Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2018 г

10 класс

1. Каждый член некоторой последовательности (x_n), начиная со второго, равен сумме двух соседних с ним членов последовательности. Чему равно x_{30}, если $x_{10} = 1$ и $x_{20} = 2$?

Ответ: -3.

Решение. Из условия $x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$ следует, что $x_{n+1} = x_n - x_{n-1}$ для всех $n \geq 2$. Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$, тогда $x_3 = b - a$, $x_4 = -a$, $x_5 = -b$, $x_6 = a - b$, $x_7 = a$, $x_8 = b$, $x_9 = b - a, \ldots$ Итак, получаем, что $x_{n+6} = x_n$ для каждого натурального n. Таким образом, $x_{10} = x_4 = -a = 1$, следовательно, $a = -1$; $x_{20} = x_2 = b = 2$. Отсюда следует, что $x_{30} = x_6 = a - b = -1 - 2 = -3$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

---

2. Из городов Алексеевск и Борисовск навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и проехали весь путь между городами не останавливаясь с постоянными скоростями. Известно, что встретились они через 30 минут после отправления, а автомобиль, выехавший из Алексеевска, затратил на весь путь между городами на 20% больше времени, чем второй автомобиль. Найдите время, затраченное на весь путь каждым автомобилем.

Ответ: 66 минут и 55 минут.

Решение. Пусть x км/мин и y км/мин – скорости первого (выехавшего из Алексеевска) и второго автомобиля соответственно, t мин – время, потраченное вторым автомобилем на путь между городами. Тогда первый автомобиль затратил на этот путь $\frac{6}{5}t$ мин. Обозначим через A и B точки, из которых выехали первый и второй автомобили соответственно, через C обозначим точку встречи. Отрезок AC первый автомобиль проезжает за 30 мин, а второй автомобиль – за $t - 30$ мин. Следовательно, $\frac{x}{y} = \frac{t-30}{30}$. Отрезок AB первый автомобиль проезжает за $\frac{6}{5}t$ мин, а второй – за t мин, следовательно, $\frac{x}{y} = \frac{5}{6}$. Получаем уравнение $\frac{t-30}{30} = \frac{5}{6}$, которое равносильно уравнению $6(t - 30) = 150$. Решая его, находим корень: $t = 55$ (мин) – время второго автомобиля. Время первого автомобиля равно $\frac{6}{5}\,t = 66$ мин.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.
Получен верный ответ без обоснования – 0 баллов.

---

3. Каждый из двух квадратных трёхчленов x^2+px+q и x^2+rx+s с ненулевыми целыми коэффициентами имеет два различных действительных корня, причём $p/r=q/s$ и корни второго трёхчлена равны квадратам корней первого. Чему могут быть равны эти коэффициенты? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: $(p,q,r,s)=(3,-9,-27,81)$ или $(4,-8,-32,64)$ или $(6,-9,-54,81)$.

Решение. Пусть x_1,x_2 – корни первого трёхчлена, тогда x_1^2,x_2^2 – корни второго. Положим $a=\frac{r}{p}=\frac{s}{q}$. По теореме Виета имеем равенства:

$x_1+x_2=-p,$ (1)
$x_1\,x_2=q,$ (2)
$x_1^2+x_2^2=-pa,$ (3)
$x_1^2\,x_2^2=qa.$ (4)

Поскольку $q\neq 0$, то $x_1,x_2\neq 0$, следовательно, из равенств (2) и (4) получаем, что $a=q$. Так как $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\,x_2=p^2-2q$, то равенство (3) запишется в виде $p^2-2q=-pq$, что равносильно равенству $p^2-4+q(p-2)=-4$ или $(p-2)(p+q+2)=-4$. Поскольку числа $p-2$ и $p+q+2$ – целые, то $p-2$ является делителем числа -4, следовательно, выражение $p-2$ может принимать значения $1,-1,2,-2,4$ и -4.

Если $p-2=1$, то $p+q+2=-4$, следовательно, $p=3,\ q=-9,\ r=-27,\ s=81$.
Если $p-2=-1$, то $p+q+2=4$, следовательно, $p=1,\ q=1,\ r=1,\ s=1$. Этот набор не подходит, поскольку в этом случае трёхчлены не имеют корней.
Если $p-2=2$, то $p+q+2=-2$, следовательно, $p=4,\ q=-8,\ r=-32,\ s=64$.
Если $p-2=-2$, то $p=0$, но коэффициенты должны быть ненулевыми, следовательно, этот вариант не подходит.
Если $p-2=4$, то $p+q+2=-1$, следовательно, $p=6,\ q=-9,\ r=-54,\ s=81$.
Если $p-2=-4$, то $p+q+2=1$, следовательно, $p=-2,\ q=1,\ r=-2,\ s=1$. Этот вариант не подходит, поскольку в этом случае трёхчлены имеют совпадающие корни.
Подставив найденные значения коэффициентов, находим корни уравнений и проверяем, что квадраты корней первого трёхчлена равны корням второго.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования – 1 балл.

