ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и расчетно-графические задания для студентов бакалавриата направления 21.03.01

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и расчетно-графические задания для студентов бакалавриата направления 21.03.01

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2016

УДК 531.01(073)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА: Методические указания к расчетно-графическим заданиям / Санкт-Петербургский горный университет. Сост. *М.Ю. Платовских.* СПб, 2016. 45 с.

Приведены методические указания и варианты задач по курсу «Теоретическая и прикладная механика» (Часть I - «Теоретическая механика». Указания снабжены теоретическим материалом и примерами решений типовых задач. Предназначены для студентов дневной формы обучения бакалавриата направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело» по профилям «Бурение нефтяных и газовых скважин», «Эксплуатация и обслуживание объектов добычи нефти», «Сооружение и ремонт объектов систем трубопроводного транспорта».

Научный редактор проф. *В.Г. Гореликов*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и расчетно-графические задания для студентов бакалавриата направления 21.03.01

Составитель *М.Ю. Платовских*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой механики

Ответственный за выпуск *М.Ю. Платовских*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 28.07.2016. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,0. Усл.кр.-отт. 3,0. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 100 экз. Заказ 726. С 221.

Санкт-Петербургский горный университет
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина “Теоретическая и прикладная механика” является общеинженерной и обязательна при подготовке инженеров любых направлений подготовки.

Целью преподавания этой дисциплины является с одной стороны формирование у будущих специалистов представлений об общих законах механики, равновесия и движения твердых тел, а с другой формирования представлений о работе механизмов и машин.

В данных “Методических указаниях…” приведены задания по первой части указанной дисциплины - теоретической механике. Задача курса теоретической механики, являющейся первой в цикле читаемых в университете механических дисциплин, состоит в том, чтобы на ее основе иметь возможность изучать другие инженерные дисциплины (сопротивление материалов, теорию механизмов и машин, строительную механику, теорию колебаний др.). В рамках данного курса студенты должны освоить проведение расчетов типовых конструкций: определять реакции опор, усилия в стержневых системах, параметры движения материальной точки и твердого тела.

Курс теоретической механики базируется на учебных дисциплинах «Математика», «Физика», «Начертательная геометрия».

1. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 1. СТАТИКА

Задача 1. Равновесие системы твердых тел под действием плоской системы сил

Задание.

1. Определить силы реакций связей в системе двух твердых тел под действием заданной нагрузки (активные силы).

2. Выбрав точку приведения, вычислить величины главных векторов и главных моментов активных сил и реакций связей. Сделать вывод относительно правильности определения реакций связей.

3. Выбрав другую точку приведения произвести вычисление п. 2 относительно этой точки. Проверить на основании проведенных вычислений формулу, связывающую главные моменты активных и реактивных сил относительно различных точек приведения.

Пример.

Конструкция состоит из двух стержней AC и BD, крепящихся к основанию с помощью шарниров A и B. Между собой стержни соединяются шарниром C (рис П1). Вес стержня AC - P_1=100 Н, BD - P_2=170 Н, вес груза Q= 120 Н. К стержню BD приложен момент M=180 Н·м.

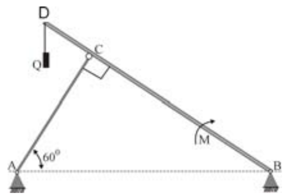

рис. П1.1

Определим реакции шарниров A и B. Для этого расчленим конструкцию по шарниру C (рис. П1.2). Составим уравнения равновесия каждой части.

Для стержня AC:

$$\sum X_i = X_C + X_A = 0\,;$$

$$\sum Y_i = Y_C + Y_A - P_1 = 0\,; \quad (1.1)$$

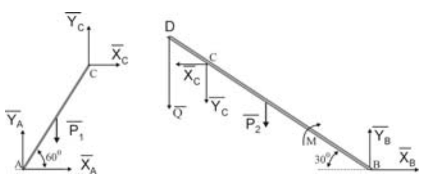

рис. П1.2

$$\sum M_A = -P_1 \frac{AC}{2} \cos 60^o - X_C \cdot AC \cdot \sin 60^o +$$

Для стержня BD:

$$+ Y_C \cdot AC \cdot \cos 60^o = 0$$

$$\sum X_i = -X_C + X_B = 0\,;$$

$$\sum Y_i = -Q - Y_C + Y_B - P_2 = 0\,; \qquad (1.2)$$

$$\sum M_A = -M + P_2 \frac{BD}{2} \cos 30^o + X_C \cdot BC \cdot \sin 30^o +$$

$$+ Y_C \cdot BC \cdot \cos 30^o + Q \cdot BD \cdot \cos 30^o = 0.$$

Третье и шестое уравнения системы уравнений (1.1), (1.2) после подстановки размеров и заданных величин сил примут вид:

$$X_C \cdot \sin 60^o - Y_C \cdot \cos 60^o = -25,$$

$$X_C \cdot \cos 60^o + Y_C \cdot \sin 60^o = -177{,}12.$$

Решая последнюю систему относительно X_C, Y_C (например, по методу Крамера), найдем величины реакций в шарнире С:

X_C= -110,21 Н;
Y_C=-140,89 Н.

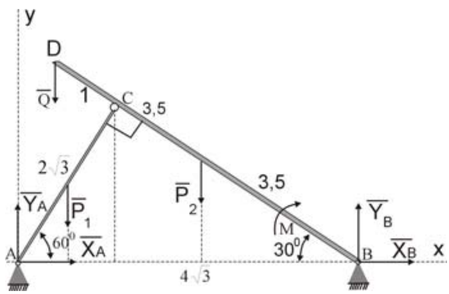

Рис. П1.3

Остальные неизвестные получим из оставшихся уравнений (1.1), (1.2):

X_A=110,21 Н; Y_A=240,89 Н; X_B= -110,21 Н; Y_B=149,11 Н.

Определим главные векторы активных $\overline{F^{(a)}}$ и реактивных $\overline{F^{(r)}}$ сил, действующих на конструкцию как единое целое. Найдем проекции этих векторов на оси x и y:

$$X^{(a)} = 0\,;\; Y^{(a)} = -P_1 - P_2 - Q = -100 - 170 - 120 = -390 \text{ Н};$$

$$X^{(r)} = X_A + X_B = 110{,}21 - 110{,}21 = 0\,;$$
$$Y^{(r)} = Y_A + Y_B = 240{,}89 + 149{,}11 = 390\ \text{Н},$$
$$\overline{F^{(a)}} = X^{(a)} \cdot \bar{i} + Y^{(a)} \cdot \bar{j}\,;\ \overline{F^{(r)}} = X^{(r)} \cdot \bar{i} + Y^{(r)} \cdot \bar{j}\,,$$
где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ орты осей x и y.

Соответственно, величины главных векторов $F^{(a)}$=390 Н и $F^{(r)}$=390 Н. Найдем теперь главные моменты активных $M^{(a)}$ и реактивных $M^{(r)}$ сил относительно, например, точки А:

$$M_A^{(a)} = -P_1 \cdot \sqrt{3}\cos 60^o - P_2 \cdot \left(4\sqrt{3} - 3{,}5\cos 30^o\right) +$$
$$+ Q \cdot \left(2\sqrt{3}\cos 60^o - 1 \cdot \cos 30^o\right) - M = -1033{,}06\ \text{Н} \cdot \text{м};$$
$$M_A^{(r)} = Y_B \cdot AB = 149{,}11 \cdot 4\sqrt{3} = 1033{,}06\ H \cdot м.$$

Видим, что $F^{(a)} = F^{(r)}$, $M_A^{(a)} = -M_A^{(r)}$.

Варианты заданий 1.1- 1.30:

Задание 1.1. Две жесткие однородные квадратные (со стороной a = 1 м) рамы, весом P= 400 Н каждая, соединены между собой шарниром С. Конструкция загружена силами Q= 100 Н в точках E и D, правая рама загружена также моментом М =200 Н·м (направление – по ходу ч.с.). (рис. 1.1).

Определить реакции шарниров А и В.

Задание 1.2. Две жесткие однородные квадратные (со стороной a = 0,7 м) рамы, весом P= 300 Н каждая, соединены между собой шарниром С. Каждая рама загружена распределенной нагрузкой интенсивности q= 150 Н/м, левая рама загружена также моментом М =100 Н·м (направление – по ходу ч.с.) (рис. 1.2).

Определить реакции шарниров А и В.

Задание 1.3. Две жесткие однородные квадратные (со стороной a = 0,5 м) рамы, весом P= 700 Н каждая, соединены между собой шарниром С. Каждая рама загружена моментом М= 500 Нм, правая рама, кроме того - распределенной нагрузкой интенсивности q = 150 Н/м (нормальной к стороне) и силой F = 200 Н в точке К (середина стороны рамы) (рис. 1.3).

Определить реакции шарниров A и B.

Задание 1.4. Вес стержня AC - P_1=300 Н, BC - P_2=150 Н, вес груза Q 200 Н, интенсивность распределенной нагрузки на левом стержне q = 250 Н/м, точка L – середина AC; в точке C – шарнир; EK - горизонтальный трос, CE= 1/3 BC, AC=2 м, BC=1 м (рис. 1.4).

Найти реакции в точках A, B и натяжение троса.

Задание 1.5. Вес стержня AC - P_1=300 Н, BC - P_2=150 Н, Q=200 Н, AC=4 м, BC=2 м, ,CD=0,3 м. Стержень BC опирается на горизонтальную плоскость в точке B; KD - горизонтальный трос; F= 100 Н.AL= 0,25AB (CE=1,5 м) (рис. 1.5).

Найти реакции в точках A, B, E и натяжение троса.

Задание 1.6. Невесомые стержни AC и CE шарнирно оперты в точках B и D; BC=CD, AB=1/3 AC, CD=2/3 CE. В точках A и E к стержням подсоединены грузы с весами Q =100 Н и P=200 Н; сила F= 150 Н (L – середина CE); EK - горизонтальный трос, AC=CE=3м. (рис. 1.6).

Найти реакции шарниров B, D и натяжение троса.

Задание 1.7. Вес стержня AC - P_1=200 Н, правого стержня - P_2=300 Н, его длинна 3 м; AC=BC=AB=2 м; CE=0,5 м. В точке C левый стержень AC опирается на правый; сила F= 200 Н (K – середина CB); вес груза P 100 Н (рис. 1.7).

Найти реакции шарниров A, B и опоры в точке E.

Задание 1.8. Вес стержня AC - P_1=300 Н, BC - P_2=150 Н, в точке C – шарнир; q=200 Н/м (по нормали к BC); AC=2 м, CB=1 м; сила F= 200 Н (AD = 1,3 м) (рис. 1.8).

Найти реакции шарниров в точках A и B.

Задание 1.9. Вес стержней AC и BC - P=300 Н, AC=CB, BE=AD=1/3 CB, DE - горизонтальная веревка. Стержень BC опирается на наклонную плоскость в точке B (рис. 1.9). Сила F= 20 Н (K – середина CB); момент M = 200 Нм.

Найти реакции в точках A, B и натяжение веревки DE.

Задание 1.10. Вес стержня AC - P_1=300 Н (AC = 4 м), CE - P_2=150 Н (CE = 3 м); AB=1/4 AC. В точках K и L – точечные опоры (CK=KL=LE). Веса грузов на концах стержней: Q= 100 Н, P= 150 Н. (рис. 1.10).

Найти реакции шарнира B и опор в точках K и L.

Задача 1.11. В точке А - заделка стержня АС, АС= 2 м. Вес стержня АС - P_1=200 Н, BD - P_2=400 Н, DB=4 м. В точке С стержень BD опирается на AC. На участке CD приложена распределенная нагрузка с интенсивностью q=200 Н/м. (по нормали к DC) ; вес груза Q 100 Н (рис. 1.11).

Найти реакции заделки А и шарнира В.

Задание 1.12. Две жесткие однородные круглые (радиуса *a*=1 м) рамы, весом Р=200 Н каждая, соединены между собой двумя стержнями SL и MN, SNLM – квадрат. Радиусы, проведенные из центров рам к точкам крепления стержней, расположены под 45^0 к горизонтали. Конструкция загружена силами Q=200Н в точках Е и D (AD и ВЕ - вертикальные диаметры). Правая рама загружена также моментом М= 100 Н·м (рис. 1.12). Определить реакции шарниров А, В и усилия в стержнях.

Задание 1.13. Две жесткие однородные круглые (радиуса *a*=1 м) рамы, весом Р=200 Н каждая, соединены между собой двумя стержнями АЕ и BD, ABED- квадрат. Конструкция загружена распределенной нагрузкой интенсивности q= 100 Н/м по дугам в ¼ окружности (AD и ВЕ- вертикальные диаметры), направленной под углом 45^0 к горизонтали. Левая рама загружена также моментом М= 150 Н·м (рис. 1.13).

Определить реакции шарниров А, В и усилия в стержнях.

Задание 1.14. Две жесткие однородные круглые (радиуса *a*=0,7 м) рамы, весом Р=200 Н каждая, соединены между собой двумя стержнями АЕ и BD, ABED- квадрат. Конструкция загружена распределенной нагрузкой интенсивности q= 50 Н/м по дугам в ¼ окружности (AD и ВЕ - вертикальные диаметры), направленной под углом 45^0 к горизонтали. Правая рама загружена также моментом М= 50 Н·м (рис. 1.14). Определить реакции шарниров А, В и усилия в стержнях.

Задание 1.15. Вес стержня АС - P_1=300 Н, DB- горизонтальный стержень весом P_2=200 Н, распределенная нагрузка на DB q=200 Н/м, DE=EB, CD- трос, CD = 1 м, AC=2 м, DB=2 м (рис. 1.15).

Найти реакции в точках А, В и натяжение троса.

Задание 1.16. Вес стержня АС (АС = 2 м), заделанного в точке A - P_1=100 Н, ромба BDEH со стороной 0,5 м - P_2=200 Н, по стороне квадрата DE приложена распределенная нагрузка с интенсивностью q = 100 Н/м; CE- трос, CE = 2 м. Диагональ BE- вертикальна. В точке L к стержню AC приложена сила F=100 Н (рис. 1.16). Найти реакции в заделке A, шарнире B и натяжение веревки.

Задание 1.17. Вес стержня AC - P_1=300 Н (AC=3 м), AB=1/3AC. В точке C – шарнир. Стержень CD весом P_2=150 Н – горизонтален CD=2м , на конце D поддерживается вертикальным тросом DE. В точке L к стержню AC приложена сила F=100 Н; CL= 1/3 AC (рис. 1.17).

Найти реакции шарнира B и величину груза Q.

Задание 1.18. Вес стержня AC, заделанного в точке A - P_1=100 Н, AC=BC=AB=2 м; DB=3 м. В точке B стержень BD весом P_2=300Н опирается на горизонтальную плоскость. В точке C – шарнир; DK- горизонтальный трос, привязанный к свободному концу D стержня BD. Вес груза P=100Н. В точке L (середина AC) к стержню AC приложена сила F=100 Н (рис. 1.18).

Найти реакции в заделке A и в точке B.

Задание 1.19. Вес стержня AC - P1=300 Н, BC - P2=150 Н, Q=200 Н, AC=4 м, CB=2 м, CE=1 м,CD=0,5 м, M= 120 Нм. В точке C – шарнир. Стержень BC опирается на горизонтальную. плоскость в точке B (рис. 1.19).

Найти реакции в точках A и B, E.

Задание 1.20. Невесомые стержни AC и CE шарнирно оперты в точках B и D; в точке C – также шарнир (AB=BC, CD=DE). В точках A и E через тросы (EK – горизонтальный трос) к ним подсоединены грузы с весами Q=100 Н и P=200 Н (рис. 1.20).

Найти реакции шарниров B и D, а также натяжение троса.

Задание 1.21. В точке C стержень AC опирается на стержень BD (AC=BC=AB=2 м); DB=3м, BE=1 м. Вес стержня AC - P_1=200 Н, BD - P_2=300 Н. На конце стержня BD – сила Q = 50 Н (рис. 1.21). Найти реакции шарниров B и D, а также реакцию в точке E.

Задание 1.22. Стержень AC опирается на гладкую плоскость в точке A и на точечные опоры в точках K и L (AC=3 м, AK=KL=LC). Стержень BD подвешен к стержню AC с помощью троса CD (BD = 2 м, CD = 1 м). Вес стержня AC - P_1=300 Н, DB -

P_2=150 Н, q=200 Н/м, DE=1 м (рис. 1.22). Найти реакции в точке А и шарнире В.

Задание 1.23. Две жесткие однородные круглые (радиуса *a* = 1 м) рамы, весом Р = 200 Н каждая, соединены между собой шарниром С. Конструкция загружена силами Q= 200 Н в точках Е и D (AD и BE - вертикальные диаметры). К левой раме приложен также момент М = 50 Н·м (рис. 1.23).

Определить реакции шарниров А и В.

Задание 1.24. Две жесткие однородные круглые (радиуса *a*=0,5 м) рамы, весом Р=200 Н каждая, соединены между собой шарниром С. Конструкция загружена распределенной нагрузкой интенсивности q= 100 Н/м по дугам DК и ЕС (AD и BE - вертикальные диаметры), направленной под углом 45^0 к горизонтали. К правой раме приложен также момент М = 70 Н·м (рис. 1.24).

Определить реакции шарниров А и В.

Задание 1.25. Вес однородного заделанного концом А стержня (горизонтального) АВ – P_1 =300 Н, АВ= 2 м; вес груза Q и величина силы Q 100 Н; вес стержня CD P_2 =400 Н; DK- трос; в точке Е- опирание; СЕ=СВ= 1 м, ВС= DB (рис. 1.25).

Найти реакции в заделке А, точке Е, а также в шарнире В.

Задание 1.26 Вес однородного заделанного концом А стержня (горизонтального) АВ – P_1 =300 Н, АВ= 3 м; вес груза Q 150 Н; вес стержня CD P_2 = 400 Н; в точке В - опирание; СЕ=СВ= 1 м, ВС= DB; интенсивность распределенной нагрузки q=100 Н/м (рис. 1.26). Найти реакции в заделке А и точке В, а также в шарнире Е.

Задание 1.27. Вес однородного заделанного концом А стержня (горизонтального) АВ – P_1 =300 Н, АВ= 2 м; вес груза Q 100 Н; вес стержня CD P_2 =400 Н; СК- трос; в точке Е- опирание; СЕ=СВ= 1 м, ВС= DB; М= 50 Н·м (рис. 1.27).

Найти реакции в заделке А, точке Е, а также в шарнире В.

Задание 1.*28*. Вес однородного, заделанного концом А, стержня (горизонтального) АВ – P_1 =300 Н, АВ= 2 м; вес груза Q_1 100 Н, Q_2 - 150 Н; вес стержня CD P_2 =400 Н; СК- горизонтальный трос; в точке В- опирание; СЕ=СВ= 1 м, ВС= DB; М= 50 Н·м (рис. 1.28). Найти реакции в заделке А, точке В, а также в шарнире Е.

Задание 1.29. Вес заделанного в точке A стержня AC - P_1=300 Н, вес соединенного с ним шарнирно в точке C стержня BD - P_2=200 Н (AC=CB=AB=2 м), CD=0,8 м, EB – трос, момент M = 100 Н·м, (рис. 1.29). Найти реакции в шарнирах A, C, натяжение троса и вес груза Q.

