Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г.В.Плеханова
(технический университет)

Кафедра механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

Методические указания к расчетно-графическим заданиям для студентов дневной формы обучения

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2007

УДК 531.01 (075.83)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. Статика и кинематика: Методические указания к расчетно-графическим заданиям / Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет). Сост.: *М.М.Ветюков, В.Г.Гореликов, В.Н.Монахов, М.Ю.Платовских, Е.В.Шишкин, А.А.Яковлев.* СПб, 2007. 60 с.

Приведены методические указания и варианты расчетных заданий по курсу «Теоретическая механика. Статика и кинематика». Указания дополнены примерами с решениями типовых задач.

Предназначены для студентов всех специальностей дневной формы обучения, изучающих теоретическую механику.

Табл.8. Ил.100. Библиогр.: 4 назв.

Научный редактор проф. *Л.К.Горшков*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

Методические указания к расчетно-графическим заданиям для студентов дневной формы обучения

Составители: *М.М.Ветюков, В.Г.Гореликов, В.Н.Монахов, М.Ю.Платовских, Е.В.Шишкин, А.А.Яковлев*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой механики

Ответственный за выпуск *М.М.Ветюков*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 29.11.2007. Формат 60×84/16.
Бум. для копировальной техники. Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 3,48.
Усл.кр.-отт. 3,48. Уч.-изд.л. 2. Тираж 500 экз. Заказ 497. С 123.

Санкт-Петербургский государственный горный институт имени Г.В.Плеханова
РИЦ Санкт-Петербургского государственного горного института
Адрес института и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теоретическая механика» является общеинженерной и обязательна при подготовке инженеров любых специальностей.

Целью преподавания этой дисциплины является формирование у будущих специалистов представлений об общих законах механики, равновесия и движения твердых тел. Теоретическая механика, стоит первой в цикле читаемых в институте механических дисциплин. Ее задача состоит в развитии у обучающихся представлений о основных понятиях и законах механики, чтобы на их основе иметь возможность изучать другие инженерные дисциплины (сопротивление материалов, теорию механизмов и машин, строительную механику, теорию колебаний др.). В рамках данного курса студенты должны освоить проведение расчетов типовых конструкций: определять реакции опор, усилия в стержневых системах, параметры движения материальной точки и твердого тела.

Курс теоретической механики базируется на учебных дисциплинах «Высшая математика», «Физика», «Начертательная геометрия».

Каждая расчетная работа предваряется рассмотрением решения примерной задачи.

Работы необходимо выполнять на листах бумаги формата А4, оформляя на компьютере (рисунки допускается чертить карандашом).

1. СОСТАВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Задание. Найти опорные реакции составной конструкции, которая испытывает воздействие внешней нагрузки.

Пример 1.1: Дано: $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 18$ кН, $q_1 = 2{,}5$ кН/м, $q_2 = 4$ кН/м, $M_1 = 10$ кН·м, $M_2 = 21$ кН·м, $M_3 = 32$ кН·м (рис.1.1). Найти реакции заделки A и опор C, E. Геометрические размеры указаны в метрах.

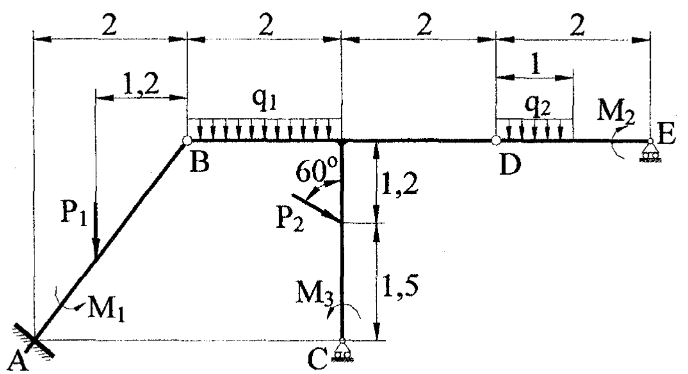


Рис. 1.1

Решение. Рассматриваемая конструкция является два раза статически неопределимой, т.к. число неизвестных реакций – 5 (3 - в заделке A и по одной в C и E), а уравнений статики – три. Расчленим конструкцию на элементы, что даст возможность записать дополнительные уравнения равновесия.

Рассмотрим условия равновесия участка конструкции DE (рис.1.1.1):

$$\sum M_D(\overline{F}_i) = y_E \cdot 2 - q_2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 - M_2 = 0;$$

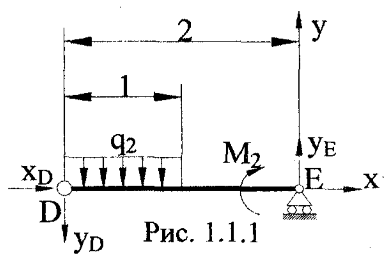


Рис. 1.1.1

$$y_E = \frac{q_2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + M_2}{2} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 21}{2} = 11{,}5 \text{ kH}.$$

$$\sum Y_i = y_E - y_D - q_2 \cdot 1 = 0;$$

$$y_D = y_E - q_2 \cdot 1 = 11{,}5 - 4 = 7{,}5 \text{ кН}.$$

$$\sum X_i = 0; \; x_D = 0.$$

Рассмотрим условия равновесия участка конструкции BDC (рис.1.1.2):

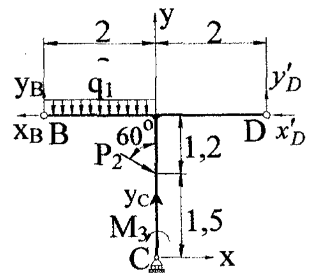


Рис.1.1.2

$$\sum M_B(\overline{F}_i) = y'_D \cdot 4 + y_C \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 +$$
$$+ P_2 \sin 60^\circ \cdot 1{,}2 - P_2 \cos 60^\circ \cdot 2 + M_3 = 0;$$
$$y_C = \left(-4y'_D + q_1 \cdot 2 \cdot 1 - 1{,}2P_2 \sin 60^\circ + \right.$$
$$\left. + 2P_2 \cos 60^\circ - M_3\right)/2 =$$
$$= (-4 \cdot 7{,}5 + 2{,}5 \cdot 1 - 1{,}2 \cdot 18 \cdot 0{,}866 -$$
$$-18 \cdot 0{,}5 \cdot 2 - 32)/2 = -28{,}85 \text{ кН}.$$

Реакция y_C направлена в противоположную сторону по отношению к обозначенной на рис.1.1.2.

$$\sum X_i = -x_B - x'_D + P_2 \sin 60^\circ = 0;$$

$$x_B = -x'_D + P_2 \sin 60^\circ = 0 + 18 \cdot 0{,}866 = 15{,}59 \text{ кН}.$$

$$\sum Y_i = y_B + y'_D + y_C - 2q_1 - P_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$y_B = -y'_D - y_C + q_1 \cdot 2 + P_2 \cos 60^\circ = -7{,}5 - (-37{,}85) + 25 \cdot 2$$
$$+ 18 \cdot 0{,}5 = 35{,}35 \text{ кН}.$$

Рассмотрим условие равновесия участка конструкции AB рис.1.1.3):

$$\sum M_A(\overline{F}_i) = +M_p + M_1 - P_1 \cdot 0{,}8 - y'_B \cdot 2 - x'_B \cdot 2{,}7 = 0;$$

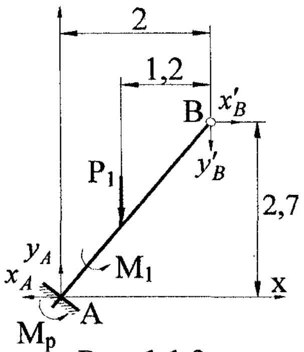


Рис. 1.1.3

$$M_p = -M_1 + P_1 \cdot 0{,}8 + y'_B \cdot 2 + x'_B \cdot 2{,}7 =$$
$$-10 + 12 \cdot 0{,}8 + 35{,}35 \cdot 2 +$$
$$+15{,}59 \cdot 2{,}7 = 112{,}4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$
$$\sum Y_i = y_A - P_1 - y'_B = 0;$$
$$y_A = P_1 + y'_B = 12 + 35{,}35 = 47{,}35 \text{ кН}.$$
$$\sum X_i = -x_A + x'_B = 0;$$
$$x_A = x'_B = 15{,}59 \text{ кН}.$$

Для проверки полученных результатов составим уравнения равновесия для всей конструкции (реакции промежуточных шарниров B и D при составлении уравнений не учитываются):

$$\Sigma Y_i = y_A - P_1 - q_1 \cdot 2 - P_2 \cos 60^\circ - y_C - q_2 \cdot 1 + y_E = 0;$$
$$47{,}35 - 12 - 2{,}5 \cdot 2 - 18 \cdot 0{,}5 - 28{,}85 - 4 \cdot 1 + 11{,}5 = 58{,}85 - 58{,}85 = 0.$$
$$\Sigma X_i = -x_A + P_2 \sin 60^\circ = 0;$$
$$-15{,}59 + 18 \cdot 0{,}866 = -15{,}59 + 15{,}59 = 0.$$
$$\Sigma M_A\left(\overline{F_i}\right) = M_p + M_1 - P_1 \cdot 0{,}8 - q_1 \cdot 2 \cdot 3 - q_2 \cdot 1 \cdot 6{,}5 - M_2 +$$
$$+ y_E \cdot 8 - y_C \cdot 4 + M_3 - P_2 \cos 60^\circ \cdot 4 - P_2 \sin 60^\circ \cdot 1{,}5 = 0;$$
$$112{,}4 + 10 - 12 \cdot 0{,}8 - 2{,}5 \cdot 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 6{,}5 - 21 + 11{,}5 \cdot 8 - 28{,}85 \cdot 4 +$$
$$+ 32 - 18 \cdot 0{,}5 \cdot 4 - 18 \cdot 0{,}866 \cdot 1{,}5 = 246{,}4 - 246{,}4 = 0.$$

Результаты расчета — Таблица 1.1

Момент в заделке m_p, кН·м	Силы, кН			
	x_A	y_A	x_C	y_E
112,4	15,6	47,4	28,9	11,5

Варианты заданий на рис. 1.2-1.31 (нагрузки даны в табл. 1.2).

