Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2017 г

11 класс

1. Известно, что для двух положительных чисел x и y выполнено равенство $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=7$. Чему может равняться выражение $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$?

Ответ: 3.

Решение. Обозначим через t выражение $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$. Тогда

$$t^2=\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}=7+2=9,$$

а так как t положительно, то $t=3$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Приведён верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Решение в целом верное, но ответ 3 приведён без упоминания того, что t не может быть отрицательным, – 6 баллов.

Решение в целом верное, но в ответ включено лишнее отрицательное значение t – 4 балла

---

2. Из деревень Антоновки и Борисовки одновременно навстречу друг другу вышли Антон и Борис соответственно и прошли весь путь между деревнями не останавливаясь с постоянными скоростями. Антон шёл на 2 км/ч медленнее Бориса, поэтому до места их встречи он прошёл на 2 км меньше, чем Борис. Найдите расстояние между деревнями, если путь Антона до Борисовки занял 2 часа 24 минуты.

Ответ: 12 км.

Решение. Пусть x км/ч – скорость Антона, тогда скорость Бориса равна $x+2$ км/ч. Поскольку 2 часа 24 минуты составляют $\frac{12}{5}$ часа, то расстояние между деревнями равно $\frac{12}{5}x$ км. Так как Борис до места встречи прошёл на 2 км больше Антона, то он прошёл половину всего пути плюс 1 км, а Антон прошёл половину всего пути минус 1 км. Таким образом, пути, пройденные Антоном и Борисом до места встречи, составляют $\frac{6}{5}x-1$ км и $\frac{6}{5}x+1$ км соответственно. Время, затраченное Антоном и Борисом на эти пути, равно $\left(\frac{6}{5}x-1\right):x$ ч и $\left(\frac{6}{5}x+1\right):(x+2)$ ч соответственно, а поскольку это время одинаково, то можем составить уравнение

$$\left(\frac{6}{5}x-1\right):x=\left(\frac{6}{5}x+1\right):(x+2).$$

Используя основное свойство пропорции, перепишем уравнение в виде

$(x+2)\left(\frac{6}{5}x-1\right)=x\left(\frac{6}{5}x+1\right)$, что равносильно $\frac{6}{5}x^2+\frac{12}{5}x-x-2=\frac{6}{5}x^2+x$ или $\frac{2}{5}x=2$, откуда $x=5$. Следовательно, расстояние между деревнями равно $\frac{12}{5}\cdot 5=12$ км.

Критерии.

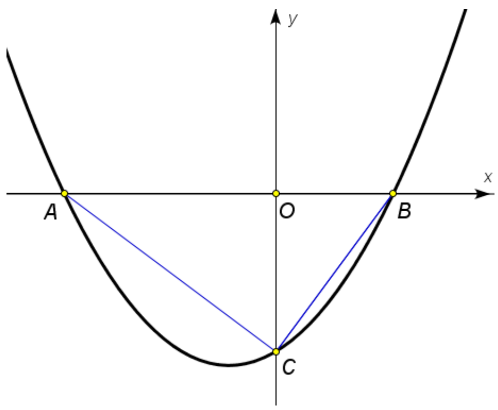
Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно составлены все уравнения (причём они могут отличаться от приведённых выше), но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 3-4 балла.

----

3. Парабола с уравнением $y=x^2+px+q$ пересекает ось абсцисс в точках A и B, а ось ординат в точке C. Найдите p и q, если ABC – прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 3.

Ответ: $p=\sqrt{5},\ q=-1$ или $p=-\sqrt{5},\ q=-1$.



