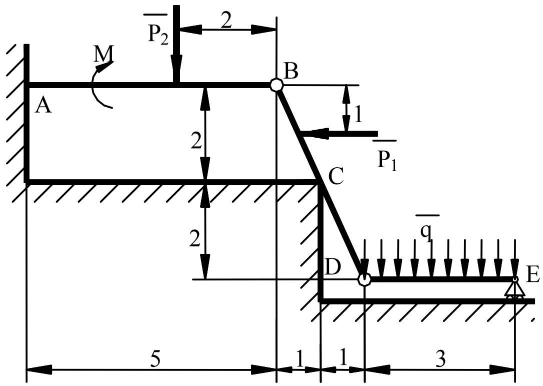

Рис. 1.24

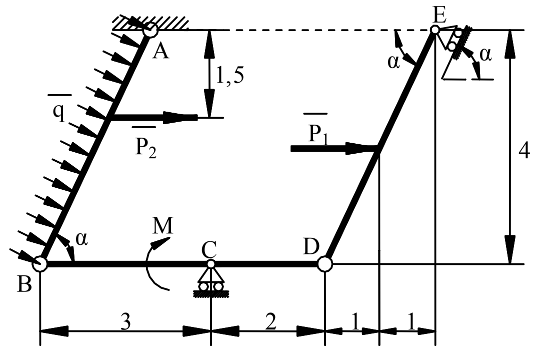

Рис. 1.25

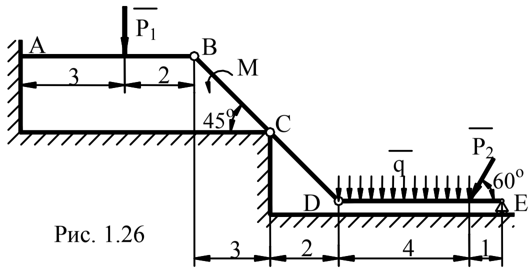

Рис. 1.26

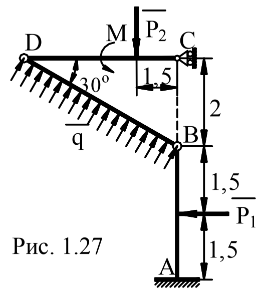

Рис. 1.27

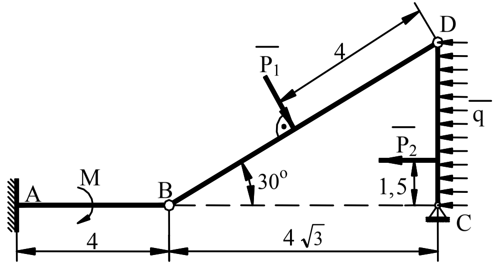

Рис. 1.28

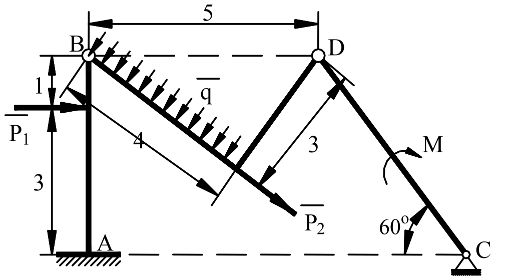

Рис. 1.29

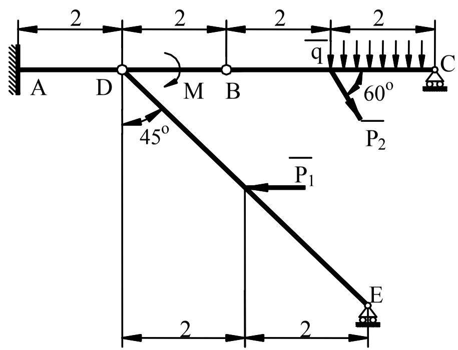

Рис. 1.30

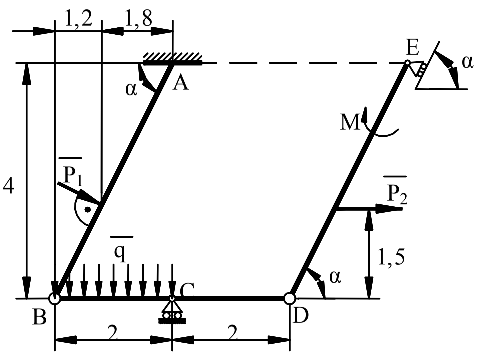

Рис. 1.31

Таблица 1. 2

Номер задачи	**Номер рисунка**	P_1, **кН**	P_2, **кН**	q, **кН/м**	M, **кН•м**
1.1 а	1.2	6	4	0,8	25
1.2 а	1.3	11	5	1	34
1.3 а	1.4	9	2	1,2	20
1.4 а	1.5	10	7	1,5	30
1.5 а	1.6	8	3	0,6	22
1.6 а	1.7	10	3	4	28
1.7 а	1.8	16	6	6	30
1.8 а	1.9	13	9	1,2	25
1.9 а	1.10	11	12	2,5	29
1.10 а	1.11	12	8	1,6	34
1.11 а	1.12	8	15	2	28
1.12 а	1.13	12	4	3	36
1.13 а	1.14	15	7	6	30
1.14 а	1.15	10	9	4	35
1.15 а	1.16	12	8	6	32
1.16 а	1.17	13	5	1,2	22
1.17 а	1.18	7	7	2	34
1.18 а	1.19	9	9	1,3	29
1.19 а	1.20	12	7	2,2	33
1.20 а	1.21	11	4	0,8	38
1.21 а	1.22	6	10	3,5	25
1.22 а	1.23	11	8	2	34
1.23 а	1.24	9	12	1	20
1.24 а	1.25	10	14	3	30
1.25 а	1.26	8	15	4,5	22
1.26 а	1.27	10	17	1,2	28
1.27 а	1.28	16	6	4,2	15
1.28 а	1.29	13	7	2,5	32
1.29 а	1.30	11	8	1,5	20
1.30 а	1.31	12	6	3,5	25

Продолжение таблицы 1. 2

Номер задачи	**Номер рисунка**	P_1, **кН**	P_2, **кН**	q, **кН/м**	M, **кН•м**		**Номер задачи**	**Номер рисунка**	P_1, **кН**	P_2, **кН**	q, **кН/м**	M, **кН•м**