Задание 1.30. Вес заделанного в точке A стержня AC - P_1=200 Н, вес опирающегося на него в точке C стержня BD - P_2=250 Н (AC=CB =2 м, CD= 0,5 м), DE- трос, параллельный AC (DE = 1 м); момент M = 200 Н·м, сила F = 40 Н (точка K – середина BC) (рис. 1.30).

Найти реакции в опорах A, B (шарнир) и C.

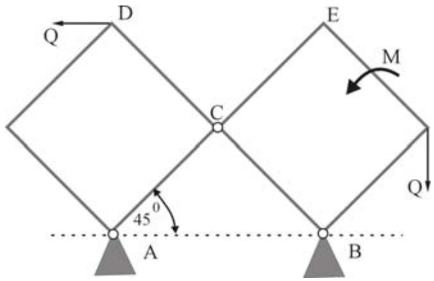

Рис. 1.1

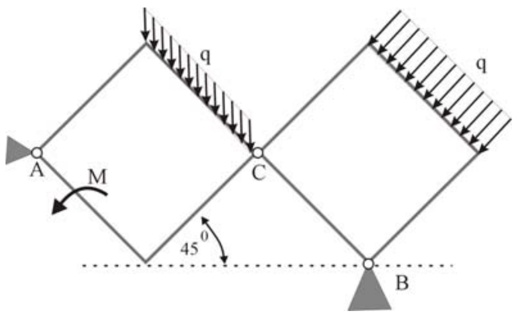

Рис. 1.2

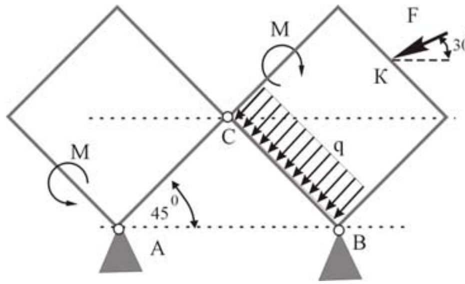

Рис.1.3

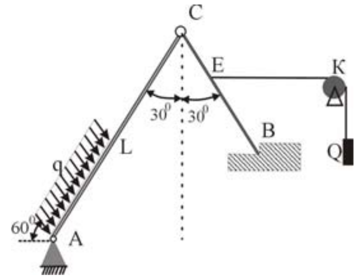

Рис. 1.4

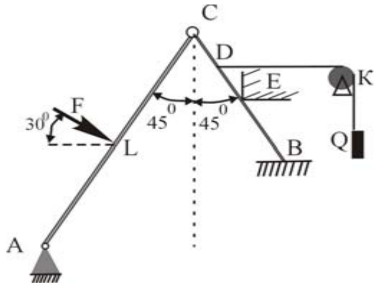

Рис. 1.5

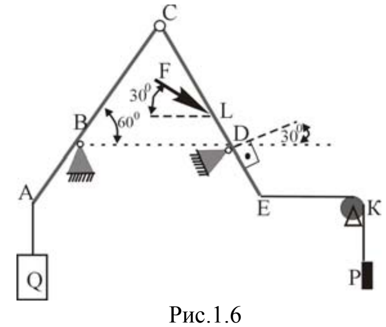

Рис.1.6

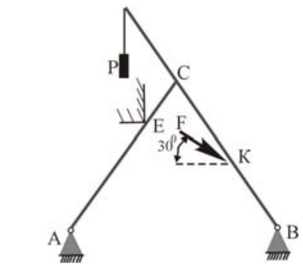

Рис. 1.7

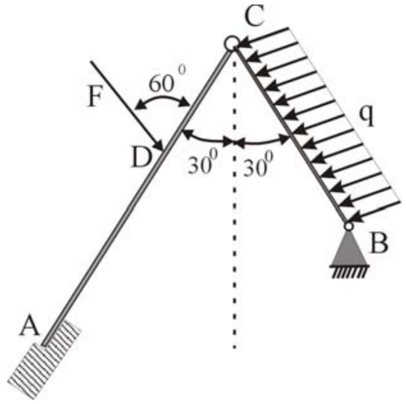

Рис. 1.8

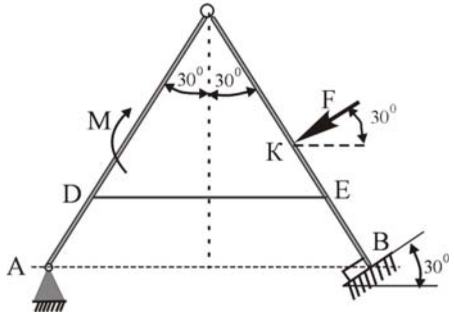

Рис. 1.9

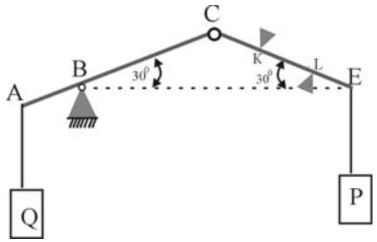

Рис. 1.10

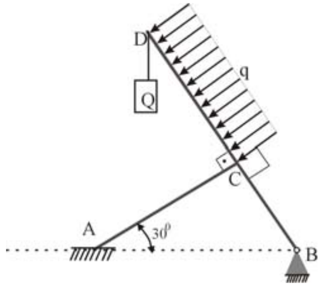

Рис.1.11

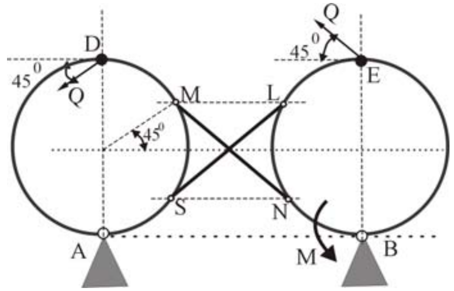

Рис.1.12

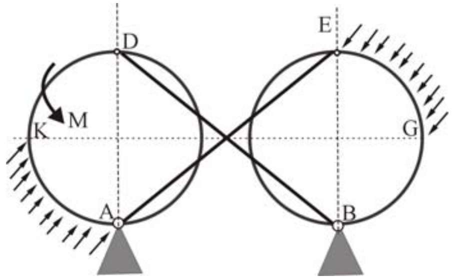

Рис.1.13

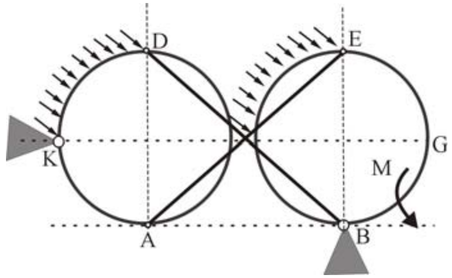

Рис.1.14

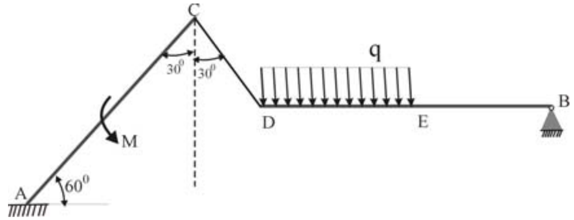

Рис.1.15

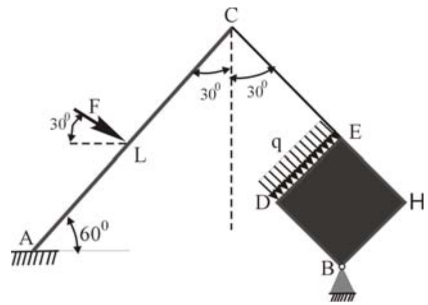

Рис. 1.16

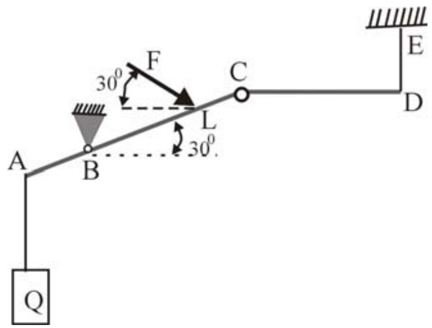

Рис.1.17

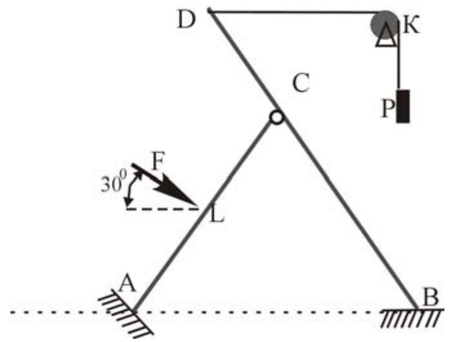

Рис.1.18

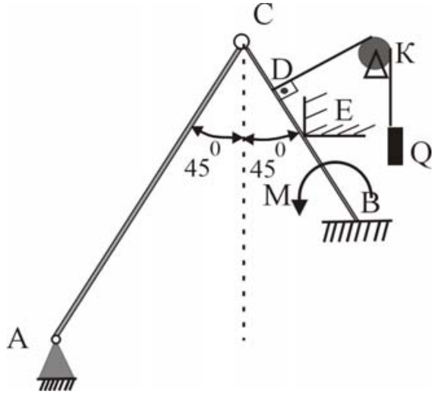

Рис. 1.19

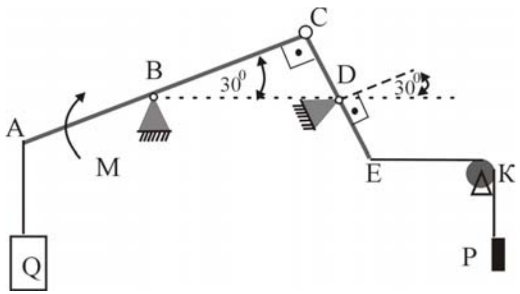

Рис. 1.20

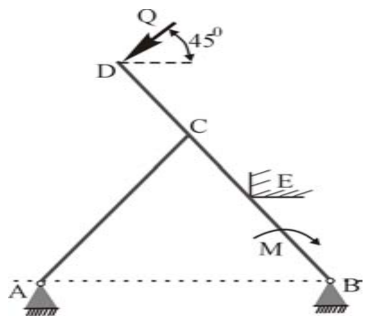

Рис. 1.21

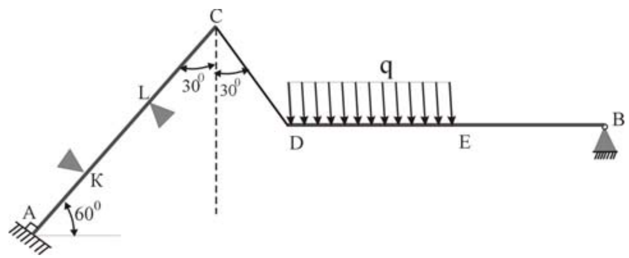

Рис. 1.22

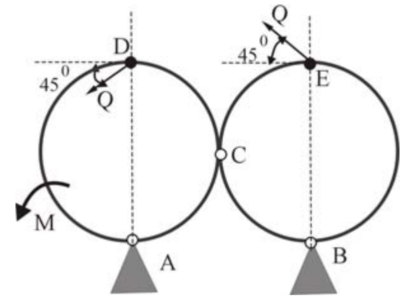

Рис. 1.23

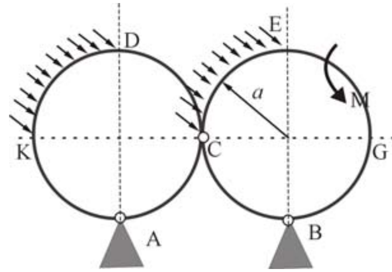

Рис. 1.24

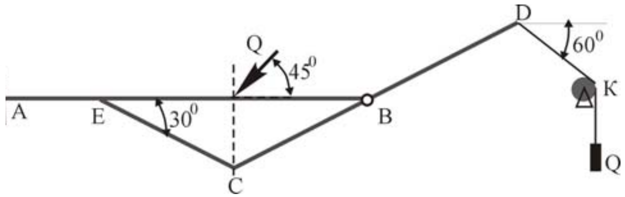

Рис. 1.25

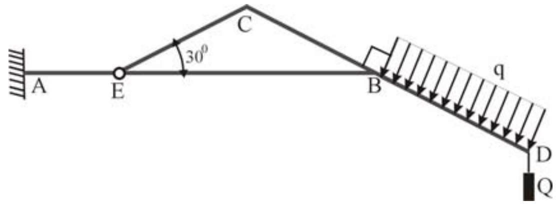

Рис. 1.26

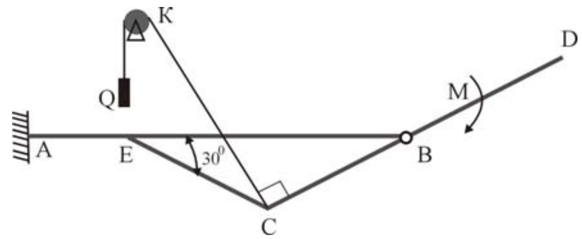

Рис. 1.27

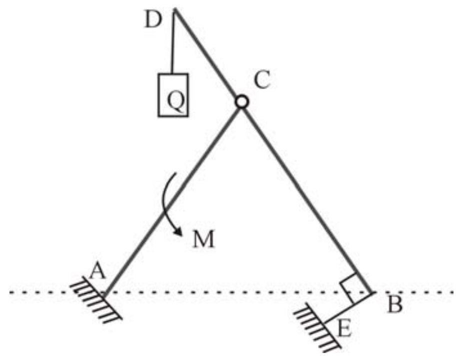

Рис. 1.29

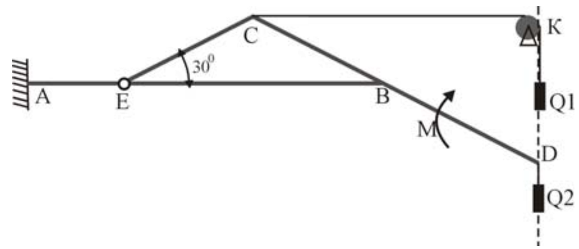

Рис. 1.28

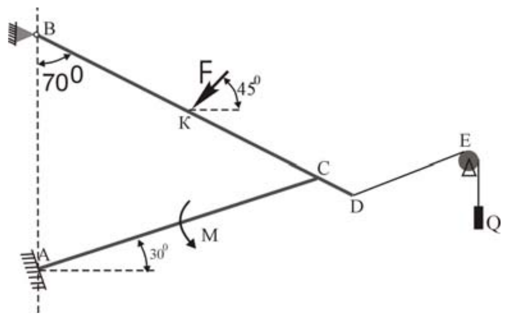

Рис.1.30

Задача 2. Равновесие тел при действии силы трения покоя

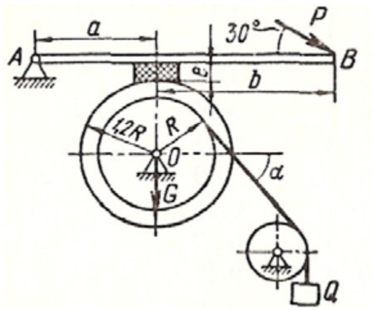

Рис. П2.1

Определить минимальное (в вариантах 1 – 20 ,25,26,29,30) или максимальное (в вариантах 21 – 24, 27.28) значение силы P и реакции опор системы, находящейся в покое. Схемы вариантов представлены на рис. 2. 1- 2.30, а необходимые для расчета данные – в табл. 1.

В вариантах 1 – 20 трение покоя учесть только между тормозной колодкой и барабаном. В вариантах 21 – 30 учесть трение покоя в двух опорных точках тела весом G.

Пример выполнения задания (варианты 1 - 20). Дано: G =2 кН; Q =20 кН; коэффициент трения покоя $f_т$=0,1; α=20°, a = 10 см; b= 20 см (рис. П2.1).

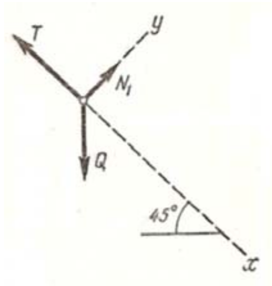

Рис. П2.2

Определить минимальное значение силы P и реакции опор O, A, B.

Решение. Рассмотрим сначала систему уравновешивающихся сил, приложенных к телу Q, рис. П2.2. На тело действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}$ и нормальная реакция $\vec{N}_1$.

Рассматривая тело Q как материальную точку, составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0\,;\ Q\cos 45^o - T = 0\,;\ \sum Y_i = 0\,;\ N_1 - Q\sin 45^o = 0\,.$$

Отсюда

$$T = Q\cos 45^o\,,\ N_1 = Q\sin 45^o\,.$$

Теперь рассмотрим равновесие сил, приложенным к барабану, рис.П2.3:

$$\sum M_{O\,i} = -T'\cdot R + F_m \cdot 1{,}5R = 0\,, \qquad (2.1)$$

где F_m – сила трения покоя;

$\sum X_i = T' + F_m \cos\alpha - N_2 \sin\alpha + X_O = 0$;(2.4)

$\sum Y_i = N_2 \cos\alpha + F_m \sin\alpha - G = 0$.(2.5)

В состоянии предельного равновесия сила P минимальна, а сила трения покоя между тормозной колодкой и барабаном определяется равенством (законом Кулона)

$$F_m = f_m \cdot N_2 . \qquad (2.6)$$

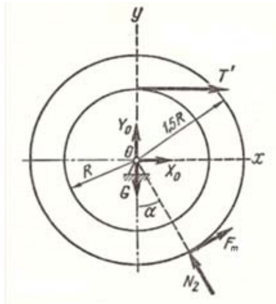

Рис. П2.3

Из уравнений (1.3) - (1.6) получим:

$$F_m = T'/1{,}5; N_2 = F_m / f_m; X_0 = -T' + N_2 \sin\alpha + F_m \cos\alpha ;$$

$$Y_O = -N_2 \cos\alpha - F_m \sin\alpha + G .$$

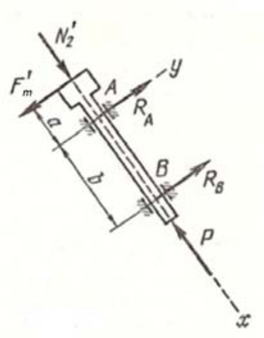

Рис. П2.4

Для определения минимального значения силы *P* и реакций опор *A* и *B* (эти реакции перпендикулярны направляющим *A* и *B*, так как трением здесь пренебрегаем) рассмотрим равновесие сил, приложенных к штоку тормозного устройства, рис. П2.4:

$$\sum M_{Ai} = F_m \cdot a + R_B \cdot b = 0; \qquad (2.7)$$

$$\sum X_i = N_2 - P_{\min} = 0 ; \qquad (2.8)$$

$$\sum Y_i = R_A + R_B - F_m' = 0 . \qquad (2.9)$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$R_B = -F_m' \, a/b ; P_{\min} = N_2'; R_A = -R_B + F_m' .$$

Учитывая, заданные в условии числовые значения, получим:

N_1=14,1 кН; F_m=9,4 кН;
N_2=94 кН; X_0=9,2 кН;
Y_0= -89,6 кН; R_B= -4,7 кН;
R_A=14,1 кН; R_B=94 кН.