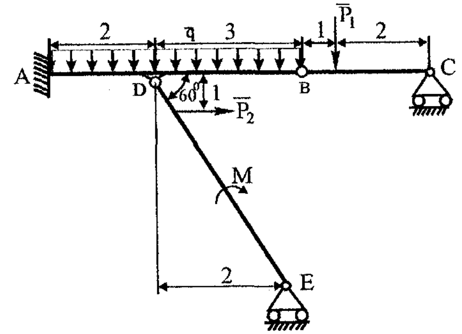


Рис.1.2

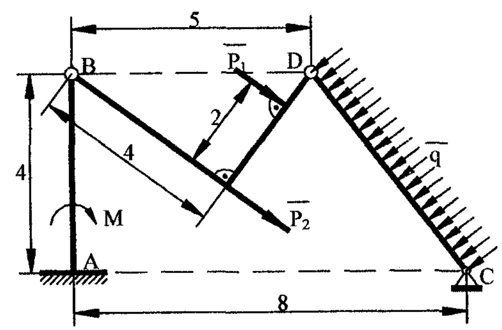


Рис.1.3

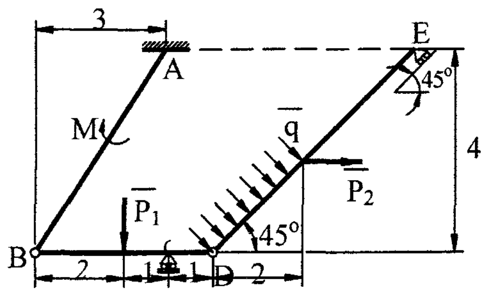


Рис.1.4

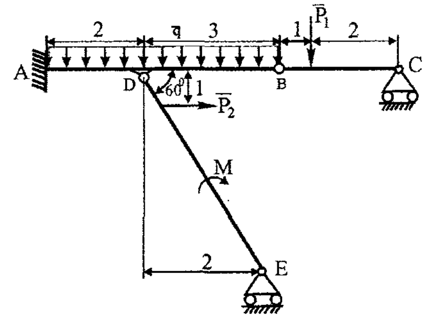


Рис.1.5

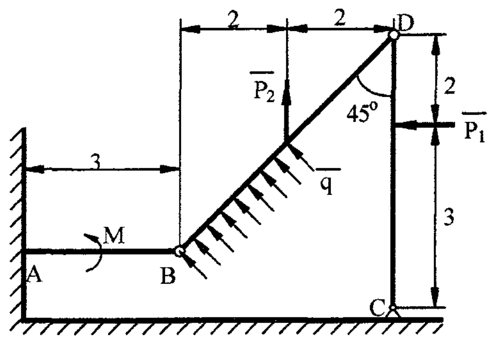


Рис.1.6

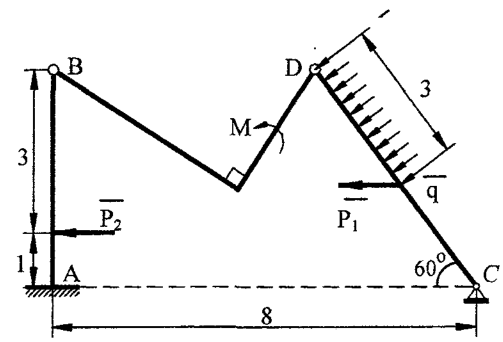


Рис.1.7

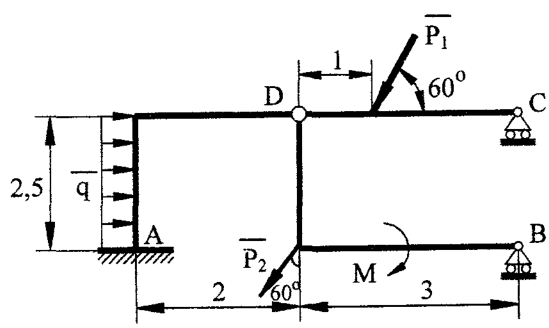


Рис.1.8

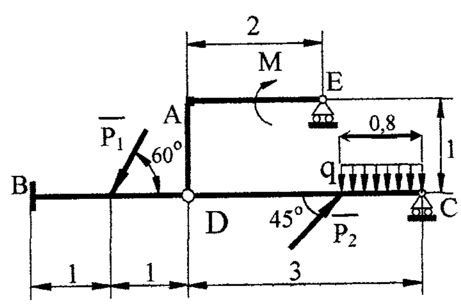


Рис.1.9

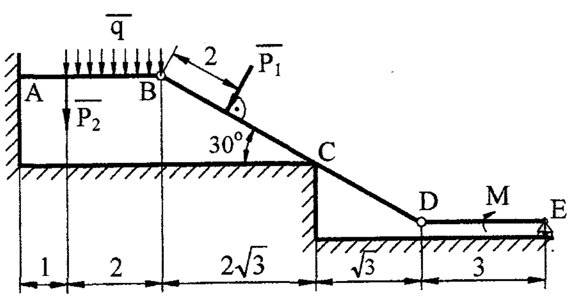


Рис.1.10

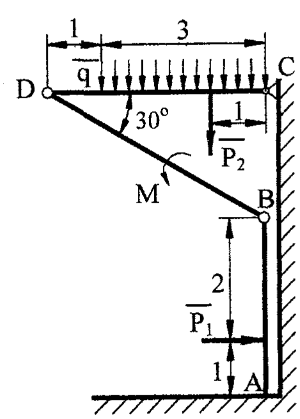


Рис.1.11

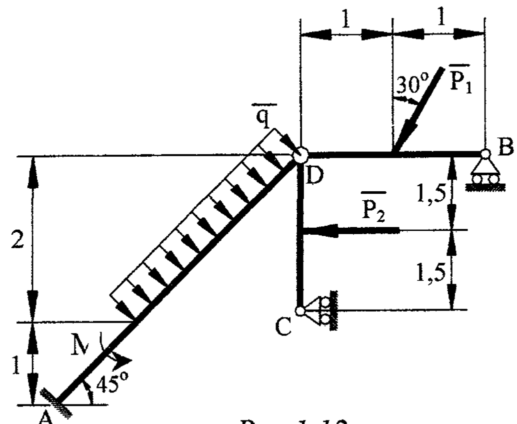


Рис.1.12

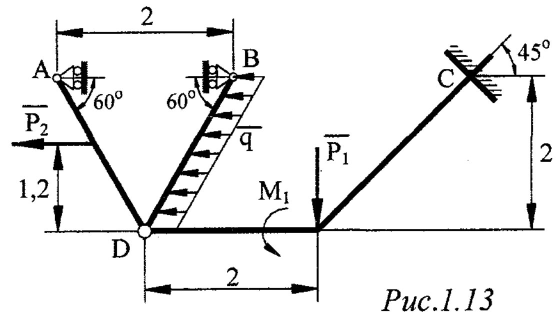


Рис.1.13

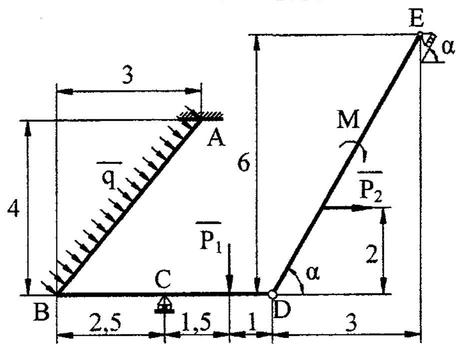


Рис.1.14

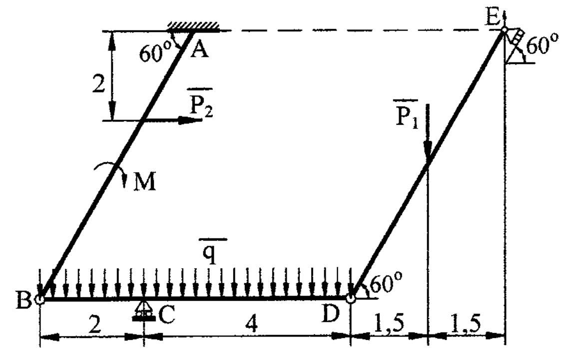


Рис.1.15

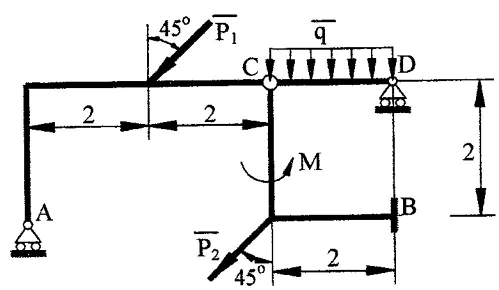


Рис.1.16

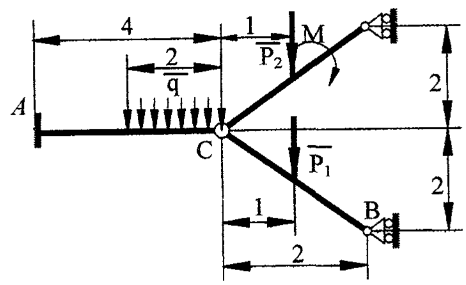


Рис.1.17

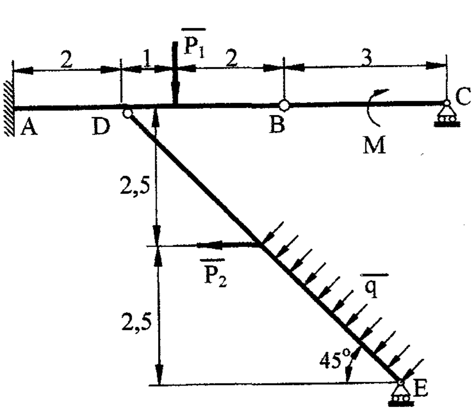


Рис.1.18

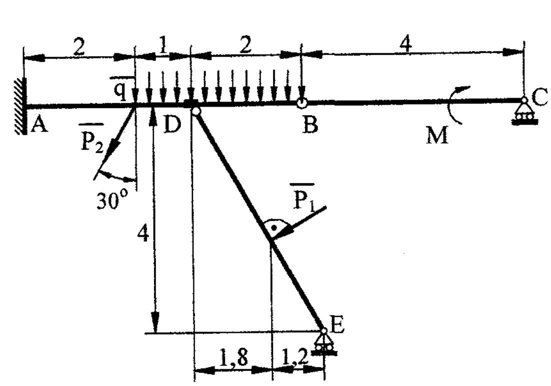


Рис.1.19

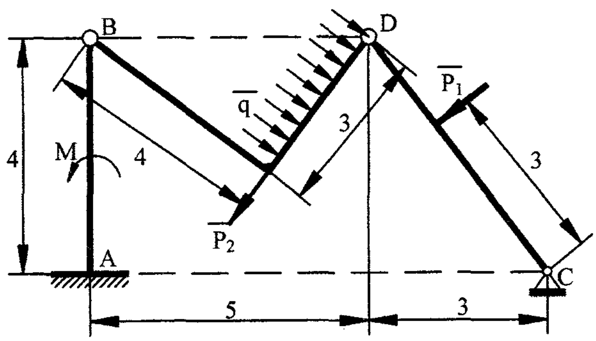


Рис.1.20

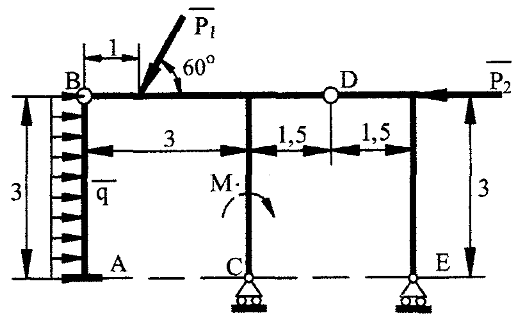


Рис.1.21

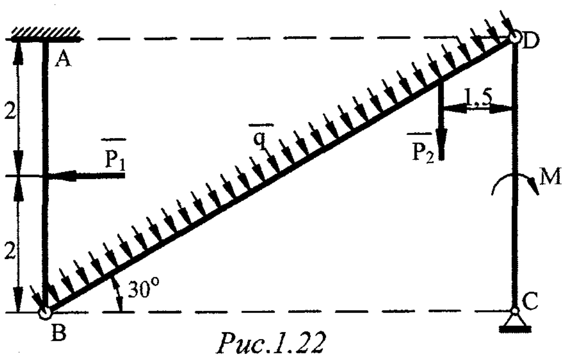


Рис.1.22

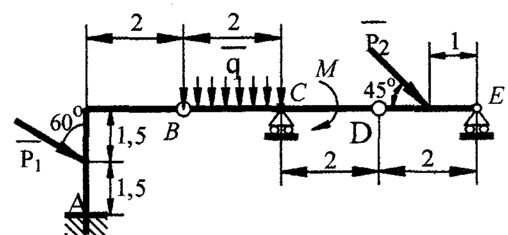


Рис.1.23

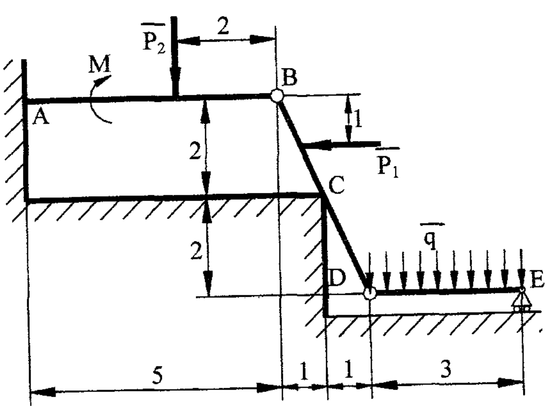


Рис.1.24

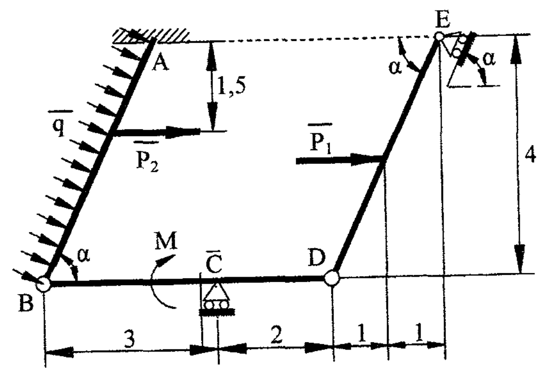


Рис.1.25

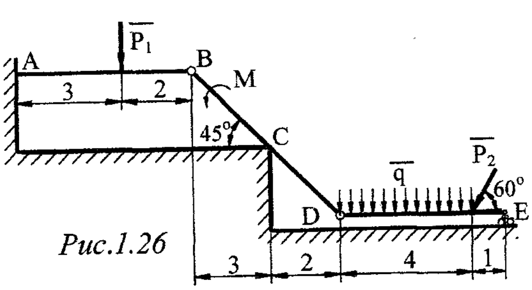


Рис.1.26

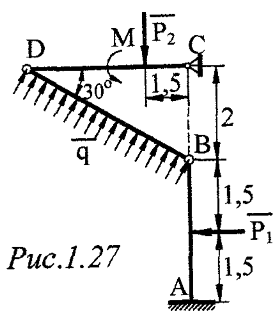


Рис.1.27

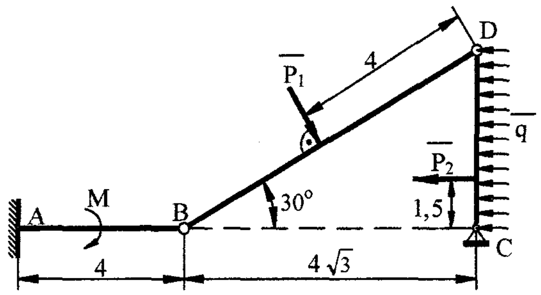


Рис.1.28

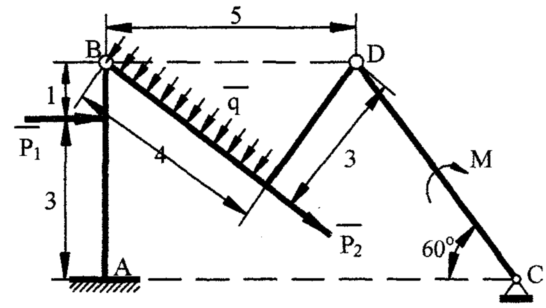


Рис.1.29

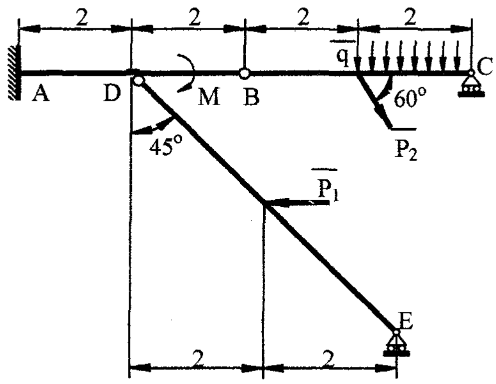


Рис.1.30

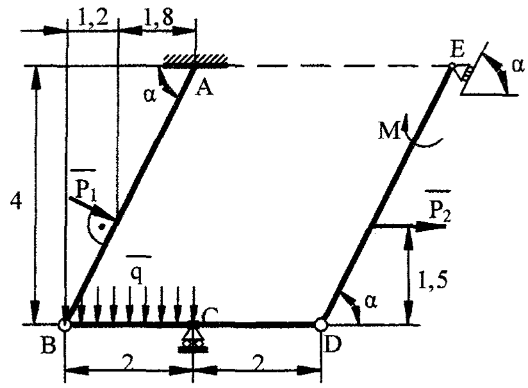


Рис.1.31

Таблица 1.2

Номер задачи	Номер рисунка	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	M, кНм
1.1 а	1.2	6	4	0,8	25
1.2 а	1.3	11	5	1	34
1.3 а	1.4	9	2	1,2	20
1.4 а	1.5	10	7	1,5	30
1.5 а	1.6	8	3	0,6	22
1.6 а	1.7	10	3	4	28
1.7 а	1.8	16	6	6	30
1.8 а	1.9	13	9	1,2	25
1.9 а	1.10	11	12	2,5	29
1.10 а	1.11	12	8	1,6	34
1.11 а	1.12	8	15	2	28
1.12 а	1.13	12	4	3	36
1.13 а	1.14	15	7	6	30
1.14 а	1.15	10	9	4	35
1.15 а	1.16	12	8	6	32

