МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

Кафедра математики

Т.В. Слободинская, А.А. Груздков, Ю.А. Необердин

Математика

(первый семестр)

Учебное пособие для студентов заочной формы обучения

Санкт-Петербург
2012

УДК 512.64, 514.123.1, 517.1, 517.2, 517.3

Математика (первый семестр): учебное пособие для студентов заочной формы обучения [Текст]: / Т.В. Слободинская, А.А. Груздков, Ю.А. Необердин.– СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2012.– 75 с.

Учебное пособие содержит задания контрольных работ и примеры их решения. Предназначено для студентов первого курса заочной формы обучения. Пособие составлено в соответствии с учебной программой по дисциплинам «Математика», «Высшая математика», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Математический анализ».

Рис. 11, табл. 3, библиогр. 13 назв.

Рецензенты:

1. Старший научный сотрудник Санкт-Петербургского Отделения Математического Института им. В. А. Стеклова РАН, доктор физико-математических наук Деркачев С. Э.

2. Доцент кафедры высшей математики Государственной полярной академии кандидат физико-математических наук, доцент Никитенко В.Г.

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии факультета информационных технологий и управления 05.12.2012.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

Содержание

Введение

Дисциплина «Математика» относится к циклу общенаучных дисциплин. Цель курса — формирование научного мировоззрения у студентов, приобретение ими математических знаний, умений и навыков, необходимых для изучения других общенаучных и специальных дисциплин, а также самостоятельного изучения специальной литературы. Изучение курса необходимо для формирования способности математического исследования прикладных задач, правильного истолкования и оценки получаемых результатов, а также формирования навыков самостоятельной исследовательской работы.

Дисциплина «Математика» для студентов заочной формы обучения читается на первом и втором курсах. В первом семестре студенты выполняют три контрольных работы и сдают экзамен.

В данном учебном пособии представлены три контрольных работы первого семестра. Для каждой работы указывается содержание данной работы, варианты заданий и примеры решения.

Контрольная работа может быть написана от руки на листах формата А4 или представлена в распечатанном виде. Листы должны быть скреплены степлером, причем каждая контрольная работа сдается отдельно. Работа может быть написана от руки в тетради. В этом случае каждая работа сдается в отдельной тетради.

На титульном листе указывается полное название университета, факультет, кафедра, фамилия, имя, отчество студента, номер учебной группы, номер контрольной работы, номер варианта, фамилия и инициалы преподавателя, проверяющего работу, год и ставится личная подпись студента.

Работа считается выполненной, если все задачи решены верно. Если в решении какой-либо задачи допущена ошибка, то студент должен сделать работу над ошибками (заново решить задачу). Работа над ошибками должна располагаться после записи решения последней задачи контрольной работы.

Студент самостоятельно выбирает вариант контрольной работы в соответствии с начальной буквой своей фамилии.

Буква	Номер варианта
А	1
Б	2
В	3
Г	4
Д	5
Е, Ё	6
Ж	7
З	8
И, Й	9
К	10
Л	11
М	12
Н	13
О	14
П	15
Р	16
С	17
Т	18
У	19
Ф	20
Х	21
Ц, Ю	22
Ч	23
Ш,Щ	24
Э, Я	25

Контрольная работа № 1

Содержание работы

Задание № 1 для нечетных вариантов (1, 3, 5,. . . , 25)

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной прямой L.

Задание № 1 для четных вариантов (2, 4, 6,. . . , 24)

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

Задание № 2 для нечетных вариантов

Написать уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

Задание № 2 для четных вариантов

Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной плоскости α.

Задание № 3

Даны матрицы A, B и C. Найти, если возможно, $A + 2B$, $B + 2C$, AB, BC.

Задание № 4

Решить систему линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.

Задание № 5

Исследовать и решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Указание.

Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Шаляпина, О.В. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия (справочные материалы): методические указания / О.В. Шаляпина, Т.А. Уланова.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2008.— 22 с.

2. Шаляпина, О.В. Линейная алгебра (справочные материалы): методические указания / О.В. Шаляпина, Т. А. Уланова.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2008.— 20 с.

3. Слободинская, Т.В. Типовые варианты контрольной работы по теме «Линейная алгебра» для студентов вечернего отделения факультета экономики и менеджмента: методические указания / Т.В. Слободинская, В.Л. Устинов, Ю.А. Необердин.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010.— 18 с.

4. Слободинская, Т.В. Типовые варианты контрольной работы по теме «Аналитическая геометрия» для студентов вечернего отделения факультета экономики и менеджмента: методические указания / Т.В. Слободинская, В.Л. Устинов, Н.М. Климовицкая, А.А. Груздков. — СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010.— 21 с.

5. Шаляпина, О.В. Типовые варианты контрольной работы по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»: методические указания / О.В. Шаляпина, Н.Н. Гизлер, В.С. Капитонов.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2009.— 23 с.

Условия задач

Вариант № 1.

1. $M_0(2;0;1), \qquad L: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{3}.$

2. $M_1(2;0;1),\ M_2(3;2;-1).$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 2x+3y+5z=10, \\ 3x+7y+4z=3, \\ x+2y+2z=3. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_4=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9, \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=5. \end{cases}$

Вариант № 2.

1. $M_1(1;1;1),\ M_2(2;2;2),\ M_3(2;0;1).$

2. $M_0(1;1;1), \quad \alpha:\ -x+2y+z=4.$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 5x-6y+4z=3, \\ 3x-3y+2z=2, \\ 4x-5y+3z=2. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3+3x_5=5, \\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9, \\ x_1-3x_2+2x_3+x_4-3x_5=4. \end{cases}$

Вариант № 3.

1. $M_0(2;1;1), \qquad L:\ \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{2}.$

2. $M_1(2;1;1),\ M_2(3;3;-1).$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 4x-3y+2z=-4, \\ 6x-2y+3z=-1, \\ 5x-3y+2z=-3. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 3x_1+7x_2-2x_3-x_4=4, \\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3. \end{cases}$

Вариант № 4.

1. $M_1(1;2;1),\ M_2(2;3;2),\ M_3(2;1;1).$

2. $M_0(1;2;1), \quad \alpha:\ -x+2y+2z=8.$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 5x+2y+3z=-2, \\ 2x-2y+5z=0, \\ 3x+4y+2z=-10. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_5=7, \\ x_1-4x_2-x_3-4x_4+x_5=3. \end{cases}$

Вариант № 5.

1. $M_0(2;1;2), \qquad L:\ \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{3}\,.$

2. $M_1(2;1;2),\ M_2(3;3;0).$

3. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} x+2y+3z=2,\\ 3x+y+2z=3,\\ 2x+3y+z=1.\end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1,\\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3,\\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2.\end{cases}$

Вариант № 6.

1. $M_1(1;1;2),\ M_2(2;2;3),\ M_3(2;0;2).$

2. $M_0(1;1;2), \quad \alpha:\ -x+2y+z=11.$

3. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 2x+y+2z=1,\\ x+2y+2z=2,\\ 2x+2y+z=1.\end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+2x_5=0,\\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1,\\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4-2x_5=1.\end{cases}$

Вариант № 7.

1. $M_0(2;2;1), \qquad L:\ \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}\,.$

2. $M_1(2;2;1),\ M_2(3;4;-1).$

3. $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 3 & 2\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} x+2y+z=2,\\ 2x+y+z=1,\\ x+y+2z=2.\end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_4=1,\\ 3x_1-5x_2+3x_3+7x_4=1.\end{cases}$

Вариант № 8.

1. $M_1(1;2;2)$, $M_2(2;3;3)$, $M_3(2;1;2)$.

2. $M_0(1;2;2)$, $\alpha: -x+y+z=21$.

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} 2x+2y+3z=3, \\ 4x+5y+6z=7, \\ 7x+8y+9z=13. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_5=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3-3x_4+2x_5=1. \end{cases}$

Вариант № 9.

1. $M_0(1;1;1)$, $L: \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{2}$.

2. $M_1(1;1;1)$, $M_2(2;3;-1)$.

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 3x+y+2z=6, \\ 2x+3y+z=1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1, \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=1. \end{cases}$

Вариант № 10.

1. $M_1(1;1;1)$, $M_2(2;2;2)$, $M_3(2;0;1)$.

2. $M_0(1;1;1)$, $\alpha: -x+3y+2z=15$.

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} x+2y+2z=3, \\ 4x-2y-5z=5, \\ 6x-y+3z=1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_5=2, \\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=3. \end{cases}$

Вариант № 11.

1. $M_0(0;1;1)$, $\qquad L: \ \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{3}$.

2. $M_1(0;1;1)$, $M_2(1;3;-1)$.

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 3, \\ 4x + 2y + 5z = 5, \\ 3x + 4y + 7z = 2. \end{cases}$ $\qquad$ 5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

Вариант № 12.

1. $M_1(0;1;1)$, $M_2(1;2;2)$, $M_3(1;0;1)$.

2. $M_0(0;1;1)$, $\quad \alpha: \ x + 2y + 3z = 4$.

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\quad C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ x + 5y + 2z = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 3. \end{cases}$ $\qquad$ 5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

Вариант № 13.

1. $M_0(0;2;1)$, $\qquad L: \ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$.

2. $M_1(0;2;1)$, $M_2(1;4;-1)$.

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\quad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4, \\ 2x + 6y + z = 2, \\ 4x + 8y - z = 2. \end{cases}$ $\qquad$ 5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

Вариант № 14.

1. $M_1(0;2;1),\ M_2(1;3;2),\ M_3(1;1;1).$

2. $M_0(0;2;1),\quad \alpha:\ x+2y+2z=11.$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2x-3y+4z=-4, \\ 5x-7y+8z=-7. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3-3x_5=2, \\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5, \\ x_1+5x_2+x_3-4x_4+3x_5=3. \end{cases}$

Вариант № 15.

1. $M_0(0;2;1),\qquad L:\ \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{1}.$

2. $M_1(0;2;1),\ M_2(1;4;-1).$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ 2x-3y+4z=5, \\ 4x-11y+10z=11. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4=1, \\ 4x_1-3x_2+8x_3+9x_4=1. \end{cases}$

Вариант № 16.

1. $M_1(0;2;2),\ M_2(1;3;3),\ M_3(1;1;2).$

2. $M_0(0;2;2),\quad \alpha:\ x+2y+z=18.$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 6x+3y+z=-9, \\ 8x-4y+2z=5. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 4x_1+5x_2-2x_3-x_5=3, \\ 3x_1+4x_2+x_3+4x_4-x_5=2. \end{cases}$

Вариант № 17.

1. $M_0(0;2;3)$, $\quad L:\ \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{2}\,.$

2. $M_1(0;2;3),\ M_2(1;4;1).$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} x+y=1, \\ x-2y+z=1, \\ x-2z=2. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3+3x_4=5, \\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9, \\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4=4. \end{cases}$

Вариант № 18.

1. $M_1(0;2;3),\ M_2(1;3;4),\ M_3(1;1;3).$

2. $M_0(0;2;3)$, $\quad \alpha:\ x+y+2z=5.$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ x+5y-4z=-5, \\ 4x+y-3z=-4. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_5=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9, \\ x_1+3x_2+x_3-4x_4+3x_5=5. \end{cases}$

Вариант № 19.

1. $M_0(1;2;3)$, $\quad L:\ \dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-14}{1}\,.$

2. $M_1(1;2;3),\ M_2(2;4;1).$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_4=7, \\ x_1-4x_2-x_3-3x_4=3. \end{cases}$

Вариант № 20.

1. $M_1(1;2;3),\ M_2(2;3;4),\ M_3(2;1;3).$

2. $M_0(1;2;3), \quad \alpha:\ 2x+y+z=16.$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 2x-y+z=2, \\ 3x+2y+2z=-2, \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 3x_1+7x_2-2x_3+x_5=4, \\ 2x_1+5x_2+x_3+4x_4+x_5=3. \end{cases}$

Вариант № 21.

1. $M_0(2;2;1), \qquad L:\ \dfrac{x+6}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+3}{1}.$

2. $M_1(2;2;1),\ M_2(3;4;-1).$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x-y-z=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+x_4=1. \end{cases}$

Вариант № 22.

1. $M_1(2;2;1),\ M_2(3;3;2),\ M_3(3;1;1).$

2. $M_0(2;2;1), \quad \alpha:\ 2x+2y+z=18.$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} x+y-z=36, \\ x-y+z=13, \\ -x+y+z=7. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_5=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_5=2. \end{cases}$

Вариант № 23.

1. $M_0(2;1;3)$, $\qquad L:\ \dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+1}{3}\,.$

2. $M_1(2;1;3),\ M_2(3;3;1).$

3. $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -3 & 3\\ -1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 3 & -3\\ -1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} x+2y+z=4,\\ 3x-5y+3z=1,\\ 2x+7y-z=8.\end{cases}$ $\qquad$ 5. $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0,\\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4=1,\\ 2x_1-x_2-3x_3-x_4=1.\end{cases}$

Вариант № 24.

1. $M_1(2;1;3),\ M_2(3;2;4),\ M_3(3;0;3).$

2. $M_0(2;1;3),\quad \alpha:\ 2x+2y+3z=11.$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2\\ -3 & 2 & -2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28,\\ 7x+3y-6z=-1,\\ 7x+9y-9z=5.\end{cases}$ $\qquad$ 5. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_5=1,\\ 3x_1-5x_2+3x_3+3x_4+4x_5=1.\end{cases}$

Вариант № 25.

1. $M_0(2;2;3)$, $\qquad L:\ \dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z}{3}\,.$

2. $M_1(2;2;3),\ M_2(3;4;1).$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

4. $\begin{cases} 2x+y=5,\\ x+3z=16,\\ 5y-z=10.\end{cases}$ $\qquad$ 5. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_4=2,\\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5,\\ 2x_1-5x_2-3x_3-x_4=3.\end{cases}$

Примеры решения задач

Вариант I.