Пример выполнения задания (варианты 21 -30). Дано: G = 1 кН; коэффициент трения покоя f_m = 0,4; a = 6 м; b = 2 м (рис. П2.7).

Определить максимальное значение силы *P* и реакции опор *A*, *B, D, E*.

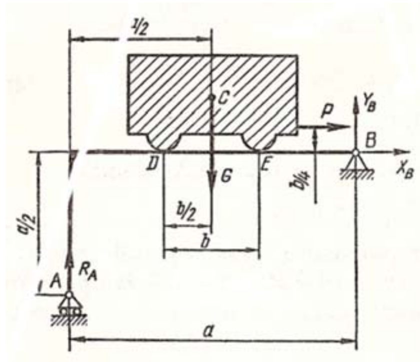

Рис. П2.7

Решение. Рассмотрим сначала систему уравновешивающихся сил, приложенных к телу весом *G*, рис. П2.8. На тело действуют сила тяжести $\vec{G}$, сила $\vec{P}$, нормальные составляющие сил реакции $\vec{N}_D$ и $\vec{N}_E$, а также силы трения покоя $\vec{F}_{m\,(D)}$ и $\vec{F}_{m\,(E)}$.

Составим три уравнения равновесия тела весом G под действием указанных сил:

$$\sum X_i = -\vec{F}_{m\,(D)} - \vec{F}_{m\,(E)} + P = 0\,; \qquad (2.10)$$

$$\sum X_i = N_D + N_E - G = 0\,; \qquad (2.11)$$

$$\sum M_{D\,i} = -G\,b/2 - N_E b - P\,b/4 = 0\,. \qquad (2.12)$$

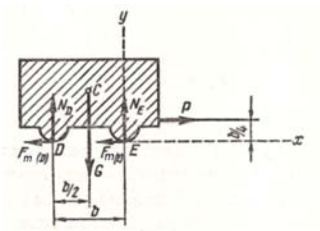

Рис. П2.8

В случае предельного равновесия $P = P_{max}$. При этом силы трения покоя принимают наибольшие значения, а система уравнений дополняется равенствами

$$F_{m\,(D)} = f_m \cdot N_D\,, \qquad (2.13)$$

$$F_{m\,(E)} = f_m \cdot N_E\,. \qquad (2.14)$$

Решая систему уравнений (1.10) – (1.14), получаем:

$$P_{max} = f_m G,\ N_E = (G/2)\cdot(1 + 0{,}5 f_m),\ N_D = (G/2)\cdot(1 - 0{,}5 f_m)\,.$$

Отсюда

P_{max}=0,4 кН; N_E=0,6 кН;

N_D=0,4 кН; $F_{m\,(D)}$ = 0,16 кН;

$$F_{m\,(E)} = 0{,}24 \text{ кН}.$$

Совокупности сил $\vec{N}_D$ и $\vec{F}_{m\,(D)}$, $\vec{N}_E$ и $\vec{F}_{m\,(E)}$ образуют соответственно опорные реакции в точках D и E.

Рассмотрим теперь равновесие сил $\vec{R}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{G}, P = P_{\max}$, приложенных ко всей системе (рис. П2.7):

$$\sum X_i = 0\,;\; -X_B + P_{\max} = 0\,; \qquad (2.15)$$

$$\sum Y_i = 0\,;\; R_A + Y_B - G = 0\,; \qquad (2.16)$$

$$\sum M_{D\,i} = G\,a/2 - R_A \cdot a - P_{\max} \cdot b/4 = 0\,. \qquad (2.17)$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$X_B = -P_{max},\; R_A = (G \cdot a/2 - P_{\max} \cdot b/4)/a,\; Y_B = G - R_A\,.$$

Отсюда R_A=0,467 кН; X_B=-0,4 кН, Y_B=0,533 кН.

Схемы к вариантам заданий представлены на рис. 2.1 – 2.30.

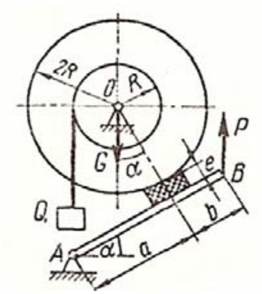

Рис. 2.1

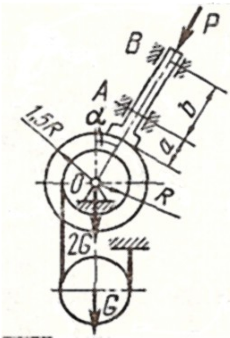

Рис. 2.2

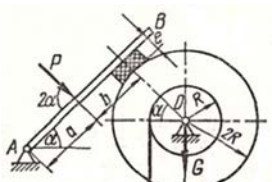

Рис. 2.3

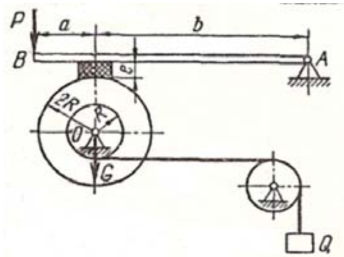

Рис. 2.4

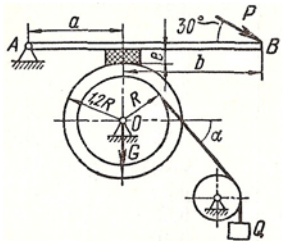

Рис. 2.5

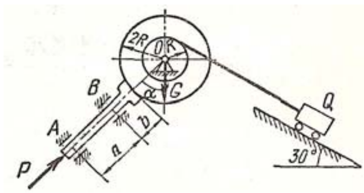

Рис. 2.6

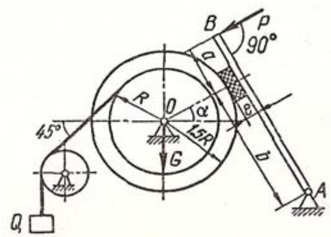

Рис. 2.7

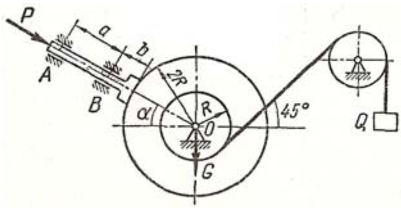

Рис. 2.8

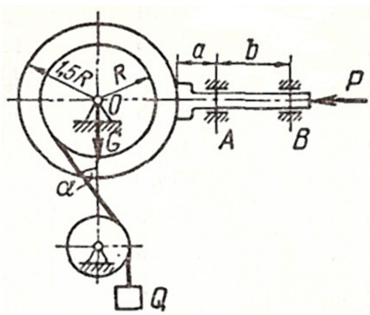

Рис.2.9

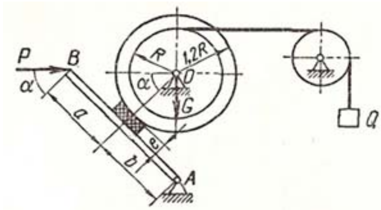

Рис. 2.10

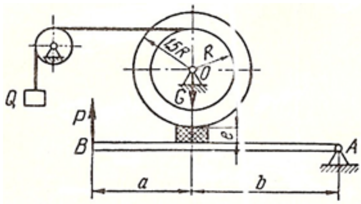

Рис. 2.11

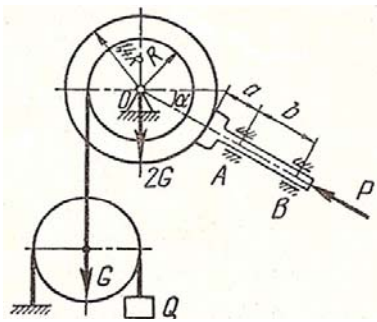

Рис. 2.12

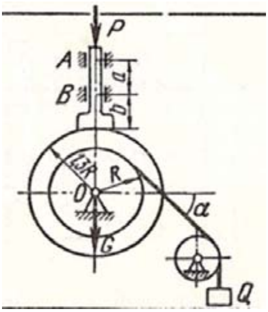

Рис. 2.13

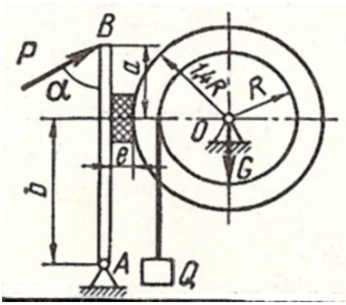

Рис. 2.14

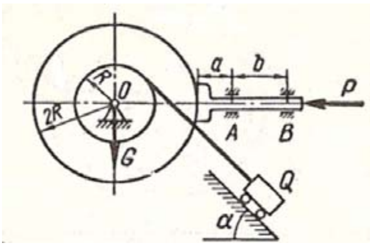

Рис. 2.15

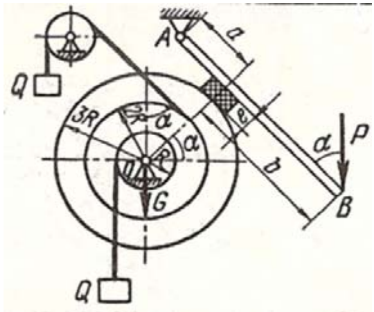

Рис. 2.16

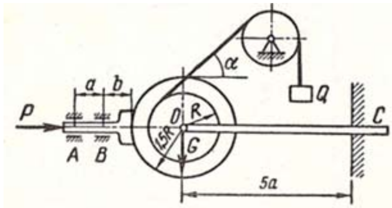

Рис. 2.17

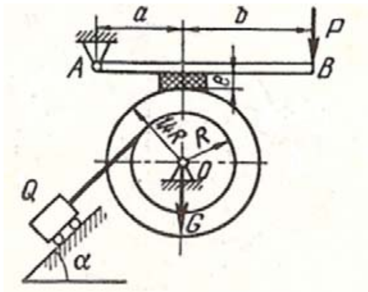

Рис. 2.18

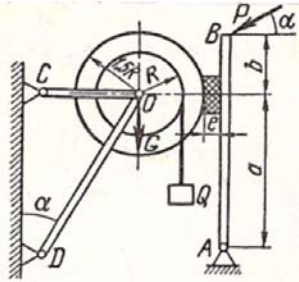

Рис. 2.19

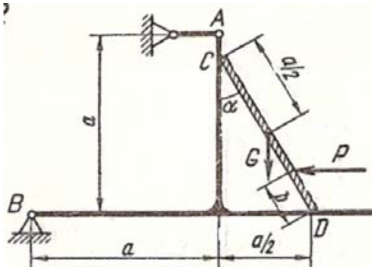

Рис. 2.22

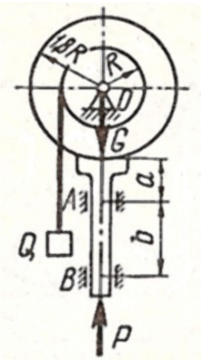

Рис. 2.20

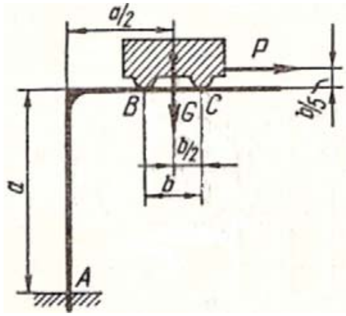

Рис. 2.23

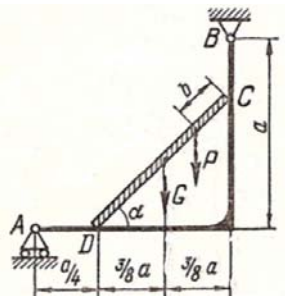

Рис. 2.21

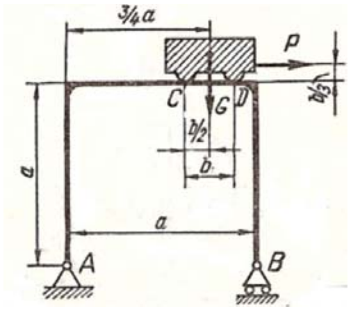

Рис. 2.24

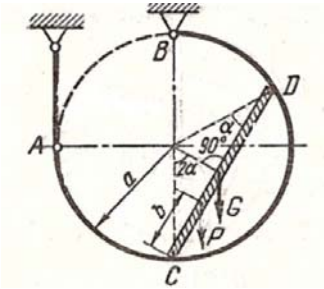

Рис. 2.25

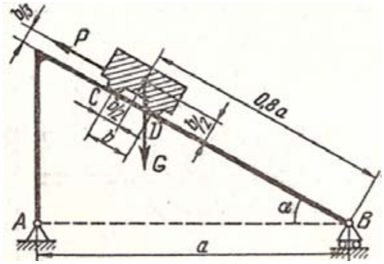

Рис. 2.28

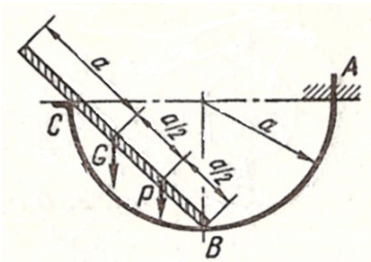

Рис. 2.26

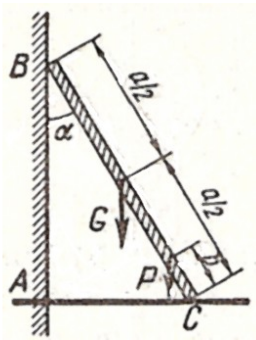

Рис. 2.29

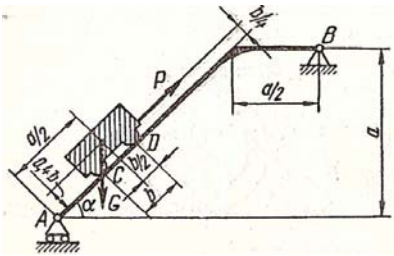

Рис. 2.27

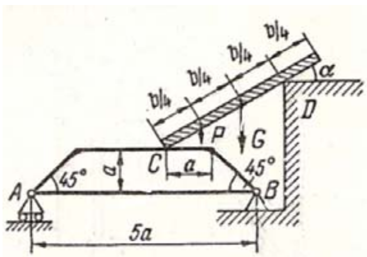

Рис. 2.30

Таблица 2.1 Исходные данные для расчета.

№ варианта	№ рисунка	G, кН	Q, кН	a, м	b, м	c, м	α, град	f_m	Точки, в которых определяются реакции
1	1.1	1,0	10	0,20	0,10	0,04	30	0,10	*O, A*
2	1.2	1,1	-	0,10	0,15	-	40	0,15	*O, A, B*
3	1.3	1,3	14	0,45	0,40	0,05	45	0,20	*O, A*
4	1.4	1,8	15	0,10	0,40	0,06	-	0,25	*O, A*
5	1.5	1,5	16	0,20	0,30	0,04	45	0,30	*O, A*
6	1.6	1,6	18	0,15	0,10	-	45	0,35	*O, A, B*
7	1.7	20	20	0,20	0,50	0,05	30	0,40	*O, A*
8	1.8	1,8	18	0,20	0,10	-	30	0,35	*O, A, B*
9	1.9	2,1	20	0,10	0,20	-	30	0,30	*O, A, B*
10	1.10	1,8	22	0,30	0,30	0,04	45	0,25	*O, A*
11	1.11	1,9	24	0,40	0,50	0,06	-	0,20	*O, A*
12	1.12	2,0	25	0,10	0,25	-	30	0,15	*O, A, B*
13	1.13	1,6	20	0,10	0,10	-	45	0,10	*O, A, B*
14	1.14	1,7	24	0,10	0,25	0,04	60	0,15	*O, A*
15	1.15	1,8	20	0,10	0,15	-	45	0,20	*O, A, B*
16	1.16	1,2	15	0,20	0,45	0,04	45	0,25	*O, A*
17	1.17	1,3	12	0,15	0,15	-	45	0,30	*O, A, B, C*
18	1.18	1,4	14	0,20	0,30	0,05	60	0,35	*O, A*
19	1.19	1,7	16	0,50	0,20	0,06	30	0,40	*A, C, D*
20	1.20	1,6	18	0,10	0,15	-	-	0,45	*O, A, B*
21	1.21	1,0	-	2,0	0,50	-	45	0,45	A, B, C, D
22	1.22	1,5	-	3,0	0,8	-	30	0,35	A, B, C, D
23	1.23	2,0	-	5,0	1,4	-	-	0,40	A, B, C
24	1.24	3,0	-	4,0	0,8	-	-	0,30	A, B, C, D
25	1.25	1,0	-	0,8	0,4	-	30	0,25	A, B, C, D
26	1.26	2,0	-	0,4	-	-	-	0,25	A, B, C
27	1.27	4,0	-	4,0	1,0	-	45	0,35	A, B, C, D
28	1.28	5,0	-	5,0	0,8	-	30	0,40	A, B, C, D
29	1.29	1,0	-	2,0	0,3	-	30	0,20	A, B, C
30	1.30	1,0	-	2,0	8,0	-	30	0,20	A, B, C, D

2. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 2. КИНЕМАТИКА

Задача 1. Плоское движение твердого тела

Задание. Движение точки задано координатным способом на плоскости Оху. Следует найти траекторию точки и построить ее на рисунке. Скорость, полное ускорение и касательное ускорение найти как функции времени. Скорость, ускорение, касательное ускорение, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории определить в момент времени t_1. Векторы $\overline{v}_1, \overline{w}_1, \overline{w}_{1\tau}, \overline{w}_{1n}$ показать на рисунке.

Пример. Движение точки задано уравнениями $x = 6\sin t,\ y = 4\cos 2t;\ t_1 = {}^{5\pi}\!/_{4}\ c$.

Решение.

А. Определение траектории точки. Здесь следует исключить время из уравнений движения. В данном примере имеем:

$$\sin t = {}^{x}\!/_{6}\ , \quad \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t.$$

Отсюда получаем уравнение траектории

$$y = 4 - \frac{2}{9}x^2 .$$

Это парабола, симметричная относительно оси ординат. Из условий $-1 \le \sin t \le 1$, $-1 \le \cos 2t \le 1$ следует, что $-6 \le x \le 6$, $-4 \le y \le 4$. Это означает, что траекторией будет не вся парабола, а лишь ее часть, заключенная в названных интервалах. Она изображена на рис. 3.1.

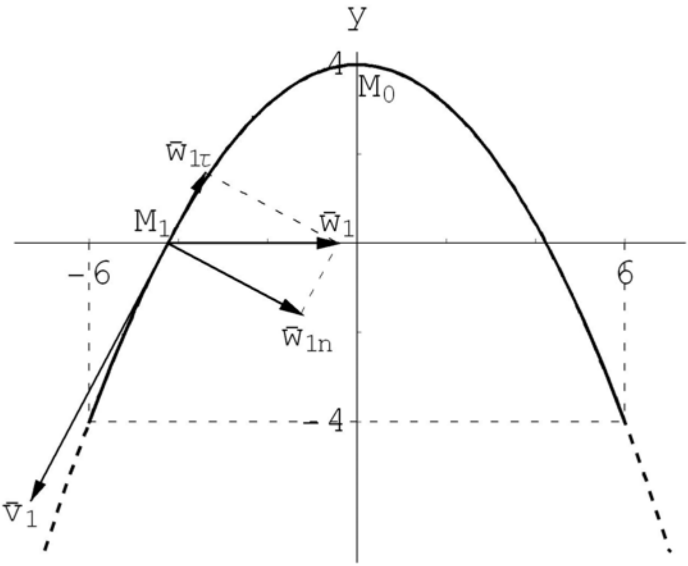

Рис. 3.1

Вершина параболы на рисунке соответствует начальной точке траектории M_0 с координатами (при $t_0=0$) $x_0=0$, $y_0=4$.