1.1 б	1.2	6	12	3,5	20		1.16 б	1.17	8	12	5	32
1.2 б	1.3	8	11	1,5	18		1.17 б	1.18	9	10	4	35
1.3 б	1.4	13	7	2,5	30		1.18 б	1.19	7	15	6	30
1.4 б	1.5	6	15	4,5	15		1.19 б	1.20	4	12	3	36
1.5 б	1.6	17	12	1,2	28		1.20 б	1.21	15	8	2	28
1.6 б	1.7	15	8	4	20		1.21 б	1.22	8	12	1,6	34
1.7 б	1.8	10	14	3	30		1.22 б	1.23	11	10	2	28
1.8 б	1.9	12	9	1	20		1.23 б	1.24	9	13	1,5	25
1.9 б	1.10	8	11	2	32		1.24 б	1.25	6	16	6	30
1.10 б	1.11	10	6	3,5	25		1.25 б	1.26	3	10	4	28
1.11 б	1.12	4	11	1,2	36		1.26 б	1.27	8	3	2	22
1.12 б	1.13	7	12	2,2	33		1.27 б	1.28	7	10	1,5	30
1.13 б	1.14	9	9	1,3	25		1.28 б	1.29	9	2	1,2	20
1.14 б	1.15	7	7	2	30		1.29 б	1.30	5	11	2	15
1.15 б	1.16	5	13	1,2	22		1.30 б	1.31	6	8	3	25

2. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАДАЧА ПО КИНЕМАТИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание. Движение точки задано координатным способом на плоскости Oxy. Следует найти траекторию точки и построить ее на рисунке. Скорость, полное ускорение и касательное ускорение найти как функции времени. Скорость, ускорение, касательное ускорение, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории определить в момент времени t_1. Векторы $\overline{v}_1, \overline{w}_1, \overline{w}_{1\tau}, \overline{w}_{1n}$ показать на рисунке.