Решение. Заметим, что ветви параболы направлены вверх, а вершина прямого угла может находиться только в точке C. В противном случае две точки параболы лежали бы на прямой, параллельной оси Oy, что невозможно. Точки A и B расположены по разные стороны от начала координат O (иначе угол ACB будет острым), точка C расположена ниже оси Ox (иначе точки A и B были бы расположены по одну сторону от точки O). Будем считать, что A лежит левее B. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$, причём $x_1<x_2$. По теореме Виета имеем равенства $x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=q$. Поскольку высота, проведённая из вершины прямого угла, равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу, то для треугольника ABC имеет место равенство $OC^2=OA\cdot OB$. Но так как абсциссы точек A и B равны x_1 и x_2 соответственно, а ордината точки C равна q, то $OA=-x_1$, $OB=x_2$, $OC=-q$, следовательно, можем записать уравнение $q^2=-x_1x_2$, т.е. $q^2=-q$, что равносильно $q(q+1)$ =0. Так как $q\neq 0$, то $q=-1$.

Найдём теперь p. Длина гипотенузы AB выражается формулой

$$AB=x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{p^2-4q}=3,$$

отсюда получаем $p=\pm\sqrt{9+4q}=\pm\sqrt{5}$. Таким образом, получаем два набора коэффициентов p и q: $(\sqrt{5},-1)$ и $(-\sqrt{5},-1)$. Проверим, что найденные пары удовлетворяют условию задачи.

Если уравнение параболы $y=x^2-\sqrt{5}x-1$, то $x_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm 3}{2}$, при этом $AB=x_2-x_1=3$, $AC^2=OA^2+OC^2=\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^2+1=\frac{18-6\sqrt{5}}{4}$, $BC^2=OB^2+OC^2=\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^2+1=\frac{18+6\sqrt{5}}{4}$, $AC^2+BC^2=\frac{18-6\sqrt{5}}{4}+\frac{18+6\sqrt{5}}{4}=9=AB^2$, следовательно, по обратной теореме Пифагора треугольник ABC – прямоугольный. Аналогично проверяется и случай, когда уравнение параболы имеет вид $y=x^2+\sqrt{5}x-1$. Тогда $x_{1,2}=\frac{-\sqrt{5}\pm 3}{2}$, $AB=3$, $AC^2=\frac{18+6\sqrt{5}}{4}$, $BC^2=\frac{18-6\sqrt{5}}{4}$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ получен без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

Рассуждения в целом верные и получены оба варианта коэффициентов, но нет обоснования того, что конфигурация треугольника такая, как на чертеже – 6 баллов.

За пропущенный вариант коэффициентов (p, q) снимается 2 балла.

За отсутствие проверки найденных коэффициентов снимается 1 балл.

За приведённый неверный вариант коэффициентов (p, q) (вместе с обоснованно найденным верным вариантом) снимается 2 балла.

---

4. Натуральное число назовём *симметричным*, если оно читается слева направо так же, как и справа налево. Например, число 27172 – симметричное. Сколько существует симметричных семизначных чисел, которые делятся нацело на 6?

Ответ: 1333.

Решение. Нужно найти количество натуральных чисел с десятичной записью вида $abcdcba$, кратных шести. Для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3, т.е. чтобы его последняя цифра была чётной, а сумма его цифр была кратна трём. Таким образом, искомое количество равно количеству упорядоченных наборов (a, b, c, d), где a принадлежит множеству $X = \{2,4,6,8\}$, числа b, c и d принадлежат множеству $Y = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и число $2(a + b + c) + d$ кратно трём. Значения переменной a, принадлежащие множеству X, а также значения b, c и d, принадлежащие множеству Y, мы будем называть допустимыми. Рассмотрим остатки, которые дают переменные a, b, c и d при делении на 3. Заметим, что в множестве X два числа при делении на 3 дают остаток 2 (числа 2 и 8), и по одному числу дают остатки 0 и 1. В множестве Y четыре числа дают остаток 0 (числа 0, 3, 6, 9) и по три числа дают остатки 1 и 2. Для каждого $i = 0, 1, 2$ положим

a_i – количество допустимых значений a, дающих при делении на 3 остаток i;

b_i – количество допустимых значений b, дающих при делении на 3 остаток i;

c_i – количество допустимых значений c, дающих при делении на 3 остаток i;

d_i – количество допустимых значений d, дающих при делении на 3 остаток i;

$(ab)_i$ – количество допустимых пар (a, b), таких, что сумма $a + b$ даёт при делении на 3 остаток i;

$(abc)_i$ – количество допустимых троек (a, b, c), таких, что сумма $a + b + c$ даёт при делении на 3 остаток i;

$(abcd)_0$ – количество допустимых наборов (a, b, c, d), таких, что сумма $2(a + b + c) + d$ даёт при делении на 3 остаток 0.