В. Определение скорости и ускорения точки в зависимости от времени. Вычисляем проекции скорости и ускорения на прямоугольные оси:

$$v_x=\dot{x}=6\cos t,\; v_y=\dot{y}=-8\sin 2t,$$

$$w_x=\ddot{x}=-6\sin t,\; w_y=-16\cos 2t.$$

Величины скорости и ускорения равны

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{36\cos^2 t+64\sin^2 2t}\;,$$

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2}=\sqrt{36\sin^2 t+256\cos^2 2t}\;.$$

Касательное ускорение будет

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{-36\sin t\cos t + 128\sin 2t\cos 2t}{\sqrt{36\cos^2 t + 64\sin^2 2t}}.$$

С. Определение положения точки и ее кинематических характеристик в заданный момент времени. При $t = t_1 = 5\pi/4$ с имеем координаты точки M_1

$$x_1 = 6\sin\frac{5\pi}{4} = -3\sqrt{2} = -4{,}24 \text{ м}, \; y_1 = 4\cos\frac{5\pi}{2} = 0.$$

Следовательно, точка M_1 находится на оси абсцисс (рис.3.1). По формулам предыдущего пункта находим

$$v_1 = \sqrt{36\cdot 0{,}5 + 64} = \sqrt{82} = 9.06 \text{ м/с}, \; v_{x_1} = 6\cos\frac{5\pi}{4} = -3\sqrt{2} \text{м/с},$$

$$v_{y_1} = -8\sin 2\cdot\frac{5\pi}{4} = -8 \text{м/с}.$$

Последнее означает, что вектор скорости $\overline{v}_1$ направлен по касательной к траектории вниз. Вектор полного ускорения точки строим по его проекциям:

$$w_{x_1} = -6\sin\frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2} = 4{,}24 \text{ м/с}^2, w_{y_1} = -16\cos\frac{5\pi}{2} = 0, w_1 = 4{,}24 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overline{w}_1$ направлен вдоль оси *Ox* вправо. Далее:

$$w_{1\tau} = \frac{-36\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0}{9{,}06} = -1{,}99 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{1n} = \sqrt{w_1^2 - w_{1\tau}^2} = \sqrt{(4{,}24)^2 - (1{,}99)^2} = 3{,}75 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории будет

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{w_{1n}} = \frac{82}{3{,}75} = 21{,}9 \text{ м}.$$

Задания 1*a* – 30*a*. Уравнения движения и момент времени t_1 указаны в таблице 3.1,*a*.

Задания 1*б* – 30*б*. Уравнения движения и момент времени t_1 даны в таблице 3.1,*б*.

Таблица 3.1, *а*

№ задания	x, м	y, м	t_1,с	№ задания	x, м	y, м	t_1,с
1*а*	$4\cos t$	$\sin t$	$3\pi/4$	16*а*	$8\sqrt{2}\cos t$	$12\sqrt{2}\sin t$	$3\pi/4$
2*а*	$4e^{-t}$	$3e^{t}$	0	17*а*	$4e^{-t}$	$8e^{t}$	0
3*а*	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\cos 2t$	$3\pi/4$	18*а*	$3\sqrt{2}\cos t$	$12\cos 2t$	$\pi/4$
4*а*	$2\sin t$	$8\cos t$	$3\pi/4$	19*а*	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\sqrt{2}\cos t$	$5\pi/4$
5*а*	$8t$	$12e^{-t}$	0	20*а*	$2t$	$3e^{-t}$	1
6*а*	$2t$	$4\sin t$	$\pi/6$	21*а*	$4\sqrt{2}\cos t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
7*а*	$2\cos^2 t$	$7\sin 2t$	$\pi/8$	22*а*	$5\sqrt{2}\cos t$	$12\sqrt{2}\sin t$	$5\pi/4$
8*а*	$5e^{t}$	$4e^{-t}$	0	23*а*	$4\sqrt{2}\cos t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
9*а*	t	$2\sin t$	$5\pi/6$	24*а*	$8\sqrt{2}\sin t$	$6\cos^2 t$	$5\pi/4$
10*а*	$3\sqrt{2}\cos t$	$5\sqrt{2}\sin t$	$5\pi/4$	25*а*	$30\sqrt{2}\sin t$	$16\sqrt{2}\cos t$	$3\pi/4$
11*а*	$2t$	$4e^{t}$	0	26*а*	$2t$	$4\cos t$	$2\pi/3$
12*а*	$\sqrt{2}\sin t$	$2\cos 2t$	$5\pi/4$	27*а*	$2\sqrt{2}\cos t$	$2\cos 2t$	$7\pi/4$
13*а*	$10\sqrt{2}\sin t$	$5\sqrt{2}\cos t$	$7\pi/4$	28*а*	$2\cos t$	t	$\pi/3$
14*а*	$3e^{t}$	$4e^{-t}$	0	29*а*	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\cos^2 t$	$\pi/4$
15*а*	$8\sqrt{2}\sin t$	$5\cos^2 t$	$\pi/4$	30*а*	$10\sqrt{2}\sin t$	$4\cos 2t$	$3\pi/4$

Таблица 3.1, *б*

№ задания	x, м	y, м	t_1,с	№ задания	x, м	y, м	t_1,с
1*б*	$3\sin t$	$2\cos 2t$	$3\pi/4$	16*б*	$8\sqrt{2}\cos t$	$15\sqrt{2}\sin t$	$7\pi/4$
2*б*	$6e^{-t}$	$3e^{t}$	0	17*б*	$6e^{t}$	$8e^{-t}$	0
3*б*	$2\sqrt{2}\sin t$	$3\cos 2t$	$3\pi/4$	18*б*	$5\sqrt{2}\cos t$	$12\cos 2t$	$3\pi/4$
4*б*	$2\sin t$	$6\cos t$	$5\pi/4$	19*б*	$6\sqrt{2}\sin t$	$3\sqrt{2}\cos t$	$3\pi/4$
5*б*	$2t$	$3e^{-t}$	0	20*б*	$3t$	$4e^{-t}$	1
6*б*	$2t$	$6\sin t$	$\pi/6$	21*б*	$8\sqrt{2}\cos t$	$6\cos^2 t$	$\pi/4$
7*б*	$6\cos^2 t$	$21\sin 2t$	$\pi/4$	22*б*	$10\sqrt{2}\cos t$	$24\sqrt{2}\sin t$	$3\pi/4$
8*б*	$5e^{t}$	$12e^{-t}$	1	23*б*	$8\sqrt{2}\cos t$	$6\cos^2 t$	$5\pi/4$
9*б*	t	$4\sin t$	$5\pi/6$	24*б*	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
10*б*	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\sqrt{2}\sin t$	$7\pi/4$	25*б*	$15\sqrt{2}\sin t$	$8\sqrt{2}\cos t$	$5\pi/4$
11*б*	$2t$	$4e^{t}$	1	26*б*	$2t$	$6\cos t$	$2\pi/3$
12*б*	$\sqrt{2}\sin t$	$2\cos 2t$	$5\pi/4$	27*б*	$2\sqrt{2}\cos t$	$2\cos 2t$	$7\pi/4$
13*б*	$10\sqrt{2}\sin t$	$5\sqrt{2}\cos t$	$7\pi/4$	28*б*	$2\cos t$	t	$\pi/3$
14*б*	$3e^{t}$	$4e^{-t}$	0	29*б*	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\cos^2 t$	$\pi/4$
15*б*	$8\sqrt{2}\sin t$	$5\cos^2 t$	$\pi/4$	30*б*	$10\sqrt{2}\sin t$	$4\cos 2t$	$3\pi/4$

Задача 2. Плоское движение твердого тела

Задание. Найти для заданного механизма скорости точек *A*, *B* и *M*.

Пример 4.1. Диск радиуса *R* катится без скольжения по плоскости. Центр его *A* движется по закону $s = f(t)$. Скорость точек *A*, *B* и *M* найти для момента t_1 (рис.4.1).Пусть $R = 0.12$ м; $s = (0{,}24t - 0{,}01t^3)$ м; $AM = 0.08$ м; $\beta = \frac{5\pi}{3}$; $t_1 = 2$ с.

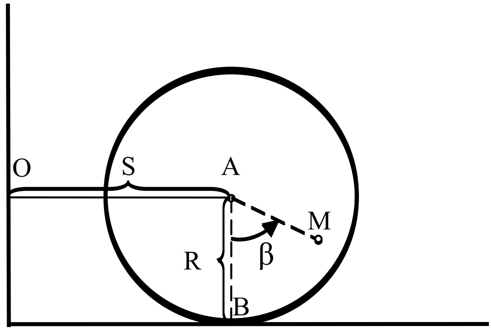

Рис.4.1

Решение. Скорость точки A $\upsilon_A = |\dot{s}| = \left|0{,}24 - 0{,}03t^2\right|$. При подстановке в производную $\dot{s}$ величины заданного момента времени получаем положительную величину. Значит, знак абсолютной величины можно снять, а вектор $\overline{\upsilon_A}$ направлен в сторону увеличения координаты s, т.е. вправо (рис.4.2); модуль этой скорости $\upsilon_A = 0{,}24 - 0{,}03 \cdot 2^2 = 0{,}12$ м / с.

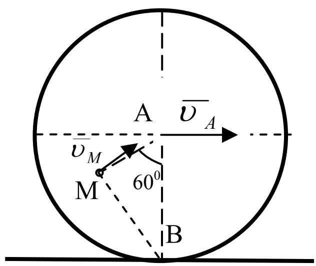

Рис.4.2

Мгновенный центр скоростей диска совпадает с точкой *B*, так как она находится в контакте с неподвижной плоскостью. Таким образом, $\upsilon_B = 0$. Для нахождения угловой скорости воспользуемся формулой $\upsilon_A = BA\omega$, откуда $\omega = \upsilon_A / R = 0{,}12 / 0{,}12 = 1$ рад/с .

Теперь не трудно найти скорость точки *M*: $\upsilon_M = BM\omega$. По теореме косинусов $BM = \sqrt{AM^2 + R^2 - 2\cdot AM\cdot R\cdot\cos 60^0} =$ $= 10^{-2}\sqrt{64+144-2\cdot 8\cdot 12\cdot 0{,}5} = 0{,}04\sqrt{7}$м/с. Окончательно $\upsilon_M = 0{,}04\sqrt{7}\cdot 1 = 0{,}1$ м/с.

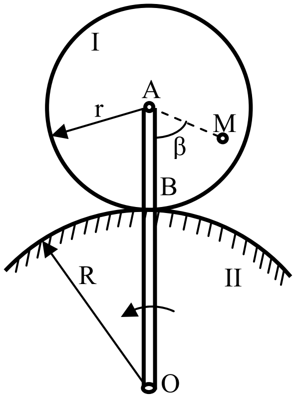

Рис.4.3

Пример 4.2. Шестеренка I радиуса r приводится в движение кривошипом *OA*, вращающимся вокруг оси *O* неподвижной шестеренки II радиуса *R* (рис.4.3). Пусть угловая скорость кривошипа в данный момент $\omega_0 = 1/3\,рад/с$; $r = 0{,}3$м; $R = 0{,}6$м; $AM = 0{,}1\sqrt{3}\,м$; $\beta = 7\pi/6$; кривошип вращается равноускоренно.

Решение. Так как точка *A* принадлежит кривошипу, то скорость ее

$$\upsilon_A = (R + r)\omega_0 = (0{,}6 + 0{,}3)/3 = 0{,}3\text{м/с}.$$

Вектор $\overline{\upsilon}_A$ направлен в соответствии с направлением вращения кривошипа так, как показано на рис.4.4.

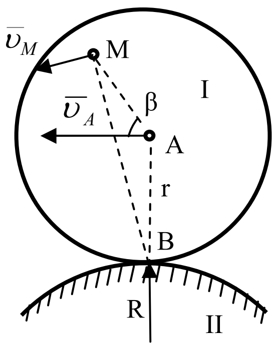

Рис.4.4

Мгновенный центр скоростей совпадает с точкой *B*. Поэтому $\upsilon_B = 0$. Теперь можно найти угловую скорость шестеренки I. Для скорости точки *A* можно написать и такое соотношение: $\upsilon_A = BA \cdot \omega$. Тогда $r\omega = (R+r)\omega_0$, откуда $\omega = (R+r)\omega_0 / r =$ $= (0{,}6+0{,}3)\cdot(1/3)/0{,}3 = 1$ рад/с.

Теперь найдем расстояние $BM = \sqrt{AM^2 + r^2 - 2\cdot AM \cdot r \cdot \cos 150^0} = 0{,}1\sqrt{3+9+2\sqrt{3}\cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$ $= 0{,}1\sqrt{21}\cdot 1 = 0{,}45$ м/с.

Пример 4.3. Кривошип *OA* нецентрального кривошипно-шатунного механизма (рис.4.5) имеет в данный момент угловую скорость ω_0. Пусть $r = 0{,}2\,м$; $AB = l = 0{,}6\,м$; $h = 0{,}2\sqrt{2}\,м$; $AM = 0{,}4 м$; $\omega_0 = 6 рад/с$; $\varphi = \pi/4$; кривошип вращается равноускоренно.

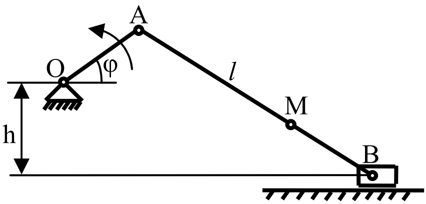

Рис.4.5

Решение. Найдем сначала угол ψ (рис.4.6). Величину отрезка *AK* можно подсчитать двумя способами:

$AK = r\sin 45^0 + h, \quad AK = l\sin\psi$.

Тогда

$\sin\psi = (r\sin 45^0 + h)/l = \left(10\sqrt{2} + 20\sqrt{2}\right)/0{,}6 = \sqrt{2}/2$; $\psi = 45^0$.

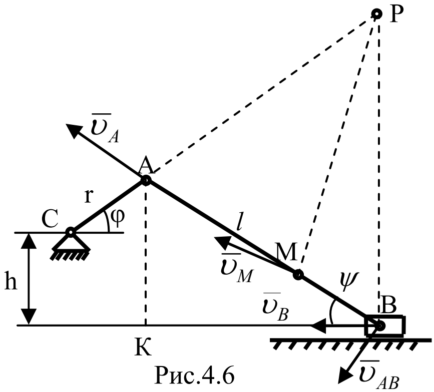

Рис.4.6

Скорость точки *A* $\upsilon_A = r\omega_0 = 0{,}2 \cdot 6 = 1{,}2\ м/с$. Вектор скорости точки *B* направлен горизонтально. Мгновенный центр скоростей шатуна находится в точке *P* на пересечении перпендикуляров к векторам $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$, проходящих соответственно через точки *A* и *B*.

Нетрудно найти расстояние *PA*. Действительно, треугольник ABP –прямоугольный и равнобедренный (углы при основании равны 45^0). Значит, $AP = l = 0{,}6\text{м}$. Для скорости точки *A* можно записать $\upsilon_A = PA\omega$, откуда угловая скорость шатуна $\omega = r\omega_0 / PA = 0{,}2 \cdot 6 / 0{,}6 = 2\text{рад/с}$.

Теперь по формуле $\upsilon_B = PB\omega$ можно определить скорость точки *B*. Заметим, что $PB = l\sqrt{2}$. Следовательно, $\upsilon_B = l\sqrt{2}\omega =$ $= 0{,}6\sqrt{2} \cdot 2 = 1{,}2\sqrt{2} = 1{,}7\ \text{м/с}$.

Шатун вращается по часовой стрелке. Направление вектора $\overline{\upsilon}_{AB}$ показано на рис.4.6.

Для определения скорости точки *M* необходимо найти расстояние $PM = \sqrt{AP^2 + AM^2} = 20\sqrt{9+4} = 0{,}2\sqrt{13}\ \text{см}$. Тогда $\upsilon_M = PM\omega = 0{,}2\sqrt{13} \cdot 2 = 0{,}4\sqrt{13} \approx 1{,}44\ \text{м/с}$.

Задачи 4.1-4.10. Диск радиуса R (см. рис.4.1) катится без скольжения по плоскости (см. пример 4.1). Задачи решить для момента времени t_1. Данные приведены в табл.4.1.

Таблица 4.1

Номер задачи	R, см	f(t), см	AM, см	β,рад	t_1, с
4.1	2	$7\sqrt{3}t-3t^2/2$	1	π/3	$\sqrt{2}$
4.2	$\sqrt{3}$	$3t^2/2-2\sqrt{3}t$	0,5	π/6	$2\sqrt{2}$
4.3	$2\sqrt{2}$	t^2	$\sqrt{3}/2$	π/4	1
4.4	2	$\sqrt{3}t^2-4t$	1	5π/6	$\sqrt{3}$
4.5	$2\sqrt{2}$	$3t^2-2t$	1	4π/3	1
4.6	2	$3t^2/2$	$\sqrt{2}$	5π/6	$2\sqrt{2}$
4.7	2	$3t^2/2+(\sqrt{3-3})t$	$2\sqrt{2}$	7π/4	$\sqrt{2}$
4.8	$\sqrt{3}$	$t^2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	7π/6	1
4.9	2	$t^2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2π/3	$\sqrt{2}$
4.10	$\sqrt{3}$	$t^2\sqrt{3}$	1	3π/4	1

Задачи 4.11-4.20. Шестеренка I радиуса *r* приводится в движение кривошипом *OA*, вращающимся вокруг оси *O* неподвижной шестеренки II радиуса *R* (см.рис.4.3, пример 4.2). Данные приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Номер задачи	r, см	R, см	AM, см	β,рад	ω_0, рад/с
4.11	30	44	10	π/3	5/12
4.12	4	60	3	π/2	2/3
4.13	20	20	6	π/6	3/5
4.14	20	15	15	3π/2	5/8
4.15	20	20/3	$5\sqrt{2}$	3π/6	1/4
4.16	10	4/3	$10\sqrt{3}$	П	$3\sqrt{3}/4$

Продолжение табл. 4.2

4.17	30	114	5	$5\pi/4$	$\sqrt{3}/3$
4.18	$20\sqrt{3}$	60	$10\sqrt{2}$	$2\pi/3$	1/4
4.19	10	$40\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$5\pi/6$	5/12
4.20	10	20	$10\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/3$

Задача 4.21-4.30. Кривошип ОА нецентрального кривошипно-шатунного механизма (см.рис.4.5, пример 4.3). Данные приведены в табл.4.3.