Продолжение табл. 1.2

Номер задачи	Номер рисунка	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	M, кН м
1.16 а	1.17	13	5	1,2	22
1.17 а	1.18	7	7	2	34
1.18 а	1.19	9	9	1,3	29
1.19 а	1.20	12	7	2,2	33
1.20 а	1.21	11	4	0,8	38
1.21 а	1.22	6	10	3,5	25
1.22 а	1.23	11	8	2	34
1.23 а	1.24	9	12	1	20
1.24 а	1.25	10	14	3	30
1.25 а	1.26	8	15	4,5	22
1.26 а	1.27	10	17	1,2	28
1.27 а	1.28	16	6	4,2	15
1.28 а	1.29	13	7	2,5	32
1.29 а	1.30	11	8	1,5	20
1.30 а	1.31	12	6	3,5	25

Продолжение табл. 1.2

Номер задачи	Номер рисунка	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	M, кНм
1.1 б	1.2	6	12	3,5	20
1.2 б	1.3	8	11	1,5	18
1.3 б	1.4	13	7	2,5	30
1.4 б	1.5	6	15	4,5	15
1.5 б	1.6	17	12	1,2	28
1.6 б	1.7	15	8	4	20
1.7 б	1.8	10	14	3	30
1.8 б	1.9	12	9	1	20
1.9 б	1.10	8	11	2	32
1.10 б	1.11	10	6	3,5	25
1.11 б	1.12	4	11	1,2	36
1.12 б	1.13	7	12	2,2	33
1.13 б	1.14	9	9	1,3	25
1.14 б	1.15	7	7	2	30
1.15 б	1.16	5	13	1,2	22

Продолжение табл. 1.2

Номер задачи	Номер рисунка	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	M, кНм
1.16 б	1.17	8	12	5	32
1.17 б	1.18	9	10	4	35
1.18 б	1.19	7	15	6	30
1.19 б	1.20	4	12	3	36
1.20 б	1.21	15	8	2	28
1.21 б	1.22	8	12	1,6	34
1.22 б	1.23	11	10	2	28
1.23 б	1.24	9	13	1,5	25
1.24 б	1.25	6	16	6	30
1.25 б	1.26	3	10	4	28
1.26 б	1.27	8	3	2	22
1.27 б	1.28	7	10	1,5	30
1.28 б	1.29	9	2	1,2	20
1.29 б	1.30	5	11	2	15
1.30 б	1.31	6	8	3	25

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ФИГУРЫ

Центром тяжести плоской фигуры называется точка, радиус-вектор которой определяется по формуле:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum S_i \bar{r}_i}{S}, \qquad (1)$$

где S_i и $\bar{r}_i$ – площадь и радиус-вектор центра тяжести i-той части фигуры; $S = \sum S_i$ – площадь всей фигуры.

Спроектируем векторное равенство (1) на декартовы оси. В результате получим аналитические формулы для определения координат центра тяжести фигуры:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}. \qquad (2)$$

При определении центра тяжести плоской фигуры часто используют метод отрицательных площадей. Суть этого метода заключается в следующем: фигура разбивается на две группы частей с известными площадями S_i и координатами центров тяжести x_i и y_i, одна из которых представляет сплошные тела с положительными площадями, а вторая – выемки с отрицательными площадями. Далее полученные значения координат x_i и y_i, а также площадей S_i с учетом их знака подставляются в выражения (2) для определения положения центра тяжести фигуры.

З а д а н и е. Найти координаты центра тяжести плоской фигуры (варианты 1 – 30), показанной на рис. 2.2 – 2.31 (размеры указаны в сантиметрах).

Пример 2.1. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, показанной на рис. 2.1,*а*.

а б

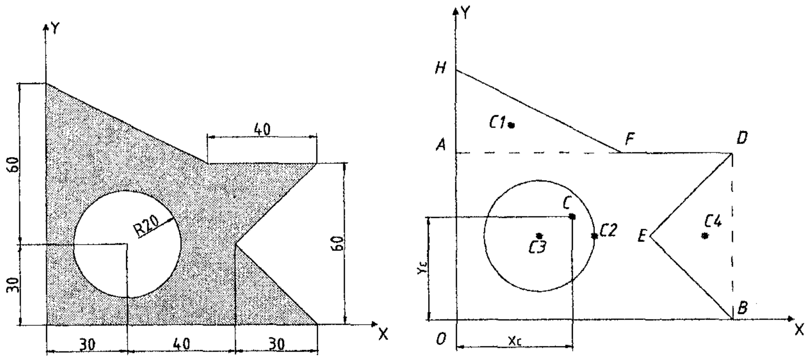


Рис. 2.1

Р е ш е н и е. Координаты центра тяжести плоской фигуры определяем по формулам

$$x_c = S_y/S; \qquad y_c = S_x/S. \qquad (3)$$

Здесь $S_y = \sum S_i x_i$, $S_x = \sum S_i y_i$ – статические моменты фигуры относительно осей y и x.

Чтобы воспользоваться формулами (3), применим метод отрицательных площадей. Разобьем фигуру на части, для которых известны или легко определяются площади S_i и координаты их центров тяжести x_i и y_i. В данном случае в качестве таких частей принимаем (рис. 2.1,*б*): треугольник *AFH*; прямоугольник *OADB*, который считаем сплошным; круг; треугольник *BDE*. Площади круга и треугольника *BDE*, вырезанных из прямоугольника, считаем отрицательными.

Все результаты расчетов заносим в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Номер элемента	S_i, $см^2$	x_i, $см$	y_i, $см$	$S_{iy} = \sum S_i x_i$, $см^3$	$S_{ix} = \sum S_i y_i$, $см^3$
1	900	20	70	18000	63000
2	6000	50	30	300000	180000
3	-1250	30	30	-37500	-37500
4	-900	90	30	-81000	-27000
Σ	4750			199500	178500

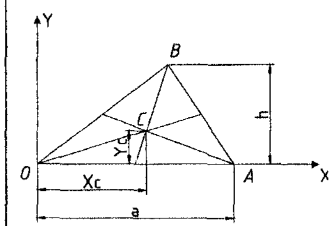
По формулам (3) вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$x_c = 199500/4750 = 42{,}0\ см; \qquad y_c = 178500/4750 = 37{,}6\ см.$$

Центр тяжести всей фигуры (точка *C*) показан на рис. 2.1,*б*.

Примечание. Площадь и координаты центра тяжести треугольника приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Плоская фигура		Площадь	Координаты центра тяжести
Треугольник		$S = ah/2$	$y_c = h/3$; $x_c = (x_1+x_2+x_3)/3$, где x_1, x_2, x_3 – координаты вершин *O*, *A*, *B*