Из вышесказанного имеем $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 3$, $b_0 = c_0 = d_0 = 4$.

Найдём, сколько допустимых пар (a,b) имеют сумму $a+b$, дающую при делении на 3 остатки 0, 1 и 2. Чтобы $a+b$ при делении на 3 давало остаток 0, нужно, чтобы оба числа a и b давали остаток 0 или одно давало бы остаток 1, а другое 2. Таким образом,

$$(ab)_0 = a_0b_0 + a_1b_2 + a_2b_1 = 1\cdot 4 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 = 13.$$

Чтобы $a+b$ при делении на 3 давало остаток 1, нужно, чтобы оба числа a и b давали остаток 2 или одно давало бы остаток 0, а другое 1. Таким образом,

$$(ab)_1 = a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_2 = 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 3 = 13.$$

Чтобы $a+b$ при делении на 3 давало остаток 2, нужно, чтобы оба числа a и b давали остаток 1 или одно давало бы остаток 0, а другое 2. Таким образом,

$$(ab)_2 = a_0b_2 + a_2b_0 + a_1b_1 = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 3 = 14.$$

Найдём, сколько допустимых троек (a,b,c) имеют сумму $a+b+c$, дающую при делении на 3 остатки 0, 1 и 2. Чтобы $a+b+c$ при делении на 3 давало остаток 0, нужно, чтобы оба числа $a+b$ и c давали остаток 0 или одно из этих двух чисел давало бы остаток 1, а другое 2. Таким образом,

$$(abc)_0 = (ab)_0c_0 + (ab)_1c_2 + (ab)_2c_1 = 13\cdot 4 + 13\cdot 3 + 14\cdot 3 = 133.$$

Чтобы $a+b+c$ при делении на 3 давало остаток 1, нужно, чтобы оба числа $a+b$ и c давали остаток 2 или одно из этих двух чисел давало бы остаток 0, а другое 1. Таким образом,

$$(abc)_1 = (ab)_0c_1 + (ab)_1c_0 + (ab)_2c_2 = 13\cdot 3 + 13\cdot 4 + 14\cdot 3 = 133.$$

Чтобы $a+b+c$ при делении на 3 давало остаток 2, нужно, чтобы оба числа $a+b$ и c давали остаток 1 или одно из этих двух чисел давало бы остаток 0, а другое 2. Таким образом,

$$(abc)_2 = (ab)_0c_2 + (ab)_2c_0 + (ab)_1c_1 = 13\cdot 3 + 14\cdot 4 + 13\cdot 3 = 134.$$

Найдём количество допустимых наборов (a,b,c,d), таких, что сумма $2(a+b+c)+d$ даёт при делении на 3 остаток 0. Чтобы число $2(a+b+c)+d$ при делении на 3 давало остаток 0, нужно, чтобы оба числа $a+b+c$ и d давали одинаковые остатки при делении на 3. Таким образом,

$$(abcd)_0 = (abc)_0d_0 + (abc)_1d_1 + (abc)_2d_2 = 133\cdot 4 + 133\cdot 3 + 134\cdot 3 = 1333.$$

Итак, искомое количество равно 1333.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Приведён верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

----

5. На сторонах трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC как на диаметрах построены окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 так, что отрезок AB является диаметром окружности S_1, отрезки BC, CD и DA – диаметры окружностей S_2, S_3 и S_4 соответственно. Пусть K – отличная от B точка пересечения окружностей S_1 и S_2, точки L, M и N – отличные от точек C, D и A точки пересечения окружностей S_2 и S_3, S_3 и S_4, S_4 и S_1 соответственно (точки K, L, M, N различны). Докажите, что прямые LK и MN параллельны.