Задание 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки

$$M_1(3;2;1),\ M_2(4;5;-1) \quad \text{и} \quad M_3(5;4;2).$$

Решение. Уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz = D,$$

где A, B, C — координаты любого ненулевого вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости (*нормали*), а D находится из равенства

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0,$$

где $P(x_0;y_0;z_0)$ — любая точка, принадлежащая плоскости.

В качестве точки, принадлежащей плоскости, возьмем, например, точку $M_0(1;2;3)$. Векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ лежат в плоскости, их векторное произведение будет вектором перпендикулярным им обоим, а, значит, и всей плоскости (см. рисунок 1), следовательно

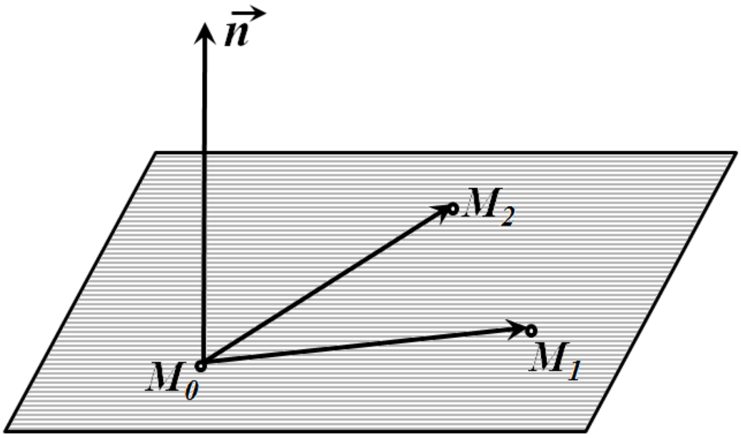

Рисунок 1 — Нахождение нормали к плоскости через векторное произведение (к заданию 1)

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 7\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 4\vec{k}.$$

Тогда $A = 7$, $B = -5$, $C = -4$ и $D = 7 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 7$. Уравнение плоскости имеет, таким образом, вид $7x - 5y - 4z = 7$.

Ответ: $7x - 5y - 4z = 7$.

Задание 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3;2;1)$ и $M_2(4;5;-1)$.

Решение. Уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

где l, m, n — координаты любого ненулевого вектора $\vec{S}$, параллельного прямой (*направляющего вектора*), а x_0, y_0, z_0 — координаты любой точки, лежащей на прямой.

Возьмем в качестве точки, лежащей на прямой, точку M_1, а за направляющий вектор $\vec{S}$ примем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, лежащий на прямой (см. рисунок 2). Тогда

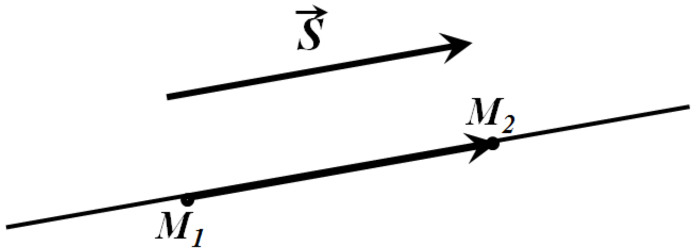

Рисунок 2 — Схема к заданию 2

$$\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = (4-3)\vec{\imath} + (5-2)\vec{\jmath} + (-1-1)\vec{k} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k},$$

и уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, примет вид

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Ответ: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$.

Задание 3. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

найти, если это возможно, $A+2B$, $B+2C$, AB, BC.

Решение. Сумма матриц определена только для матриц, имеющих равное число строк и столбцов, следовательно $A+2B$ не определена. Вычислим $B+2C$:

$$B+2C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 10 \\ 6 & -16 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-2 & 1+0 \\ 4+4 & 3+10 \\ -1+6 & 2-16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 13 \\ 5 & -14 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц определено, только если число столбцов в первом сомножителе такое же, как число строк во втором. Следовательно произведение AB определено, а BC — нет. Вычислим $AB=D$. Учтем, что элемент матрицы произведения (D), стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

Получим, что

$$D=AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 4+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+3\cdot 3+1\cdot 2 \\ -3\cdot 2+4\cdot 4+2\cdot(-1) & -3\cdot 1+4\cdot 3+2\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 13 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задание 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + z = -2, \\ 2x + 2y - z = 6, \\ 3x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Решение. Составим и вычислим главный определитель системы, т. е. определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 2+1\cdot 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\cdot 3-1\cdot 2\cdot 3-$$

$$-1\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot 2\cdot 2=4-2+3-6-1+4=2.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, система уравнений имеет единственное решение, которое можно найти по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где Δ_x, Δ_y, Δ_z — получаются, если в определителе Δ заменить столбец коэффициентов при соответствующем неизвестном на столбец свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 6\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)\cdot(-2) -$$
$$-1\cdot 2\cdot(-2) - (-2)\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot 6\cdot 2 =$$
$$= -8 - 6 - 2 + 4 + 2 + 12 = 2.$$

Аналогично:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4,$$

откуда

$$x = \frac{2}{2} = 1, \quad y = \frac{2}{2} = 1, \quad z = \frac{-4}{2} = -2.$$

Проверка. Подставим найденные значения x, y, z в уравнения системы:

$$\begin{cases} 1 - 1 - 2 & = & -2 \\ 2 + 2 + 2 & = & 6 \\ 3 - 1 - 4 & = & -2. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$.

Задание 5. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и, путем элементарных преобразований над строками, приведем ее к ступенчатому виду.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

(прибавим ко второй строке первую, умноженную на -3, а к третьей — первую, умноженную на -5)

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

(вычтем из третьей строки вторую и исключим нулевую строку)

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен двум:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B) = 2.$$

Число неизвестных равно 5, следовательно, 2 неизвестные являются базисными, а 3 — свободными.

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$ состоит из коэффициентов при x_1 и x_2, поэтому они берутся в качестве базисных, а x_3, x_4, x_5 — свободных. Пусть

$$x_3 = \alpha_1, \quad x_4 = \alpha_2, \quad x_5 = \alpha_3,$$

где α_1, α_2,α_3 — произвольные числа. Тогда (см. вторую строку полученной матрицы) имеем

$$-7x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \Longrightarrow -7x_2 + 5\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1,$$

откуда

$$x_2 = \frac{5}{7}\alpha_1 - \frac{3}{7}\alpha_2 + \frac{2}{7}\alpha_3 - \frac{1}{7}.$$

Исходя из первой строки преобразованной матрицы запишем

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,$$

откуда

$$x_1 = -2\left(\frac{5}{7}\alpha_1 - \frac{3}{7}\alpha_2 + \frac{2}{7}\alpha_3 - \frac{1}{7}\right) + \alpha_1 - \alpha_2 = -\frac{3}{7}\alpha_1 - \frac{1}{7}\alpha_2 - \frac{4}{7}\alpha_3 + \frac{2}{7}.$$

Для удобства записи можно обозначить

$$\frac{\alpha_1}{7} = c_1, \quad \frac{\alpha_2}{7} = c_2, \quad \frac{\alpha_3}{7} = c_3,$$

где c_1, c_1, c_1 — также произвольные числа. Окончательно получаем общее решение системы в виде:

$$\begin{cases} x_1 = -3c_1 - c_2 - 4c_3 + \dfrac{2}{7}, \\ x_2 = 5c_1 - 3c_2 + 2c_3 - \dfrac{1}{7}, \\ x_3 = 7c_1, \\ x_4 = 7c_2, \\ x_5 = 7c_3. \end{cases}$$

Вариант II.

Задание 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; 15; -11)$ и перпендикулярной прямой

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}\ .$$

Решение. Уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz = D,$$

где A, B, C — координаты любого ненулевого вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости (*нормали*), а D находится из равенства

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0,$$

где $P(x_0; y_0; z_0)$ — любая точка, принадлежащая плоскости. По условию задачи такой точкой является точка $M_0(2; 15; -11)$.

В качестве вектора $\vec{n}$ можно взять направляющий вектор $\vec{S}$ прямой l, которая по условию перпендикулярна плоскости (см. рисунок 3).

$$\vec{n} = \vec{S} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k},$$

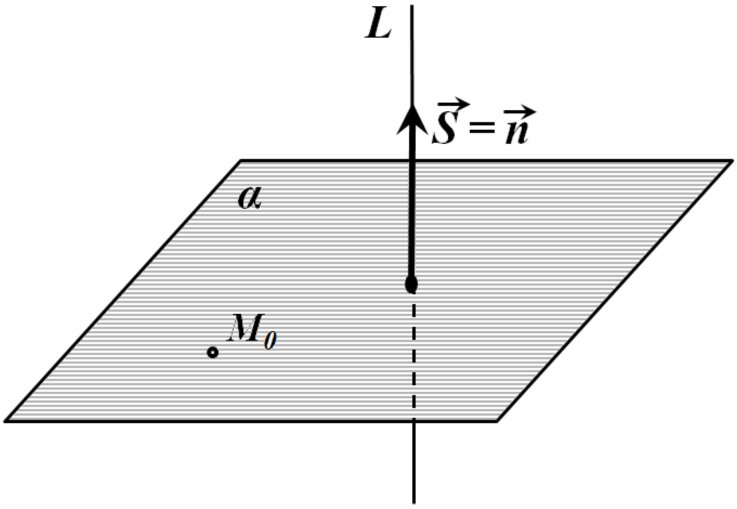

Рисунок 3 — Схема к заданию 1

поэтому

$$A = 3, \quad B = -2, \quad C = 2, \quad D = 3\cdot 2 - 2\cdot 15 + 2\cdot(-11) = 6 - 30 - 22 = -46.$$

Уравнение искомой плоскости имеет, таким образом, вид

$$3x - 2y + 2z = -46.$$

Ответ: $3x - 2y + 2z = -46$.

Задание 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(6; 0; -13)$ и перпендикулярной плоскости $4x - 11y + 6z = 28$.

Решение. Уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

где l, m, n — координаты любого ненулевого вектора $\vec{S}$, параллельного прямой (*направляющего вектора*), а x_0, y_0, z_0 — координаты какой-либо точки, лежащей на прямой. Такая точка дана по условию задачи — это точка $M_0(6; 0; -13)$. За направляющий вектор $\vec{S}$ искомой прямой можно взять вектор нормали к плоскости, т. к. прямая перпендикулярна плоскости и, следовательно, параллельна вектору нормали $\vec{n}$ (см. рисунок 4).

Итак, $\vec{S} = \vec{n} = 4\vec{i} - 11\vec{j} + 6\vec{k}$, а уравнение прямой имеет вид

$$L: \quad \frac{x - 6}{4} = \frac{y}{-11} = \frac{z + 13}{6}.$$

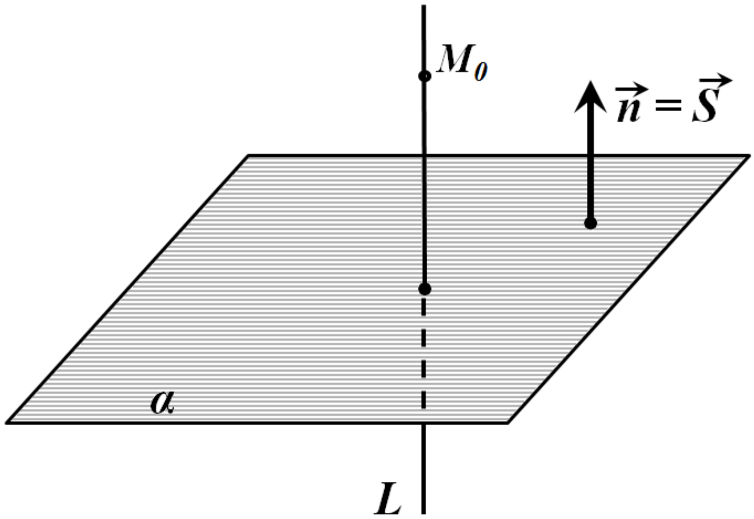

Рисунок 4 — Схема к заданию 2

Ответ: $\dfrac{x-6}{4} = \dfrac{y}{-11} = \dfrac{z+13}{6}$.

Задание 3. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

найти, если это возможно, $A + 2B$, $B + 2C$, AB, BC.

Решение. Сумма матриц определена только для матриц, имеющих равное число строк и столбцов, следовательно, $A + 2B$ не определена. Вычислим $B + 2C$:

$$B + 2C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+4 & -1+2 \\ -3+0 & 4-4 \\ 2+2 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц AB определено, поскольку число столбцов в первом сомножителе такое же, как число строк во втором (три).

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \\ -3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 & -3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -16 & 20 \end{pmatrix}.$$

Произведение BC не определено, поскольку в первом сомножителе 2 столбца, а во втором — 3 строки.

Задание 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x & - & 3y & + & z & = & -1, \\ x & + & 2y & - & z & = & 2, \\ -x & - & y & + & 3z & = & 6 \end{cases}$$

по формулам Крамера.