Таблица 4.3

Номер задачи	r, 10^{-2} м	l, 10^{-2} м	h, 10^{-2} м	φ, рад	ω_0, рад/с
4.21	10	80	$30\sqrt{2}$	π	4
4.22	10	40	50	π	2
4.23	$10\sqrt{3}$	40	$20\sqrt{3}$	π	2
4.24	10	60	$50\sqrt{2}$	π	4
4.25	$10\sqrt{2}$	100	$20\sqrt{3}$	$7\pi/4$	6
4.26	$10\sqrt{2}$	100	$40\sqrt{2}$	$3\pi/4$	6
4.27	$10\sqrt{3}$	60	55	$\pi/2$	10
4.28	$10\sqrt{3}$	80	$33\sqrt{2}$	0	6
4.29	20	80	$40\sqrt{3}$	0	4
4.30	$10\sqrt{3}$	40	30	$3\pi/2$	4

3.РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 3. ДИНАМИКА

Задача 1. Колебательное движение материальной точки

Груз массой *m* (материальная точка) прикреплен к пружине жесткости *c*. Начальная деформация пружины λ_0 , начальная скорость груза v_0 . Массой пружины пренебречь. Начало координат взять в положении статического равновесия груза на пружине. Принять g=10 м/с^2.

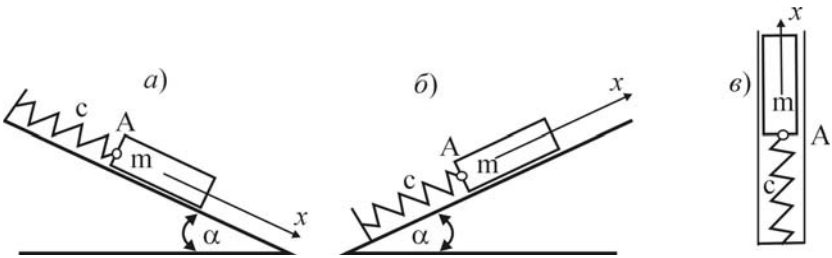

Рис. 5.1

На груз действует возмущающая сила $Q = Q_0 \sin p_1 t$, направление которой совпадает с осью *x*.

Для определения начальных условий в каждом варианте следует использовать условия крепления груза к концу А пружины:

Варианты 5.1- 5.5: К концу А недеформированной пружины прикрепляют груз и опускают без толчка.

Варианты 5.6- 5.10: К концу А недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вниз.

Варианты 5.11-5.15: К концу А недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вверх.

Варианты 5.16- 5.20: К концу А сжатой пружины прикрепляют груз и опускают без толчка.

Варианты 5.21- 5.25: К концу А растянутой пружины прикрепляют груз и опускают без толчка.

Варианты 5.26 - 5.27: Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вниз.

Варианты 5.28 - 5.30: Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вверх.

Задание состоит из двух, последовательно выполняемых, частей:

1) Составить закон свободных и вынужденных (на частоте возмущения p_1) колебаний груза на пружине <u>без сопротивления</u>. Привести график процесса колебаний.

2) На груз дополнительно действует еще и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости: $F_c = \mu v$.

Определить значение резонансной амплитуды и построить, пользуясь формулой для амплитуды вынужденных колебаний, резонансную кривую в интервале изменения частоты возмущающей силы $p \in [0{,}5\ k\ ;\ 1{,}5\ k]$, k –собственная частота свободных колебаний точки в конкретном варианте. Коэффициент сопротивления μ (или коэффициент динамичности $\beta = A_{рез}/A_{ст}$), амплитуда возмущающей силы Q_0 и ее частота p_1 даны в таблице 5.1

Исходные данные. Таблица 5.1

№ Варианта	№ рисунка	m, кг	c, Н/см	v_0, см/с	λ_0, см	α	p_1, $с^{-1}$	Q_0, Н	μ, Н с/м	β
5.1	5.1.*а*	$7\sqrt{2}$	10	-	-	45°	9	100	20	-
5.2	5.1.*а*	$16\sqrt{3}$	10	-	-	60°	9	1	-	20
5.3	5.1.*б*	$28\sqrt{2}$	10	-	-	45°	4	0,1	0,1	-
5.4	5.1.*б*	20	10	-	-	30°	10	20	-	10
5.5	5.1.*в*	20	40	-	-	-	15	10	1	-
5.6	5.1.*а*	$14\sqrt{2}$	20	240	-	45°	11	200	-	5
5.7	5.1.*а*	$16\sqrt{3}$	40	96	-	60°	11	100	-	10
5.8	5.1.*б*	$7\sqrt{2}$	10	240	-	45°	11	50	1	-

Продолжение таблицы 5.1

5.9	5.1.*б*	5	5	120	-	30°	10,5	0,5	0,1	-
5.10	5.1.*в*	16	8	105	-	-	8	0,1	-	5
5.11	5.1.*а*	$7\sqrt{2}$	10	240	-	45°	12	0,5	-	10
5.12	5.1.*а*	$36\sqrt{3}$	90	96	-	60°	8	0,1	2	-
5.13	5.1.*б*	$14\sqrt{2}$	20	240	-	45°	1	1	1	-
5.14	5.1.*б*	10	10	120	-	30°	0,95	2	2	-
5.15	5.1.*а*	32	16	105	-	30°	0,7	2	0,5	-
5.16	5.1.*а*	$14\sqrt{2}$	20	-	5	45°	0,95	0,1	0,1	-
5.17	5.1.*а*	$36\sqrt{3}$	10	-	48	60°	2	0,1	1	-
5.18	5.1.*б*	$28\sqrt{2}$	40	-	3	45°	11	5	1	-
5.19	5.1.*б*	10	20	-	3,5	30°	11	5	-	20
5.20	5.1.*в*	10	10	-	5	-	11	5	-	10
5.21	5.1.*а*	$7\sqrt{2}$	10	-	3	45°	9,5	5	0,1	-
5.22	5.1.*а*	$4\sqrt{3}$	10	-	4	60°	11	5	0,2	-
5.23	5.1.*б*	$28\sqrt{2}$	10	-	18	45°	4,9	5	2	-
5.24	5.1.*б*	10	20	-	7,5	30°	15	5	2	-
5.25	5.1.*в*	20	20	-	10	-	12	20	10	-
5.26	5.1.*б*	20	10	42	$\lambda_{ст}$	30°	0,65	10	-	10
5.27	5.1.*в*	20	20	40	$\lambda_{ст}$	-	11	10	-	10
5.28	5.1.*б*	10	5	28	$\lambda_{ст}$	30°	7	10	-	5
5.29	5.1.*в*	10	10	30	$\lambda_{ст}$	-	7	100	-	5
5.30	5.1.*в*	20	40	42	$\lambda_{ст}$	-	15	100	-	10

Пример.

Пружина жесткостью $2{\cdot}10^4$ Н/м расположена на плоскости, наклоненной к горизонту под углом 30^0. В некоторый момент пружину сжимают на λ_0 = 0,005 м, прикрепляют груз 10 кг и сообщают ему скорость 0,5 м/с, направленную вверх вдоль

Задача 2. Равновесие тел при действии силы трения покоя

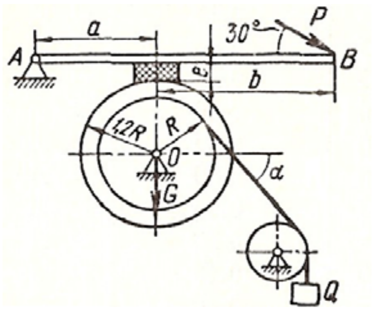

Рис. П2.1

Определить минимальное (в вариантах 1 – 20 ,25,26,29,30) или максимальное (в вариантах 21 – 24, 27.28) значение силы P и реакции опор системы, находящейся в покое. Схемы вариантов представлены на рис. 2. 1- 2.30, а необходимые для расчета данные – в табл. 1.

В вариантах 1 – 20 трение покоя учесть только между тормозной колодкой и барабаном. В вариантах 21 – 30 учесть трение покоя в двух опорных точках тела весом G.

Пример выполнения задания (варианты 1 - 20). Дано: G =2 кН; Q =20 кН; коэффициент трения покоя $f_т$=0,1; α=20^o, a = 10 см; b= 20 см (рис. П2.1).

Определить минимальное значение силы Р и реакции опор O, A, B.

Решение. Рассмотрим сначала систему уравновешивающихся сил, приложенных к телу Q, рис. П2.2. На тело действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}$ и нормальная реакция $\vec{N}_1$.

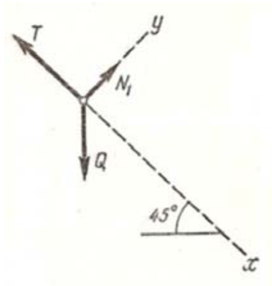

Рис. П2.2

Рассматривая тело Q как материальную точку, составим уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0\,;\ Q\cos 45^o - T = 0\,;\ \sum Y_i = 0\,;\ N_1 - Q\sin 45^o = 0\,.$$

Отсюда

$$T = Q\cos 45^o\,,\ N_1 = Q\sin 45^o\,.$$

Теперь рассмотрим равновесие сил, приложенным к барабану, рис.П2.3:

$$\sum M_{O\,i} = -T'\cdot R + F_m \cdot 1{,}5R = 0\,, \qquad (2.1)$$

где F_m – сила трения покоя;

$\sum X_i = T' + F_m \cos\alpha - N_2 \sin\alpha + X_O = 0$;(2.4)

$\sum Y_i = N_2 \cos\alpha + F_m \sin\alpha - G = 0$.(2.5)

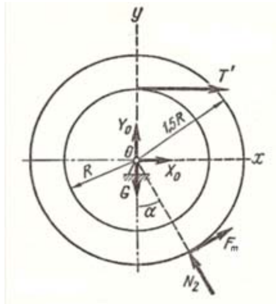

Рис. П2.3

В состоянии предельного равновесия сила Р минимальна, а сила трения покоя между тормозной колодкой и барабаном определяется равенством (законом Кулона)

$$F_m = f_m \cdot N_2 . \qquad (2.6)$$

Из уравнений (1.3) - (1.6) получим:

$$F_m = T'/1{,}5; N_2 = F_m / f_m; X_0 = -T' + N_2 \sin\alpha + F_m \cos\alpha ;$$

$$Y_O = -N_2 \cos\alpha - F_m \sin\alpha + G .$$

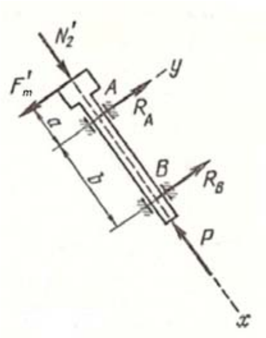

Рис. П2.4

Для определения минимального значения силы P и реакций опор A и B (эти реакции перпендикулярны направляющим A и B, так как трением здесь пренебрегаем) рассмотрим равновесие сил, приложенных к штоку тормозного устройства, рис. П2.4:

$$\sum M_{Ai} = F_m \cdot a + R_B \cdot b = 0; \qquad (2.7)$$

$$\sum X_i = N_2 - P_{\min} = 0 ; \qquad (2.8)$$

$$\sum Y_i = R_A + R_B - F_m' = 0 . \qquad (2.9)$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$R_B = -F_m' a/b ; P_{\min} = N_2'; R_A = -R_B + F_m' .$$

Учитывая, заданные в условии числовые значения, получим:

N_1=14,1 кН; F_m=9,4 кН;

N_2=94 кН; X_0=9,2 кН;

Y_0= -89,6 кН; R_B= -4,7 кН;

R_A=14,1 кН; R_B=94 кН.

Пример выполнения задания (варианты 21 -30). Дано: G = 1 кН; коэффициент трения покоя f_m = 0,4; a = 6 м; b = 2 м (рис. П2.7).

Определить максимальное значение силы *P* и реакции опор *A*, *B, D, E*.

Решение. Рассмотрим сначала систему уравновешивающихся сил, приложенных к телу весом *G*, рис. П2.8. На тело действуют сила тяжести $\vec{G}$, сила $\vec{P}$, нормальные составляющие сил реакции $\vec{N}_D$ и $\vec{N}_E$, а также силы трения покоя $\vec{F}_{m\,(D)}$ и $\vec{F}_{m\,(E)}$.

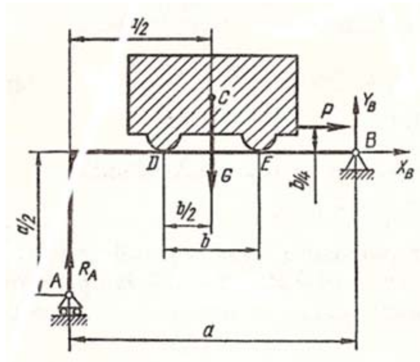

Рис. П2.7

Составим три уравнения равновесия тела весом G под действием указанных сил:

$$\sum X_i = -\vec{F}_{m\,(D)} - \vec{F}_{m\,(E)} + P = 0\,; \qquad (2.10)$$

$$\sum X_i = N_D + N_E - G = 0\,; \qquad (2.11)$$

$$\sum M_{D\,i} = -G\,b/2 - N_E b - P\,b/4 = 0\,. \qquad (2.12)$$

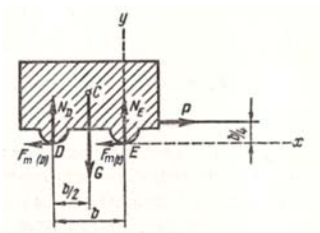

Рис. П2.8

В случае предельного равновесия *P* = P_{max}. При этом силы трения покоя принимают наибольшие значения, а система уравнений дополняется равенствами

$$F_{m\,(D)} = f_m \cdot N_D\,, \qquad (2.13)$$

$$F_{m\,(E)} = f_m \cdot N_E\,. \qquad (2.14)$$

Решая систему уравнений (1.10) – (1.14), получаем:

$$P_{max} = f_m G,\ N_E = (G/2)\cdot(1+0{,}5 f_m),\ N_D = (G/2)\cdot(1-0{,}5 f_m)\,.$$

Отсюда

P_{max}=0,4 кН; N_E=0,6 кН;

N_D=0,4 кН; $F_{m\,(D)}$ = 0,16 кН;

$$F_{m\,(E)} = 0{,}24 \text{ кН}.$$

Совокупности сил $\vec{N}_D$ и $\vec{F}_{m\,(D)}$, $\vec{N}_E$ и $\vec{F}_{m\,(E)}$ образуют соответственно опорные реакции в точках D и E.

Рассмотрим теперь равновесие сил $\vec{R}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{G}, P = P_{\max}$, приложенных ко всей системе (рис. П2.7):

$$\sum X_i = 0\,;\; -X_B + P_{\max} = 0\,; \tag{2.15}$$

$$\sum Y_i = 0\,;\; R_A + Y_B - G = 0\,; \tag{2.16}$$

$$\sum M_{D\,i} = G\,a/2 - R_A \cdot a - P_{\max} \cdot b/4 = 0\,. \tag{2.17}$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$X_B = -P_{max},\; R_A = (G \cdot a/2 - P_{\max} \cdot b/4)/a,\; Y_B = G - R_A\,.$$

Отсюда R_A=0,467 кН; X_B=-0,4 кН, Y_B=0,533 кН.

Схемы к вариантам заданий представлены на рис. 2.1 – 2.30.