Решение. Вписанный угол $\angle AKB$ окружности S_1 опирается на диаметр AB, следовательно, этот угол прямой. Вписанный угол $\angle BKC$ окружности S_2 опирается на диаметр BC, следовательно, он также прямой. Отсюда получаем, что $AK \perp BK$ и $CK \perp BK$, т.е. точки A, K и C лежат на одной прямой AC, перпендикулярной BK (это справедливо и в том случае, когда $K = A$ или $K = C$). Аналогично доказывается, что на этой же прямой лежит точка M, а на прямой BD лежат точки L и N. Далее возможны разные варианты взаимного расположения точек A, M, K, C и B, L, N, D.

Рассмотрим случай, когда M и K лежат внутри отрезка AC, причём M лежит между A и K, а точки L и N лежат внутри отрезка BD, причём L лежит между B и N (рис. 1). Так как четырёхугольник $BCKL$ вписан в окружность S_2, то $\angle BCK + \angle BLK = 180°$; кроме того, $\angle KLN + \angle BLK = 180°$, следовательно,

$$\angle BCK = \angle KLN. \tag{1}$$

Аналогично, так как четырёхугольник $AMND$ вписан в окружность S_4, то $DAM + DNM = 180°$; кроме того, $LNM + DNM = 180°$, следовательно,

$$\angle DAM = \angle LNM. \tag{2}$$

Прямые BC и AD параллельны, следовательно, $\angle BCK = \angle DAM$ (как накрест лежащие углы). Отсюда и из равенств (1) и (2) следует равенство $\angle KLN = \angle LNM$, а так как эти углы являются накрест лежащими при пересечении прямых LK и MN секущей LN, то прямые LK и MN параллельны.

Возможны и другие случаи расположения точек A, M, K, C и B, L, N, D. Например, M и K лежат внутри отрезка AC, причём M лежит между C и K, а точки L и N лежат внутри отрезка BD, причём L лежит между D и N (рис. 2). В этом случае доказательство меняется, так как $\angle BCK + \angle BLK \neq 180°$. Вместо этого выполнено равенство $\angle BCK = \angle BLK$ (как вписанные в окружность S_2 углы, опирающиеся на одну дугу). Аналогично, $\angle DAM = \angle DNM$ (как вписанные в окружность S_4 углы, опирающиеся на одну дугу). Но так как $\angle BCK = \angle DAM$ (эти углы являются накрест лежащими при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AC), то $\angle BLK = \angle DNM$, откуда следует параллельность прямых LK и MN.