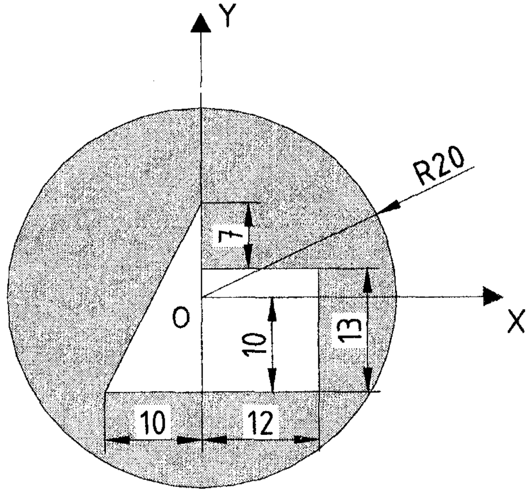


Рис. 2.2

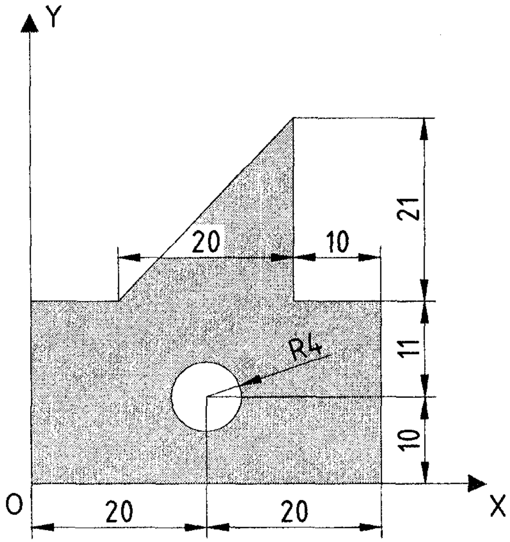


Рис. 2.3

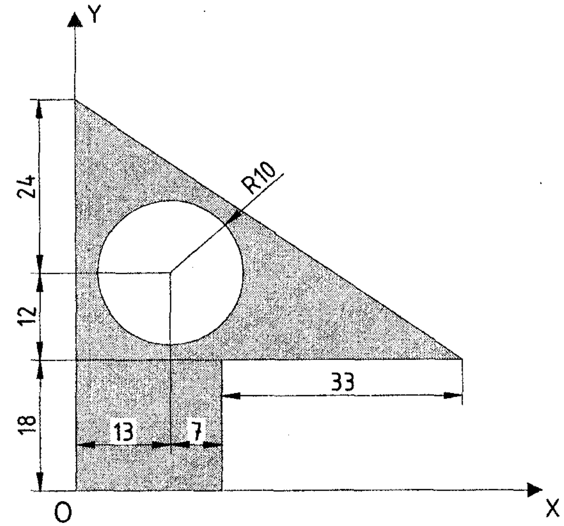


Рис. 2.4

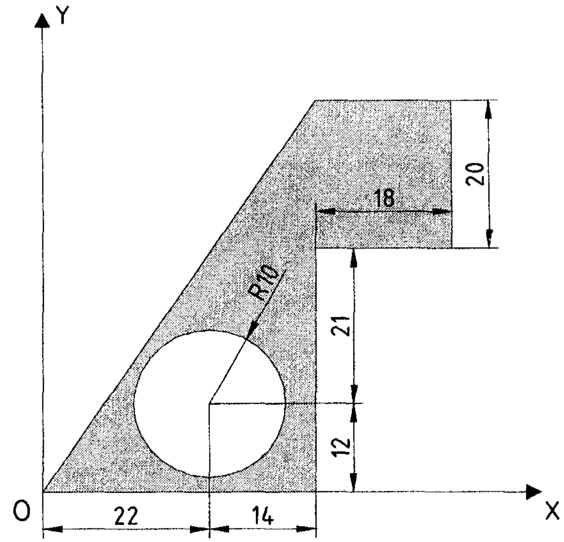


Рис. 2.5

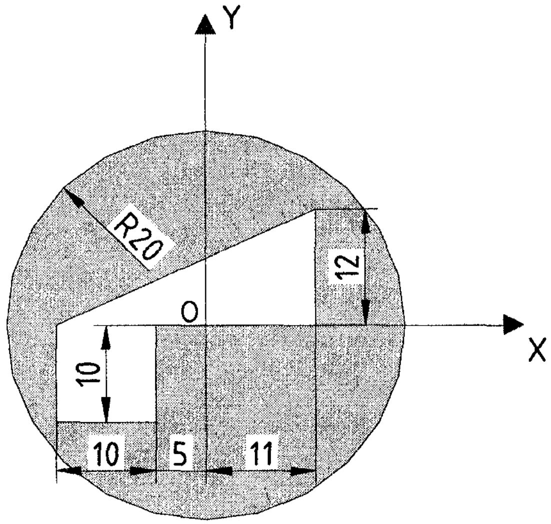


Рис. 2.6

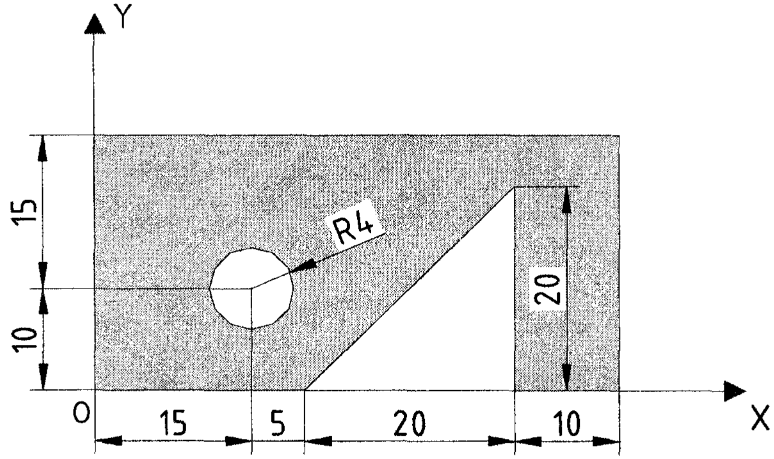


Рис. 2.7

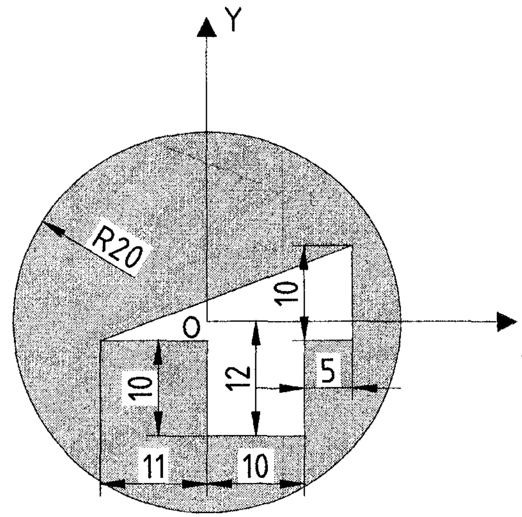


Рис. 2.8

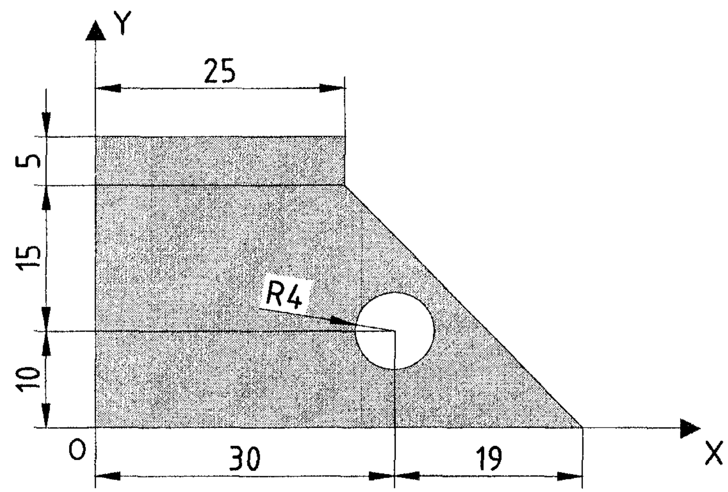


Рис. 2.9

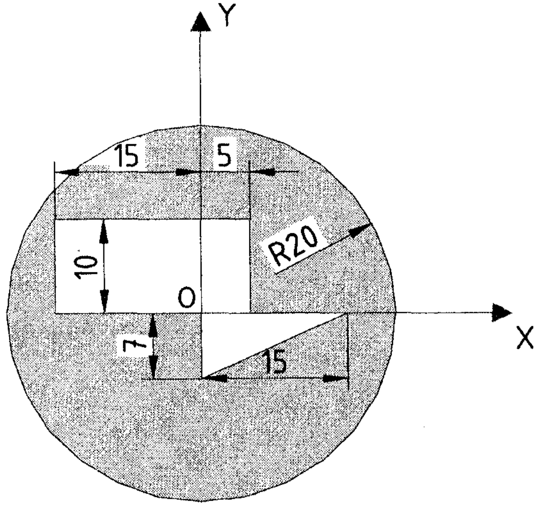


Рис. 2.10

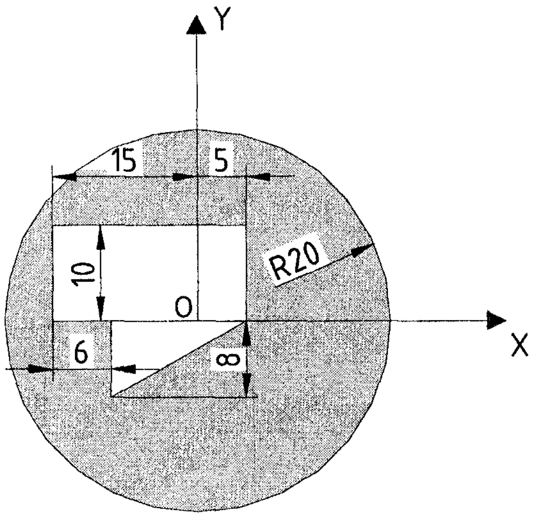


Рис. 2.11

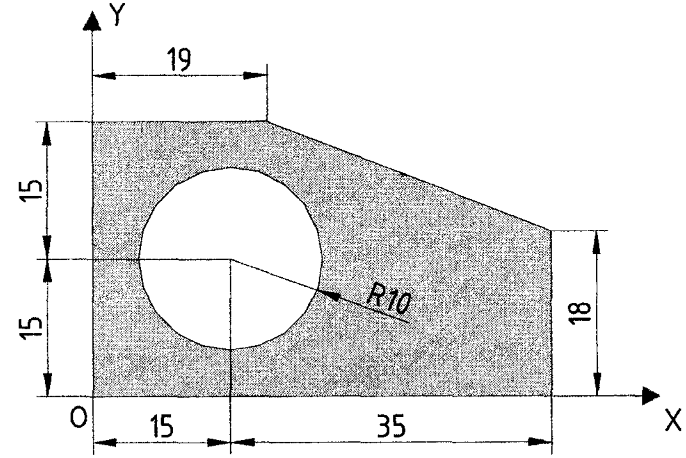


Рис. 2.12

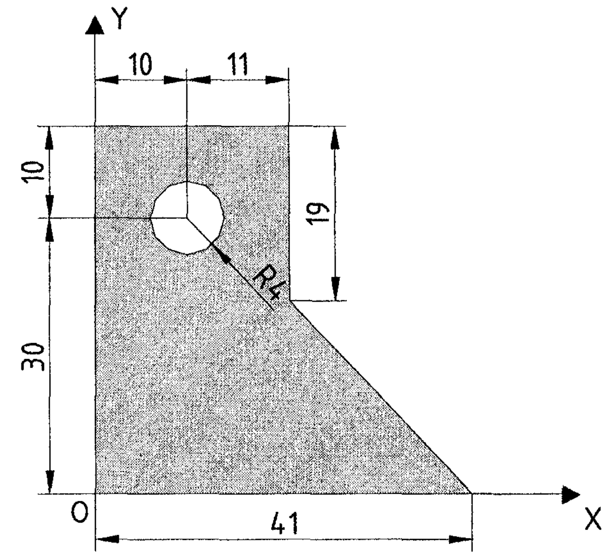


Рис. 2.13

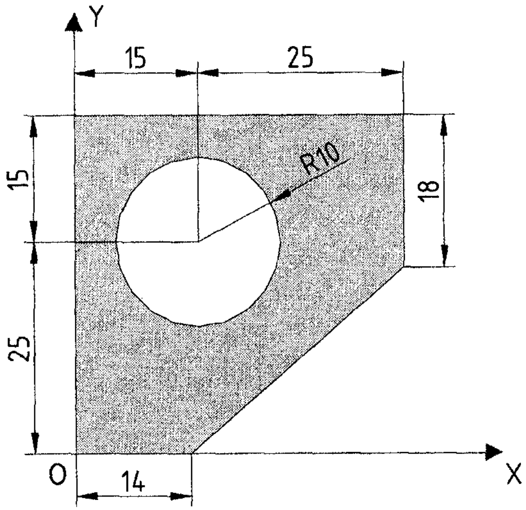


Рис. 2.14

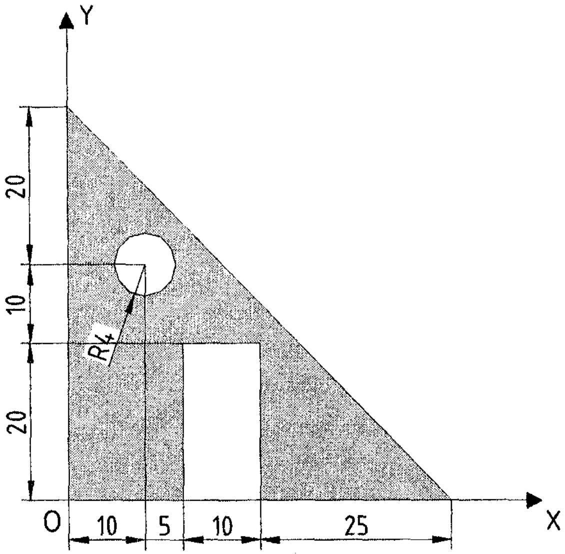


Рис. 2.15

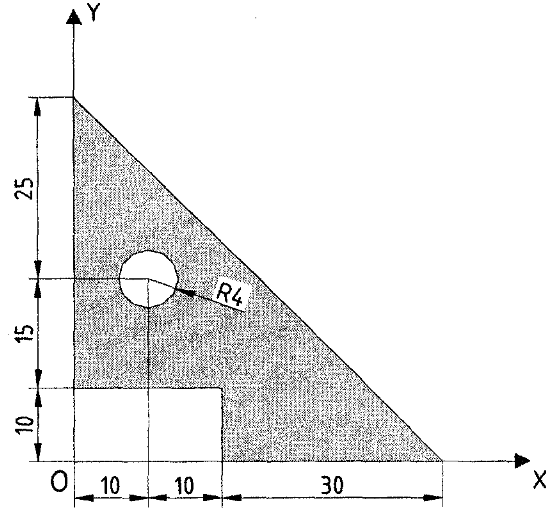


Рис. 2.16

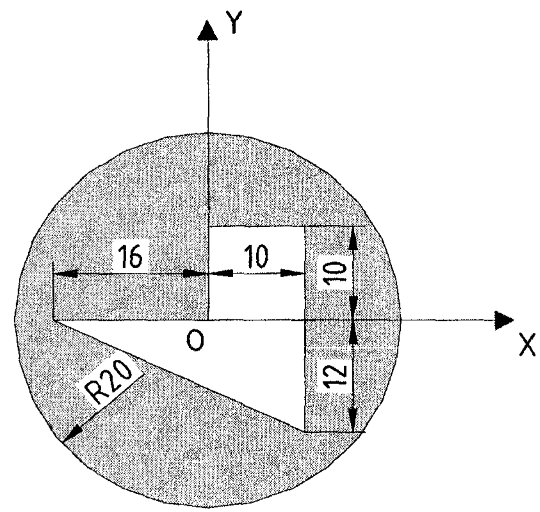


Рис. 2.17

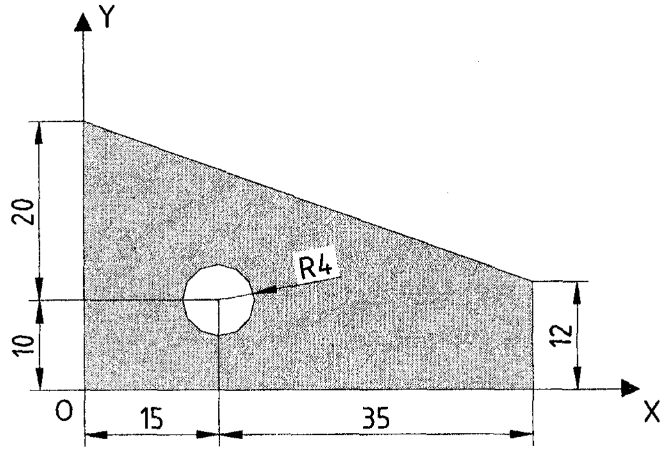


Рис. 2.18

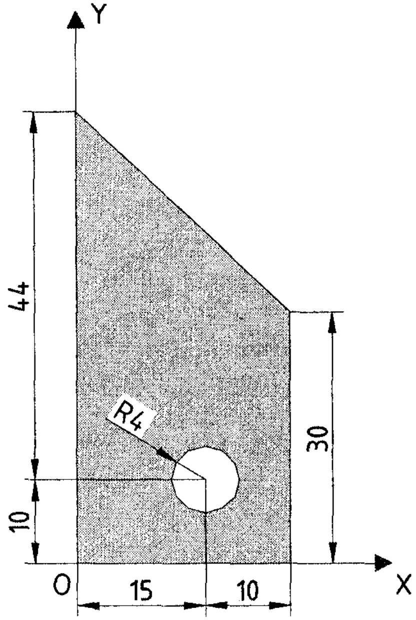


Рис. 2.19

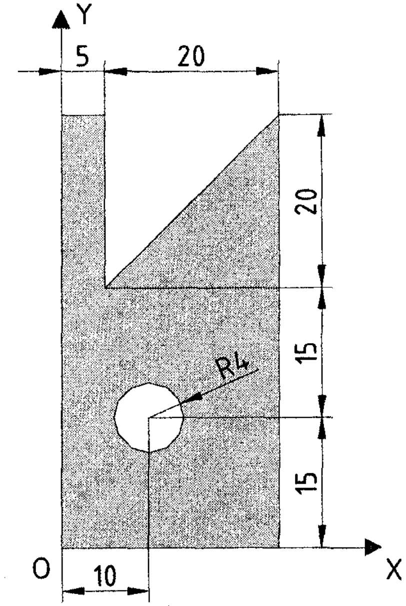


Рис. 2.20

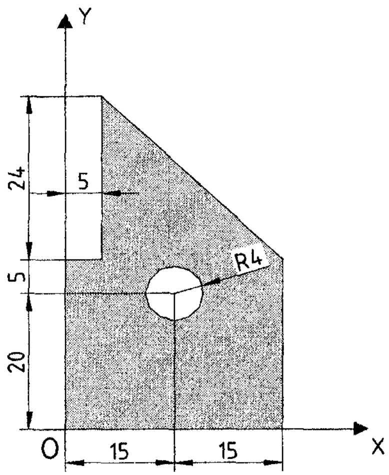


Рис. 2.21

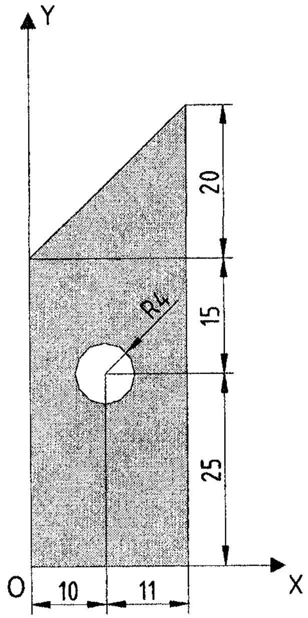


Рис. 2.22

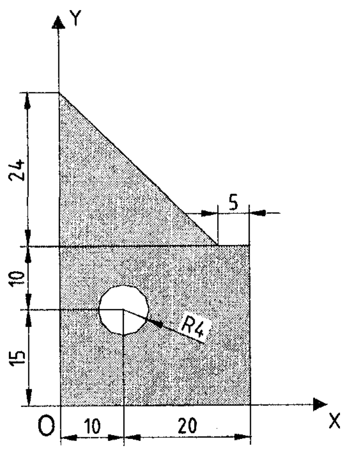


Рис. 2.23

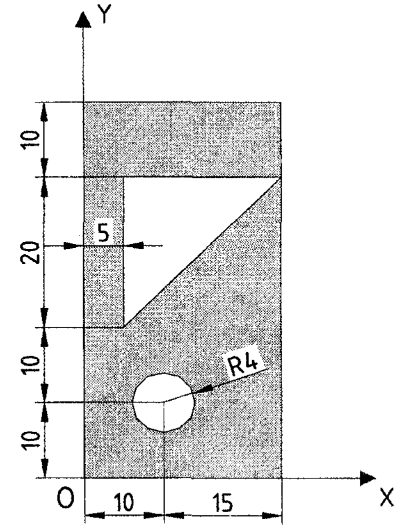


Рис. 2.24

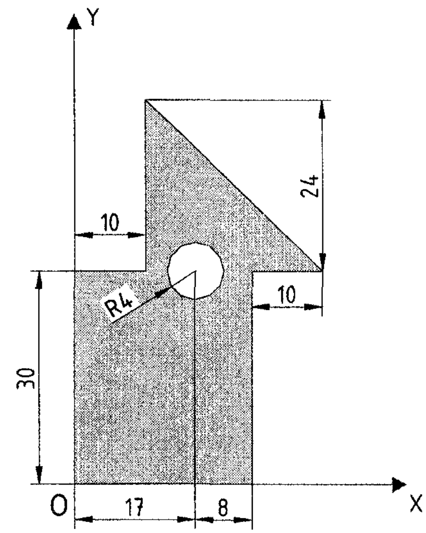


Рис. 2.25

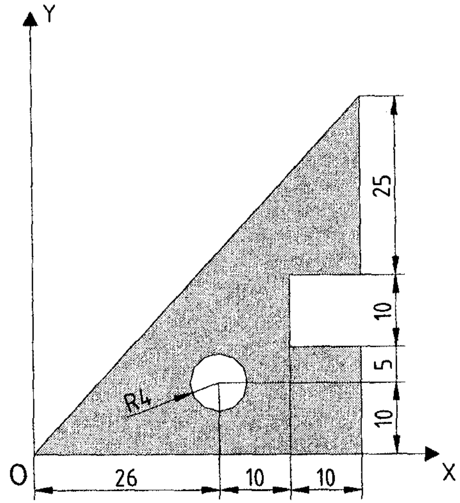


Рис. 2.26

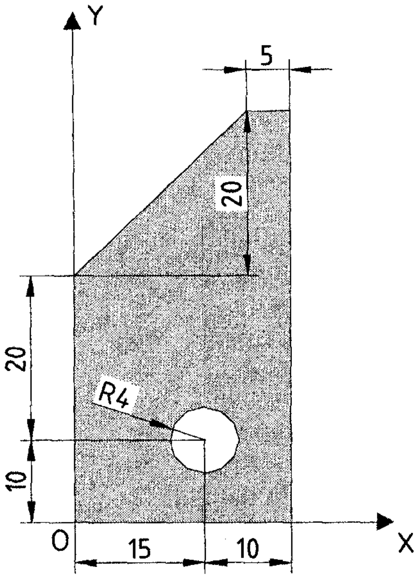


Рис. 2.27

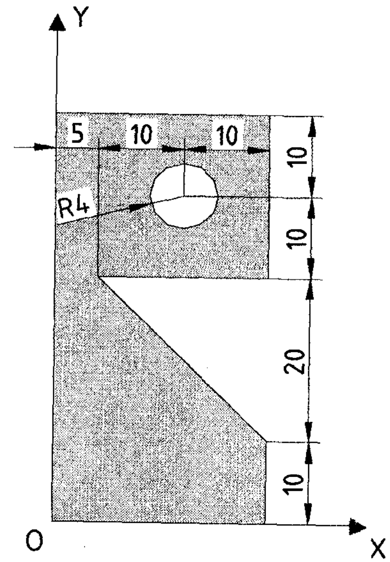


Рис. 2.28

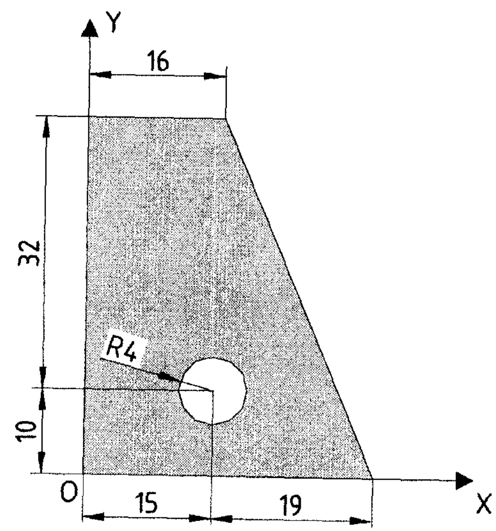


Рис. 2.29

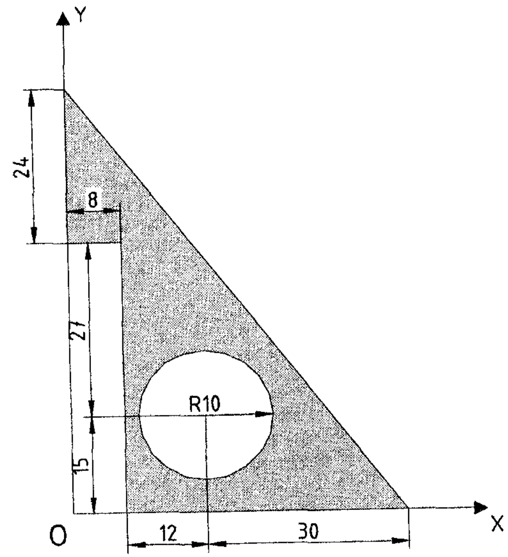


Рис. 2.30

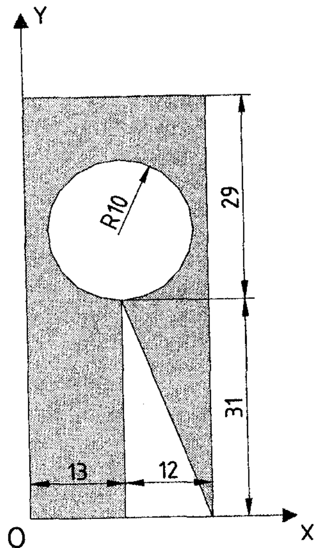


Рис. 2.31

3. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАДАЧА ПО КИНЕМАТИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

З а д а н и е. Движение точки задано координатным способом на плоскости Оху. Следует найти траекторию точки и построить ее на рисунке. Скорость, полное ускорение и касательное ускорение найти как функции времени. Скорость, ускорение, касательное ускорение, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории определить в момент времени t_1. Векторы $\bar{v}_1, \bar{w}_1, \bar{w}_{1\tau}, \bar{w}_{1n}$ показать на рисунке.

П р и м е р. Движение точки задано уравнениями $x = 6\sin t,\ y = 4\cos 2t;\ t_1 = {}^{5\pi}\!/_{4}\ c$.

Р е ш е н и е.

А. Определение траектории точки. Здесь следует исключить время из уравнений движения. В данном примере имеем:

$$\sin t = {}^{x}\!/_{6}\ ,\quad \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t\,.$$

Отсюда получаем уравнение траектории

$$y = 4 - \frac{2}{9}x^2\,.$$

Это парабола, симметричная относительно оси ординат. Из условий $-1 \le \sin t \le 1,\ -1 \le \cos 2t \le 1$ следует, что $-6 \le x \le 6,\ -4 \le y \le 4$. Это означает, что траекторией будет не вся парабола, а лишь ее часть, заключенная в названных интервалах. Она изображена на рис. 3.1.

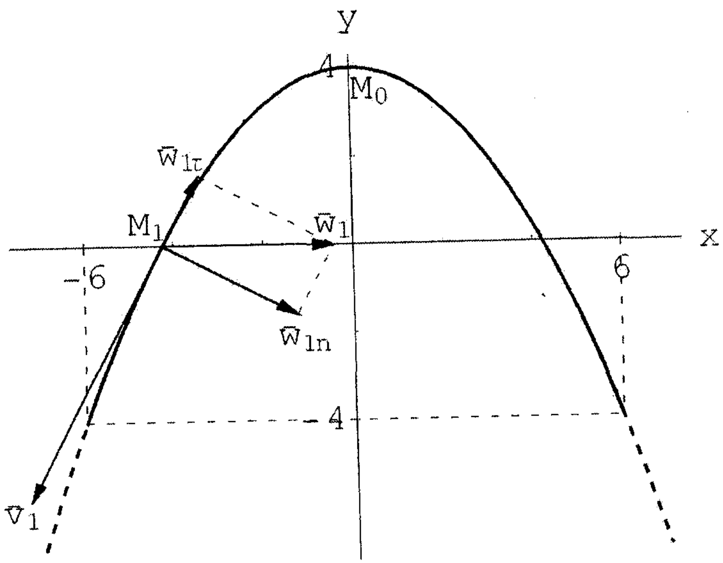


Рис. 3.1

Вершина параболы на рисунке соответствует начальной точке траектории M_0 с координатами (при $t_0=0$) $x_0=0$, $y_0=4$.

Б. Определение скорости и ускорения точки в зависимости от времени. Вычисляем проекции скорости и ускорения на прямоугольные оси:

$$v_x=\dot{x}=6\cos t,\; v_y=\dot{y}=-8\sin 2t,$$

$$w_x=\ddot{x}=-6\sin t,\; w_y=-16\cos 2t.$$

Величины скорости и ускорения равны

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{36\cos^2 t+64\sin^2 2t}\;,$$

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2}=\sqrt{36\sin^2 t+256\cos^2 2t}\,.$$

Касательное ускорение будет

$$w_\tau=\frac{v_x w_x+v_y w_y}{v}=\frac{-36\sin t\cos t+128\sin 2t\cos 2t}{\sqrt{36\cos^2 t+64\sin^2 2t}}\,.$$

В. Определение положения точки и ее кинематических характеристик в заданный момент времени. При $t=t_1=5\pi/4$ *с* имеем координаты точки M_1

$$x_1=6\sin\frac{5\pi}{4}=-3\sqrt{2}=-4{,}24\ м,\; y_1=4\cos\frac{5\pi}{2}=0\,.$$

Следовательно, точка M_1 находится на оси абсцисс (рис.3.1). По формулам предыдущего пункта находим

$$v_1=\sqrt{36\cdot 0{,}5+64}=\sqrt{82}=9.06\ м/с,\; v_x=6\cos\frac{5\pi}{4}<0.$$

Последнее означает, что вектор скорости $\bar{v}_1$ направлен по касательной к траектории вниз. Вектор полного ускорения точки строим по его проекциям:

$$w_x=-6\sin\frac{5\pi}{4}=3\sqrt{2}=4{,}24\ м/с^2,\; w_y=-16\cos\frac{5\pi}{2}=0,\; w_1=4{,}24\ м/с^2.$$

Вектор $\bar{w}_1$ направлен вдоль оси Ox вправо. Далее:

$$w_{1\tau}=\frac{-36\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2+0}{9{,}06}=-1{,}99\ м/с^2,$$

$$w_{1n}=\sqrt{w_1^2-w_{1\tau}^2}=\sqrt{(4{,}24)^2-(1{,}99)^2}=3{,}75\ м/с^2.$$

Радиус кривизны траектории будет

$$\rho_1=\frac{v_1^2}{w_{1n}}=\frac{82}{3{,}75}=21{,}9\ м.$$

З а д а н и я 1*а* – 30*а*. Уравнения движения и момент времени t_1 указаны в таблице 3.1,*а*.

З а д а н и я 1*б* – 30*б*. Уравнения движения и момент времени t_1 даны в таблице 3.1,*б*.