Решение. Вычислим основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-3) \cdot 1 \cdot 3 = 12 - 3 - 1 + 2 - 2 + 9 = 17.$$

Поскольку $\Delta = 17 \neq 0$, система уравнений имеет единственное решение. Вычислим дополнительные определители Δ_x, Δ_y, Δ_z, заменяя, соответственно, первый, второй и третий столбцы определителя Δ столбец столбцом свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 18 - 2 - 12 + 1 + 18 = 17.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 + 6 + 2 + 12 + 3 = 34.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 6 + 1 - 2 + 4 + 18 = 51.$$

По формулам Крамера находим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{17}{17} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{34}{17} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{51}{17} = 3.$$

Проверка. Выполним проверку, подставив найденные значения x, y, z в уравнения системы:

$$\begin{cases} 2 - 6 + 3 & = & -1 \\ 1 + 4 - 3 & = & 2 \\ -1 - 2 + 9 & = & 6. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Задание 5. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и, путем элементарных преобразований над строками, приведем ее к ступенчатому виду.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right) \sim$$

(прибавим ко второй строке первую, умноженную на -2, а к третьей — первую, умноженную на -1)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|r} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 - 2\cdot 2 & -6 - 2\cdot(-3) & 2 - 2\cdot 5 & 3 - 2\cdot 7 & 2 - 2\cdot 1 \\ 2 - 2 & -3 - (-3) & -11 - 5 & -15 - 7 & 1 - 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccr|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right) \sim$$

(прибавим к третьей строке вторую, умноженную на -2)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Поскольку $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B) = 2$, система совместна. Число неизвестных равно 4, следовательно, 2 неизвестные базисные, а 2 — свободные. В качестве базисного минора возьмём минор, составленный из первых двух строк и первого и третьего столбцов, т. е. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}$. Он состоит из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_3, значит, именно они будут базисными, а x_2 и x_4 — свободными. Пусть $x_2 = \alpha_1$, $x_4 = \alpha_2$, где α_1, α_2 — произвольные числа. Тогда имеем (см. вторую строку ступенчатой матрицы):

$$-8x_3 - 11x_4 = 0 \Longrightarrow x_3 = -\frac{11}{8}\,\alpha_2.$$

Первая строка ступенчатой матрицы означает, что

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \Longrightarrow 2x_1 - 3\alpha_1 - \frac{55}{8}\alpha_2 + 7\alpha_2 = 1,$$

откуда

$$x_1 = \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{1}{16}\alpha_2 + \frac{1}{2}\,.$$

Обозначим $\dfrac{\alpha_1}{2} = c_1$, $\dfrac{\alpha_2}{16} = c_2$, где c_1, c_2 — также произвольные числа. Получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 &= & 3c_1 & -c_2 & +\dfrac{1}{2}, \\ x_2 &= & 2c_1, & & \\ x_3 &= & & -22c_2, & \\ x_4 &= & & 16c_2. & \end{cases}$$

Контрольная работа № 2

Содержание работы

Задание № 1.

Изобразите на комплексной плоскости точки, соответствующие числам z_1, z_2, z_3, z_4.

Задание № 2

Найдите в алгебраической форме $\dfrac{z_1^2 + 5i}{z_2}$.

Задание № 3

Переведите число z_3 в тригонометрическую форму и найдите $(z_3 \cdot z_4)^{10}$ (ответ дать в тригонометрической и показательной форме).

Задание № 4

Решите квадратные уравнения.

Указание.

Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Крючков, А. Ф. Комплексные числа и многочлены: методические указания к решению задач для дневных и вечерних факультетов / А. Ф. Крючков, Т. В. Слободинская.— Л.: ЛТИ, 1988.— 33 с.

2. Климовицкая Н.М. Комплексные числа. Индивидуальные задания: методические указания / Н. М. Климовицкая, Л. В. Нечаева, Л. Н. Романовская.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2001.— 14 с.

Условия задач

Вариант № 1.

$$z_1 = 2+3i, \quad z_2 = 3-i, \quad z_3 = 1-i, \quad z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

$$x^2 - 2x + 2, \qquad 4x^2 + 9 = 0.$$

Вариант № 2.

$$z_1 = 1-4i, \quad z_2 = 2+i, \quad z_3 = 1+i\sqrt{3}, \quad z_4 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right).$$

$$x^2 - 2x + 4, \qquad 5x^2 + 1 = 0.$$

Вариант № 3.

$$z_1 = -3+2i, \quad z_2 = 1-2i, \quad z_3 = \sqrt{3}+i, \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right).$$

$$x^2 + 2x + 17, \qquad 9x^2 + 4 = 0.$$

Вариант № 4.

$$z_1 = 2-3i, \quad z_2 = 5+i, \quad z_3 = -1-i\sqrt{3}, \quad z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$$x^2 - 6x + 13, \qquad 3x^2 + 2 = 0.$$

Вариант № 5.

$$z_1 = 4+i, \quad z_2 = 1-3i, \quad z_3 = -1+i, \quad z_4 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$x^2 - 4x + 5, \qquad 6x^2 + 5 = 0.$$

Вариант № 6.

$$z_1 = 3-i, \quad z_2 = 2+2i, \quad z_3 = \sqrt{3}-i, \quad z_4 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

$$x^2 + 6x + 10, \qquad 2x^2 + 5 = 0.$$

Вариант № 7.

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 4 - 3i, \quad z_3 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right).$$

$$x^2 - 8x + 25, \qquad 3x^2 + 8 = 0.$$

Вариант № 8.

$$z_1 = 2 - 4i, \quad z_2 = 3 + 2i, \quad z_3 = 2i, \quad z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right).$$

$$x^2 + 6x + 25, \qquad 4x^2 + 7 = 0.$$

Вариант № 9.

$$z_1 = -3 + 4i, \quad z_2 = 2 - i, \quad z_3 = -\sqrt{3} + i, \quad z_4 = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$x^2 - 6x + 12, \qquad 7x^2 + 9 = 0.$$

Вариант № 10.

$$z_1 = 5 - i, \quad z_2 = 1 + 2i, \quad z_3 = 3 + i\sqrt{3}, \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right).$$

$$x^2 - 8x + 17, \qquad 5x^2 + 6 = 0.$$

Вариант № 11.

$$z_1 = -6 + i, \quad z_2 = 2 - 3i, \quad z_3 = 3 + 3i, \quad z_4 = 4\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right).$$

$$x^2 - 4x + 29, \qquad 6x^2 + 1 = 0.$$

Вариант № 12.

$$z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = 1 + 5i, \quad z_3 = -2 + 2i, \quad z_4 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right).$$

$$x^2 + 4x + 8, \qquad 8x^2 + 9 = 0.$$

Вариант № 13.

$$z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = 4 - i, \quad z_3 = -3i, \quad z_4 = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$x^2 - 10x + 29, \qquad 4x^2 + 1 = 0.$

Вариант № 14.

$$z_1 = 1 - 5i, \quad z_2 = 3 + i, \quad z_3 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_4 = \sqrt{7}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right).$$

$x^2 + 2x + 10, \qquad 5x^2 + 3 = 0.$

Вариант № 15.

$$z_1 = 4 + 3i, \quad z_2 = 3 - i, \quad z_3 = 2 - 2i, \quad z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$x^2 - 6x + 10, \qquad 6x^2 + 10 = 0.$

Вариант № 16.

$$z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 4 + i, \quad z_3 = 3 - i\sqrt{3}, \quad z_4 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

$x^2 + 2x + 2, \qquad 7x^2 + 2 = 0.$

Вариант № 17.

$$z_1 = -5 + 2i, \quad z_2 = 1 - 3i, \quad z_3 = -2 + 2i, \quad z_4 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right).$$

$x^2 + 2x + 4, \qquad 7x^2 + 3 = 0.$

Вариант № 18.

$$z_1 = 3 - 4i, \quad z_2 = 2 + i, \quad z_3 = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}, \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$x^2 - 2x + 17, \qquad 3x^2 + 8 = 0.$

Вариант № 19.

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 5 - 3i, \quad z_3 = -2 - 2\sqrt{3}i, \quad z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$x^2 + 6x + 13, \qquad 4x^2 + 5 = 0.$$

Вариант № 20.

$$z_1 = 2 - 5i, \quad z_2 = 3 + i, \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right).$$

$$x^2 + 4x + 5, \qquad 5x^2 + 7 = 0.$$

Вариант № 21.

$$z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 4 - 3i, \quad z_3 = -2 + 2i, \quad z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right).$$

$$x^2 + 8x + 25, \qquad 6x^2 + 4 = 0.$$

Вариант № 22.

$$z_1 = 3 - 4i, \quad z_2 = 1 + 2i, \quad z_3 = 3i, \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right).$$

$$x^2 - 6x + 25, \qquad 7x^2 + 11 = 0.$$

Вариант № 23.

$$z_1 = 4 + i, \quad z_2 = 2 - 3i, \quad z_3 = -1 - i, \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

$$x^2 + 6x + 12, \qquad 2x^2 + 3 = 0.$$

Вариант № 24.

$$z_1 = 1 - 3i, \quad z_2 = 3 + 5i, \quad z_3 = 2 - 2i, \quad z_4 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

$$x^2 + 8x + 17, \qquad 3x^2 + 4 = 0.$$

Вариант № 25.

$$z_1 = 2 + 6i, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = \sqrt{3} + i, \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

$$x^2 + 4x + 29, \qquad 4x^2 + 3 = 0.$$

Примеры решения задач

Вариант I.

Задание № 1.

Изобразите на комплексной плоскости точки, соответствующие числам $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_3 = 1 = i\sqrt{3}$, $z_4 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Задание № 2.

Найдите в алгебраической форме $\dfrac{z_1^2 + 5i}{z_2}$.

Задание № 3.

Переведите число z_3 в тригонометрическую форму и найдите $(z_3 \cdot z_4)^{10}$ (ответ дать в тригонометрической и показательной форме).

Задание № 4

Решите квадратные уравнения:

4.1 $6x^2 + 9 = 0$,

4.2 $x^2 + 10x + 9 = 0$.

Решения.

1. Комплексные числа изображают точками плоскости. При этом вещественная и мнимая часть числа рассматриваются как декартовые координаты точки, т. е. для изображения числа $z = x + iy$ на плоскости выбирают точку с координатами $(x; y)$.

Если же число задано в тригонометрической форме, то можно либо перейти к алгебраической форме, либо выбрать точку, длина радиус-вектора которой равна модулю комплексного числа, а угол между радиус вектором и положительным направлением оси Ox (вещественной оси) равен аргументу комплексного числа (см. рисунок 10).

Изображение точек z_1, z_2, z_3 и z_4 на комплексной плоскости представлено на рисунке 5.

2. Для выполнения операций в арифметической форме следует иметь ввиду, что $i^2 = -1$. Произведём вычисления по действиям.

$$z_1^2 = (3 - i)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3i + i^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i.$$

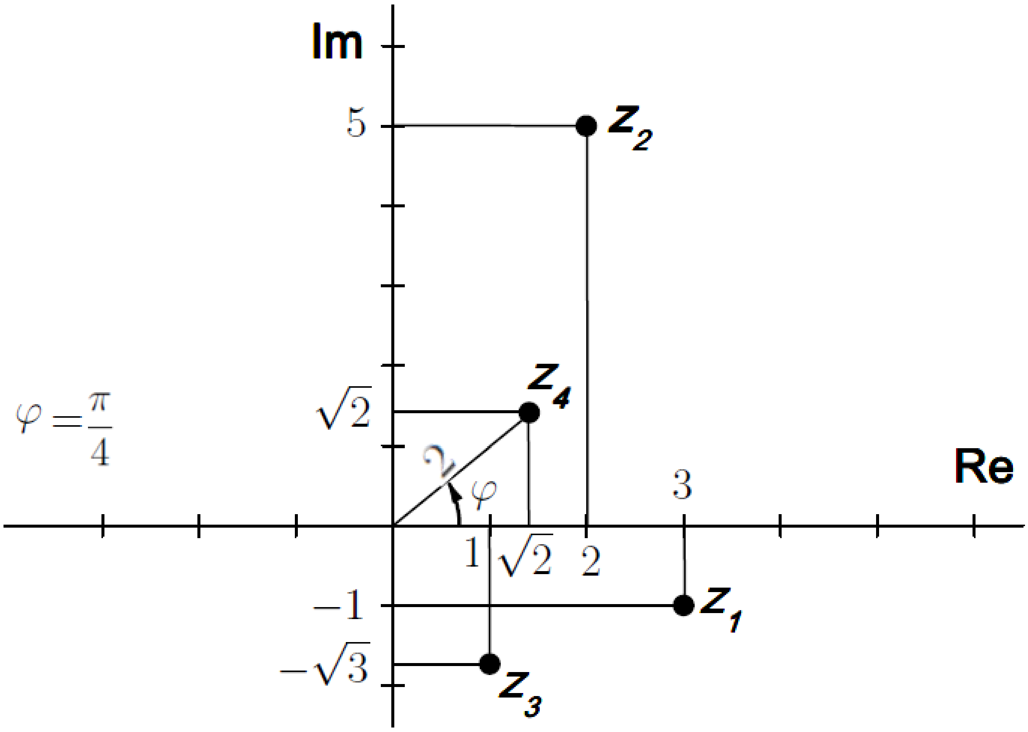

Рисунок 5 — Изображение чисел точками комплексной плоскости (задание 1)

$$z_1^2 + 5i = 8 - 6i + 5i = 8 - i.$$

Для выполнения деления домножим числитель и знаменатель на комплексно сопряжённое к знаменателю, учитывая, что $z\bar{z} = |z|^2$:

$$\frac{z_1^2 + 5i}{z_2} = \frac{8 - i}{2 + 5i} = \frac{(8 - i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} = \frac{16 - 2i - 40i + 5i^2}{4 + 25} =$$

$$= \frac{11 - 42i}{29} = \frac{11}{29} - \frac{42}{29}\,i.$$

3. Для того, чтобы перевести число z_3 в тригонометрическую форму, вычислим его модуль:

$$|z_3| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Число z_3 находится в IV-ой четверти, следовательно, главное значение аргумента находится по формуле:

$$\arg z_3 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\operatorname{arctg} 3 = -\frac{\pi}{3}\,.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \quad \text{где} \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Поэтому окончательно имеем

$$z_3 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме осуществляется по формуле

$$z_3 z_4 = |z_3||z_4|\left(\cos\left(\varphi_3 + \varphi_4\right) + i\sin\left(\varphi_3 + \varphi_4\right)\right).$$

Получаем

$$z_3 z_4 = 2{\cdot}2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Возведение комплексного числа в тригонометрической форме в натуральную степень n осуществляется по формуле Муавра:

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Имеем:

$$(z_3 z_4)^{10} = 4^{10}\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{12}\right)\right) =$$
$$= 2^{20}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Показательная форма комплексного числа имеет вид

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Поэтому $(z_3 z_4)^{10} = 2^{20} e^{-\frac{5\pi i}{6}}$.