Пример. Движение точки задано уравнениями $x = 6\sin t,\ y = 4\cos 2t;\ t_1 = {}^{5\pi}\!/_{4}$ с.

Решение.

А). Определение траектории точки. Здесь следует исключить время из уравнений движения. В данном примере имеем:

$$\sin t = {}^{x}\!/_{6}\ , \quad \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t .$$

Отсюда получаем уравнение траектории

$$y = 4 - \frac{2}{9}x^2 .$$

Это парабола, симметричная относительно оси ординат. Из условий $-1 \le \sin t \le 1$, $-1 \le \cos 2t \le 1$ следует, что $-6 \le x \le 6$, $-4 \le y \le 4$. Это означает, что траекторией будет не вся парабола, а лишь ее часть, заключенная в названных интервалах. Она изображена на рис. 2.1.

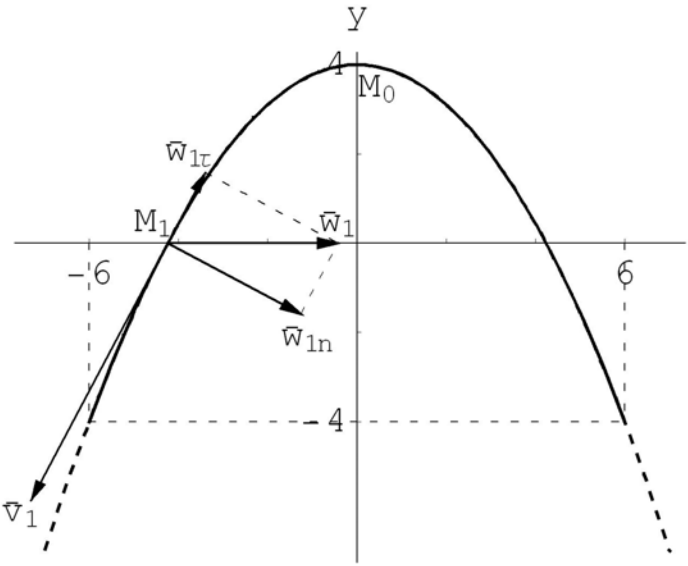

Рис. 2.1

Вершина параболы на рисунке соответствует начальной точке траектории M_0 с координатами (при $t_0 = 0$) $x_0 = 0$, $y_0 = 4$.

В). Определение скорости и ускорения точки в зависимости от времени. Вычисляем проекции скорости и ускорения на прямоугольные оси:

$$v_x = \dot{x} = 6\cos t,\ v_y = \dot{y} = -8\sin 2t,$$

$$w_x = \ddot{x} = -6\sin t,\ w_y = -16\cos 2t.$$

Величины скорости и ускорения равны

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36\cos^2 t + 64\sin^2 2t}\ ,$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{36\sin^2 t + 256\cos^2 2t}\ .$$

Касательное ускорение будет

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{-36\sin t\cos t + 128\sin 2t\cos 2t}{\sqrt{36\cos^2 t + 64\sin^2 2t}}.$$

С). Определение положения точки и ее кинематических характеристик в заданный момент времени. При $t = t_1 = 5\pi/4$ с имеем координаты точки M_1:

$$x_1 = 6\sin\frac{5\pi}{4} = -3\sqrt{2} = -4{,}24 \text{ м}, \; y_1 = 4\cos\frac{5\pi}{2} = 0.$$