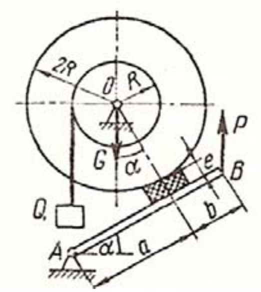

Рис. 2.1

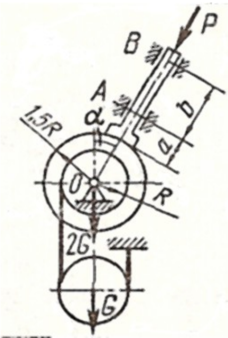

Рис. 2.2

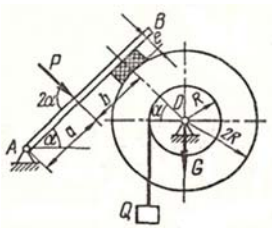

Рис. 2.3

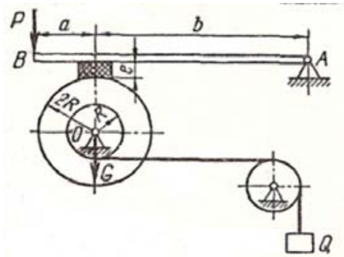

Рис. 2.4

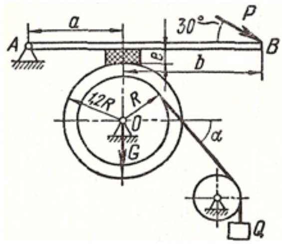

Рис. 2.5

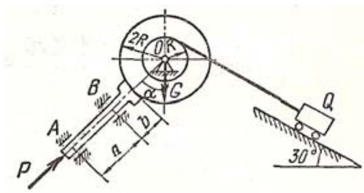

Рис. 2.6

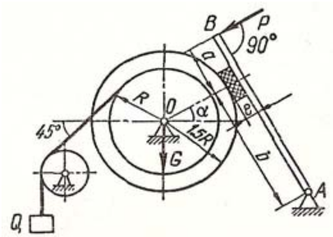

Рис. 2.7

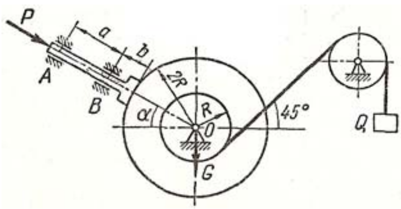

Рис. 2.8

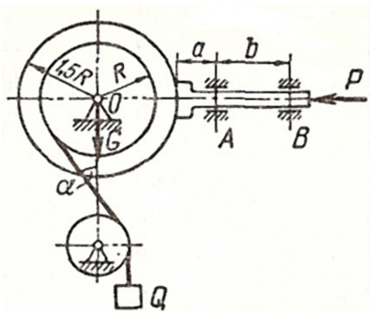

Рис.2.9

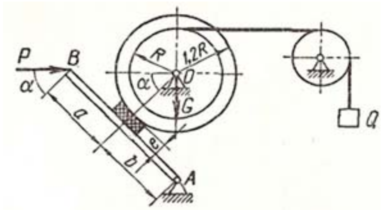

Рис. 2.10

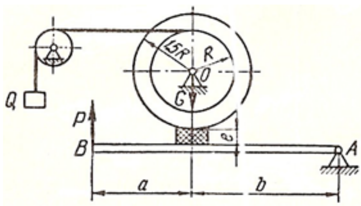

Рис. 2.11

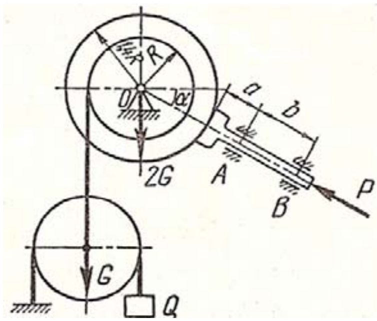

Рис. 2.12

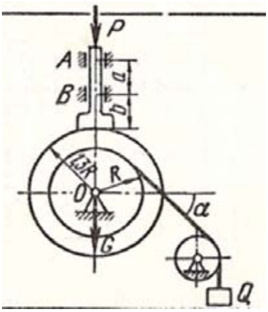

Рис. 2.13

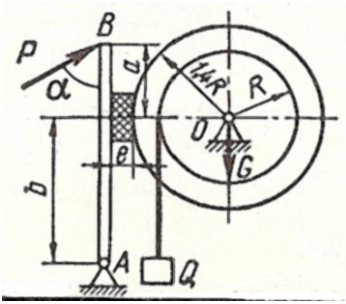

Рис. 2.14

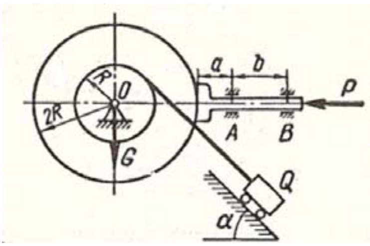

Рис. 2.15

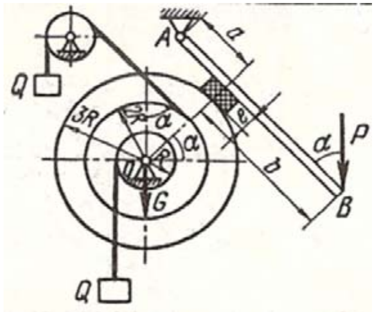

Рис. 2.16

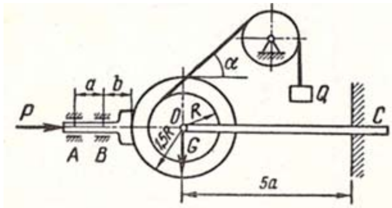

Рис. 2.17

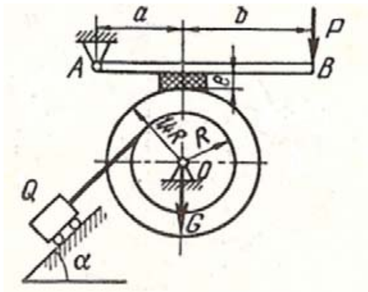

Рис. 2.18

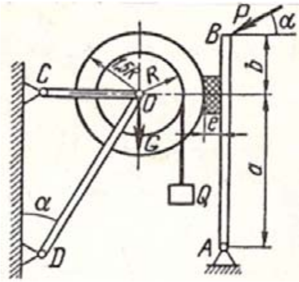

Рис. 2.19

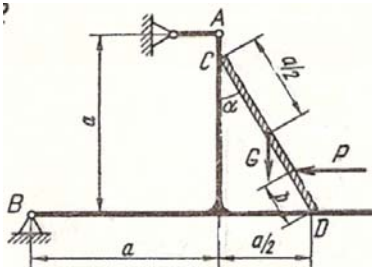

Рис. 2.22

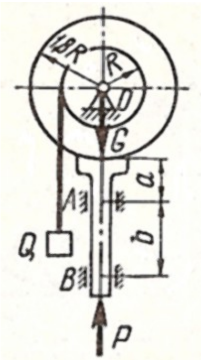

Рис. 2.20

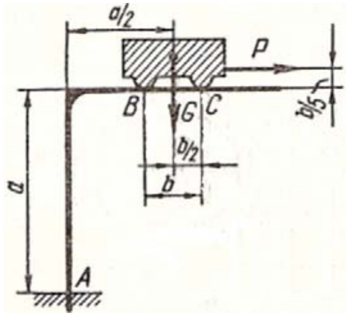

Рис. 2.23

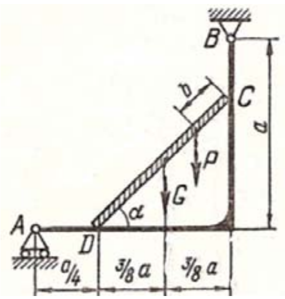

Рис. 2.21

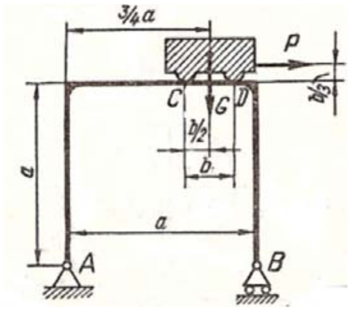

Рис. 2.24

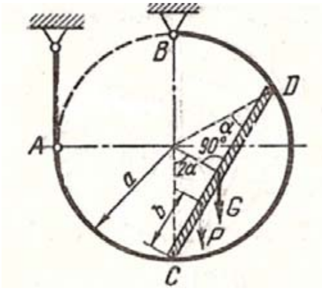

Рис. 2.25

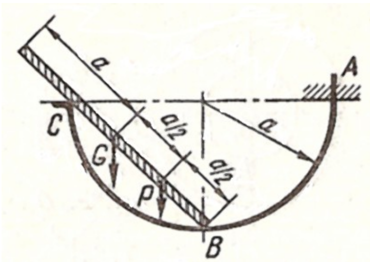

Рис. 2.26

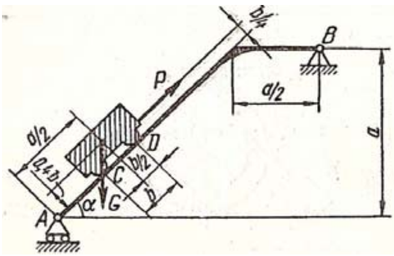

Рис. 2.27

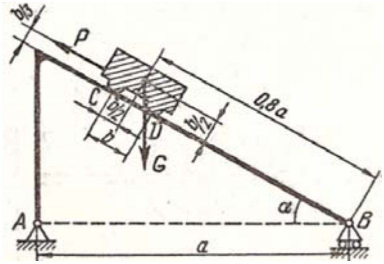

Рис. 2.28

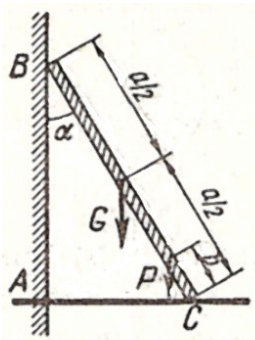

Рис. 2.29

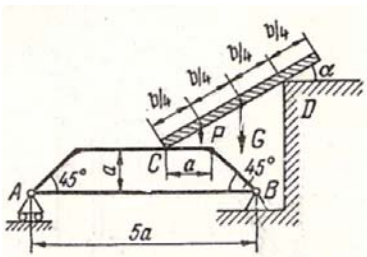

Рис. 2.30

Таблица 2.1 Исходные данные для расчета.

№ варианта	№ рисунка	G, кН	Q, кН	a, м	b, м	c, м	α, град	f_m	Точки, в которых определяются реакции
1	1.1	1,0	10	0,20	0,10	0,04	30	0,10	*O, A*
2	1.2	1,1	-	0,10	0,15	-	40	0,15	*O, A, B*
3	1.3	1,3	14	0,45	0,40	0,05	45	0,20	*O, A*
4	1.4	1,8	15	0,10	0,40	0,06	-	0,25	*O, A*
5	1.5	1,5	16	0,20	0,30	0,04	45	0,30	*O, A*
6	1.6	1,6	18	0,15	0,10	-	45	0,35	*O, A, B*
7	1.7	20	20	0,20	0,50	0,05	30	0,40	*O, A*
8	1.8	1,8	18	0,20	0,10	-	30	0,35	*O, A, B*
9	1.9	2,1	20	0,10	0,20	-	30	0,30	*O, A, B*
10	1.10	1,8	22	0,30	0,30	0,04	45	0,25	*O, A*
11	1.11	1,9	24	0,40	0,50	0,06	-	0,20	*O, A*
12	1.12	2,0	25	0,10	0,25	-	30	0,15	*O, A, B*
13	1.13	1,6	20	0,10	0,10	-	45	0,10	*O, A, B*
14	1.14	1,7	24	0,10	0,25	0,04	60	0,15	*O, A*
15	1.15	1,8	20	0,10	0,15	-	45	0,20	*O, A, B*
16	1.16	1,2	15	0,20	0,45	0,04	45	0,25	*O, A*
17	1.17	1,3	12	0,15	0,15	-	45	0,30	*O, A, B, C*
18	1.18	1,4	14	0,20	0,30	0,05	60	0,35	*O, A*
19	1.19	1,7	16	0,50	0,20	0,06	30	0,40	*A, C, D*
20	1.20	1,6	18	0,10	0,15	-	-	0,45	*O, A, B*
21	1.21	1,0	-	2,0	0,50	-	45	0,45	A, B, C, D
22	1.22	1,5	-	3,0	0,8	-	30	0,35	A, B, C, D
23	1.23	2,0	-	5,0	1,4	-	-	0,40	A, B, C
24	1.24	3,0	-	4,0	0,8	-	-	0,30	A, B, C, D
25	1.25	1,0	-	0,8	0,4	-	30	0,25	A, B, C, D
26	1.26	2,0	-	0,4	-	-	-	0,25	A, B, C
27	1.27	4,0	-	4,0	1,0	-	45	0,35	A, B, C, D
28	1.28	5,0	-	5,0	0,8	-	30	0,40	A, B, C, D
29	1.29	1,0	-	2,0	0,3	-	30	0,20	A, B, C
30	1.30	1,0	-	2,0	8,0	-	30	0,20	A, B, C, D

2. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 2. КИНЕМАТИКА

Задача 1. Плоское движение твердого тела

Задание. Движение точки задано координатным способом на плоскости Oxy. Следует найти траекторию точки и построить ее на рисунке. Скорость, полное ускорение и касательное ускорение найти как функции времени. Скорость, ускорение, касательное ускорение, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории определить в момент времени t_1. Векторы $\overline{v}_1, \overline{w}_1, \overline{w}_{1\tau}, \overline{w}_{1n}$ показать на рисунке.

Пример. Движение точки задано уравнениями $x = 6\sin t,\ y = 4\cos 2t;\ t_1 = {}^{5\pi}\!/_{4}\ c$.

Решение.

А. Определение траектории точки. Здесь следует исключить время из уравнений движения. В данном примере имеем:

$$\sin t = {}^{x}\!/_{6}\ , \quad \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t.$$

Отсюда получаем уравнение траектории

$$y = 4 - \frac{2}{9}x^2.$$

Это парабола, симметричная относительно оси ординат. Из условий $-1 \le \sin t \le 1,\quad -1 \le \cos 2t \le 1$ следует, что $-6 \le x \le 6,\ -4 \le y \le 4$. Это означает, что траекторией будет не вся парабола, а лишь ее часть, заключенная в названных интервалах. Она изображена на рис. 3.1.

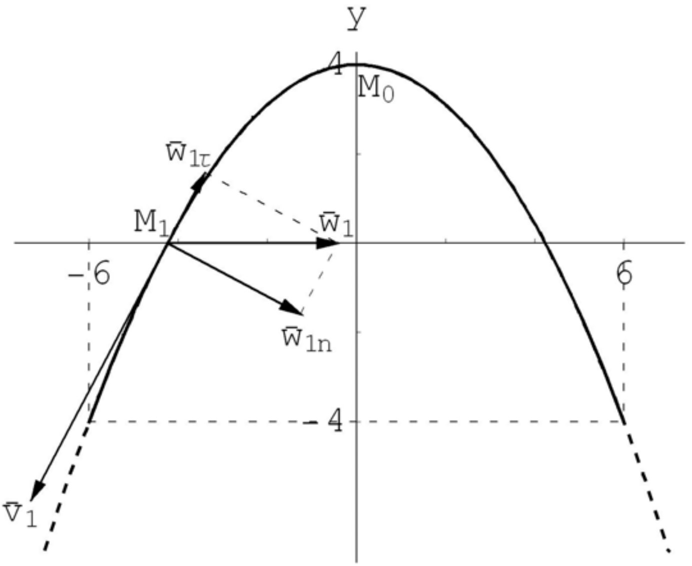

Рис. 3.1

Вершина параболы на рисунке соответствует начальной точке траектории M_0 с координатами (при $t_0 = 0$) $x_0 = 0$, $y_0 = 4$.

В. Определение скорости и ускорения точки в зависимости от времени. Вычисляем проекции скорости и ускорения на прямоугольные оси:

$$v_x = \dot{x} = 6\cos t,\ v_y = \dot{y} = -8\sin 2t,$$

$$w_x = \ddot{x} = -6\sin t,\ w_y = -16\cos 2t.$$

Величины скорости и ускорения равны

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36\cos^2 t + 64\sin^2 2t}\ ,$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{36\sin^2 t + 256\cos^2 2t}\ .$$

Касательное ускорение будет

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{-36\sin t\cos t + 128\sin 2t\cos 2t}{\sqrt{36\cos^2 t + 64\sin^2 2t}}.$$

С. Определение положения точки и ее кинематических характеристик в заданный момент времени. При $t = t_1 = 5\pi/4$ с имеем координаты точки M_1

$$x_1 = 6\sin\frac{5\pi}{4} = -3\sqrt{2} = -4{,}24 \text{ м}, \; y_1 = 4\cos\frac{5\pi}{2} = 0.$$

Следовательно, точка M_1 находится на оси абсцисс (рис.3.1). По формулам предыдущего пункта находим

$$v_1 = \sqrt{36\cdot 0{,}5 + 64} = \sqrt{82} = 9.06\,\text{м/с}, \; v_{x_1} = 6\cos\frac{5\pi}{4} = -3\sqrt{2}\text{м/с},$$

$$v_{y_1} = -8\sin 2\cdot\frac{5\pi}{4} = -8\text{м/с}.$$

Последнее означает, что вектор скорости $\overline{v}_1$ направлен по касательной к траектории вниз. Вектор полного ускорения точки строим по его проекциям:

$$w_{x_1} = -6\sin\frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2} = 4{,}24\,\text{м}/\text{с}^2, w_{y_1} = -16\cos\frac{5\pi}{2} = 0, w_1 = 4{,}24\,\text{м}/\text{с}^2.$$

Вектор $\overline{w}_1$ направлен вдоль оси *Ox* вправо. Далее:

$$w_{1\tau} = \frac{-36\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0}{9{,}06} = -1{,}99\,\text{м}/\text{с}^2,$$

$$w_{1n} = \sqrt{w_1^2 - w_{1\tau}^2} = \sqrt{(4{,}24)^2 - (1{,}99)^2} = 3{,}75\,\text{м}/\text{с}^2.$$

Радиус кривизны траектории будет

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{w_{1n}} = \frac{82}{3{,}75} = 21{,}9\,\text{м}.$$

Задания 1*а* – 30*а*. Уравнения движения и момент времени t_1 указаны в таблице 3.1,*а*.

Задания 1*б* – 30*б*. Уравнения движения и момент времени t_1 даны в таблице 3.1,*б*.

Таблица 3.1, *а*

№ задания	x, м	y, м	t_1,с	№ задания	x, м	y, м	t_1,с
1*а*	$4\cos t$	$\sin t$	$3\pi/4$	16*а*	$8\sqrt{2}\cos t$	$12\sqrt{2}\sin t$	$3\pi/4$
2*а*	$4e^{-t}$	$3e^{t}$	0	17*а*	$4e^{-t}$	$8e^{t}$	0
3*а*	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\cos 2t$	$3\pi/4$	18*а*	$3\sqrt{2}\cos t$	$12\cos 2t$	$\pi/4$
4*а*	$2\sin t$	$8\cos t$	$3\pi/4$	19*а*	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\sqrt{2}\cos t$	$5\pi/4$
5*а*	$8t$	$12e^{-t}$	0	20*а*	$2t$	$3e^{-t}$	1
6*а*	$2t$	$4\sin t$	$\pi/6$	21*а*	$4\sqrt{2}\cos t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
7*а*	$2\cos^2 t$	$7\sin 2t$	$\pi/8$	22*а*	$5\sqrt{2}\cos t$	$12\sqrt{2}\sin t$	$5\pi/4$
8*а*	$5e^{t}$	$4e^{-t}$	0	23*а*	$4\sqrt{2}\cos t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
9*а*	t	$2\sin t$	$5\pi/6$	24*а*	$8\sqrt{2}\sin t$	$6\cos^2 t$	$5\pi/4$
10*а*	$3\sqrt{2}\cos t$	$5\sqrt{2}\sin t$	$5\pi/4$	25*а*	$30\sqrt{2}\sin t$	$16\sqrt{2}\cos t$	$3\pi/4$
11*а*	$2t$	$4e^{t}$	0	26*а*	$2t$	$4\cos t$	$2\pi/3$
12*а*	$\sqrt{2}\sin t$	$2\cos 2t$	$5\pi/4$	27*а*	$2\sqrt{2}\cos t$	$2\cos 2t$	$7\pi/4$
13*а*	$10\sqrt{2}\sin t$	$5\sqrt{2}\cos t$	$7\pi/4$	28*а*	$2\cos t$	t	$\pi/3$
14*а*	$3e^{t}$	$4e^{-t}$	0	29*а*	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\cos^2 t$	$\pi/4$
15*а*	$8\sqrt{2}\sin t$	$5\cos^2 t$	$\pi/4$	30*а*	$10\sqrt{2}\sin t$	$4\cos 2t$	$3\pi/4$

Таблица 3.1, *б*

№ за-да-ния	x, м	y, м	t_1,с	№ за-да-ния	x, м	y, м	t_1,с
1б	$3\sin t$	$2\cos 2t$	$3\pi/4$	16б	$8\sqrt{2}\cos t$	$15\sqrt{2}\sin t$	$7\pi/4$
2б	$6e^{-t}$	$3e^{t}$	0	17б	$6e^{t}$	$8e^{-t}$	0
3б	$2\sqrt{2}\sin t$	$3\cos 2t$	$3\pi/4$	18б	$5\sqrt{2}\cos t$	$12\cos 2t$	$3\pi/4$
4б	$2\sin t$	$6\cos t$	$5\pi/4$	19б	$6\sqrt{2}\sin t$	$3\sqrt{2}\cos t$	$3\pi/4$
5б	$2t$	$3e^{-t}$	0	20б	$3t$	$4e^{-t}$	1
6б	$2t$	$6\sin t$	$\pi/6$	21б	$8\sqrt{2}\cos t$	$6\cos^2 t$	$\pi/4$
7б	$6\cos^2 t$	$21\sin 2t$	$\pi/4$	22б	$10\sqrt{2}\cos t$	$24\sqrt{2}\sin t$	$3\pi/4$
8б	$5e^{t}$	$12e^{-t}$	1	23б	$8\sqrt{2}\cos t$	$6\cos^2 t$	$5\pi/4$
9б	t	$4\sin t$	$5\pi/6$	24б	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
10б	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\sqrt{2}\sin t$	$7\pi/4$	25б	$15\sqrt{2}\sin t$	$8\sqrt{2}\cos t$	$5\pi/4$
11б	$2t$	$4e^{t}$	1	26б	$2t$	$6\cos t$	$2\pi/3$
12б	$\sqrt{2}\sin t$	$2\cos 2t$	$5\pi/4$	27б	$2\sqrt{2}\cos t$	$2\cos 2t$	$7\pi/4$
13б	$10\sqrt{2}\sin t$	$5\sqrt{2}\cos t$	$7\pi/4$	28б	$2\cos t$	t	$\pi/3$
14б	$3e^{t}$	$4e^{-t}$	0	29б	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\cos^2 t$	$\pi/4$
15б	$8\sqrt{2}\sin t$	$5\cos^2 t$	$\pi/4$	30б	$10\sqrt{2}\sin t$	$4\cos 2t$	$3\pi/4$

Задача 2. Плоское движение твердого тела

Задание. Найти для заданного механизма скорости точек *A*, *B* и *M*.

Пример 4.1. Диск радиуса *R* катится без скольжения по плоскости. Центр его *A* движется по закону $s = f(t)$. Скорость точек *A*, *B* и *M* найти для момента t_1 (рис.4.1).Пусть $R = 0.12$ м; $s = (0{,}24t - 0{,}01t^3)$ м; $AM = 0.08$ м; $\beta = \dfrac{5\pi}{3}$; $t_1 = 2$ с.