Таблица 3.1, *а*

№ задания	*x, м*	*y, м*	t_1,*c*	№ задания	*x, м*	*y, м*	t_1,*c*
1*а*	$4\cos t$	$\sin t$	$3\pi/4$	16*а*	$8\sqrt{2}\cos t$	$12\sqrt{2}\sin t$	$3\pi/4$
2*а*	$4e^{-t}$	$3e^{t}$	0	17*а*	$4e^{-t}$	$8e^{t}$	0
3*а*	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\cos 2t$	$3\pi/4$	18*а*	$3\sqrt{2}\cos t$	$12\cos 2t$	$\pi/4$
4*а*	$2\sin t$	$8\cos t$	$3\pi/4$	19*а*	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\sqrt{2}\cos t$	$5\pi/4$
5*а*	$8t$	$12e^{-t}$	0	20*а*	$2t$	$3e^{-t}$	1
6*а*	$2t$	$4\sin t$	$\pi/6$	21*а*	$4\sqrt{2}\cos t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
7*а*	$2\cos^2 t$	$7\sin 2t$	$\pi/8$	22*а*	$5\sqrt{2}\cos t$	$12\sqrt{2}\sin t$	$5\pi/4$
8*а*	$5e^{t}$	$4e^{-t}$	0	23*а*	$4\sqrt{2}\cos t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
9*а*	t	$2\sin t$	$5\pi/6$	24*а*	$8\sqrt{2}\sin t$	$6\cos^2 t$	$5\pi/4$
10*а*	$3\sqrt{2}\cos t$	$5\sqrt{2}\sin t$	$5\pi/4$	25*а*	$30\sqrt{2}\sin t$	$16\sqrt{2}\cos t$	$3\pi/4$
11*а*	$2t$	$4e^{t}$	0	26*а*	$2t$	$4\cos t$	$2\pi/3$
12*а*	$\sqrt{2}\sin t$	$2\cos 2t$	$5\pi/4$	27*а*	$2\sqrt{2}\cos t$	$2\cos 2t$	$7\pi/4$
13*а*	$10\sqrt{2}\sin t$	$5\sqrt{2}\cos t$	$7\pi/4$	28*а*	$2\cos t$	t	$\pi/3$
14*а*	$3e^{t}$	$4e^{-t}$	0	29*а*	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\cos^2 t$	$\pi/4$
15*а*	$8\sqrt{2}\sin t$	$5\cos^2 t$	$\pi/4$	30*а*	$10\sqrt{2}\sin t$	$4\cos 2t$	$3\pi/4$

Таблица 3.1, *б*

№ задания	*x, м*	*y, м*	t_1,*c*	№ задания	*x, м*	*y, м*	t_1,*c*
1б	$3\sin t$	$2\cos 2t$	$3\pi/4$	16б	$8\sqrt{2}\cos t$	$15\sqrt{2}\sin t$	$7\pi/4$
2б	$6e^{-t}$	$3e^{t}$	0	17б	$6e^{t}$	$8e^{-t}$	0
3б	$2\sqrt{2}\sin t$	$3\cos 2t$	$3\pi/4$	18б	$5\sqrt{2}\cos t$	$12\cos 2t$	$3\pi/4$
4б	$2\sin t$	$6\cos t$	$5\pi/4$	19б	$6\sqrt{2}\sin t$	$3\sqrt{2}\cos t$	$3\pi/4$
5б	$2t$	$3e^{-t}$	0	20б	$3t$	$4e^{-t}$	1
6б	$2t$	$6\sin t$	$\pi/6$	21б	$8\sqrt{2}\cos t$	$6\cos^2 t$	$\pi/4$
7б	$6\cos^2 t$	$21\sin 2t$	$\pi/4$	22б	$10\sqrt{2}\cos t$	$24\sqrt{2}\sin t$	$3\pi/4$
8б	$5e^{t}$	$12e^{-t}$	1	23б	$8\sqrt{2}\cos t$	$6\cos^2 t$	$5\pi/4$
9б	t	$4\sin t$	$5\pi/6$	24б	$4\sqrt{2}\sin t$	$3\cos^2 t$	$3\pi/4$
10б	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\sqrt{2}\sin t$	$7\pi/4$	25б	$15\sqrt{2}\sin t$	$8\sqrt{2}\cos t$	$5\pi/4$
11б	$2t$	$4e^{t}$	1	26б	$2t$	$6\cos t$	$2\pi/3$
12б	$\sqrt{2}\sin t$	$2\cos 2t$	$5\pi/4$	27б	$2\sqrt{2}\cos t$	$2\cos 2t$	$7\pi/4$
13б	$10\sqrt{2}\sin t$	$5\sqrt{2}\cos t$	$7\pi/4$	28б	$2\cos t$	t	$\pi/3$
14б	$3e^{t}$	$4e^{-t}$	0	29б	$3\sqrt{2}\cos t$	$4\cos^2 t$	$\pi/4$
15б	$8\sqrt{2}\sin t$	$5\cos^2 t$	$\pi/4$	30б	$10\sqrt{2}\sin t$	$4\cos 2t$	$3\pi/4$

4. СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

З а д а н и е. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени t или в заданном положении.

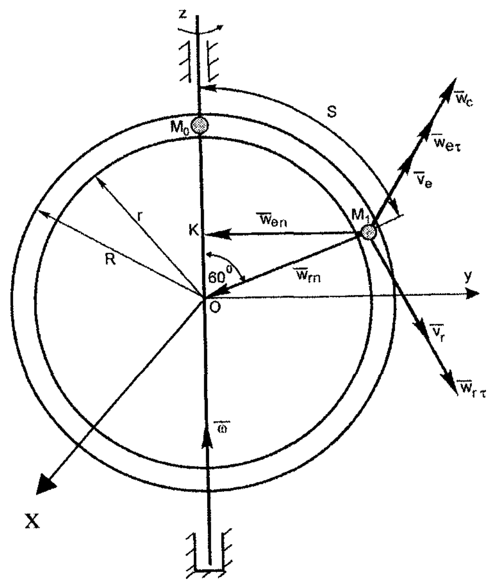


Рис. 4.1.

П р и м е р. Точка движется внутри кольца радиуса 0,2 *м* по закону $s = 0{,}05\pi\, t^2/3$, *м* (см. рис.4.1). В свою очередь, кольцо вращается вокруг своего диаметра в направлении, указанном на рисунке, с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5\,рад/c^2$.

В начальный момент кольцо находилось в покое, $t_1 = 2c$.

Р е ш е н и е. Проанализируем движение. Движение точки внутри кольца – относительное; движение, которое сообщает точке вращающееся кольцо, – переносное; движение точки относительно неподвижной Земли – абсолютное. Найдем положение точки на окружности в заданный момент времени, подставив в формулу относительного движения $t = 2c$: $s_1 = 0{,}05\pi \cdot 2^2/3 = 0{,}2\pi/3\,м$.

За $2c$ точка в относительном движении описала дугу $0{,}2\pi/3\,м$, которой соответствует центральный угол $M_0OM_1 = M_0M_1/R = 0{,}2\pi/3 \cdot 0{,}2 = \pi/3$ рад, или 60^0.

Абсолютную скорость точки M найдем по теореме сложения скоростей $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e$, где $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$ - соответственно относительная и переносная скорости точки.

Относительная скорость $v_r = ds/dt = 0{,}1\pi t/3\ м/c$. В момент времени t=2c $v_r = 0{,}2\pi/3 = 0{,}21\,м/c$. Эта скорость направлена по касательной к окружности кольца.

Переносная скорость $v_e = h\omega$, где h – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения; ω – угловая скорость кольца.

Так как вращение по условию равнопеременное $(\varepsilon = const)$, то угловая скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t_1$, т.к. $\omega_0 = 0$.

Тогда $\omega = 0{,}5 \cdot 2 = 1$ рад/с. В свою очередь, $h = M_1K = OM_1 \sin 60^0 = 0{,}2\sqrt{3}/2 = 0{,}1\sqrt{3}\,м$.

Это дает $v_e = 0{,}1\sqrt{3} \cdot 1 = 0{,}17\,м/с$.

Переносная скорость перпендикулярна плоскости кольца и направлена от нас. Таким образом, $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$, и модуль абсолютной скорости можно вычислить по теореме Пифагора: $v = \sqrt{v_r^2 + v_в^2} = \sqrt{0{,}21^2 + 0{,}17^2} = \sqrt{0{,}74} \approx 0{,}27\,м/с$.

Абсолютное ускорение найдем по теореме Кориолиса

$$\bar{w} = \bar{w}_r + \bar{w}_e + \bar{w}_c, \tag{4.1}$$

где $\bar{w}_r$, $\bar{w}_e$ и $\bar{w}_c$ - соответственно относительное, переносное ускорение и ускорение Кориолиса.

Относительное и переносное ускорения можно разложить на составляющие по касательным и нормалям к соответствующим траекториям (относительная и переносная траектории – окружности радиуса R с центром в точке O), т.е. $\bar{w}_r = \bar{w}_{rn} + \bar{w}_{r\tau}$, $\bar{w}_e = \bar{w}_{en} + \bar{w}_{e\tau}$.

Тогда равенство (4.1) примет вид:

$$\bar{w} = \bar{w}_{rn} + \bar{w}_{r\tau} + \bar{w}_{en} + \bar{w}_{e\tau} + \bar{w}_c. \qquad (4.2)$$

Нормальное относительное ускорение $w_{rn} = v_r^2/R = 0{,}21^2/0{,}2 = 0{,}22$ *м/с²*, вектор $\bar{w}_{rn}$ направлен по радиусу M_1O к центру.

Касательное относительное ускорение $w_{r\tau} = d^2s/dt^2 = 0{,}1\pi/3 = 0{,}1\ м/с^2$, вектор $\bar{w}_{r\tau}$ направлен по касательной к окружности кольца, как показано на рис. 4.1.

Нормальное переносное ускорение $w_{en} = h\omega^2 = 0{,}1\sqrt{3}\cdot 1^2 = 0{,}17$ *м/с²*, вектор $\bar{w}_{en}$ направлен по M_1K к оси вращения. Касательное переносное ускорение $w_{e\tau} = h\varepsilon = 0{,}1\sqrt{3}\cdot 0{,}5 = 0{,}087$ *м/с²*, вектор $\bar{w}_{e\tau}$ перпендикулярен плоскости кольца и направлен от нас.

Ускорение Кориолиса $\bar{w}_c = 2\bar{\omega}\times\bar{v}_r$. Модуль этого ускорения $w_c = 2\omega\, v_r \sin(\bar{\omega}\wedge\bar{v}_r)$. Вектор $\bar{\omega}$ направлен по оси вращения вверх, поэтому $(\bar{\omega}\wedge\bar{v}_r) = 150^0$. Тогда $w_c = 2\cdot 1\cdot 0{,}21\cdot 0{,}5 = 0{,}21$ *м/с²*, вектор $\bar{w}_c$ перпендикулярен плоскости кольца и направлен от нас.

Введем систему координат, связанную с вращающимся кольцом, причем плоскость yOz совместим с плоскостью кольца, ось Oz направим по оси вращения, а ось Ox - перпендикулярно плоскости кольца, к нам. Спроектируем теперь равенство (4.2) на выбранные оси:

$$w_x = -w_{e\tau} - w_c = -0{,}087 - 0{,}21 \approx -0{,}3\ м/с^2;\quad w_y = -w_{rn}\cos 30^0 +$$

$$+ w_{r\tau}\cos 60^0 - w_{en} = -0{,}22\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}1\cdot 0{,}5 - 0{,}173 = -0{,}31\ м/с^2;$$

$$w_z = -w_{rn}\cos 60^0 - w_{r\tau}\cos 30^0 = -0{,}22\cdot 0{,}5 - 0{,}1\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}2\ м/с^2.$$

Отсюда

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{(-0{,}3)^2 + (-0{,}31)^2 + (-0{,}2)^2} = 0{,}48\ м/с^2.$$

З а д а ч а 4.1. Горизонтальная платформа радиусом 0,5 *м* вращается равноускоренно с угловым ускорением 0,25 *рад/с²* из состояния покоя. В момент начала вращения из положения A выходит из состояния покоя движется равноускоренно в направлении *AB* с относительным ускорением $w_r = 0{,}05$ *м/с²*; $t_1 = 2c$ (рис. 4.2).

З а д а ч а 4.2. Прямоугольная пластинка *ABCD* вращается вокруг стороны *AB* по закону $\varphi = \frac{4}{3}\sqrt{2}\,t^2$ рад. Вдоль *EF* ($EF \perp AB$) движется точка по закону $s = t^4$ м; $t_1 = 1c$ (рис. 4.3).

З а д а ч а 4.3. Диск радиусом 1 *м* вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}4$ *рад/с²*. По ободу диска в сторону, противоположную направлению вращения, движется точка *M* по закону $s = 0{,}2t^2$ *м*; $t_1 = 5c$ (рис. 4.4).

З а д а ч а 4.4. Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 1*м*, вращается вокруг вершины *O* равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением 3 *рад/с²*. В момент начала вращения из вершины *A* выходит точка с начальной относительной скоростью 2,5 м/с и движется по катету *AB* с постоянным ускорением 3 *м/с²*; $t_1 = 1/3c$ (рис. 4.5).

З а д а ч а 4.5. Диск вращается равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с². По радиусу диска движется точка по закону $S = (1 + t^2)$ *м*; $t_1 = 1c$ (рис. 4.6).

З а д а ч а 4.6. Решить задачу 4.3 при условии, что точка движется в сторону вращения, а $\varepsilon = 1$ рад/с^2, $s = t^2$ *м*, $t_1 = 2/3$ с (рис. 4.4).

З а д а ч а 4.7. Равнобедренный прямоугольный треугольник вращается вокруг своего катета равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с^2. Точка движется по гипотенузе согласно закону $s = \sqrt{5}\left(1 + t^2\right)$ *м*; $t_1 = 1c$ (рис. 4.7).

З а д а ч а 4.8. Диск радиусом $R = \sqrt{3}/3\,м$ и вращается равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 2\sqrt{3}$ рад/с^2. По стороне AB вписанного равностороннего треугольника движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 2$ *м/с^2*. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она придет в положение B, если в этот момент $\omega = 6$ *рад/с* и $v_r = 5\sqrt{3}/12$ *м/с* (рис. 4.8).

З а д а ч а 4.9. Диск вращается равноускоренно из состояния покоя вокруг своего диаметра с угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с^2. По радиусу диска из центра движется точка по закону $s = \left(1 + t^2\right)$ *м*; $t_1 = 1c$ (рис. 4.9).