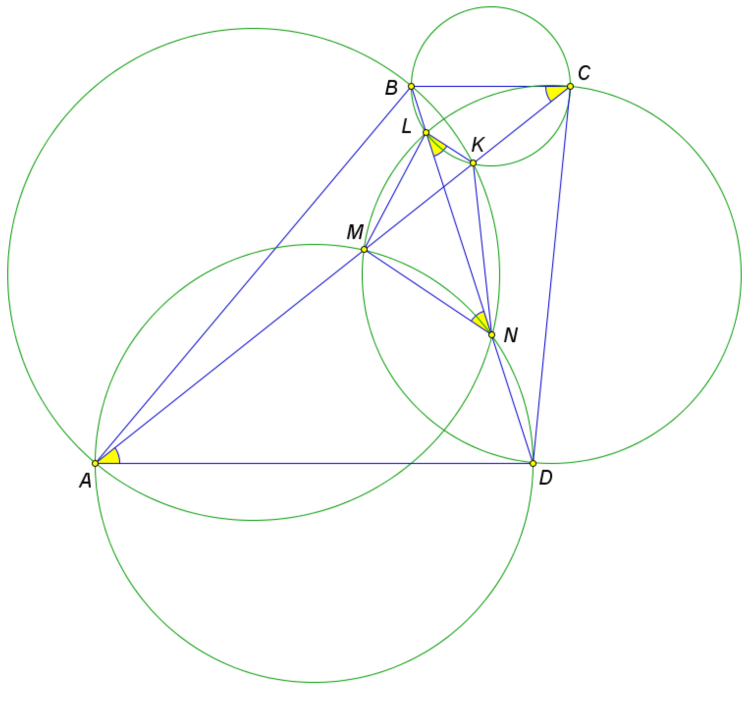


Рис. 1

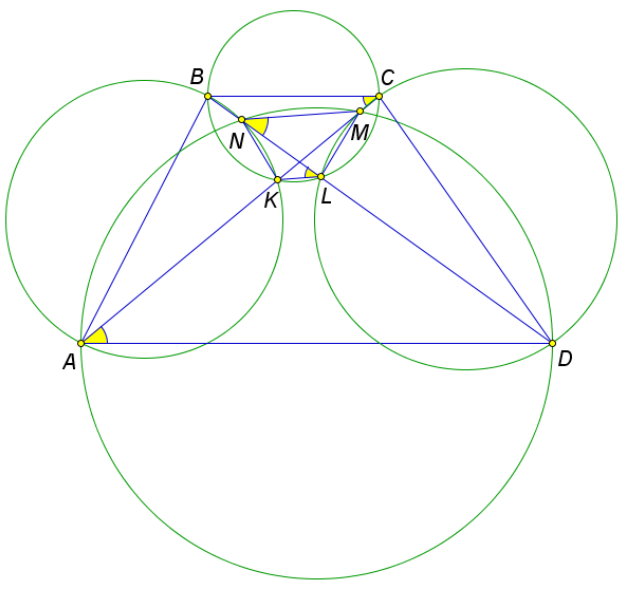


Рис. 2

Есть и другие случаи расположения точек A, M, K, C и B, L, N, D. Доказательства для этих случаев проводятся аналогично.

Замечание 1.

Если использовать понятие ориентированного угла между прямыми, то можно не рассматривать различные случаи расположения точек A, M, K, C и B, L, N, D. Доказательство для всех случаев будет выглядеть следующим образом. Так как точки B, C, K, L лежат на одной окружности, то независимо от их расположения выполнено равенство $\angle(CB, CK) = \angle(LB, LK)$ (ориентированный угол между прямыми CB и CK равен ориентированному углу между прямыми LB и LK). Так как точки A, D, M, N лежат на одной окружности, то $\angle(AD, AM) = \angle(ND, NM)$. Так как прямые AD и BC параллельны, то $\angle(CB, CK) = \angle(AD, AM)$ как накрест лежащие (прямые CK и AM совпадают с секущей AC), следовательно, $\angle(LB, LK) = \angle(ND, NM)$ (прямые LB и ND совпадают с секущей NL прямых LK и MN), следовательно, прямые LK и MN параллельны.

Замечание 2.

Если в условии задачи заменить трапецию произвольным выпуклым четырёхугольником, то можно доказать, что четырёхугольник $NKLM$ подобен четырёхугольнику $ABCD$.

Критерии.

Разобран хотя бы один из случаев расположения точек A, M, K, C и B, L, N, D или общий случай с ориентированными углами и проведено полное доказательство – 7 баллов.

В решении утверждается без доказательства, что точки A, M, K, C лежат на одной прямой и точки B, L, N, D лежат на одной прямой, после чего верными рассуждениями доказана параллельность прямых LK и MN – 4 балла.

В решении утверждается без доказательства, что точки A, M, K, C лежат на одной прямой и точки B, L, N, D лежат на одной прямой, при этом дальнейшие рассуждения не верны или решение не закончено – 0 баллов.

В решении доказано, что точки A, M, K, C лежат на одной прямой и точки B, L, N, D лежат на одной прямой, при этом дальнейшие рассуждения не верны или решение не закончено – 2 балла.