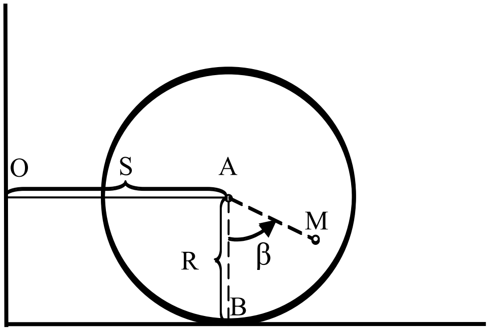

Рис.4.1

Решение. Скорость точки А $\upsilon_A = |\dot{s}| = \left|0{,}24 - 0{,}03t^2\right|$. При подстановке в производную $\dot{s}$ величины заданного момента времени получаем положительную величину. Значит, знак абсолютной величины можно снять, а вектор $\overline{\upsilon_A}$ направлен в сторону увеличения координаты s, т.е. вправо (рис.4.2); модуль этой скорости $\upsilon_A = 0{,}24 - 0{,}03 \cdot 2^2 = 0{,}12$ м/с.

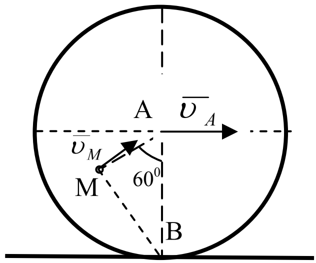

Рис.4.2

Мгновенный центр скоростей диска совпадает с точкой *B*, так как она находится в контакте с неподвижной плоскостью. Таким образом, $\upsilon_B = 0$. Для нахождения угловой скорости воспользуемся формулой $\upsilon_A = BA\omega$, откуда $\omega = \upsilon_A / R = 0{,}12/0{,}12 = 1$ рад/с .

Теперь не трудно найти скорость точки *M*: $\upsilon_M = BM\omega$. По теореме косинусов $BM = \sqrt{AM^2 + R^2 - 2 \cdot AM \cdot R \cdot \cos 60^0} =$ $= 10^{-2}\sqrt{64 + 144 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 0{,}5} = 0{,}04\sqrt{7}$м/с. Окончательно $\upsilon_M = 0{,}04\sqrt{7} \cdot 1 = 0{,}1$ м/с.

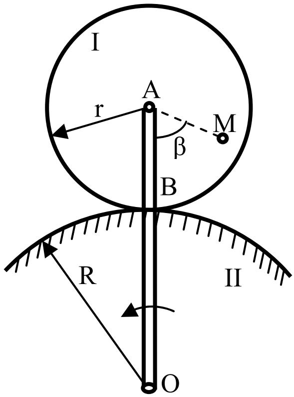

Рис.4.3

Пример 4.2. Шестеренка I радиуса r приводится в движение кривошипом *OA*, вращающимся вокруг оси *O* неподвижной шестеренки II радиуса *R* (рис.4.3). Пусть угловая скорость кривошипа в данный момент $\omega_0 = 1/3\,рад/с$; $r = 0{,}3$м; $R = 0{,}6$м; $AM = 0{,}1\sqrt{3}\,м$; $\beta = 7\pi/6$; кривошип вращается равноускоренно.

Решение. Так как точка *A* принадлежит кривошипу, то скорость ее

$$\upsilon_A = (R + r)\omega_0 = (0{,}6 + 0{,}3)/3 = 0{,}3\text{м/с}.$$

Вектор $\overline{\upsilon}_A$ направлен в соответствии с направлением вращения кривошипа так, как показано на рис.4.4.

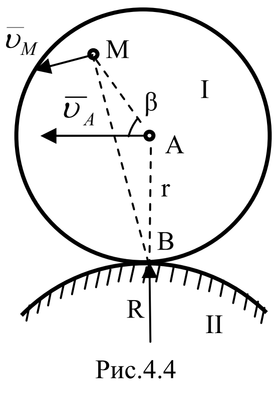

Рис.4.4

Мгновенный центр скоростей совпадает с точкой B. Поэтому $\upsilon_B = 0$. Теперь можно найти угловую скорость шестеренки I. Для скорости точки A можно написать и такое соотношение: $\upsilon_A = BA \cdot \omega$. Тогда $r\omega = (R + r)\omega_0$, откуда $\omega = (R + r)\omega_0 / r = = (0{,}6 + 0{,}3) \cdot (1/3) / 0{,}3 = 1$ рад/с.

Теперь найдем расстояние $BM = \sqrt{AM^2 + r^2 - 2 \cdot AM \cdot r \cdot \cos 150^0} = 0{,}1\sqrt{3 + 9 + 2\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} =$
$= 0{,}1\sqrt{21} \cdot 1 = 0{,}45$ м/с.

Пример 4.3. Кривошип OA нецентрального кривошипно-шатунного механизма (рис.4.5) имеет в данный момент угловую скорость ω_0. Пусть $r = 0{,}2\, м$; $AB = l = 0{,}6\, м$; $h = 0{,}2\sqrt{2}\, м$; $AM = 0{,}4 м$; $\omega_0 = 6\, рад/с$; $\varphi = \pi / 4$; кривошип вращается равноускоренно.

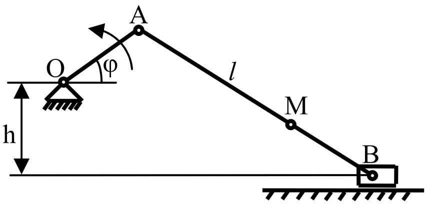

Рис.4.5

Решение. Найдем сначала угол ψ (рис.4.6). Величину отрезка AK можно подсчитать двумя способами:

$AK = r \sin 45^0 + h, \quad AK = l \sin\psi$.

Тогда

$\sin\psi = (r \sin 45^0 + h) / l = \left(10\sqrt{2} + 20\sqrt{2}\right) / 0{,}6 = \sqrt{2} / 2$; $\psi = 45^0$.

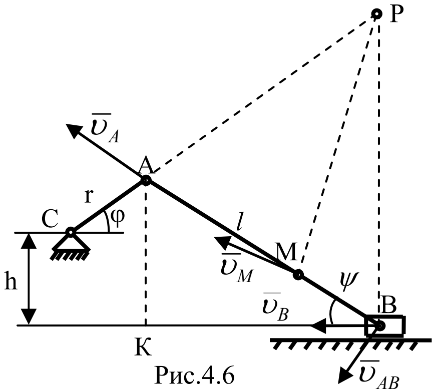

Рис.4.6

Скорость точки A $\upsilon_A = r\omega_0 = 0{,}2 \cdot 6 = 1{,}2\ м/с$. Вектор скорости точки B направлен горизонтально. Мгновенный центр скоростей шатуна находится в точке P на пересечении перпендикуляров к векторам $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$, проходящих соответственно через точки A и B.

Нетрудно найти расстояние PA. Действительно, треугольник ABP –прямоугольный и равнобедренный (углы при основании равны 45^0). Значит, $AP = l = 0{,}6$м. Для скорости точки A можно записать $\upsilon_A = PA\omega$, откуда угловая скорость шатуна $\omega = r\omega_0 / PA = 0{,}2 \cdot 6 / 0{,}6 = 2$рад/с.

Теперь по формуле $\upsilon_B = PB\omega$ можно определить скорость точки B. Заметим, что $PB = l\sqrt{2}$. Следовательно, $\upsilon_B = l\sqrt{2}\omega =$ $= 0{,}6\sqrt{2} \cdot 2 = 1{,}2\sqrt{2} = 1{,}7$ м/с.

Шатун вращается по часовой стрелке. Направление вектора $\overline{\upsilon}_{AB}$ показано на рис.4.6.

Для определения скорости точки M необходимо найти расстояние $PM = \sqrt{AP^2 + AM^2} = 20\sqrt{9+4} = 0{,}2\sqrt{13}$ см. Тогда $\upsilon_M = PM\omega = 0{,}2\sqrt{13} \cdot 2 = 0{,}4\sqrt{13} \approx 1{,}44$ м/с.

Задачи 4.1-4.10. Диск радиуса R (см. рис.4.1) катится без скольжения по плоскости (см. пример 4.1). Задачи решить для момента времени t_1. Данные приведены в табл.4.1.

Таблица 4.1

Номер задачи	R, см	f(t), см	AM, см	β,рад	t_1, с
4.1	2	$7\sqrt{3}t-3t^2/2$	1	π/3	$\sqrt{2}$
4.2	$\sqrt{3}$	$3t^2/2-2\sqrt{3}t$	0,5	π/6	$2\sqrt{2}$
4.3	$2\sqrt{2}$	t^2	$\sqrt{3}/2$	π/4	1
4.4	2	$\sqrt{3}t^2-4t$	1	5π/6	$\sqrt{3}$
4.5	$2\sqrt{2}$	$3t^2-2t$	1	4π/3	1
4.6	2	$3t^2/2$	$\sqrt{2}$	5π/6	$2\sqrt{2}$
4.7	2	$3t^2/2+(\sqrt{3-3})t$	$2\sqrt{2}$	7π/4	$\sqrt{2}$
4.8	$\sqrt{3}$	$t^2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	7π/6	1
4.9	2	$t^2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2π/3	$\sqrt{2}$
4.10	$\sqrt{3}$	$t^2\sqrt{3}$	1	3π/4	1

Задачи 4.11-4.20. Шестеренка I радиуса *r* приводится в движение кривошипом *OA*, вращающимся вокруг оси *O* неподвижной шестеренки II радиуса *R* (см.рис.4.3, пример 4.2). Данные приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Номер задачи	r, см	R, см	AM, см	β,рад	ω_0, рад/с
4.11	30	44	10	π/3	5/12
4.12	4	60	3	π/2	2/3
4.13	20	20	6	π/6	3/5
4.14	20	15	15	3π/2	5/8
4.15	20	20/3	$5\sqrt{2}$	3π/6	1/4
4.16	10	4/3	$10\sqrt{3}$	П	$3\sqrt{3}/4$

Продолжение табл. 4.2

4.17	30	114	5	$5\pi/4$	$\sqrt{3}/3$
4.18	$20\sqrt{3}$	60	$10\sqrt{2}$	$2\pi/3$	1/4
4.19	10	$40\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$5\pi/6$	5/12
4.20	10	20	$10\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/3$

Задача 4.21-4.30. Кривошип ОА нецентрального кривошипно-шатунного механизма (см.рис.4.5, пример 4.3). Данные приведены в табл.4.3.

Таблица 4.3

Номер задачи	r, 10^{-2} м	l, 10^{-2} м	h, 10^{-2} м	φ, рад	ω_0, рад/с
4.21	10	80	$30\sqrt{2}$	π	4
4.22	10	40	50	π	2
4.23	$10\sqrt{3}$	40	$20\sqrt{3}$	π	2
4.24	10	60	$50\sqrt{2}$	π	4
4.25	$10\sqrt{2}$	100	$20\sqrt{3}$	$7\pi/4$	6
4.26	$10\sqrt{2}$	100	$40\sqrt{2}$	$3\pi/4$	6
4.27	$10\sqrt{3}$	60	55	$\pi/2$	10
4.28	$10\sqrt{3}$	80	$33\sqrt{2}$	0	6
4.29	20	80	$40\sqrt{3}$	0	4
4.30	$10\sqrt{3}$	40	30	$3\pi/2$	4

3.РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 3. ДИНАМИКА

Задача 1. Колебательное движение материальной точки

Груз массой *m* (материальная точка) прикреплен к пружине жесткости *c*. Начальная деформация пружины λ_0 , начальная скорость груза v_0 . Массой пружины пренебречь. Начало координат взять в положении статического равновесия груза на пружине. Принять g=10 м/с^2.

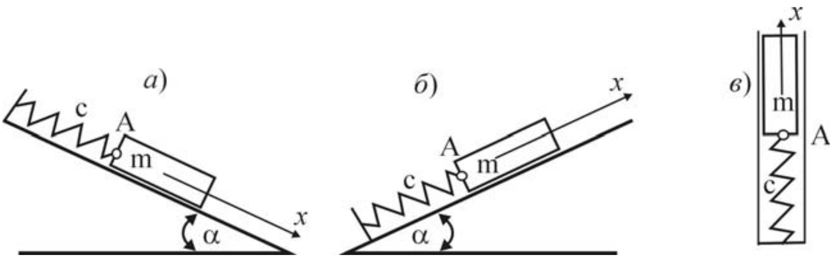

Рис. 5.1

На груз действует возмущающая сила $Q = Q_0 \sin p_1 t$, направление которой совпадает с осью *x*.

Для определения начальных условий в каждом варианте следует использовать условия крепления груза к концу А пружины:

Варианты 5.1- 5.5: К концу А недеформированной пружины прикрепляют груз и опускают без толчка.

Варианты 5.6- 5.10: К концу А недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вниз.

Варианты 5.11-5.15: К концу А недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вверх.

Варианты 5.16- 5.20: К концу А сжатой пружины прикрепляют груз и опускают без толчка.

Варианты 5.21- 5.25: К концу А растянутой пружины прикрепляют груз и опускают без толчка.

Варианты 5.26 - 5.27: Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вниз.

Варианты 5.28 - 5.30: Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вверх.

Задание состоит из двух, последовательно выполняемых, частей:

1) Составить закон свободных и вынужденных (на частоте возмущения p_1) колебаний груза на пружине без сопротивления. Привести график процесса колебаний.

2) На груз дополнительно действует еще и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости: $F_c = \mu v$.

Определить значение резонансной амплитуды и построить, пользуясь формулой для амплитуды вынужденных колебаний, резонансную кривую в интервале изменения частоты возмущающей силы $p \in [0{,}5\,k\,;\,1{,}5\,k]$, k –собственная частота свободных колебаний точки в конкретном варианте. Коэффициент сопротивления μ (или коэффициент динамичности $\beta = A_{рез}/A_{ст}$), амплитуда возмущающей силы Q_0 и ее частота p_1 даны в таблице 5.1

Исходные данные. Таблица 5.1

№ Варианта	№ рисунка	m, кг	c, Н/см	v_0, см/с	λ_0, см	α	p_1, $с^{-1}$	Q_0, Н	μ, Н с/м	β
5.1	5.1.*а*	$7\sqrt{2}$	10	-	-	45°	9	100	20	-
5.2	5.1.*а*	$16\sqrt{3}$	10	-	-	60°	9	1	-	20
5.3	5.1.*б*	$28\sqrt{2}$	10	-	-	45°	4	0,1	0,1	-
5.4	5.1.*б*	20	10	-	-	30°	10	20	-	10
5.5	5.1.*в*	20	40	-	-	-	15	10	1	-
5.6	5.1.*а*	$14\sqrt{2}$	20	240	-	45°	11	200	-	5
5.7	5.1.*а*	$16\sqrt{3}$	40	96	-	60°	11	100	-	10
5.8	5.1.*б*	$7\sqrt{2}$	10	240	-	45°	11	50	1	-

Продолжение таблицы 5.1

5.9	5.1.*б*	5	5	120	-	30°	10,5	0,5	0,1	-
5.10	5.1.*в*	16	8	105	-	-	8	0,1	-	5
5.11	5.1.*а*	$7\sqrt{2}$	10	240	-	45°	12	0,5	-	10
5.12	5.1.*а*	$36\sqrt{3}$	90	96	-	60°	8	0,1	2	-
5.13	5.1.*б*	$14\sqrt{2}$	20	240	-	45°	1	1	1	-
5.14	5.1.*б*	10	10	120	-	30°	0,95	2	2	-
5.15	5.1.*а*	32	16	105	-	30°	0,7	2	0,5	-
5.16	5.1.*а*	$14\sqrt{2}$	20	-	5	45°	0,95	0,1	0,1	-
5.17	5.1.*а*	$36\sqrt{3}$	10	-	48	60°	2	0,1	1	-
5.18	5.1.*б*	$28\sqrt{2}$	40	-	3	45°	11	5	1	-
5.19	5.1.*б*	10	20	-	3,5	30°	11	5	-	20
5.20	5.1.*в*	10	10	-	5	-	11	5	-	10
5.21	5.1.*а*	$7\sqrt{2}$	10	-	3	45°	9,5	5	0,1	-
5.22	5.1.*а*	$4\sqrt{3}$	10	-	4	60°	11	5	0,2	-
5.23	5.1.*б*	$28\sqrt{2}$	10	-	18	45°	4,9	5	2	-
5.24	5.1.*б*	10	20	-	7,5	30°	15	5	2	-
5.25	5.1.*в*	20	20	-	10	-	12	20	10	-
5.26	5.1.*б*	20	10	42	$\lambda_{ст}$	30°	0,65	10	-	10
5.27	5.1.*в*	20	20	40	$\lambda_{ст}$	-	11	10	-	10
5.28	5.1.*б*	10	5	28	$\lambda_{ст}$	30°	7	10	-	5
5.29	5.1.*в*	10	10	30	$\lambda_{ст}$	-	7	100	-	5
5.30	5.1.*в*	20	40	42	$\lambda_{ст}$	-	15	100	-	10

Пример.

Пружина жесткостью $2{\cdot}10^4$ Н/м расположена на плоскости, наклоненной к горизонту под углом 30^0. В некоторый момент пружину сжимают на λ_0 = 0,005 м, прикрепляют груз 10 кг и сообщают ему скорость 0,5 м/с, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Колебания возбуждаются гармонической силой $Q = Q_0 \sin p_1 t$: Q_0= 1 Н, p_1=30 $с^{-1}$. Коэффициент вязкого сопротивления μ= 2 Н·с/м.

Задание 1) Составить закон свободных и вынужденных (на частоте возмущения 30 $с^{-1}$) колебаний груза на пружине без сопротивления. Привести график процесса колебаний.

Задание 2) Считая, что на груз дополнительно действует еще и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости: $F_c = \mu v$, построить резонансную кривую.

Решение. 1) Найдем положение статического равновесия груза – точку О (Рис.5.2). Пусть А – точка, соответствующая концу недеформированной пружины. Тогда АО = $\lambda_{ст}$ – статическая деформация, которой соответствует сила упругости $F_{ст} = c \cdot \lambda_{ст}$.

Рассмотрим равновесие груза (на рис. 3.2 и далее положения груза будем отождествлять с соответствующими точками). На него действуют три силы: $\overline{P}, \overline{N}$ и $\overline{F}_{ст}$. Выберем ось *x*, направленную вдоль наклонной плоскости вниз, и напишем уравнение равновесия в проекциях на эту ось:

$$\sum X_i = P \sin 30^o - F_{ст} = 0$$

или $P \sin 30^o - c \cdot \lambda_{ст} = 0$,

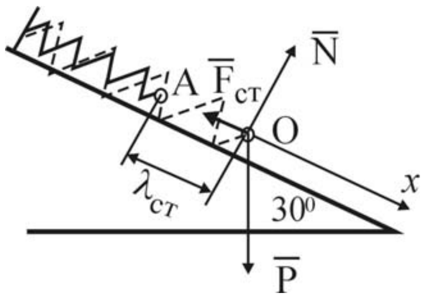

Рис. 5.2

откуда

$$\lambda_{ст} = \frac{P \sin 30^o}{c} = \frac{mg \sin 30^o}{c} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^4} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}, м .$$

Начало координат на оси *x* поместим в положение О статического равновесия груза. В этом положении x=0.