Следовательно, точка M_1 находится на оси абсцисс (рис. 2.1). По формулам предыдущего пункта находим:

$$v_1 = \sqrt{36\cdot 0{,}5 + 64} = \sqrt{82} = 9{,}06 \text{ м/с}, \; v_x = 6\cos\frac{5\pi}{4} < 0.$$

Последнее означает, что вектор скорости $\bar{v}_1$ направлен по касательной к траектории вниз. Вектор полного ускорения точки строим по его проекциям:

$$w_x = -6\sin\frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2} = 4{,}24 \text{ м/с}^2, \; w_y = -16\cos\frac{5\pi}{2} = 0, \; w_1 = 4{,}24 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{w}_1$ направлен вдоль оси *Ox* вправо. Далее:

$$w_{1\tau} = \frac{-36\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0}{9{,}06} = -1{,}99 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{1n} = \sqrt{w_1^2 - w_{1\tau}^2} = \sqrt{(4{,}24)^2 - (1{,}99)^2} = 3{,}75 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории будет

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{w_{1n}} = \frac{82}{3{,}75} = 21{,}9 \text{ м}.$$

Задачи 2.1 – 2.30: уравнения движения и момент времени t_1 указаны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

№ задачи	x, м	y, м	t_1,с	№ задачи	x, м	y, м	t_1,с
2.1	$4\cos t$	$\sin t$	$3\pi/4$	2.16	$8\sqrt{2}\cos t$	$12\sqrt{2}\sin t$	$3\pi/4$
2.2	$4e^{-t}$	$3e^{t}$	0	2.17	$4e^{-t}$	$8e^{t}$	0
2.3	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\cos 2t$	$3\pi/4$	2.18	$3\sqrt{2}\cos t$	$12\cos 2t$	$\pi/4$
2.4	$2\sin t$	$8\cos t$	$3\pi/4$	2.19	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\sqrt{2}\cos t$	$5\pi/4$
2.5	$8t$	$12e^{-t}$	0	2.20	$2t$	$3e^{-t}$	1
2.6	$2t$	$4\sin t$	$\pi/6$	2.21	$4\sqrt{2}\cos t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
2.7	$2\cos^2 t$	$7\sin 2t$	$\pi/8$	2.22	$5\sqrt{2}\cos t$	$12\sqrt{2}\sin t$	$5\pi/4$
2.8	$5e^{t}$	$4e^{-t}$	0	2.23	$4\sqrt{2}\cos t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
2.9	t	$2\sin t$	$5\pi/6$	2.24	$8\sqrt{2}\sin t$	$6\cos^2 t$	$5\pi/4$
2.10	$3\sqrt{2}\cos t$	$5\sqrt{2}\sin t$	$5\pi/4$	2.25	$30\sqrt{2}\sin t$	$16\sqrt{2}\cos t$	$3\pi/4$
2.11	$2t$	$4e^{t}$	0	2.26	$2t$	$4\cos t$	$2\pi/3$
2.12	$\sqrt{2}\sin t$	$2\cos 2t$	$5\pi/4$	2.27	$2\sqrt{2}\cos t$	$2\cos 2t$	$7\pi/4$
2.13	$6\sqrt{2}\sin t$	$5\sqrt{2}\cos t$	$7\pi/4$	2.28	$2\cos t$	t	$\pi/3$
2.14	$3e^{t}$	$4e^{-t}$	0	2.29	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\cos^2 t$	$\pi/4$
2.15	$8\sqrt{2}\sin t$	$5\cos^2 t$	$\pi/4$	2.30	$10\sqrt{2}\sin t$	$4\cos 2t$	$3\pi/4$

3. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание. Груз массой m прикреплен к пружине жесткостью c (рис. 3.1) . Начальная деформация пружины λ_o, начальная скорость груза v_o. Найти уравнение движения груза; амплитуду, частоту и период колебаний; наибольшее значение модуля силы упругости. Массой пружины, а также сопротивлениями движению груза и пружины пренебречь. Начало координат взять в положении статического равновесия груза на пружине. Принять g = 10 м/с^2.