З а д а ч а 4.10. Квадрат со стороной 1 *м* равноускоренно вращается вокруг своей вершины O с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ *рад/с^2*. По стороне AB движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 1$ *м/с^2*. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины B, если в этот момент $v_r = 0{,}5$ *м/с*, а $\omega = 2$ *рад/с* (рис. 4.10).

З а д а ч а 4.11. Круглая пластинка вращается вокруг своего диаметра по закону $\varphi = \left(7t^2 - 11t\right)$ рад. По радиусу OA движется точка по закону $s = \sqrt{2}\,t^2$ *м*; $t_1 = 1$ с (рис. 4.11).

З а д а ч а 4.12. Равносторонний треугольник со стороной 1 *м* вращается вокруг своей вершины O по закону $\varphi = \sqrt{3}\left(t^2 + 2t\right)$ *рад*. По стороне AB движется точка по закону $s = \left(\frac{7}{4}t + \frac{5}{2}t^2\right)$ *м*; $t_1 = 0$ (рис. 4.12).

З а д а ч а 4.13. Полая трубка вращается равноускоренно из состояния покоя в плоскости чертежа с угловым ускорением $\varepsilon = 1$ рад/с^2. Внутри трубки движется точка по закону $s = \left(1 + t^2\right)$ *м*; $t_1 = 1\,c$ (рис. 4.13).

З а д а ч а 4.14. Квадрат со стороной 1 *м* вращается равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ *рад/с^2* вокруг центра O. По стороне AB движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 1$ *м/с^2*. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет положения B, если в момент $\omega = 2$ *рад/с*, $v_r = 1$ *м/с* (рис. 4.14).

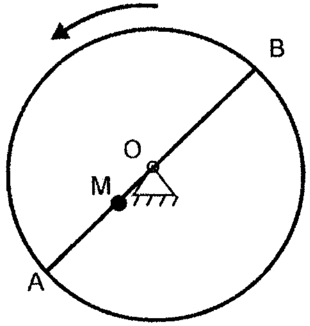


Рис. 4.2

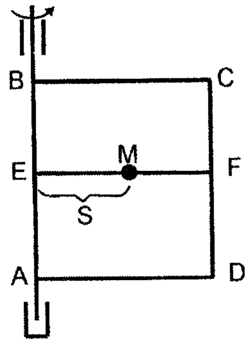


Рис. 4.3

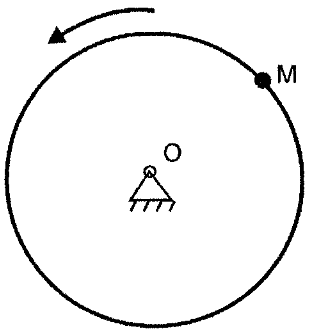


Рис. 4.4

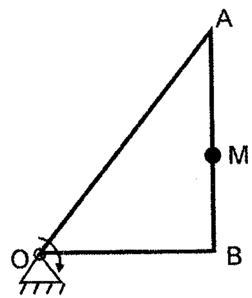


Рис. 4.5

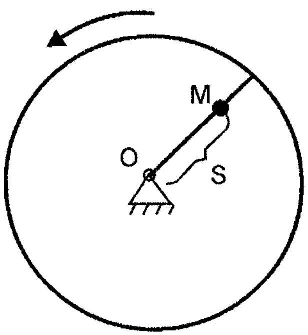


Рис. 4.6

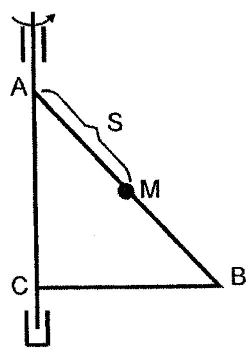


Рис. 4.7

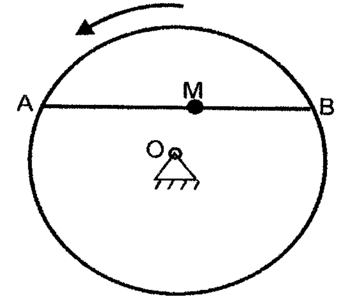


Рис. 4.8

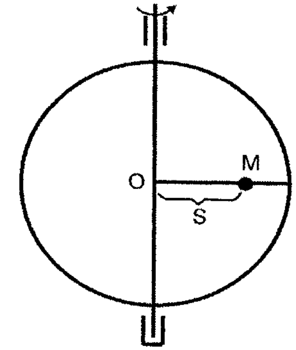


Рис. 4.9

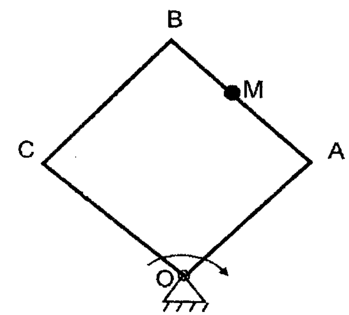


Рис. 4.10

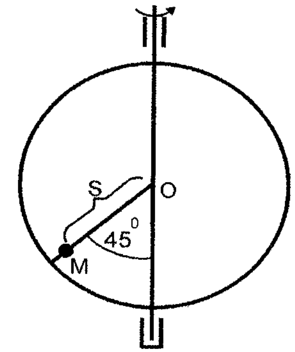


Рис. 4.11

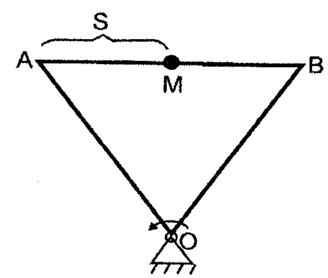


Рис. 4.12

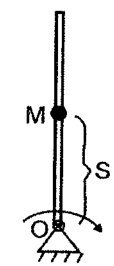


Рис. 4.13

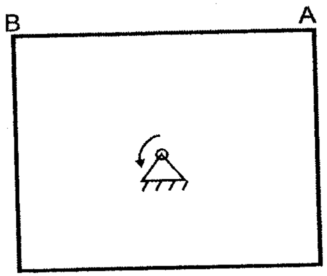


Рис. 4.14

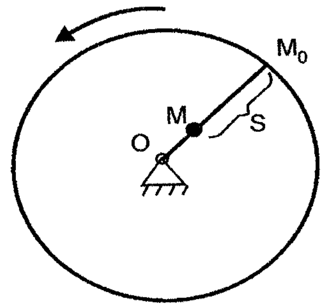


Рис. 4.15

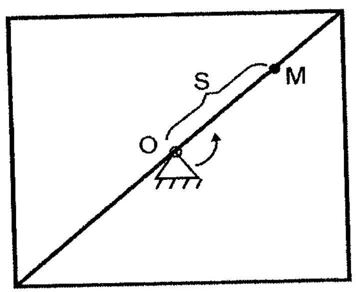


Рис. 4.16

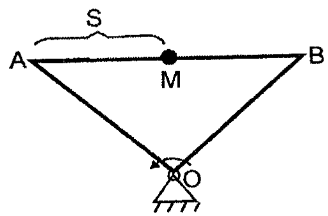


Рис. 4.17

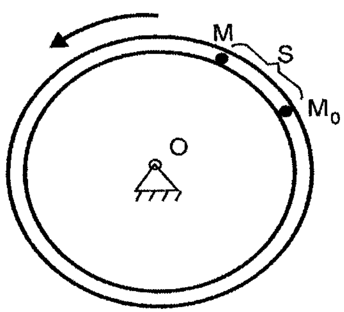


Рис. 4.18

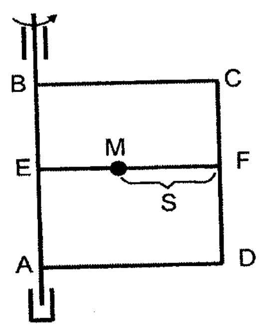


Рис. 4.19

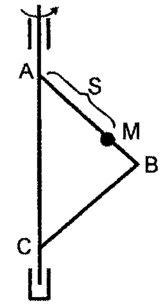


Рис. 4.20

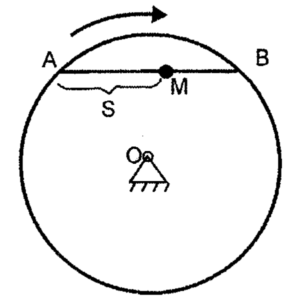


Рис. 4.21

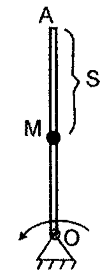


Рис. 4.22

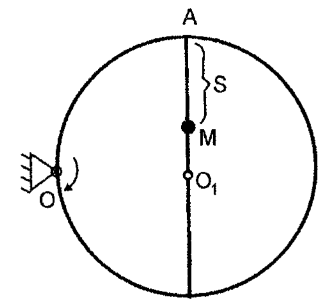


Рис. 4.23

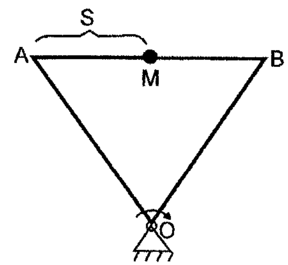


Рис. 4.24

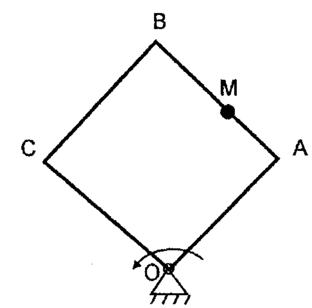


Рис. 4.25

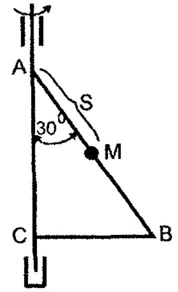


Рис. 4.26

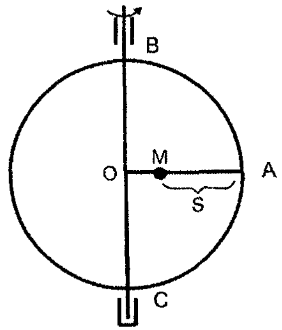


Рис. 4.27

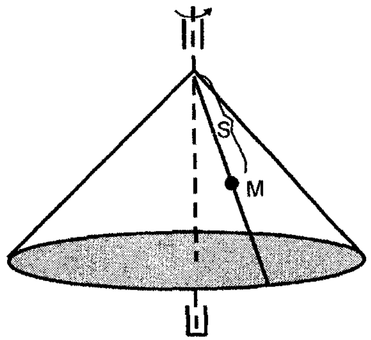


Рис. 4.28

З а д а ч а 4.15. Диск радиусом 0,6 м вращается по закону $\varphi = (2t^2 - 7t)$ *рад* вокруг оси *O*. К центру по радиусу диска движется точка по закону $s = 0{,}1\,t^2$ *м*; $t_1 = 2$ с (рис. 4.15).

З а д а ч а 4.16. Квадрат вращается вокруг своего центра *O* по закону $\varphi = (16t^2 - 28t)$ *рад*. По диагонали квадрата движется точка по закону $s = t^2$ *м*; $t_1 = 1$ с (рис. 4.16).

З а д а ч а 4.17. Равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен $\sqrt{2}$ *м*, вращается без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ *рад/с²* вокруг вершины *O*. По гипотенузе движется точка по закону $s = (t^2 - t + 2)$ *м*; $t_1 = 1$ с (рис. 4.17).

З а д а ч а 4.18. Полное кольцо радиусом $R = 1$ *м* вращается без начальной угловой скорости вокруг оси *O* с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ *рад/с²*. Внутри кольца движется точка по закону $s = (t^2 - t + 1)$ м; $t_1 = 1$ с (рис.4.18).

З а д а ч а 4.19. Прямоугольная пластинка *ABCD* вращается вокруг стороны *AB* по закону $\varphi = (2t^2 - 7t)$ *рад*. Вдоль *FE* ($FE \perp AB$) движется точка по закону $s = 0{,}1\,t^2$ *м*. Ширина пластинки BC = 0,6 м; $t_1 = 2$ *с* (рис.4.19).

З а д а ч а 4.20. Равнобедренный треугольник вращается вокруг гипотенузы *AC* без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 1$ *рад/с²*. По катету *AB* движется точка по закону $s = \sqrt{2}(5t^2 - 3t + 8)$ *м*; $t_1 = 1$ *с* (рис. 4.20).

З а д а ч а 4.21. Круглый диск радиусом $\sqrt{3}/3$ *м* вращается равноускоренно без начальной угловой скорости с угловым ускорением $\varepsilon = 2\sqrt{3}$ *рад/с*^{2}. По стороне *AB* вписанного шестиугольника движется точка по закону $s = \frac{\sqrt{3}}{6}(3t^2 - 1)$ *м*; $t_1 = 1$ *с* (рис. 4.21).

З а д а ч а 4.22. Решить задачу 4.18, предполагая, что точка движется в сторону, противоположную направлению вращения; $\varepsilon = 2$ *рад/с*^{2}; $R = 1$ *м*; $s = t^2$ *м* (см. рис.4.18).

З а д а ч а 4.23. Кривошип *OA* длиной 0,6 м вращается по закону $\varphi = (2t^2 - 7t)$ рад. Вдоль кривошипа от *A* к *O* движется точка по закону $s = 0{,}4t^2$ *м*; $t_1 = 1$ с (рис.4.22).

З а д а ч а 4.24. Круглый диск радиусом 1,5 *м* вращается в плоскости чертежа вокруг оси *O* по закону $\varphi = (t^2 - t)$ рад. По диаметру *AB* движется точка по закону $s = (t^2 - t + 1)$ *м*; $t_1 = 2$ с (рис.4.23).

З а д а ч а 4.25. Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{3}/3$ м вращается равноускоренно без начальной угловой скорости с угловым ускорением $\varepsilon = 2\sqrt{3}$ рад/с^2. По стороне *AB* движется точка по закону $s = \frac{\sqrt{3}}{6}(3t^2 - 1)$ *м*; $t_1 = 1$ *с* (рис. 4.24).