Задача обоснованно сведена к решению уравнения $p^2 - 2q = -pq$, уравнение не решено, при этом:

подбором найдена одна верная пара (p, q) – 1 балл;

подбором найдены две верные пары (p, q) – 2 балла;

подбором найдены три верные пары (p, q) – 3 балла.

За каждую неподходящую четвёрку коэффициентов (кроме четвёрки $(-2,1,-2,1)$), внесённую в ответ, из набранных по предыдущим пунктам баллов вычитается по одному баллу.

Обоснованно получен верный ответ, но не проведена проверка того, что найденные четвёрки коэффициентов удовлетворяют условию задачи (при этом достаточно проверить, что дискриминант первого квадратного трёхчлена положителен для каждой найденной пары (p, q)), – из набранных по предыдущим пунктам баллов вычитается 1 балл.

---

4. Имеется 1000 карточек, на которых написаны числа 1, 2, …, 1000 (на каждой карточке по одному числу). Можно ли разложить эти карточки на 250 кучек по четыре карточки так, что в каждой кучке одно число равно сумме трёх других?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что это возможно. Пусть в кучке с номером k лежат карточки с числами $a_{4k-3}, a_{4k-2}, a_{4k-1}, a_{4k}$, где $k \in \{1,2,\dots,250\}$, причём $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} = a_{4k}$. Тогда, с одной стороны, сумма S всех чисел, написанных на карточках, равна $1 + 2 + \ldots + 1000 = 500 \cdot 1001 = 500500$. С другой стороны, имеем

$$S = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{997} + a_{998} + a_{999} + a_{1000}) =$$
$$= 2\big((a_1 + a_2 + a_3) + (a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{997} + a_{998} + a_{999})\big) \geq 2\big((1 + 2 + 3) +$$
$$+ (4 + 5 + 6) + \ldots + (748 + 749 + 750)\big) = (1 + 750) \cdot 750 = 563250 > 500500.$$

Получили противоречие.

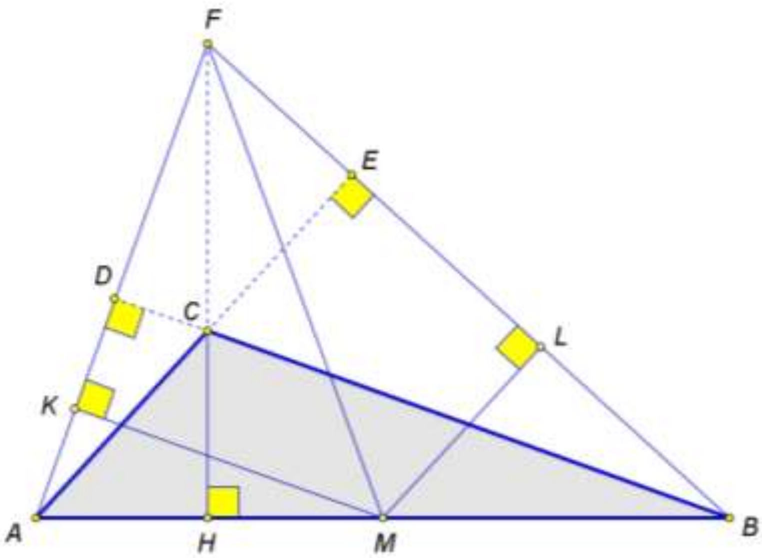
Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.

---

5. В треугольнике ABC с тупым углом при вершине C проведены высоты AD, BE и CH. Пусть K, L и M – середины отрезков AD, BE и AB соответственно. Докажите, что точки K, L, M и H лежат на одной окружности.

Решение.



Пусть F – точка пересечения прямых AD и BE. Тогда AE и BD – высоты треугольника ABF, а C – точка их пересечения. Поскольку высота треугольника ABF, проведённая из вершины F, также проходит через эту точку, то она лежит на прямой, проходящей через точку C перпендикулярно AB, а поскольку такой прямой является прямая CH, то FH и есть третья высота треугольника ABF. Опишем окружность S около треугольника FMH. Поскольку $\angle FHM = 90°$, то FM – диаметр этой окружности. Поскольку MK – средняя линия треугольника ABD, то $MK \parallel BD$, следовательно, $MK \perp AF$, т.е. $\angle MKF = 90°$, следовательно, точка K лежит на окружности S. Аналогично, ML – средняя линия треугольника ABF, из чего следует перпендикулярность прямых ML и BF, следовательно, $\angle MLF = 90°$, поэтому точка L лежит на окружности S.

Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.

Продолжены стороны AD и BE до пересечения (в точке F) и доказано, что FH – высота треугольника ABF, при этом дальнейшее продвижение отсутствует – 2 балла.

В дополнение к продвижениям, описанным в предыдущем пункте, описана окружность около треугольника FMH с целью доказать, что точки K и L лежат на этой окружности, при этом само доказательство отсутствует или неверно – 3 балла.