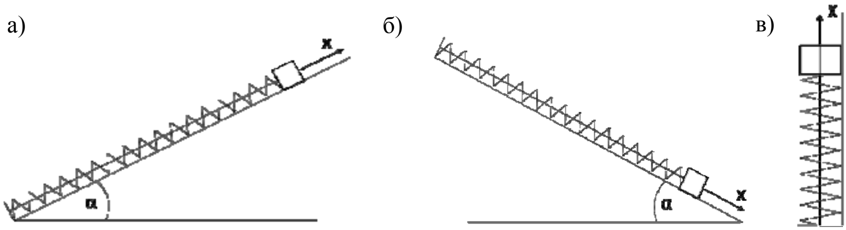

Рис. 3.1.

Пример. Пружина жесткостью 20 Н/см расположена вдоль плоскости, наклоненной к горизонту под углом 30°. В некоторый момент пружину сжимают на 0,5 см, прикрепляют груз массы 10 кг и сообщают ему скорость 56 см/с, направленную вверх параллельно наклонной плоскости.

Решение. Найдем сначала положение О статического равновесия груза (рис. 3.2, а). Пусть А – точка, соответствующая концу недеформированной пружины. Тогда АО = $\lambda_{ст}$ – статическая деформация, которой соответствует сила упругости $F_{ст} = c\,\lambda_{ст}$.

Рассмотрим равновесие груза. На него действуют три силы $\overline{P}$, $\overline{N}$ и $\overline{F}_{ст}$. Выберем ось x параллельно плоскости и напишем уравнение равновесия в проекциях на эту ось:

$$\sum X_i = P\sin 30^0 - F_{ст} = 0,$$

откуда $\lambda_{ст} = P\sin 30^0 / c = mg\sin 30^0 / c$.

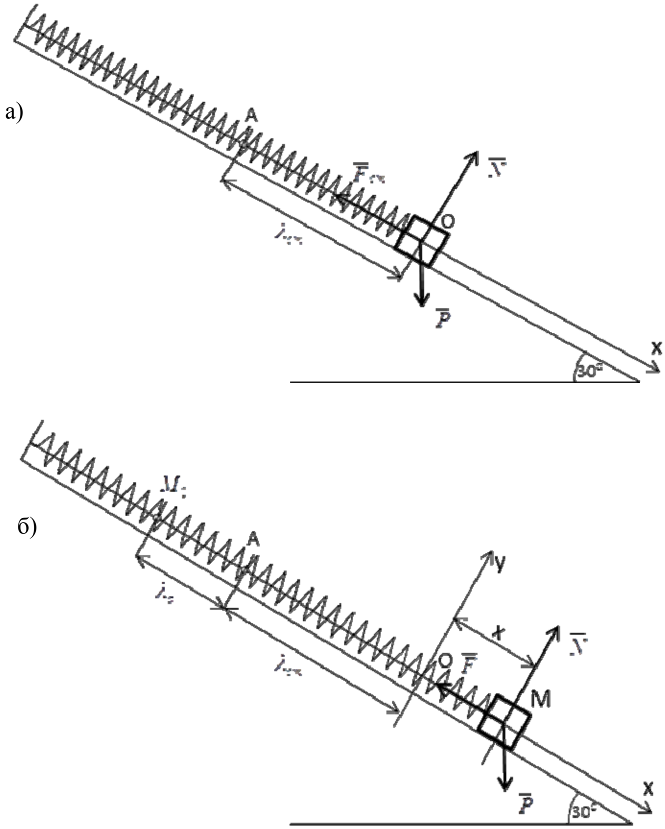

Рис. 3.2

Для вычислений в единицах СИ нужно коэффициент жесткости перевести в Ньютоны на метры. Тогда c = 2000 Н/м. Примем g = 10 м/с^2. Таким образом, $\lambda_{\text{ст}} = 10 \cdot 10 \cdot 0{,}5 / 2000 = 0{,}025$ м = 2,5 см.