Замечание. При выполнении задания 3 может возникнуть ситуация, что результат выражается не через главное значение аргумента ($-\pi < \arg z \leqslant$), а через какое-нибудь другое. В этом случае следует выделить главное значение аргумента, добавив или отняв слагаемое вида $2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Например, если

$$z_3 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \text{и} \quad z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

то

$$(z_3 \cdot z_4)^{10} = \left(2 \cdot 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{10} =$$

$$= \left(4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)\right)^{10} =$$

$$= 4^{10}\left(\cos\left(-\frac{70\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{70\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= 2^{20}\left(\cos\left(-\frac{35\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right)\right).$$

Добавляя к текущему значению аргумента, т. е.$-\frac{35}{6}$, число 6π, что, разумеется, не меняет ни косинуса, ни синуса, выражаем результат через главное значение аргумента:

$$(z_3 \cdot z_4)^{10} = 2^{20}\left(\cos\left(6\pi - \frac{35\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\pi - \frac{35\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2^{20}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2^{20}e^{\frac{\pi i}{6}}.$$

4. Учтём, что вычисление корня из отрицательного числа сводится к нахождению арифметического корня из его модуля и извлечению корня из -1, т. е. применению равенства $\sqrt{-1} = \pm i$.

$$4.1 \quad 6x^2 + 9 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = -\frac{3}{2}.$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{-1} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,i = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

4.2 Вычислим дискриминант: $D = 10^2 - 4 \cdot 29 = 100 - 116 = -16$. Тогда

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \frac{10 \pm 4i}{2} = -5 \pm 2i.$$

Примечание. Оба уравнения можно решить, приводя левую часть к разности квадратов:

$$6x^2 + 9 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + \frac{3}{2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 - \left(i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\left(x - i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + i\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \Longleftrightarrow x_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}} \Longleftrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$x^2 + 10x + 29 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 25 + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x+5)^2 + 2^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(x+5)^2 - (2i)^2 = 0 \Longleftrightarrow (x+5-2i)(x+5+2i) = 0 \Longleftrightarrow x_{1,2} = -5 \pm 2i.$$

Контрольная работа № 3

Содержание работы

Задания №№ 1, 2, 3

Вычислите пределы.

Задания №№ 4,5

Вычислите производные.

Задание № 6

Исследуйте функцию и постройте ее график.

Указание.

Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Груздков, А.А. Элементы теории пределов: методические указания / А. А. Груздков, М.Б. Купчиненко. — СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010.— 64 с.

2. Слободинская, Т. В. Пределы. Рекомендации к решению задач контрольной работы: методические указания / Т. В. Слободинская, А. А. Груздков, М.Б. Купчиненко. — СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2010.— 29 с.

3. Шаляпина, О.В. Предел и непрерывность функции: методические указания / О.В. Шаляпина, Т.А. Уланова, В. С. Капитонов.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2012.— 22 с.

4. Шаляпина, О.В. Производные и дифференциалы. Справочные материалы: методические указания / О.В. Шаляпина, Т.А. Уланова, В. С. Капитонов. — СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2012.— 18 с.

5. Баскакова, П. Е. Решение типовых вариантов контрольной работы по теме «Производная функций одной переменной»: методические указания / П.Е. Баскакова, Т.В. Винник, Н.Н. Гизлер, А.Д. Бабаев.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2011.— 16 с.

6. Слободинская, Т. В. Исследование функций и построение графиков: методические указания / Т.В. Слободинская, Н.Н. Гизлер, П.Е. Баскакова, М.В. Культина.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2001.— 20 с.

Условия задач

Вариант № 1.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+3x^3+8}{3x^4+2x^2+5}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+6x-16}{x^2-4}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x}{8x^2}$.

4. $y = \dfrac{(2^x-1)^6}{\log_2 2x}$. 5. $y = (2\sin 3x + 3\cos 3x)\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{4x+1}{2x-1}$.

6. $y = \dfrac{x^2}{3x+5}$.

Вариант № 2.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5+2x^2+7}{5x^4+3x^2+1}$. 2. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+7x^2+16x+12}{x^3+8x^2+21x+18}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{6x^2}$.

4. $y = \dfrac{\sin 3x}{2x^2+3}$. 5. $y = \left(3e^{2x} + \ln 2x\right)\cdot \arccos\dfrac{2x+1}{x+2}$.

6. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Вариант № 3.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{14x^3+8x^2+5x}{7x^3+2x+4}$. 2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 5x}{10x^2}$.

4. $y = \dfrac{(3^x-1)^5}{\log_3 3x}$. 5. $y = (4\cos 2x - 5\sin 2x)\cdot \operatorname{arcctg}\dfrac{3x+1}{3x-1}$.

6. $y = \dfrac{1}{x} - x.$

Вариант № 4.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^4+3x^3+1}{4x^5+2x^2+3}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4-1}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}^2 4x}{8x^2}$.

4. $y = \dfrac{\cos 5x}{4x^3+3}$. 5. $y = \left(3e^{4x} + \log_2 3x\right)\cdot \arcsin\dfrac{4x+1}{3x-1}$.

6. $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

Вариант № 5.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+11}{x^3+2x+4}$. 2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x^2}-1}{9x^2}$.

4. $y=\dfrac{(4^x-2)^3}{\log_4 4x}$. 5. $y=(2\cos 3x-3\sin 3x)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.

6. $y=\dfrac{x^2+5}{x-2}$.

Вариант № 6.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6+8x+5}{2x^6+3x^2+x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+12}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+3x)}{3x^2}$.

4. $y=\dfrac{4x^2+1}{\operatorname{arctg}2x}$. 5. $y=(5\sin 5x-4\cos 5x)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x+1}{x+2}$.

6. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Вариант № 7.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+2x^3+1}{9x^5+11x+2}$. 2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(3^{2x}-1\right)^2}{4x^2}$.

4. $y=\dfrac{\ln^6 x}{x^2+x}$. 5. $y=\left(4\cdot 3^{2x}+2^{3x}\right)\cdot\arccos\dfrac{x-2}{x+2}$.

6. $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$.

Вариант № 8.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6+x^2+1}{2x^5+2x-1}$. 2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{36x^2}$.

4. $y=\dfrac{e^{3x}-1}{\ln 3x}$. 5. $y=(5\operatorname{tg}5x-3\operatorname{ctg}5x)\cdot\arcsin\dfrac{x+3}{x-1}$.

6. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Вариант № 9.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^5+11x-1}{2x^6+x+2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{12}{x^3-8}\right)$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 4x}{3x^2}$.

4. $y = \dfrac{\sin 4x}{4x^2+x}$. 5. $y = \big(3e^{2x} - 22\ln 2x\big)\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{x+1}$.

6. $y = \dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$.

Вариант № 10.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^4+2x^2+11}{2x^4+x-1}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-4x}{x^4+3x^2-x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}^3 2x}{3x^3}$.

4. $y = \dfrac{4^{2x}-1}{\log_4 2x}$. 5. $y = (2\operatorname{ctg} 2x - 3\operatorname{tg} 3x)\cdot \arcsin\dfrac{x+1}{x+2}$.

6. $y = \dfrac{4-x^2}{2x-1}$.

Вариант № 11.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^5+3x^4+2}{5x^5+x-1}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2-3x}{2x^2-9x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+9x)}{81x^2}$.

4. $y = \dfrac{\log_3 3x}{3^{2x}-1}$. 5. $y = (3\cos 4x - 4\sin 4x)\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{2x-1}$.

6. $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Вариант № 12.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12x^4+2x^2+5}{6x^4+x-3}$. 2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x^2}-1}{10x^2}$.

4. $y = \dfrac{\cos 5x}{3x^2+x}$. 5. $y = \big(2\cdot 3^{4x} - \ln 3x\big)\cdot \arcsin\dfrac{x-3}{x+4}$.

6. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

Вариант № 13.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+2x^4+3}{3x^6+x^2+x}$. 2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(1+6x)}{3x^2}$.

4. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 4x}$. 5. $y=\left(3\cdot 4^{3x}-\log_4 3x\right)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{2x+2}$.

6. $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

Вариант № 14.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^7+2x+1}{2x^7+4x+3}$. 2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(x^3+2x^2-1\right)^2}{x^4+2x+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{3x}-1\right)^2}{6x^2}$.

4. $y=\dfrac{4^{3x}}{\cos 3x}$. 5. $y=(2\sin 5x-\ln 5x)\cdot\arccos\dfrac{3x-1}{3x+1}$.

6. $y=\dfrac{x}{4\left(x^2+1\right)}$.

Вариант № 15.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^7+3x^2+1}{5x^8+2x+3}$. 2. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{3x}-1}{\log_2(1+3x)}$.

4. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}11x}{x^2+3x}$. 5. $y=(4\cos 8x+8\sin 4x)\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{5x+1}{5x-1}$.

6. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Вариант № 16.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^{12}+2x^5+x}{6x^{12}+x^4+6}$. 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{8x^2}$.

4. $y=\dfrac{7^{3x}-1}{\log_7 3x}$. 5. $y=(8\operatorname{ctg}2x+3\operatorname{tg}2x)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{3x+2}{3x-2}$.

6. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

Вариант № 17.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^4+3x+2}{10x^3+3x^2+2}$. 2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$. 3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{\arcsin 3x^2}$.

4. $y=\dfrac{x^2+6x}{\sqrt{x+3}}$. 5. $y=\left(6^{3x}+2\sin 4x\right)\cdot\arccos\dfrac{3x-1}{3x+1}$.

6. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Вариант № 18.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^9+3x^3+x}{3x^9+9x^3+1}$. 2. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$. 3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arctg}^2 4x}{4x^2}$.

4. $y=\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{e^x+2}}$. 5. $y=(9\cos 2x+2\sin 2x)\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{5x+2}{5x-2}$.

6. $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$.

Вариант № 19.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^9+3x^3+x}{3x^{10}+3x+1}$. 2. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arcsin^2 10x}{5x^2}$.

4. $y=\dfrac{2^{5x}-1}{\log_2(1+5x)}$. 5. $y=(4\cos 3x+3\sin 4x)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{4x+3}{4x-3}$.

6. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$.

Вариант № 20.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^8+x^4+2}{x^6+x^3+1}$. 2. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$. 3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 6x}{3x^2}$.

4. $y=\dfrac{6^{2x}-1}{\log_6 2x}$. 5. $y=\left(4\cos\dfrac{x}{4}+2\sin\dfrac{x}{2}\right)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{5x+2}{5x-2}$.

6. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

Вариант № 21.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^8+x+11}{2x^8+x^2+2}$. 2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 7x}{7x^2}$.

4. $y=\dfrac{\log_9 8x}{9^{8x}-1}$. 5. $y=\left(3\sin\dfrac{x}{3}+6\cos\dfrac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{2x+5}{2x-5}$.

6. $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$.

Вариант № 22.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+1}{3x^3+2x^2+x}$. 2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 6x}{3x^2}$.

4. $y=\dfrac{10^{3x}-1}{\lg 3x}$. 5. $y=\left(5\sin\dfrac{x}{5}+2\cos\dfrac{x}{2}\right)\cdot\arcsin\dfrac{4x+3}{4x-3}$.

6. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$.

Вариант № 23.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$. 2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{4x^2}$.

4. $y=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x^2+x}}$. 5. $y=\left(3\cos\dfrac{x}{3}+2\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)\cdot\arcsin\dfrac{2x-3}{2x+3}$.

6. $y=\dfrac{-8x}{x^2+4}$.

Вариант № 24.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$. 2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 8x}{4x^2}$.

4. $y=\dfrac{3^{5x}-1}{\log_3 5x}$. 5. $y=\left(4\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}+3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}\right)\cdot\arccos\dfrac{3x-2}{3x+2}$.

6. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

Вариант № 25.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2\dfrac{x}{2}}{3x^2}$.

4. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$. 5. $y=\left(3\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}+2\cos\dfrac{x}{2}\right)\cdot\ln\left(1+\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)$.

6. $y=\dfrac{-x^2}{(x+2)^2}$.

Примеры решения задач

Вариант I.

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6+5x^3+7}{2x^6+x^2-x+12}$. 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+6x)}{3x^2}$.

Найдите производные:

4. $y=\dfrac{9^{8x}-1}{\log_9(1+8x)}$. 5. $y=(5\cos 10x+10\sin 5x)\cdot\arcsin\dfrac{4x+1}{4x-1}$.

6. Исследуйте функцию $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$ и постройте её график.

Решения.