З а д а ч а 4.26. Квадрат со стороной 1 *м* равноускоренно вращается вокруг своей вершины *O* с угловым ускорением $\varepsilon = 2$ *рад/с*^{2}. По стороне *AB* движется точка с постоянным относительным ускорением $w_r = 2$ *м/с*^{2}. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент, когда она достигнет вершины *B*, если в этот момент $v_r = 1$ *м/с*, а $\omega = 2$ *рад/с* (рис. 4.25).

З а д а ч а 4.27. Прямоугольный треугольник вращается вокруг своего катета *AC* по закону $\varphi = 0{,}1(t^2 + 8t)$ рад. По гипотенузе *AB* по закону $s = t^2 + 1$ *м* движется точка; $t_1 = 1$ *с* (рис. 4.26).

З а д а ч а 4.28. Диск радиусом 0,6 м вращается по закону $\varphi = (2t^2 - 7t)$ рад вокруг своего диаметра. По радиусу *OA* диска (*AO⊥BC*) от *A* к центру движется точка по закону $s = 0{,}1t^2$ *м*; $t_1 = 2$ *с* (рис.4.27).

З а д а ч а 4.29. Конус, имеющий прямой угол при вершине, вращается вокруг своей оси по закону $\varphi = (t^2 + 6t)/8$ рад. По образующей конуса движется точка по закону $s = \sqrt{2}(2t^2 - 3t + 5)$ м; $t_1 = 1$ с (рис.4.28).

З а д а ч а 5.30. Решить задачу 4.24 в предположении, что направление вращения диска изменилось на противоположное (см. рис. 4.23).

5. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

З а д а н и е. Найти для заданного механизма скорости точек A, B и M.

П р и м е р 5.1. Диск радиуса R катится без скольжения по плоскости. Центр его A движется по закону $s = f(t)$. Скорость точек A, B и M найти для момента t_1 (рис.5.1). Пусть $R = 0.12\,м$; $s = (0{,}24t - 0{,}01t^3)\,м$; $AM = 0.08\,м$; $\beta = \dfrac{5\pi}{3}$; $t_1 = 2\,с$.

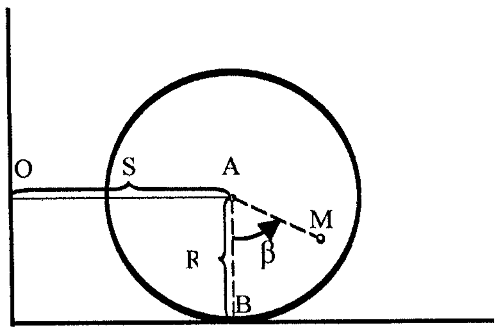


Рис.5.1

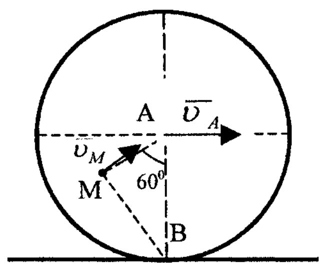


Рис.5.2

Р е ш е н и е.

Скорость точки А $\upsilon_A = |\dot{s}| = \left|0{,}24 - 0{,}03t^2\right|$. При подстановке в производную $\dot{s}$ величины заданного момента времени получаем положительную величину. Значит, знак абсолютной величины можно снять, а вектор $\overline{\upsilon}_A$ направлен в сторону увеличения координаты s, т.е. вправо (рис.5.2); модуль этой скорости $\upsilon_A = 0{,}24 - 0{,}03 \cdot 2^2 = 0{,}12\, м/с$.

Мгновенный центр скоростей диска совпадает с точкой B, так как она находится в контакте с неподвижной плоскостью. Таким образом, $\upsilon_B = 0$. Для нахождения угловой скорости воспользуемся формулой $\upsilon_A = BA\omega$, откуда $\omega = \upsilon_A / R = 0{,}12/0{,}12 = 1\,рад/с$.

Теперь не трудно найти скорость точки M: $\upsilon_M = BM\omega$. По теореме косинусов $BM = \sqrt{AM^2 + R^2 - 2\cdot AM \cdot R \cdot \cos 60^0} = 10^{-2}\sqrt{64 + 144 - 2\cdot 8 \cdot 12 \cdot 0{,}5} = 0{,}04\sqrt{7}\,м/с$. Окончательно $\upsilon_M = 0{,}04\sqrt{7}\cdot 1 = 0{,}1\, м/с$.

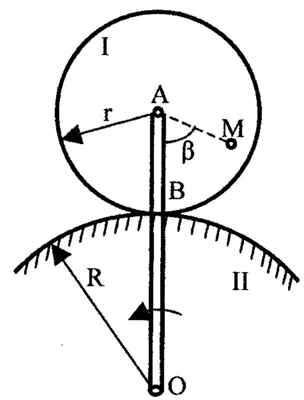


Рис.5.3

П р и м е р 5.2. Шестеренка I радиуса r приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг оси O неподвижной шестеренки II радиуса R (рис.5.3). Пусть угловая скорость кривошипа в данный момент $\omega_0 = 1/3\,рад/с$; $r = 0{,}3\,м$; $R = 0{,}6\,м$; $AM = 0{,}1\sqrt{3}\,м$; $\beta = 7\pi/6$; кривошип вращается равноускоренно.

Р е ш е н и е. Так как точка A принадлежит кривошипу, то скорость ее $\upsilon_A = (R + r)\omega_0 = (0{,}6 + 0{,}3)/3 = 0{,}3\,м/с$.

Вектор $\overline{\upsilon}_A$ направлен в соответствии с направлением вращения кривошипа, как показано на рис.5.4.

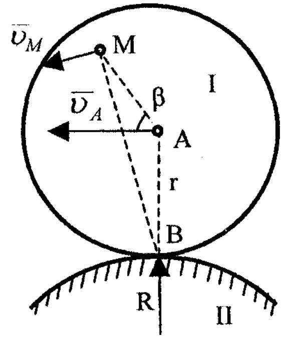


Рис.5.4

Мгновенный центр скоростей совпадает с точкой B. Поэтому $\upsilon_B = 0$. Теперь можно найти угловую скорость шестеренки I. Для скорости точки A можно написать и такое соотношение: $\upsilon_A = BA \cdot \omega$. Тогда $r\omega = (R+r)\omega_0$, откуда $\omega = (R+r)\omega_0 / r = (0{,}6+0{,}3)\cdot(1/3)/0{,}3 = 1\ рад/с$.

Теперь найдем расстояние

$$BM = \sqrt{AM^2 + r^2 - 2\cdot AM \cdot r \cdot \cos 150^0} = 0{,}1\sqrt{3+9+2\sqrt{3}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= 0{,}1\sqrt{21}\cdot 1 = 0{,}45\ м/с.$$

Пример 5.3. Кривошип OA нецентрального кривошипно-шатунного механизма (рис.5.5) имеет в данный момент угловую скорость ω_0. Пусть $r = 0{,}2\ м$; $AB = l = 0{,}6\ м$; $h = 0{,}2\sqrt{2}\ м$; $AM = 0{,}4 м$; $\omega_0 = 6 рад/с$; $\varphi = \pi/4$; кривошип вращается равноускоренно.

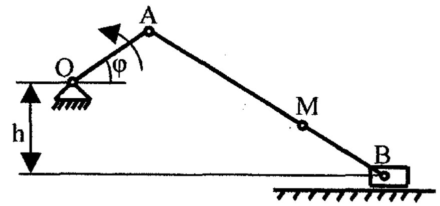


Рис.5.5

Решение. Найдем сначала угол ψ (рис.5.6). Величину отрезка AK можно подсчитать двумя способами: $AK = r\sin 45^0 + h$, $AK = l\sin\psi$.

Тогда $\sin\psi = (r\sin 45^0 + h)/l = \left(10\sqrt{2} + 20\sqrt{2}\right)/0{,}6 = \sqrt{2}/2$; $\psi = 45^0$.

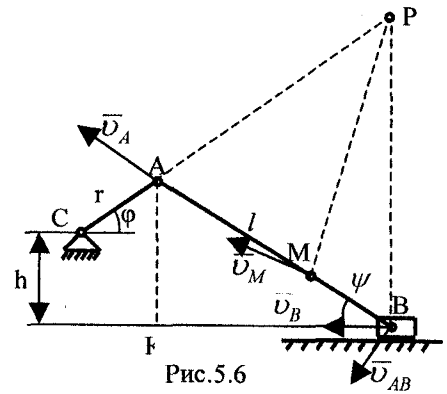


Рис.5.6

Скорость точки A $\upsilon_A = r\omega_0 = 0{,}2\cdot 6 = 1{,}2\ м/с$. Вектор скорости точки B направлен горизонтально. Мгновенный центр скоростей шатуна находится в точке P на пересечении перпендикуляров к векторам $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$, проходящих соответственно через точки A и B.

Нетрудно найти расстояние PA. Действительно, треугольник ABP –прямоугольный и равнобедренный (углы при основании равны 45^0). Значит, $AP = l = 0{,}6 м$. Для скорости точки A можно записать $\upsilon_A = PA\omega$, откуда угловая скорость шатуна $\omega = r\omega_0 / PA = 0{,}2\cdot 6/0{,}6 = 2 рад/с$.

Теперь по формуле $\upsilon_B = PB\omega$ можно определить скорость точки B. Заметим, что $PB = l\sqrt{2}$. Следовательно, $\upsilon_B = l\sqrt{2}\omega = 0{,}6\sqrt{2}\cdot 2 = 1{,}2\sqrt{2} = 1{,}7\ м/с$.

Шатун вращается по часовой стрелке. Направление вектора $\overline{\upsilon}_{AB}$ показано на рис.5.6.

Для определения скорости точки M необходимо найти расстояние $PM = \sqrt{AP^2 + AM^2} = 20\sqrt{9+4} = 0{,}2\sqrt{13}\ см$. Тогда $\upsilon_M = PM\omega = 0{,}2\sqrt{13}\cdot 2 = 0{,}4\sqrt{13} \approx 1{,}44\ м/с$.

З а д а ч и 5.1-5.10. Диск радиуса R (см.рис.5.1) катится без скольжения по плоскости (см.пример 5.1). Задачи решить для момента времени t_1. Данные приведены в табл.5.1.

Таблица 5.1

Номер задачи	R, см	f(t), см	AM, см	β,рад	t_1, с
5.1	2	$7\sqrt{3}t - 3t^2/2$	1	π/3	$\sqrt{2}$
5.2	$\sqrt{3}$	$3t^2/2 - 2\sqrt{3}t$	0,5	π/6	$2\sqrt{2}$
5.3	$2\sqrt{2}$	t^2	$\sqrt{3}/2$	π/4	1
5.4	2	$\sqrt{3}t^2 - 4t$	1	5π/6	$\sqrt{3}$
5.5	$2\sqrt{2}$	$3t^2 - 2t$	1	4π/3	1
5.6	2	$3t^2/2$	$\sqrt{2}$	5π/6	$2\sqrt{2}$
5.7	2	$3t^2/2 + (\sqrt{3} - 3)t$	$2\sqrt{2}$	7π/4	$\sqrt{2}$
5.8	$\sqrt{3}$	$t^2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	7π/6	1
5.9	2	$t^2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2π/3	$\sqrt{2}$
5.10	$\sqrt{3}$	$t^2\sqrt{3}$	1	3π/4	1

З а д а ч и 5.11-5.20. Шестеренка I радиуса r приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг оси O неподвижной шестеренки II радиуса R (см.рис.5.3, пример 5.2). Данные приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Номер задачи	r, см	R, см	AM, см	β,рад	ω_0, рад/с
5.11	30	44	10	π/3	5/12
5.12	4	60	3	π/2	2/3
5.13	20	20	6	π/6	3/5
5.14	20	15	15	3π/2	5/8
5.15	20	20/3	$5\sqrt{2}$	3π/6	1/4
5.16	10	4/3	$10\sqrt{3}$	П	$3\sqrt{3}/4$
5.17	30	114	5	5π/4	$\sqrt{3}/3$
5.18	$20\sqrt{3}$	60	$10\sqrt{2}$	2π/3	1/4
5.19	10	$40\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	5π/6	5/12
5.20	10	20	$10\sqrt{3}$	π/3	$\sqrt{3}/3$

З а д а ч а 6.21-6.30. Кривошип ОА нецентрального кривошипно-шатунного механизма (см.рис.5.5, пример 5.3). Данные приведены в табл.5.3.

Таблица 5.3

Номер задачи	r, 10^{-2} м	l, 10^{-2} м	h, 10^{-2} м	φ, рад	ω_0, рад/с
5.21	10	80	$30\sqrt{2}$	π	4
5.22	10	40	50	π	2
5.23	$10\sqrt{3}$	40	$20\sqrt{3}$	π	2
5.24	10	60	$50\sqrt{2}$	π	4
5.25	$10\sqrt{2}$	100	$20\sqrt{3}$	7π/4	6
5.26	$10\sqrt{2}$	100	$40\sqrt{2}$	3π/4	6

Продолжение табл. 5.3

5.27	$10\sqrt{3}$	60	55	$\pi/2$	10
5.28	$10\sqrt{3}$	80	$33\sqrt{2}$	0	6
5.29	20	80	$40\sqrt{3}$	0	4
5.30	$10\sqrt{3}$	40	30	$3\pi/2$	4

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики,т.т. 1,2. М.: Наука,2007.
2. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики. М., Наука,2003.
3. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. М., Наука,1986 и посл. изд.
4. *Горшков Л.К., Нагаев Р.Ф., Ветюков М.М., Монахов В.Н.* Сборник задач по теоретической механике. СПб. СПГГИ(ТУ), 2004.

СОДЕРЖАНИЕ