Начало координат поместим в положении О статического равновесия груза (рис. 3.2, б). Груз изобразим в промежуточном положении М. На груз при его движении действуют силы $\overline{P}$, $\overline{N}$ и $\overline{F}$, причем на основании закона Гука $F = c\lambda = c(x + \lambda_{\text{ст}})$, так как полная деформация λ пружины определяется отрезком АМ = $x+\lambda_{ст}$. В то же время $c\lambda_{ст} = P\sin 30^0$, поэтому $F = cx + P\sin 30^0$.

Составляем дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = X.$$

Очевидно, что $X = P\sin 30^0 - F = P\sin 30^0 - cx - P\sin 30^0 = -cx$. Дифференциальное уравнение в таком случае примет вид:

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Обозначим $k^2 = c/m$, где k – собственная частота, $k = \sqrt{2000/10} \approx 14$ с$^{-1}$. Тогда можно написать:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Таким образом, мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $r^2 + k^2 = 0$ имеет корни $r = \pm k_i$, которым соответствует общее решение следующего вида:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt, \tag{3.1}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Найдем их. В начальный момент груз находился в положении M_0 (пружина предварительно была сжата на величину $\lambda_0 = 0{,}5$ см), значит $x_0 = -OM_0 = -\lambda_0 - \lambda_{ст} = -0{,}5 - 2{,}5 = -3$ см. Начальная скорость известна: $\dot{x}_0 = -56$ см/с.

Продифференцируем уравнение (3.1) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt, \tag{3.2}$$

Подставив в уравнение (3.1) и (3.2) $t = 0$ и начальные условия получим $x_0 = -C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$, $\dot{x}_0 = -C_1 k \cdot 0 + C_2 k \cdot 1$. Решение этой системы даёт: $C_1 = x_0 = -3$ см, $C_2 = \dot{x}_0 / k = -56/14 = -4$ см.

Уравнение движения груза можно записать так:

$$x = -(3\cos 14t + 4\sin 14t) \text{ см}. \tag{3.3}$$

Амплитуда колебаний:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \text{ см} = 0{,}05 \text{ м}.$$

Период колебаний: $T = 2\pi / k = 6{,}28/14 \approx 0{,}45$ с.

Начальная фаза колебаний:

$$\alpha = arctg\frac{C_1}{C_2} = arctg\frac{-3}{-4} \approx 0{,}64\,\text{рад}\ (37^0).$$

Значение силы упругости максимально при наибольшей деформации пружины: $\lambda_{\text{max}} = \lambda_{\text{ст}} + a$. Поэтому $F_{\text{max}} = c(\lambda_{\text{ст}} + a) = 2000 \cdot (0{,}025 + 0{,}05) = 150$ Н.

На рис. 3.3 представлен график свободных гармонических колебаний груза на пружине согласно выражению (3.3).

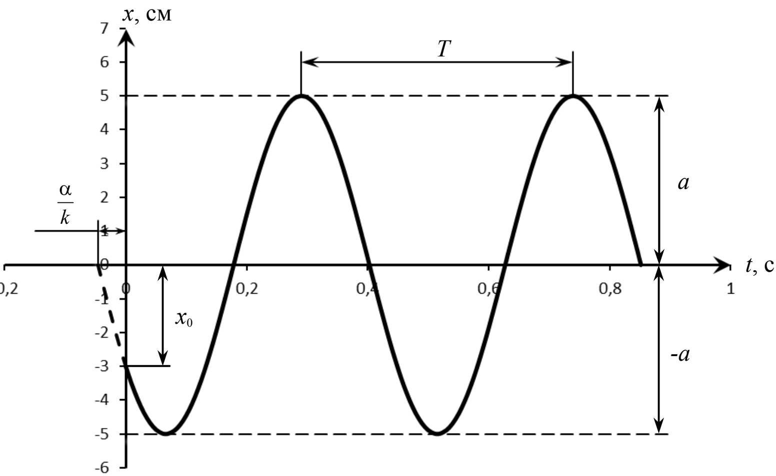

Рис. 3.3

Задачи 3.1-3.5. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз и отпускают без толчка.