1. Числитель и знаменатель дроби при $x\to\infty$ стремятся к бесконечности, поэтому необходимо раскрыть неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Вынесем за скобки старшую степень числителя и знаменателя и сократим дробь. Далее учтем, что величина обратная к бесконечно большой является бесконечно малой.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6+5x^3+7}{2x^6+x^2-x+12}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6\left(4+\dfrac{5x^3}{x^6}+\dfrac{7}{x^6}\right)}{x^6\left(2+\dfrac{x^2}{x^6}-\dfrac{x}{x^6}+\dfrac{12}{x^6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\overbrace{\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^6}}^{\nearrow 0}}{2+\underbrace{\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{12}{x^6}}_{\searrow 0}}=\frac{4}{2}=2.$$

2. Числитель и знаменатель дроби при $x \to 3$ стремятся к нулю, поэтому необходимо раскрыть неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Сократим дробь, поделив числитель и знаменательна критический множитель $x-3$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 - 4x^2 - 3x + 18 & x-3 \\ \cline{2-2}
x^3 - 3x^2 \phantom{{}-3x+18} & x^2 - x - 6 \\ \cline{1-1}
-x^2 - 3x \phantom{{}+18} & \\
-x^2 + 3x \phantom{{}+18} & \\ \cline{1-1}
-6x + 18 & \\
-6x + 18 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 - 5x^2 + 3x + 9 & x-3 \\ \cline{2-2}
x^3 - 3x^2 \phantom{{}+3x+9} & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{1-1}
-2x^2 + 3x \phantom{{}+9} & \\
-2x^2 + 6x \phantom{{}+9} & \\ \cline{1-1}
-3x + 9 & \\
-3x + 9 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$L = \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3} \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Поскольку после сокращения дроби неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ сохранилась, снова сократим дробь на критический множитель $x-3$, предварительно разложив числитель и знаменатель на множители:

$$L = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}\,.$$

3. Выражения, стоящие в числителе и знаменателе дроби, при $x = 0$ обращаются в ноль. Для раскрытия неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ воспользуемся заменой бесконечно малых на эквивалентные:

$$\ln(1+6x) \sim 6x \qquad \text{при } x \to 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+6x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(6x)^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{36x^2}{3x^2} = 12.$$

4.

$$y' = \left(\frac{9^{8x} - 1}{\log_9(1+8x)}\right)' = \frac{\left(9^{8x}-1\right)' \log_9(1+8x) - \left(9^{8x}-1\right)\left(\log_9(1+8x)\right)'}{\log_9^2(1+8x)} =$$

$$= \frac{9^{8x} \cdot \ln 9 \cdot (8x)' \cdot \log_9(1+8x) - \left(9^{8x}-1\right) \cdot \dfrac{1}{(1+8x)\ln 9} \cdot (1+8x)'}{\log_9^2(1+8x)} =$$

$$= \frac{8\left(9^{8x} \cdot \ln 9 \cdot \log_9(1+8x) - \dfrac{9^{8x}-1}{(1+8x)\ln 9}\right)}{\log_9^2(1+8x)} =$$

$$= 8 \cdot \frac{9^{8x} \ln^2 9 \cdot (1+8x) \log_9(1+8x) - 9^{8x} + 1}{(1+8x) \ln 9 \cdot \log_9^2(1+8x)}.$$

5.

$$y' = \left((5\cos 10x + 10\sin 5x)\cdot \arcsin\frac{4x+1}{4x-1}\right)' =$$

$$= (5\cos 10x + 10\sin 5x)' \cdot \arcsin\frac{4x+1}{4x-1} +$$

$$+ (5\cos 10x + 10\sin 5x) \cdot \left(\arcsin\frac{4x+1}{4x-1}\right)' =$$

$$= \big(5\,(\cos 10x)' + 10\,(\sin 5x)'\big) \cdot \arcsin\frac{4x+1}{4x-1} +$$

$$+ (5\cos 10x + 10\sin 5x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{4x+1}{4x-1}\right)^2}} \cdot \left(\frac{4x+1}{4x-1}\right)' =$$

$$= (-5\sin 10x \cdot (10x)' + 10\cos 5x \cdot (5x)') \cdot \arcsin\frac{4x+1}{4x-1} +$$

$$+ \frac{5\cos 10x + 10\sin 5x}{\sqrt{1 - \dfrac{(4x+1)^2}{(4x-1)^2}}} \cdot \frac{(4x+1)'(4x-1) - (4x+1)(4x-1)'}{(4x-1)^2} =$$

$$= 50\,(-\sin 10x + \cos 5x) \cdot \arcsin\frac{4x+1}{4x-1} +$$

$$+ \frac{(5\cos 10x + 10\sin 5x)\,|4x-1|}{\sqrt{(4x-1)^2 - (4x+1)^2}} \cdot \frac{4(4x-1) - (4x+1)4}{(4x-1)^2} =$$

$$= 50\,(-\sin 10x + \cos 5x) \cdot \arcsin\frac{4x+1}{4x-1} +$$

$$+ \frac{5\,(\cos 10x + 2\sin 5x)\,|4x-1|}{\sqrt{(4x-1-4x-1)(4x-1+4x+1)}} \cdot \frac{4(4x-1) - (4x+1)4}{|4x-1|^2} =$$

$$= 50\,(-\sin 10x + \cos 5x) \cdot \arcsin\frac{4x+1}{4x-1} + \frac{5\,(\cos 10x + 2\sin 5x)}{4\sqrt{-x}} \cdot \frac{-8}{|4x-1|} =$$

$$= 50\,(-\sin 10x + \cos 5x) \cdot \arcsin\frac{4x+1}{4x-1} + \frac{10\,(\cos 10x + 2\sin 5x)}{(4x-1)\sqrt{-x}}\ .$$

Примечание. При вычислении было учтено, что переменная x должна принимать только отрицательные значения (анализ области определения). Поэтому $4x-1<0$ и, следовательно, $|4x-1| = -(4x-1) = 1-4x$.

6. $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$

1) Область определения функции: $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Функция не является периодической. Функция не может быть четной или нечетной, поскольку ее область определения не симметрична относительно нуля. Функция $y(x)$ — общего вида.

3) Функция непрерывна во всех точках, кроме $x = 1$.

4) Вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^4}{x^3-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0} \frac{x^4}{x^3-1} = +\infty.$$

Т. к. односторонние пределы функции в точке $x = 1$ бесконечны, график функции имеет одну вертикальную асимптоту $x = 1$.

Исследуем поведение функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x^3-1} \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-\dfrac{1}{x^3}} = \pm\infty.$$

Функция имеет бесконечный предел на бесконечности, следовательно горизонтальных асимптот нет. Проверим наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-1} \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\dfrac{1}{x^3}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3-1} - x\right) \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3-1} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = kx + b$, т. е. $y = x$, является наклонной асимптотой графика функции одновременно для правой $(x \to +\infty)$ и для левой $(x \to -\infty)$ ветвей графика функции.

5) Исследуем функцию на возрастание, убывание, экстремум.

$$y' = \left(\frac{x^4}{x^3-1}\right)' = \frac{4x^3\left(x^3-1\right) - x^4 \cdot 3x^2}{\left(x^3-1\right)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{\left(x^3-1\right)^2} = \frac{x^3\left(x^3-4\right)}{\left(x^3-1\right)^2}.$$

Производная существует и конечна во всех точках области определения функции, поэтому «подозрительные» на экстремум точки находим из условия $y' = 0$. Получаем две точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = \sqrt[3]{4}$.

Для определения промежутков монотонности и точек экстремума графика функции построим таблицу (см. таблицу 1), выделяя точки, в которых производная равна нулю или не существует (поведение функции может измениться как в точках экстремума, так и в точках разрыва).

Таким образом, функция возрастает при $x \in (-\infty; 0) \cup (\sqrt[3]{4}; +\infty)$ и убывает при $x \in (0; 1) \cup (1; \sqrt[3]{4})$. Вычислим значения функции в точках

Таблица 1 — Исследование функции на монотонность

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$\left(1;\sqrt[3]{4}\right)$	$\sqrt[3]{4}$	$\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$

экстремума:

$$y(0)=0; \quad y\left(\sqrt[3]{4}\right)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}.$$

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^6-4x^3}{\left(x^3-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(6x^5-12x^2\right)\left(x^3-1\right)^2-\left(x^6-4x^3\right)2\left(x^3-1\right)3x^2}{\left(x^3-1\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(x^3-1\right)\left(6x^2\left(x^3-2\right)\left(x^3-1\right)-6x^5\left(x^3-4\right)\right)}{\left(x^3-1\right)^4}=$$

$$=\frac{6x^2\left(\left(x^3-2\right)\left(x^3-1\right)-x^3\left(x^3-4\right)\right)}{\left(x^3-1\right)^3}=\frac{6x^2\left(x^6-3x^3+2-x^6+4x^3\right)}{\left(x^3-1\right)^3}=$$

$$=\frac{6x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3}.$$

Вторая производная также существует и конечна во всех точках области определения функции, поэтому «подозрительные» на перегиб точки находятся из условия $y''=0$. Решая это уравнение

$$\frac{6x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3}=0 \Longrightarrow 6x^2\left(x^3+2\right)=0,$$

находим две точки: $x_3=0$, $x_4=-\sqrt[3]{2}$. Однако, $x=0$ — точка гладкого максимума, поэтому перегиб может быть только в точке $x=-\sqrt[3]{2}$. Для определения направления выпуклости графика функции строим таблицу (см. таблицу 2). Заметим, что в таблицу нужно включать и точку разрыва,

Таблица 2 — Исследование направления выпуклости графика

x	$(-\infty;-\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2};0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$-$	$\nexists$	$+$
y	$\cup$	перегиб	$\cap$	0	$\cap$	$\nexists$	$\cup$

потому что изменение направления выпуклости может происходить, как в точках перегиба, так и в точках разрыва.

Итак, график функции будет выпуклым при $x \in (-\sqrt[3]{2}; 1)$ и вогнутым при $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (1; +\infty)$. Точка $-\sqrt[3]{2}$ является точкой перегиба графика функции, причем $y'\left(-\sqrt[3]{2}\right) = \dfrac{4}{3}$, т. е. перегиб под углом $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, значение функции в точке перегиба $y\left(-\sqrt[3]{2}\right) = -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2}$.

8) Используя результаты исследования, строим график функции (см. рисунок 6).

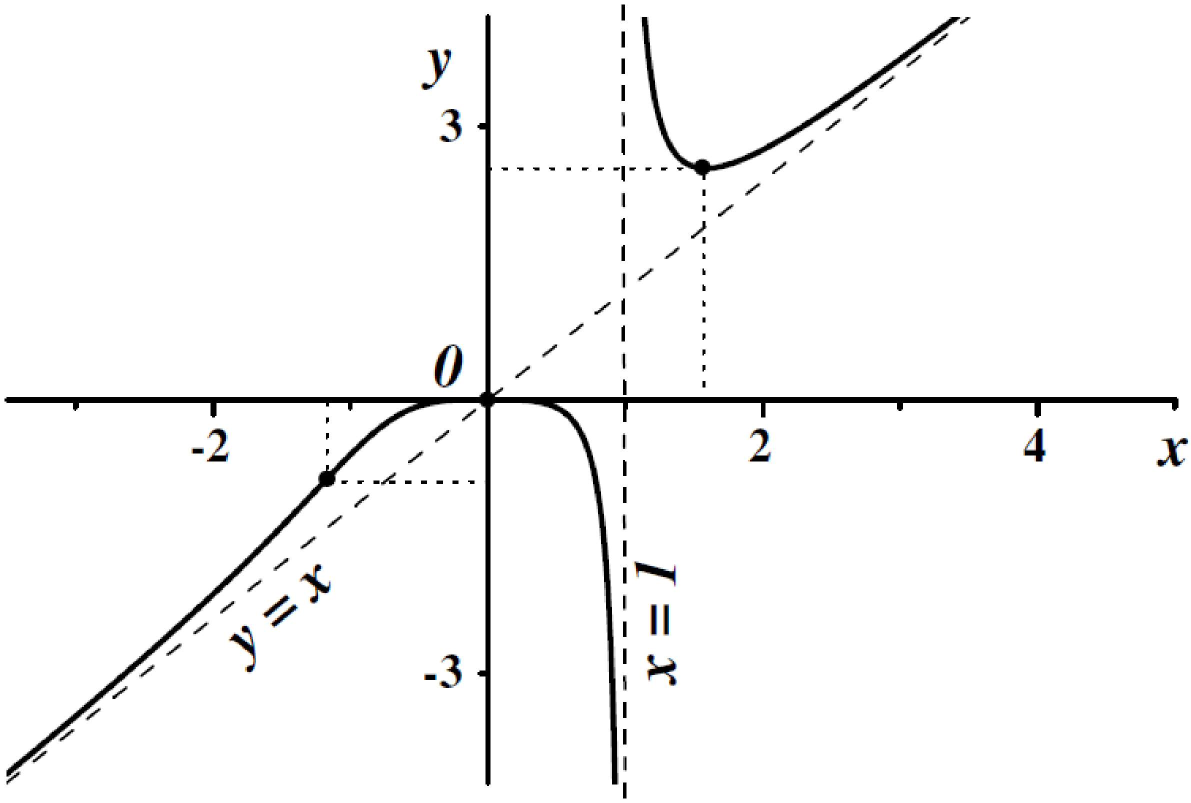

Рисунок 6 — График функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

Вариант II.

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 6x}{3x^2}$.

Найдите производные:

4. $y = \dfrac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^{3x} + 2^{-3x}}$. 5. $y = \left(4\sin\dfrac{x}{4} + 2\cos\dfrac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{4x - 7}{4x + 7}$.

6. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$ и постройте её график.

Решения.

1. Числитель и знаменатель дроби при $x \to \infty$ стремятся к бесконечности, поэтому необходимо раскрыть неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Вынесем в числителе и знаменателе старшие степени за скобку и сократим дробь.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+4}{x^3-2x^2-4x+8} \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 \overbrace{-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}}^{\nearrow 0}}{1 \underbrace{-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}}_{\searrow 0}} = 0 \cdot \frac{1+0+0}{1+0+0+0} = 0.$$

2. В точке $x = 2$ числитель и знаменатель обращаются в ноль. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, сократим дробь на критический множитель $x-2$, предварительно разложив числитель и знаменатель на множители.