Определим частоту свободных колебаний груза

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{10}} = 44{,}7\, c^{-1} .$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид: $m\ddot{x} + cx = Q_0 \sin p_1 t$, Q_0 - амплитуда возмущающей силы.

Его решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 \cos k t + C_2 \sin k t + A \sin p_1 t \qquad (3.1)$$

C_1, C_2 – произвольные постоянные интегрирования.

Здесь первые два слагаемые представляют собой свободные колебания груза, третье слагаемое – вынужденные; $A = \dfrac{Q_0 / m}{k^2 - p_1^2}$ - амплитуда вынужденных колебаний. Таким образом, $A = \dfrac{p_1^2 \eta_0}{k^2 - p_1^2} = \dfrac{30^2 \cdot 0{,}001}{44{,}7^2 - 30^2} = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ м.

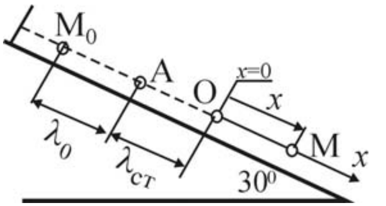

Рис. 5.3

Для определения постоянных C_1, C_2 необходимо поставить начальные условия, т.е. определить смещение и скорость груза при t=0. В начальный момент груз находится в положении M_0 (рис. 3.3), т.к. пружина была предварительно сжата на λ_0. Тогда $x_0 = -OM_0 = -\lambda_{ст} - \lambda_0 = -2{,}5 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3} = -7{,}5 \cdot 10^{-3}$, м.

Таким образом, имеем начальные условия: $x\big|_{t=0} = x_0 = -7{,}5 \cdot 10^{-3}$ м; $\dot{x}\big|_{t=0} = v_0 = -0{,}5$,м/с. Подставляя в эти начальные условия решение (1) и его производную по времени $\dot{x}(t)$, получим уравнения для определения постоянных C_1 и C_2

$C_1 = x_0$, $\quad v_0 = k \cdot C_2 - p_1 \cdot A$, $\quad$ откуда $\quad C_1 = -7{,}5 \cdot 10^{-3}$, $\quad$ м; $C_2 = -10 \cdot 10^{-3}$, м и закон колебаний (1.2) приобретает вид

$$x(t) = (-7{,}5 \cos 44{,}7\, t - 10 \sin 44{,}7\, t + 0{,}8 \sin 30\, t) \cdot 10^{-3} \text{ ,м.} \qquad (5.2)$$

График процесса (5.2) приведен на рис. 5.4.

2) Считая теперь, что на груз действует также сила сопротивления пропорциональная первой степени скорости, а частота возмущающей силы p является величиной переменной, построим резонансную кривую $A(p)$ в интервале $22{,}3 \le p \le 67$, c^{-1} по формуле

$$A(p) = \frac{Q_0 / m}{\sqrt{\left(p^2 - k^2\right)^2 + \left(\dfrac{\mu\, p}{m}\right)^2}} \qquad (5.3)$$

(рис. 5.5). Значение резонансной амплитуды определим по формуле (5.3) при p=k, т.о. $A_{рез} \approx 0{,}01$ м. Если в варианте задания вместо значения коэффициента сопротивления μ, указан коэффициент динамичности $\beta = A_{рез} / A_{ст}$ ($A_{ст} = Q_0 / c$), то следует выразить μ через β.

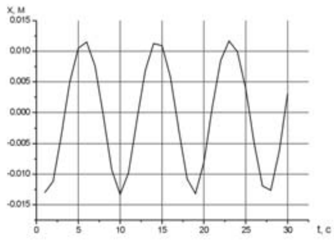

Рис. 5.4

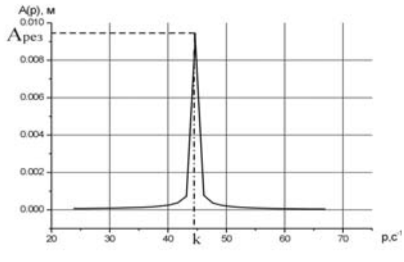

Рис. 5.5

Задача 2. Комплексная задача по динамике материальной точки

Задание. Решить комплексную задачу по динамике материальной точки с помощью метода кинетостатики и теоремы об изменении кинетической энергии точки.

Пример. Тело массы 10 кг, которое можно считать материальной точкой, имея скорость 25 м/с, начинает двигаться по поверхности в форме дуги M_0M окружности радиуса 5 м (рис. П6.1). Найти скорость тела, а также давление его на поверхность в положении M_1, определяемом углом $\angle M_0OM_1=60^0$. Трением пренебречь.

Решение. На тело действуют силы: $\overline{P}$-вес и $\overline{N}$- реакция поверхности. Скорость тела в положении M_1 найдем по теореме об изменении кинетической энергии точки:

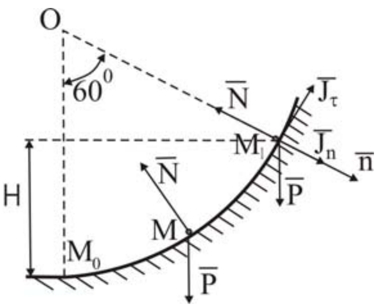

Рис.П6.1

$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = A\left(\overline{P}\right) + A\left(\overline{N}\right), \qquad (6.1)$$

где $A\left(\overline{P}\right)$- работа силы тяжести и $A\left(\overline{N}\right)$ - работа силы реакции поверхности на дуге M_0M_1.

Сила реакции в любой точке дуги перпендикулярна скорости и её работа на дуге равна нулю: $A\left(\overline{N}\right)$=0. Работа силы тяжести $A\left(\overline{P}\right)$= -*PH*, где $H = R - R\cos 60^o = R/2$. Работа отрицательна, так как конечное положение точки выше начального. Тогда $A\left(\overline{P}\right) = -PR/2 = -mgR/2$. Подставим полученное выражение в равенство (4.1):

$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \frac{-mgR}{2},$$

откуда $v_1 = \sqrt{v_0^2 - gR} = \sqrt{25^2 - 9{,}81 \cdot 5}$ =24 м/с.

Чтобы найти давление тела на поверхность в положении M_1, применим метод кинетостатики точки. Приложим к телу тангенциальную силу инерции $\overline{J_\tau}$ и центробежную силу инерции $\overline{J_n}$ и рассмотрим мысленное равновесие тела в положении M_1. Запишем основное уравнение метода кинетостатики:

$$\overline{P} + \overline{N} + \overline{J_n} + \overline{J_n} = 0 .$$

Спроецируем это векторное равенство на направление внешней нормали к поверхности в положении M_1: $P\cos 60^0 + J_n - N = 0$, откуда $N = P\cos 60^0 + J_n$. Имея в виду, что $J_n = m v_1^2 / R$:

$$N = P/2 + m v_1^2 / R = 10 \cdot 9{,}81/2 + 10 \cdot 24^2/5 = 1201\,\text{Н}.$$

Мы нашли реакцию опорной поверхности. Искомая сила давления тела на поверхность имеет ту же величину, но направлена в противоположную сторону.

Варианты заданий:

Задания 6.1 – 6.5 объединяются общим условием: тело движется из положения M_0 по шероховатой горизонтальной плоскости, а затем по гладкому круговому желобу радиуса r (рис. 6.1). Найти:

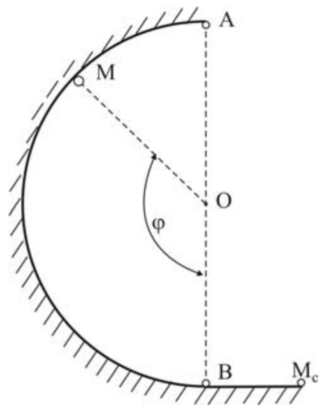

Рис.6.1

6.1. Скорость тела в момент отделения, а также коэффициент трения, если в момент отделения $\varphi=120^0$, а v_0=7 м/с, r = 1м, M_0B= 10м.

6.2. Скорость тела в момент отделения, а также начальную скорость, если отделение произошло в точке A; f= 0,1, r = 50 см, M_0B= 3,5 м.

6.3. Значение угла φ, при котором тело отделиться от желоба, и его скорость в этом положении, если v_0=6,3 м/с, f= 0,025, r = 50 см, M_0B= 31 м.

6.4. Скорость тела в момент отделения, а также расстояние M_0B, если в момент отделения $\varphi=120^0$, а $v_0=7$ м/с, r = 1 м, f= 0,05.

6.5. Скорость тела в момент отделения, а также радиус желоба, если в момент отделения $\varphi=120^0$, а $v_0=7$ м/с, f= 0,025, M_0B= 30 м.

Задания 6.6 – 6.11: к концу невесомого стержня длиной ℓ, который может вращаться вокруг оси O, прикреплен шарик m; в начальный момент шарик находится в положении M_0 (рис. 6.2). Найти:

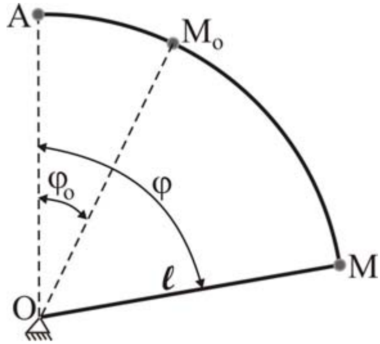

Рис. 6.2

6.6. Начальную скорость, которую нужно сообщить шарику для того, чтобы в положении M давление на ось стало бы равным нулю и скорость шарика в этом положении, если ℓ = 0,25 м, φ_0= 0, $\varphi = arcos\ {}^{1}\!/_{5}$.

6.7. Длину стержня, при которой давление на ось не превышает 98 Н, если m = 1 кг, v_0= 7 м/с, φ_0 = 0.

6.8. Наибольшую начальную скорость, которую можно сообщить шарику, для того чтобы давление на ось не превышало 882 Н, и максимальную скорость шарика, если ℓ = 1 м, m = 10 кг, φ_0 = 0.

6.9. Максимальное давление стержня на ось и максимальную скорость шарика, если ℓ = 1,25 м, m = 10 кг, v_0= 3,5 м/с, $\varphi_0 = 60^0$.

6.10. Длину стержня, при которой в положении M давление на ось равно нулю, и скорость шарика в этом положении, если v_0= 1,4 м/с, $\varphi_0 = arcos\ {}^{13}\!/_{20}$, $\varphi = 60^0$.

6.11. Положение (угол φ), при котором давление стержня на ось обращается в ноль, и скорость шарика в этом положении, если ℓ = 1 м, v_0= 0,70 м/с, $\varphi_0 = arcos\ {}^{29}\!/_{40}$.

Задания 6.12 - 6.16: нить с грузом на конце при своем движении из положения OM_0 встречает в точке O_1 препятствие в виде тонкой проволоки, расположенную перпендикулярно плоскости чертежа, после чего груз начинает вращаться на укороченной нити вокруг точки O_1 (рис. 6.3). Найти:

6.12. Длину нити, если известно, что при $\varphi = arcos\ (-\frac{2}{3})$ натяжение нити равно нулю. Также найти скорость груза в этом положении, если $\beta = 0$, $OO_1 = \frac{1}{2} OM_0$, $\alpha=60^0$, v_0=2,8 м/с.

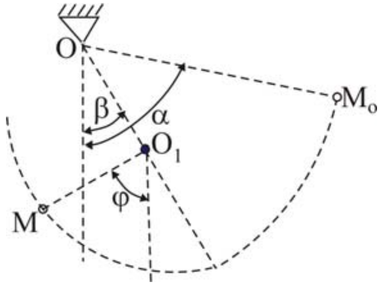

Рис. 6.3

6.13. Значение угла φ, при котором натяжение нити равно нулю, а также скорость груза в этом положении, если $\beta = arcos\ \frac{3}{4}$, OM_0=0,4 м, $OO_1 = \frac{1}{2} OM_0$, $\alpha=60^0$, v_0=1,4 м/с.

6.14. Начальную скорость, которую нужно сообщить грузу для того, чтобы натяжение нити стало равным нулю при $\varphi=120^0$, и скорость груза в этом положении, если $\beta = arcos\ \frac{4}{5}$, OM_0=1,56 м, OO_1= 0,78 м, $\alpha = arcos\ \frac{3}{5}$.

6.15. Величину угла α, если при $\varphi=120^0$ натяжение стало равным нулю. Найти также скорость груза в этом положении, если $\beta = 60^0$, OM_0=1,2 м, OO_1= 0,4 м, v_0=2,8 м/с.

6.16. Величину угла β из условия, что при $\varphi = arcos\ (-\frac{1}{3})$ натяжение нити обращается в ноль. Найти также скорость груза в этом положении, если $\alpha=90^0$, OM_0=1 м, OO_1= 0,5м, v_0=0 м/с.

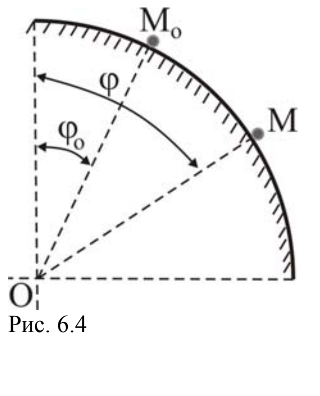

Рис. 6.4

Задачи 6.17 – 6.19: Шарик движется из положения M_0 по круговому желобу радиуса *r* (рис.6.4). Определить:

6.17. В каком положении (при каком значении угла φ) шарик покинет желоб и какова скорость шарика в этом положении, если $r = 1$ м, v_0=0,7 м/с, $\varphi_0 = arcos\ ^{29}\!/_{40}$.

6.18. Радиус желоба и скорость шарика в момент отделения от желоба, если известно, что шарик покинул желоб в положении M и что v_0= 1,4 м/с, $\varphi = arcos\ ^{5}\!/_{13}$, $\varphi_0 = 60^0$.

6.19. Начальную скорость, которую нужно сообщить шарику, чтобы он отделился от желоба в положении M, и скорость шарика в момент отделения, если $\varphi_0 = arcos\ ^{13}\!/_{20}$, $r = 1$ м, $\varphi = 60^0$.

Задачи 6.20 – 6.27: Тело весом P движется из положения M_0 по шероховатой наклонной плоскости AB (коэффициент трения f) и гладкому круговому желобу радиуса r (рис.6.5). Определить:

6.20. Наименьшую начальную скорость, которую нужно сообщить телу, для того чтобы оно прошло весь желоб, не отделяясь от него, и скачок давления тела на поверхность при прохождении им точки B, если P= 200 Н, $r = 2,4$ м, $f = 0$, $\alpha = 30^0$, $M_0B = 4,16$ м.

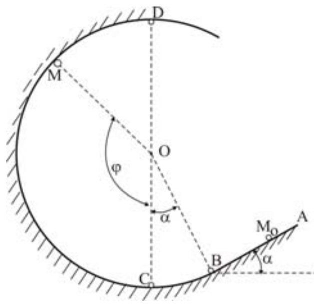

Рис.6.5

6.21. Радиус желоба, если известно, что тело отделилось от желоба в точке М. Определить также скорость тела в этом положении, если v_0= 2,8 м/с, $\alpha = 60^0$, $f = 0$, $M_0B = 1$ м, $\varphi = 120^0$.

2.22. Точку, в которой тело отделиться от желоба, и скорость тела в момент отделения, если $r = 0,15$ м, v_0=2,1 м/с, $f = 0$, $\alpha = 45^0$, $M_0B = 15$ м.

2.23. Точку, в которой тело отделиться от желоба, и скорость его в этом положении, если $r = 1$ м, v_0=2,8 м/с, $f = \ ^{\sqrt{3}}\!/_{2}\ 0$, $\alpha = 60^0$, $M_0B = 2$ м.

2.24. Коэффициент трения, если известно, что тело отделилось от желоба в точке *M* ($\varphi = 120^0$). Определить также скорость точки в этом положении, если $r = 5$ м, $v_0 = 7 \cdot \sqrt{2}$ м/с, $\alpha = 60^0$, $M_0B = 2{,}89$ м.

2.25. Величину угла α при условии, что в положении *M* давление тела на желоб обращается в ноль. Определить также скачок давления тела на поверхность при прохождении им точки B, если $P = 100$ Н, $r = 1$ м, $f = 0$, $v_0 = 0$, $\alpha = 60^0$, $M_0B = 1{,}73$ м, $\varphi = 90^0$.

2.26. Расстояние M_0B, если известно, что тело отделилось от желоба в точке M. Определить также скорость тела в этом положении, если $r = 0{,}1$ м, $v_0 = 0$ м/с, $f = 0{,}5$, $\alpha = 30^0$, $\varphi = 120^0$.

2.27. Расстояние M_0B, если известно, что тело отделилось от желоба в положении *D*. Определить также скачок давления тела на поверхность при прохождении им точки *B*, если $P = 50$ Н, $r = 0{,}6$ м, $f = 0$, $v_0 = 4{,}2$ м/с, $\alpha = 45^0$.

Задачи 6.28 – 6.30 Шарик массой m движется из точки *A* по желобу *AB*, состоящему из двух сопряженных в точке *C* дуг окружностей; *OD* и *OA* – вертикальные отрезки (рис. 6.6). Найти:

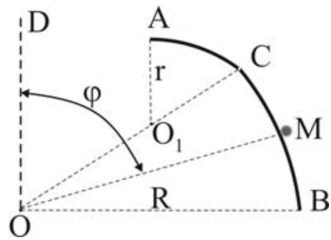

Рис.6.6

6.28. Значение угла φ, при котором шарик отделиться от желоба, и скорость в момент отделения, если $v_0 = 0$, $\alpha = arccos\ ^{7}/_{10}$, $R = 1$ м, $r = ^{1}/_{6}$.

6.29. Начальную скорость, которую нужно сообщить шарику, чтобы он отделился от желоба в точке M, и скорость его в момент отделения, если $\alpha = arccos\ ^{7}/_{10}$, $R = 1$ м, $r = ^{1}/_{6}$, $\varphi = 60^0$.

6.30. Скачок давления шарика на желоб при прохождении им точки *C* и значение угла φ, при котором шарик отделиться от желоба, если $m = 2$ кг, $v_0 = 0$, $\alpha = arccos\ ^{13}/_{18}$, $R = 2$ м, $r = 0{,}2$ м.

Библиографический список

1. *Бать М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах/ Бать М.И. , Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С., СПб, «Лань», 2013, т.I Статика и кинематика, т.II Динамика.

2. *Бутенин Н.В.* Курс теоретической механики / Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р., СПб, «Лань», 2009, т.I Статика и кинематика, т.II Динамика.

3. Задачи по теоретической механике./ Пальмов В. А., Меркин Д.Р., СПб, "Лань", 2012.

4. *Мещерский И.В*. Сборник задач по теоретической механике. СПб, "Лань", 2008.

5. *Нагаев Р.Ф.* и др. Теоретическая механика. Методические указания и расчетно - графические задания. РТП ЛГИ, 1981.

6. Сборник задач по теоретической механике/ Л.К. Горшков, Р.Ф. Нагаев, Ветюков М.М., В.Н. Монахов, СПб Горный институт им. Г.В. Плеханова (ТУ), 2004.

7. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики. М., Высш. шк., 2003.

Содержание