Задачи 3.6-3.10. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вверх.

Задачи 3.11-3.15. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вниз.

Задачи 3.16-3.20. К сжатой пружине прикрепляют груз и отпускают без толчка.

Задачи 3.21-3.25. К растянутой пружине прикрепляют груз и отпускают без толчка.

Задачи 3.26-3.30. Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вниз.

Заданные значения величин приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

№ зад.	**№ рис.**	***m*, кг**	***c*, Н/см**	λ_0, **см**	ϑ_0, **см/с**	α
1	3.1,а	$7\sqrt{2}$	10	-	-	45°
2	3.1,а	$16\sqrt{3}$	10	-	-	60°
3	3.1,б	$28\sqrt{2}$	10	-	-	45°
4	3.1,б	20	10	-	-	30°
5	3.1,в	20	40	-	-	-
6	3.1,а	$14\sqrt{2}$	20	-	240	45°
7	3.1,а	$16\sqrt{3}$	40	-	96	60°
8	3.1,б	$7\sqrt{2}$	10	-	240	45°
9	3.1,б	5	5	-	120	30°
10	3.1,в	16	8	-	105	-
11	3.1,а	$7\sqrt{2}$	10	-	240	45°
12	3.1,а	$36\sqrt{3}$	90	-	96	60°
13	3.1,б	$14\sqrt{2}$	20	-	240	45°
14	3.1,б	10	10	-	120	30°
15	3.1,в	32	16	-	105	-
16	3.1,а	$14\sqrt{2}$	20	5	-	45°
17	3.1,а	$36\sqrt{3}$	10	48	-	60°
18	3.1,б	$28\sqrt{2}$	40	3	-	45°
19	3.1,б	10	20	3,5	-	30°
20	3.1,в	10	10	5	-	-
21	3.1,а	$7\sqrt{2}$	10	3	-	45°

Продолжение таблицы 3. 1

№ зад.	№ рис.	m, кг	c, Н/см	λ_0, см	ϑ_0, см/с	α
22	3.1,а	$4\sqrt{3}$	10	4	-	60°
23	3.1,б	$28\sqrt{2}$	10	18	-	45°
24	3.1,б	10	20	7,5	-	30°
25	3.1,в	20	20	10	-	-
26	3.1,б	20	10	$\lambda_{ст}$	42	30°
27	3.1,в	20	20	$\lambda_{ст}$	40	-
28	3.1,б	10	5	$\lambda_{ст}$	28	30°
29	3.1,в	10	10	$\lambda_{ст}$	30	-
30	3.1,в	20	40	1	42	-

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.*Бутенин Н.В.* Курс теоретической механики: Учебник / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. Спб.: Лань, 2009, 736 с.

2.*Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / Тарг С. М. - 15-е изд., стер. - Москва: Высшая школа, 2005, 416 с.

3. *Бать М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Учебное пособие. Том 1: Статика и кинематика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. Спб.: Лань, 2013, 672 с.

4. *Бать М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Учебное пособие. Том 2: Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. Спб.: Лань, 2013, 640 с.

5.*Кирсанов М.Н.* Решебник. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 2008, 384 с.

6.*Яблонский А.А.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие. М.: Интеграл-пресс, 2008, 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к расчетно-графическим заданиям для студентов очной формы обучения специальности 21.05.01

Составители: *Е.В. Шишкин, В.Н. Монахов*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой механики

Ответственный за выпуск *Е.В. Шишкин*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 21.12.2015. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,7. Усл.кр.-отт. 1,7. Уч.-изд.л. 1,2. Тираж 30 экз. Заказ 1034. С 322.

Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»
РИЦ Национального минерально-сырьевого университета «Горный»
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2