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-2x^2-4x+8} \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)^2}{x^2(x-2)-4(x-2)} =$$
$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)\left(x^2-4\right)} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2\,(x+2)} = \lim_{x\to2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}\,.$$

3. Для раскрытия неопределенности заменим бесконечно малую в числителе на эквивалентную:

$$1-\cos 6x = 2\sin^2 3x \sim 2\cdot(3x)^2 = 18x^2 \quad \text{при } x \to 0.$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos 6x}{3x^2} = \lim_{x\to0} \frac{18x^2}{3x^2} = 6.$$

4.

$$y' = \left(\frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^{3x} + 2^{-3x}}\right)' =$$
$$= \frac{\left(2^{3x} - 2^{-3x}\right)'\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right) - \left(2^{3x} - 2^{-3x}\right)\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right)'}{\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right)^2} =$$
$$= \frac{\left(2^{3x}\ln 2 \cdot (3x)' - 2^{-3x}\ln 2 \cdot (-3x)'\right)\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right) -}{\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right)^2}$$
$$\frac{-\left(2^{3x} - 2^{-3x}\right)\left(2^{3x}\ln 2 \cdot (3x)' + 2^{-3x}\ln 2 \cdot (-3x)'\right)}{\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right)^2} =$$
$$= \frac{3\ln 2\left(\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right)\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right) - \left(2^{3x} - 2^{-3x}\right)\left(2^{3x} - 2^{-3x}\right)\right)}{\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right)^2} =$$
$$= \frac{3\ln 2\left(\left(2^{6x} + 2 + 2^{-6x}\right) - \left(2^{6x} - 2 + 2^{-6x}\right)\right)}{\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right)^2} = \frac{12\ln 2}{\left(2^{3x} + 2^{-3x}\right)^2}\,.$$

5.

$$y' = \left(\left(4\sin\frac{x}{4} + 2\cos\frac{x}{2}\right)\cdot \operatorname{arctg}\frac{4x-7}{4x+7}\right)' =$$
$$= \left(4\sin\frac{x}{4} + 2\cos\frac{x}{2}\right)'\operatorname{arctg}\frac{4x-7}{4x+7} + \left(4\sin\frac{x}{4} + 2\cos\frac{x}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{4x-7}{4x+7}\right)'.$$

Выполним дифференцирование по действиям:

$a)$ $\quad \left(4\sin\frac{x}{4} + 2\cos\frac{x}{2}\right)' = 4\cos\frac{x}{4}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)' - 2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' = \cos\frac{x}{4} - \sin\frac{x}{2}.$

$b)$ $\quad \left(\operatorname{arctg}\frac{4x-7}{4x+7}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{4x-7}{4x+7}\right)^2}\cdot\left(\frac{4x-7}{4x+7}\right)' =$

$$= \frac{1}{1 + \frac{(4x-7)^2}{(4x+7)^2}}\cdot\frac{(4x-7)'(4x+7) - (4x-7)(4x+7)'}{(4x+7)^2} =$$
$$= \frac{4(4x+7) - (4x-7)4}{(4x+7)^2 + (4x-7)^2} = \frac{4\cdot(4x+7-4x+7)}{16x^2 + 56x + 49 + 16x^2 - 56x + 49} =$$
$$= \frac{28}{16x^2 + 49}.$$

Подставляя вычисленные производные, получаем окончательный результат:

$$y' = \left(\cos\frac{x}{4} - \sin\frac{x}{2}\right) \operatorname{arctg}\frac{4x-7}{4x+7} + \frac{56\left(2\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{2}\right)}{16x^2+49}.$$

6. $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

1) Область определения функции: $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Заметим, что $y = \left(\dfrac{x}{x-3}\right)^2$, поэтому $y \geqslant 0$ для всех x из области определения.

2) Функция не является периодической. Область определения несимметрична относительно нуля, следовательно, функция не может быть четной или нечетной и является функцией общего вида.

3) Функция непрерывна во всех точках области определения и терпит разрыв при $x = 3$.

4) Выясним, будет ли прямая $x = 3$ являться вертикальной асимптотой графика функции. Для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{x^2}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3+0} \frac{x^2}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Таким образом, график функции имеет одну вертикальную асимптоту $x = 3$.

Исследуем поведение функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-3)^2} \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^2} = 1.$$

Функция имеет конечный предел при $x \to \pm\infty$, следовательно прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой и для правой $(x \to +\infty)$ и для левой $(x \to -\infty)$ ветвей графика.

5) Исследуем функцию на монотонность и экстремумы.

$$y' = \left(\left(\frac{x}{x-3}\right)^2\right)' = 2\cdot\frac{x}{x-3}\cdot\frac{x'(x-3) - x(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-3-x)}{(x-3)^3} =$$

$$= -\frac{6x}{(x-3)^3}.$$

Производная существует и конечна во всех точках области определения функции, поэтому функция может иметь экстремум только в точках, где $y' = 0$, т. е. $x = 0$.

Для определения промежутков монотонности и точек экстремума графика функции построим таблицу (см. таблицу 3), выделяя точки, в которых производная равна нулю или не существует (поведение функции может измениться как в точках экстремума, так и в точках разрыва).

Таблица 3 — Исследование функции на монотонность

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$

Из таблицы 2 видно, что функция возрастает при $x \in (0; 3)$ и убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. Вычислим значения функции в точке минимума: $y(0) = 0$.

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, а также точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{-6x}{(x-3)^3}\right)' = -6\left(x \cdot (x-3)^{-3}\right)' = -6\left((x-3)^{-3} - 3x(x-3)^{-4}\right) =$$

$$= -6(x-3)^{-4}(x - 3 - 3x) = \frac{6(2x+3)}{(x-3)^4}\,.$$

Вторая производная также существует и конечна во всех точках области определения функции, поэтому «подозрительные» на перегиб точки находятся из условия $y'' = 0$. Решая уравнение $2x + 3 = 0$, находим $x = -1,5$.

Для определения направления выпуклости графика функции строим таблицу (см. таблицу 4). Заметим, что в таблицу нужно включать и точку разрыва, потому что изменение направления выпуклости может происходить, как в точках перегиба, так и в точках разрыва.

Таблица 4 — Исследование функции на монотонность

x	$(-\infty; 1,5)$	$-1,5$	$(1,5; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
y	$\cap$	перегиб	$\cup$	$\nexists$	$\cup$

Итак, график функции будет выпуклым при $x \in (-\infty; -1,5)$ и вогнутым при $x \in (-1,5; 3) \cup (3; +\infty)$. Точка $-1,5$ является точкой перегиба графика функции, причем $y'(-1,5) = -\dfrac{8}{81}$, т. е. перегиб под углом $-\operatorname{arctg}\frac{8}{81}$, значение функции в точке перегиба $y(-1,5) = \dfrac{1}{9}$.

7) Используя результаты исследования, строим график функции (см. рисунок 7). Положение правой ветви графика определяется только вертикальной и горизонтальной асимптотами, что недостаточно. Поэтому найдем дополнительных точки на графике, посчитав значения функции в некоторых точках:

$$y(6) = 4, \quad y(9) = \frac{9}{4}.$$

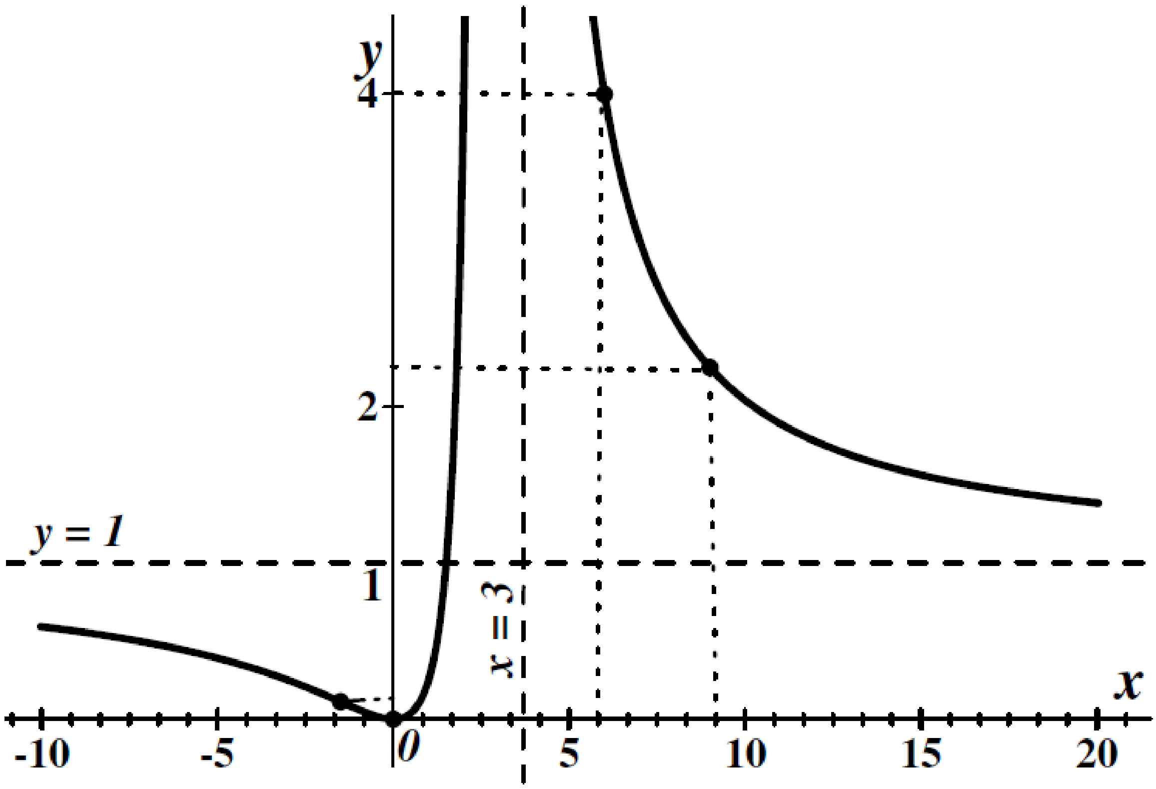

Рисунок 7 — График функции $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

Контрольная работа № 4

Содержание работы

Задания №№ 1, 2, 3

Вычислите определенные интегралы.

Задание № 4

Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

Задание № 5

Вычислите длину дуги кривой.

Указание.

Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:

1. Груздков А.А. Техника вычисления определенных интегралов: методические указания. — СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2012.— 64 с.
2. Слободинская, Т. В. Индивидуальные задания по теме «Приложения определенного интеграла»: методические указания / Т.В. Слободинская, В.В. Березникова, П.Е. Баскакова, Н.М. Климовицкая, А.Н. Паульсен.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2006.— 52 с.

Условия задач

Вариант № 1.

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 3^{2-3x}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos 2x\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_1^6 \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}.$

4. $y=\dfrac{x^2}{2},\ y=\dfrac{1}{1+x^2}\,.$ 5. $\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\cdot\sin t+2t\cos t, \\ y=\left(2-t^2\right)\cdot\cos t+2t\sin t. \end{cases}$

Вариант № 2.

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^4+1}.$ 2. $\displaystyle\int\limits_0^1 (x+1)\,e^{2x}\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{dx}{2+\sqrt{x-1}}.$

4. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y \geqslant 1.$ 5. $y = \ln\left(x^2 - 1\right),\ x \in [2;3].$

Вариант № 3.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int\limits_1^{e} x\ln x\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}.$

4. $y^2 = x^3; x = 2.$ 5. $\begin{cases} x = 3\left(\cos t + t\sin t\right), \\ y = 3\left(\sin t - t\cos t\right), \end{cases}$ $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Вариант № 4.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-5x)\sin x\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_3^{8} \frac{dx}{1-\sqrt{x+1}}.$

4. $\begin{cases} x = 2\left(t - \sin t\right), \\ y = 2\left(1 - \cos t\right), \end{cases}$ $y \geqslant 3.$ 5. $y = \ln\cos x,\ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right].$

Вариант № 5.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int\limits_0^{1} (3x-1)e^{3x}\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_0^{5} \frac{dx}{2+\sqrt{x+4}}.$

4. $y = \dfrac{x^2}{4};\quad y = \dfrac{8}{x^2+4}.$ 5. $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - t, \\ y = t^2 + 2, \end{cases}$ $t \in [0;3]$

Вариант № 6.

1. $\displaystyle\int\limits_1^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} (x+2)\cos x\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_3^{6} \frac{dx}{2+\sqrt{x-2}}.$

4. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right].$ 5. $y = \dfrac{\ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4},\ x \in [1;2].$

Вариант № 7.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}-1}.$

4. $y = e^x;\ x+y=1;\ x=2.$ 5. $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t, \\ y = 6\sin t - 8\cos t, \end{cases}$ $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$

Вариант № 8.

1. $\displaystyle\int\limits_1^{\ln 2} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}\,.$ 2. $\displaystyle\int\limits_1^{\frac{\pi}{8}} (x-1)\sin 4x\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

4. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $x \leqslant 1.$ 5. $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos\sqrt{x},\ x \in \left[\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{4}\right].$

Вариант № 9.

1. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2+\operatorname{ctg} x)^2}{\sin^2 x}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}.$

4. $y = 2^x;\ y = 2^{-x};\ y = 2.$ 5. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $t \in [0; \pi]\,.$

Вариант № 10.

1. $\displaystyle\int\limits_1^{e^2} \frac{(2+\ln x)^2}{x}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int\limits_1^e (x+1)\ln x\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\,dx.$

4. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y \geqslant 2.$ 5. $y = \ln\sin x,\ x \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right].$

Вариант № 11.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\,dx.$ 2. $\displaystyle\int\limits_{-3}^0 (x+3)\sin x\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x}}.$

4. $y=\dfrac{1}{x}$; $y=x$; $y=\dfrac{x}{9}$ (в I четверти). 5. $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Вариант № 12.

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 e^{x^2}x\,dx$. 2. $\displaystyle\int\limits_{-4}^0 (x+4)\cos 2x\,dx$. 3. $\displaystyle\int\limits_8^{27} \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$.

4. $\begin{cases} x=5\,(t-\sin t)\,, \\ y=5\,(1-\cos t)\,, \end{cases}$ $y\geqslant 5$. 5. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $x\in\left[-\dfrac{5}{9};0\right]$.

Вариант № 13.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$. 2. $\displaystyle\int\limits_0^1 (1-3x)e^{3x}\,dx$. 3. $\displaystyle\int\limits_1^9 \frac{dx}{3+\sqrt[3]{x-1}}$.

4. $y=x^2$; $y=-(x-3)(x-5)$; $y=0$; $y=1$. 5. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}$ $t\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Вариант № 14.

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{1+x^4}$. 2. $\displaystyle\int\limits_1^e \ln x\,dx$. 3. $\displaystyle\int\limits_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

4. $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=5\sin t, \end{cases}$ $x\geqslant 2\sqrt{2}$. 5. $y=-\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}$, $x\in\left[-\dfrac{1}{4};1\right]$.

Вариант № 15.

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$. 2. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} (2-3x)\sin 3x\,dx$. 3. $\displaystyle\int\limits_6^{25} \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x+2}}$.

4. $y=\dfrac{2}{x}$; $y=2x$; $y=\dfrac{x}{2}$ (в I четверти). 5. $\begin{cases} x=e^t\,(\cos t+\sin t)\,, \\ y=e^t\,(\cos t-\sin t)\,, \end{cases}$ $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Вариант № 16.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 2. $\displaystyle\int_0^1 (3x+1)e^{3x}\,dx$. 3. $\displaystyle\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}}\,dx$.

4. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y \geqslant 2\sqrt{3}$. 5. $y = \dfrac{\ln 3x}{2} - \dfrac{x^2}{4},\ x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.

Вариант № 17.

1. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$. 2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos 2x\,dx$. 3. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{4+\sqrt{x+1}}$.

4. $y = 2+x^3;\ y = |x|;\ x = 1$. 5. $\begin{cases} x = 2\left(\cos t + t\sin t\right), \\ y = 2\left(\sin t - t\cos t\right), \end{cases}$ $t \in [0; \pi]$.

Вариант № 18.

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$. 2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x+1)\sin 4x\,dx$. 3. $\displaystyle\int_7^{26} \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x+1}}$.

4. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases}$ $x \geqslant 2\sqrt{3}$. 5. $y = e^{2x} - 1,\ x \in \left[\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}\ln 2\right]$.

Вариант № 19.

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2\,dx$. 2. $\displaystyle\int_0^1 (4x+3)e^{4x}\,dx$. 3. $\displaystyle\int_{26}^{63} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-2}$.

4. $y = x^3;\ y = -x^3;\ y = 2-x^2$. 5. $\begin{cases} x = 5\left(2\cos t - \cos 2t\right), \\ y = 5\left(2\sin t - \sin 2t\right), \end{cases}$ $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Вариант № 20.

1. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. 2. $\displaystyle\int_0^2 (x-2)e^{\frac{x}{2}}\,dx$. 3. $\displaystyle\int_4^{23} \frac{dx}{3+\sqrt[3]{x+4}}$.

4. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases}$ $\quad x \geqslant 2\sqrt{2}.$ $\quad$ 5. $y = \ln(3\sin x)\,,\; x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}\right].$

Вариант № 21.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{4 + \sin^2 x}.$ $\quad$ 2. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} (x+2)\sin\frac{x}{2}\, dx.$ $\quad$ 3. $\displaystyle\int\limits_4^5 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x-4}}.$

4. $y = x^3;\; y = 2x^3;\; x = 1.$ $\quad$ 5. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $\quad t \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right].$

Вариант № 22.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{1 + \cos^2 x}.$ $\quad$ 2. $\displaystyle\int\limits_0^3 (x-3)\sin\frac{x}{3}\, dx.$ $\quad$ 3. $\displaystyle\int\limits_{10}^{29} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2} - 1}.$

4. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases}$ $\quad x \leqslant 3\sqrt{3}.$ $\quad$ 5. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln\left(x^3\right)}{6},\; x \in [1; 3]\,.$

Вариант № 23.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$ $\quad$ 2. $\displaystyle\int\limits_0^2 (2x+3)e^{\frac{x}{2}}\, dx.$ $\quad$ 3. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x} + 1}.$

4. $y = \sqrt{x};\; y = 2\sqrt{x};\; y = x.$ $\quad$ 5. $\begin{cases} x = 6\sin t + 5\cos t, \\ y = 5\sin t - 6\cos t, \end{cases}$ $\quad t \in [0; \pi]\,.$

Вариант № 24.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2\, dx.$ $\quad$ 2. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} (x+2)\ln(x+2)\, dx.$ $\quad$ 3. $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{x\, dx}{\sqrt{4x+5}}.$

4. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $\quad y \geqslant 3\sqrt{3}.$ $\quad$ 5. $y = -\ln\cos x,\; x \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right].$

Вариант № 25.

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$. 2. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} (3x-1)\cos\frac{x}{3}\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_1^{5} \frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$

4. $y=\sqrt{x};\ y=-2x^3;\ x=1.$ 5. $\begin{cases} x=3\,(2\cos t-\cos 2t)\,, \\ y=3\,(2\sin t-\sin 2t)\,, \end{cases}\quad t\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right].$

Примеры решения задач

Вариант I

Вычислите интегралы:

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\sin x^3\,dx$. 2. $\displaystyle\int\limits_0^{1} (4x+3)e^{4x}\,dx.$ 3. $\displaystyle\int\limits_6^{30} \frac{dx}{3+\sqrt{x-5}}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$4y=8x-x^2;\ 4y=x+6.$$

5. Вычислите длину дуги кривой

$$\Gamma:\quad \begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t, \\ y=2\sin t-\sin 2t, \end{cases}\quad t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right].$$

Решения

1. Интеграл может быть сведен к табличному подведением под знак дифференциала.

$$\int\limits_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\sin x^3\,dx=\left[x^2dx=\frac{1}{3}\,\mathrm{d}\left(x^3\right)\right]=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\sqrt[3]{\pi}}\sin x^3\,\mathrm{d}\left(x^3\right)=$$

$$=\left[\int\sin t\,dt=-\cos t+C\right]=-\frac{1}{3}\,\cos x^3\Big|_0^{\sqrt[3]{\pi}}=-\frac{1}{3}\,(\cos\pi-\cos 0)=$$

$$=-\frac{1}{3}(-1-1)=\frac{2}{3}\,.$$

2. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

$$\int\limits_0^1 (4x+3)e^{4x}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = 4x+3, & du = (4x+3)'dx = 4dx, \\ dv = e^{4x}dx, & v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}\int e^{4x}d(4x) = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{(4x+3)e^{4x}}{4}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 4\cdot\frac{1}{4}e^{4x}\,dx = \frac{7e^4-3}{4} - \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(7e^4 - 3 - e^4 + 1\right) = \frac{3e^4-1}{2}\,.$$

3. Вычислим интеграл с помощью замены переменной:

$$t = 3+\sqrt{x-5},\ x = (t-3)^2+5,\ dx = \left((t-3)^2+5\right)'dt = 2(t-3)dt.$$

$$x = 6 \longmapsto t = 3+\sqrt{6-5} = 4, \qquad x = 30 \longmapsto t = 3+\sqrt{30-5} = 8.$$

$$\int\limits_6^{30} \frac{dx}{3+\sqrt{x-5}} = \int\limits_4^8 \frac{2(t-3)\,dt}{t} = 2\int\limits_4^8 \left(1-\frac{3}{t}\right)\,dt =$$

$$= 2\left(t - 3\ln|t|\right)\Big|_4^8 = 2\left(8-3\ln 8 - 4 + 3\ln 4\right) = 2\left(4 - 3\ln\frac{8}{4}\right) = 8 - \ln 64.$$

4. Фигура ограничена параболой $4y = 8x - x^2$ и прямой $4y = x+6$ (см. рисунок 8). Найдем абсциссы точек пересечения этих линий, они, очевидно, будут корнями квадратного уравнения:

$$8x - x^2 = x+6 \Longleftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. Тогда

$$S(D) = \int\limits_1^6 \left(\frac{8x-x^2}{4} - \frac{x+6}{4}\right)\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_1^6 \left(-x^2+7x-6\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x\right)\Big|_1^6 = \frac{1}{4}\left(-72 + \frac{1}{3} + 126 - \frac{7}{2} - 36 + 6\right) = \frac{125}{24} = 5\frac{5}{24}.$$

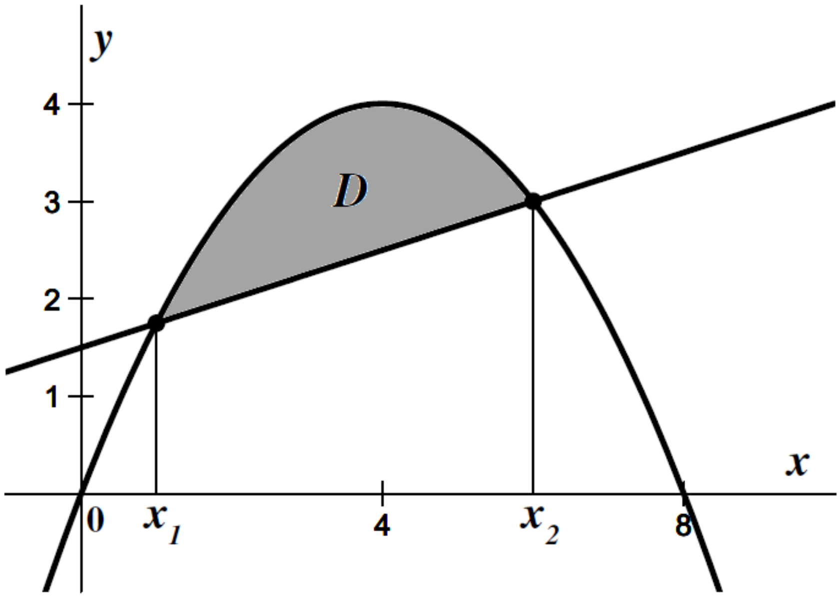

Рисунок 8 — К задаче 4.

5. Для вычисления длины дуги воспользуемся формулой

$$L(\Gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

Вычислим производные:

$$x'(t) = (2\cos t - \cos 2t)' = -2\sin t + 2\sin 2t = 2\left(\sin 2t - \sin t\right);$$

$$y'(t) = (2\sin t - \sin 2t)' = 2\cos t - 2\cos 2t = 2\left(\cos t - \cos 2t\right).$$

Подставляя эти выражения в формулу, получаем

$$L(\Gamma) = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\sin 2t - \sin t\right)^2 + \left(\cos t - \cos 2t\right)^2}\, dt =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2 2t - 2\sin t \sin 2t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos t\cos 2t + \cos^2 2t}\, dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\left(1 - (\cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t)\right)}\, dt = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - \cos t}\, dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\frac{t}{2}\, d\left(\frac{t}{2}\right) = -\,8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -8\left(\cos\frac{\pi}{8} - \cos 0\right) = 8\left(1 - \cos\frac{\pi}{8}\right).$$

Вариант II

Вычислите интегралы:

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$. 2. $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)\ln x\, dx$. 3. $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{dx}{5+\sqrt[3]{x-1}}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x = 5\,(t - \sin t)\,, \\ y = 5\,(1 - \cos t)\,, \end{cases} \qquad y \geqslant \sqrt{5}.$$

5. Вычислите длину дуги кривой

$$\Gamma: \quad y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}, \quad x \in [1; 3].$$

Решения

1. Интеграл может быть сведен к табличному подведением под знак дифференциала.

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \left[\frac{1}{x^2+1}\, dx = \mathrm{d}\,(\operatorname{arctg} x)\right] = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x} =$$

$$= \ln|\operatorname{arctg} x|\Big|_1^{\sqrt{3}} = \ln\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \ln\operatorname{arctg} 1 = \ln\frac{\pi}{3} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln\frac{\pi/3}{\pi/4} = \ln\frac{4}{3}.$$

2. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)\ln x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}, \\ dv = (2x-1)dx, & v = \int (2x-1)\,dx = x^2 - x \end{array}\right] =$$

$$= \left(x^2 - x\right)\ln x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2-x}{x}\,dx = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{1}{2} - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (x-1)\,dx =$$

$$= -\frac{\ln 2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}\,.$$

3. Вычислим интеграл с помощью замены переменной:

$$t = 5 + \sqrt[3]{x-1},\ x = (t-5)^3 + 1,\ dx = \left((t-5)^3 + 5\right)'dt = 3(t-5)^2 dt.$$

$$x = 1 \longmapsto t = 5 + \sqrt[3]{1-1} = 5, \qquad x = 2 \longmapsto t = 5 + \sqrt[3]{2-1} = 6.$$

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{5+\sqrt[3]{x-1}} = \int\limits_{5}^{6} \frac{3(t-5)^2\,dt}{t} = 3\int\limits_{5}^{6} \frac{t^2 - 10t + 25}{t}\,dt =$$

$$= 3\int\limits_{5}^{6} \left(t - 10 + \frac{25}{t}\right)\,dt = 3\left(\frac{t^2}{2} - 10t + 25\ln|t|\right)\Big|_{5}^{6} =$$

$$= 3\left(18 - \frac{25}{2} - 60 + 50 + 25\ln 6 - 25\ln 5\right) = 75\ln\frac{6}{5} - \frac{27}{2}\,.$$

4. Фигура ограничена дугой арки циклоиды и прямой $y = 5$ (см. рисунок 9).

Из условия $y \geqslant 5$ получаем:

$$5\,(1 - \cos t) \geqslant 5 \Longleftrightarrow 1 - \cos t \geqslant 1 \Longleftrightarrow \cos t \leqslant 0.$$

В пределах одного периода этому неравенству удовлетворяют значения параметра t из интервала $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Воспользуемся формулой для нахождения площади фигуры, заключен-

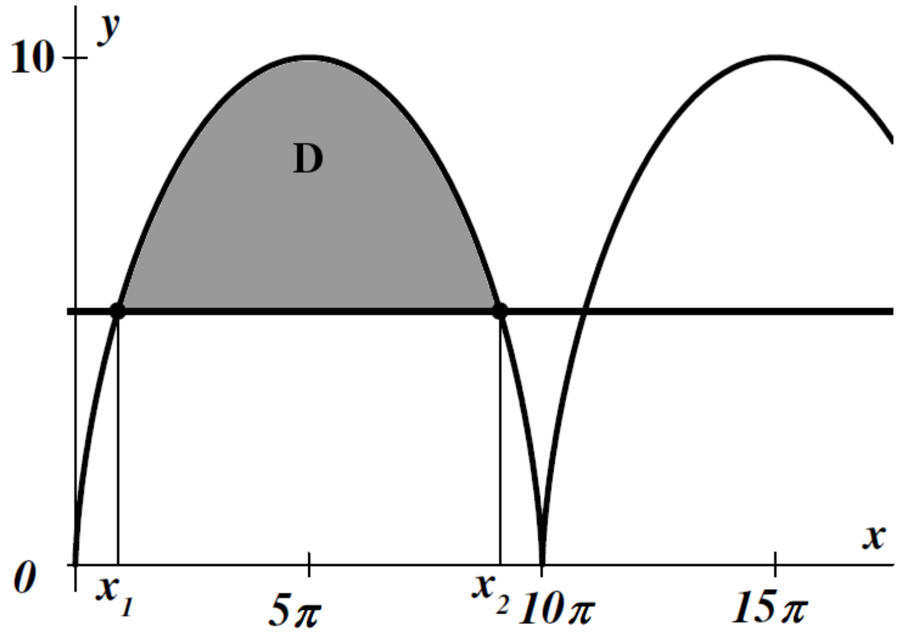

Рисунок 9 — К задаче 4.

ной между двумя линиями, и перейдем к интегралу по параметру:

$$S(D) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (y(x) - 5)\, dx = \left[\begin{array}{l} y = 5(1 - \cos t), \\ x = 5(t - \sin t), \\ dx = 5(1 - \cos t) dt \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (5(1 - \cos t) - 5)\, 5(1 - \cos t) dt = -25 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t (1 - \cos t) dt =$$

$$= -25 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\cos t - \cos^2 t \right) dt = 25 \left(- \left. \sin t \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt \right) =$$

$$= 25 \left(2 + \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt \right) = 50 + \frac{25}{2} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{25}{4} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2t \, d(2t) =$$

$$= 50 + \frac{25\pi}{2} + \frac{25}{4} \cdot \left. \sin 2t \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 50 + \frac{25\pi}{2} + 0 = 50 + \frac{25\pi}{2}\, .$$

5. Для вычисления длины воспользуемся формулой

$$L(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx.$$

Вычислим производную:

$$y' = \left(\frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}\right)' = \frac{1}{8}\left(x^4\right)' + \frac{1}{4}\left(x^{-2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^{-3} = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right).$$

Вычислим и упростим подкоренное выражение:

$$1 + \left(y'\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(4 + \left(x^6 - 2 + \frac{1}{x^6}\right)\right) = \\ = \frac{1}{4}\left(x^6 + 2 + \frac{1}{x^6}\right) = \frac{1}{4}\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 = \left(\frac{x^3 + x^{-3}}{2}\right)^2,$$

откуда очевидно, что подынтегральная функция равна

$$\sqrt{1 + \left(y'\right)^2} = \frac{1}{2}\left(x^3 + x^{-3}\right)$$

(с учетом того, что x принимает только положительные значения).

Вычисляем интеграл и находим длину кривой:

$$L(\Gamma) = \frac{1}{2}\int\limits_1^3 \left(x^3 + x^{-3}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^{-2}}{2}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{1}{8}\left(x^4 - \frac{2}{x^2}\right)\Bigg|_1^3 = \\ = \frac{1}{8}\left(81 - \frac{2}{9} - 1 + 2\right) = \frac{1}{4}\left(41 - \frac{1}{9}\right) = \frac{92}{9} = 10\frac{2}{9}.$$

Приложение А

(справочное)

Основные операции над комплексными числами

Понятие комплексного числа

Множеством комплексных чисел ($\mathbb{C}$) называется множество упорядоченных пар вещественных (действительных) чисел, над которыми определены операции сложения и умножения по следующим правилам:

$$z_1 = (x_1; y_1)\,,\ z_2 = (x_2; y_2)$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)\,, \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$

Пусть $z = (a; b)$, тогда

$a = \operatorname{Re} z$ вещественная (действительная) часть комплексного числа;

$b = \operatorname{Im} z$ мнимая часть комплексного числа;

$\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ модуль комплексного числа;

$(a; -b) = \bar{z}$ комплексное сопряжение;

$(0; 1) = i$ мнимая единица.

Очевидно, что $i^2 = i \cdot i = -1$.

Вещественные числа отождествляются с комплексными числами, имеющими нулевую мнимую часть. Таким образом, можно считать, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, и, что множество комплексных чисел является расширением множества вещественных.

Геометрическая интерпретация комплексного числа

Комплексное число изображается точкой плоскости (*«комплексная плоскость»*). Вещественная и мнимая части соответствуют декартовым координатам точки, а переход к тригонометрической форме (см. ниже) соответствует введению в комплексной плоскости полярной системы координат. Геометрический смысл основных характеристик можно понять из рисунка 10.

Алгебраическая форма

Алгебраическая форма комплексного числа: $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$, i — мнимая единица.

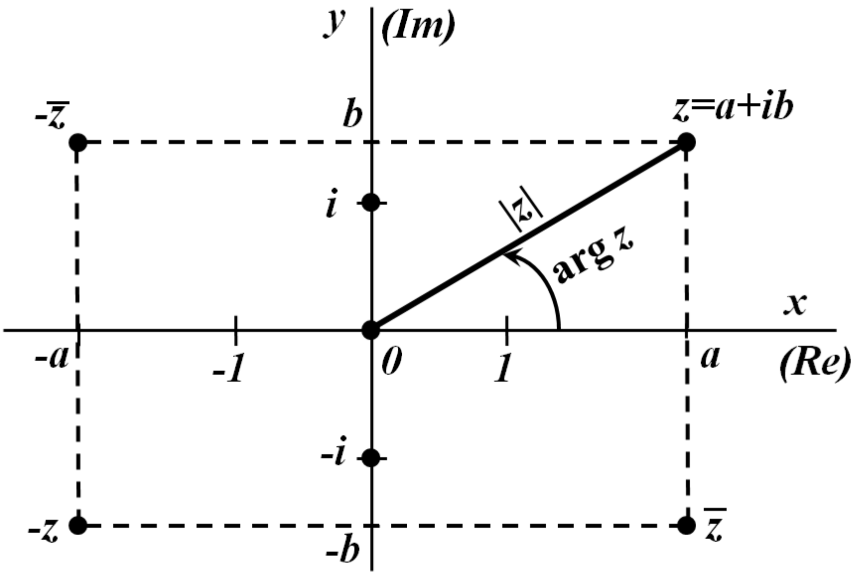

Рисунок 10 — Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Сложение в алгебраической форме: $(a+ib)+(c+id) = (a+b)+(c+d)i$.
Умножение в алгебраической форме:

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac+ibc+iad+i^2bd = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Деление в алгебраической форме:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Возведение в степень в алгебраической форме (бином Ньютона):

$$(a+bi)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}(ib)^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$(a+bi)^n = a^n + na^{n-1}(ib) + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-1}(ib)^2 + \dots + na(ib)^{n-1} + \dots + (ib)^n.$$

Степени мнимой единицы:

$$i^0 = 1;\ i^1 = 1,\ i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1;\dots$$
$$i^{p+4k} = i^p \quad (k, p \in \mathbb{Z}).$$

Тригонометрическая форма

Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = \operatorname{Arg} z$ (аргумент комплексного числа).

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,$$

где $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ — главное значение аргумента, $k \in \mathbb{Z}$.

Умножение в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2| (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Деление в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Возведение в степень в тригонометрической форме (формула Муавра):

$$z^n = (|z| (\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \ n \in \mathbb{Z}.$$

Показательная форма

Переход к показательной форме осуществляется через тригонометрическую применением формулы Эйлера:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

Показательная форма комплексного числа: $z = |z|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg z$.

Операции над комплексными числами, заданными в показательной форме:

$$|z_1| e^{i\varphi_1} \cdot |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_1| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \quad \frac{|z_1| e^{i\varphi_1}}{|z_2| e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_1|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$
$$\left(|z| e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n e^{in\varphi}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Корень из комплексного числа

Под корнем из комплексного числа $\sqrt[n]{a}$ понимается множество решений уравнения

$$z^n = a.$$

Если число a задано в показательной или тригонометрической форме

$$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \quad (r = |a|, \quad \varphi = \arg a),$$

то, пользуясь формулой Муавра, можно показать, что при $a \neq 0$ уравнение имеет ровно n различных решений, которые задаются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$, а под $\sqrt[n]{|a|}$ понимается арифметический корень из неотрицательного вещественного числа.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

(справочное)

Некоторые формулы математического анализа

Таблица эквивалентных бесконечно малых

При $\alpha(x) \to 0$:

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x);$

$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$

$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$

$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$

$1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2};$

$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x);$

$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$

$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a;$

$(1 + \alpha(x))^m - 1 \sim m \cdot \alpha(x).$

Таблица производных

1. $(C)' = 0.$

2. $(x^p)' = px^{p-1}.$

3. $(e^x)' = e^x.$

$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (a > 0,\ a \neq 1).$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad (a > 0,\ a \neq 1).$

5. $(\sin x)' = \cos x.$

6. $(\cos x)' = -\sin x.$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}.$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}.$

Таблица дифференциалов

Далее u — дифференцируемая функция, a, $p \in \mathbb{R}$.

1. $\mathrm{d}\,(C) = 0.$

2. $\mathrm{d}\,(u^p) = pu^{p-1}\,du.$

3. $\mathrm{d}\,(e^u) = e^u\,du.$

$\mathrm{d}\,(a^u) = a^u \ln a\,du, \quad (a > 0,\ a \neq 1).$

4. $\mathrm{d}\,(\ln u) = \dfrac{du}{u}.$

$\mathrm{d}\,(\log_a u) = \dfrac{du}{u \ln a}, \quad (a > 0,\ a \neq 1).$

5. $\mathrm{d}\,(\sin u) = \cos u\,du.$

6. $\mathrm{d}\,(\cos u) = -\sin u\,du.$

7. $\mathrm{d}\,(\operatorname{tg} u) = \dfrac{du}{\cos^2 u}$

8. $\mathrm{d}\,(\operatorname{ctg} u) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}.$

9. $\mathrm{d}\,(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

10. $\mathrm{d}\,(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

11. $\mathrm{d}\,(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{du}{u^2+1}.$

12. $\mathrm{d}\,(\operatorname{arcctg} u) = -\dfrac{du}{u^2+1}.$

Правила дифференцирования

Далее f, g, φ, u, v — дифференцируемые функции, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi((x)) \cdot \varphi'(x).$$

$$\mathrm{d}(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv.$$

$$\mathrm{d}(u \cdot v) = vdu + udv.$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Таблица неопределённых интегралов

1. $\displaystyle\int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad (p \neq -1).$

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C.$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

4. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$

5. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C, \quad m \neq 0.$

Определенные интегралы

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{где } F'(x) = f(x).$$

Интегрирование по частям:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Замена переменной (φ — дифференцируемая строго монотонная функция):

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt,$$

где $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$, т. е. $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Геометрические приложения интеграла

Площадь между графиками двух непрерывных функций

Пусть D — область, ограниченная линиями

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad , x = a, \quad x = b,$$

причем f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]$ $f(x) \leqslant g(x)$ (см. рисунок 11). Тогда площадь области D находится по формуле

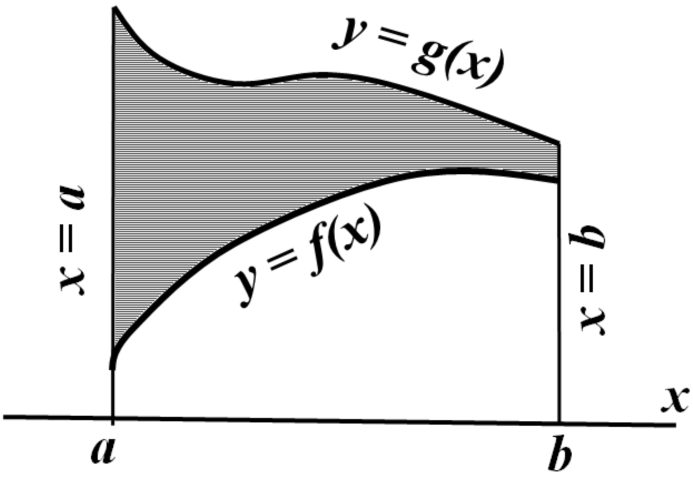

Рисунок 11 — Площадь, заключённая между графиками двух функций

$$S(D) = \int\limits_a^b (g(x) - f(x))\ dx.$$

Длина кривой (явное задание)

Пусть линия Γ задана уравнением $y = f(x)$, где f — дифференцируемая функция. Тогда длина участка линии, соответствующая $a \leqslant x \leqslant b$, находится по формуле

$$L(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\ dx.$$

Длина параметрически заданной кривой

Пусть линия Γ задана уравнениями

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha; \beta],$$

где $x(t)$, $y(t)$ — дифференцируемые функции. Тогда

$$L(\Gamma) = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt.$$

Литература

1 Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. Изд-во «Физматлит».— М.: 2005.— 304 с.

2 Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов – 5-е изд., стереотип / В. С. Шипачев. Изд-во «Высшая школа».— М.: 2002.– 479 с.

3 Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Том 1 / Л. Д. Кудрявцев. Изд-во «Дрофа» – М., 2003.— 704 с.

4 Ильин, В. А. Основы математического анализа. Часть 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Изд-во «Физматлит».— М., 2005.— 648 с.

5 Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1 / Д. Т. Письменный. Изд-во «Айрис Пресс».— М., 2007.— 288 с.

6 Берман, Г. Н. Сборник задач по математическому анализу / Г. Н. Берман. Изд-во «Лань». — СПб., 2008.— 608 с.

7 Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. Изд-ва: Оникс, Мир и Образование. — М., 2008.— 815 с.

8 Лунгу К. Н. Высшая математика: Руководство к решению задач: Учебное пособие / К. Н. Лунгу, Е.В. Макаров. Изд-во Физматлит.— М., 2009.— 381 с.

9 Вдовин, А.Ю. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории / А.Ю. Вдовин, Л.В. Михалёва, В. М. Мухина и др. Изд-во «Лань».— СПб., 2008.— 256 с.

10 Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике / Л. А. Кузнецов. Изд-во «Лань».— СПб., 2008.— 240 с.

11 Баранова Е. С. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие / Е. С. Баранова, Н. В. Васильева. Изд-во «Питер».— СПб., 2009.— 320 с.

12 Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. — СПб.: «Лань», 2010. — 464 с.

13 Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 480 с.

Кафедра математики

Математика (первый семестр): учебное пособие для студентов заочной формы обучения

Татьяна Васильевна Слободинская,

Алексей Андреевич Груздков

Юрий Александрович Необердин

Отпечатано с оригинал-макета. Формат $60 \times 90_{1/16}$
Печ. л. 4,75. Тираж 50 экз.

Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26

Типография изд. СПбГТИ(ТУ), тел.: 4949365