Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2017 г

9 класс

1. Пусть a и b – корни уравнения $x^2 + 2017x + 2017 = 0$. Вычислите $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. В записи ответа <u>не должны</u> присутствовать корни и степени с дробным показателем.

Ответ: 2015.

Решение. Пусть $x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Тогда $x = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2$. По теореме Виета имеем равенства $a + b = -2017$, $ab = 2017$. Следовательно, $x = \frac{(-2017)^2}{2017} - 2 = 2017 - 2 = 2015$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ получен вычислением корней с последующим преобразованием иррациональных выражений – 7 баллов.

Правильный ответ приведён без обоснования либо в решении имеются ссылки на вычисления с помощью калькулятора – 0 баллов.

Приведён ответ, записанный с помощью радикалов или степеней с дробными показателями, – 0 баллов.

----

2. У Андрея в дневнике только четвёрки и пятёрки. В конце первой четверти пятёрок среди них было 90%. Во второй четверти Андрей получил четвёрок вдвое больше, чем пятёрок, и количество пятёрок во всём дневнике составило 56%. Зато в третьей и четвёртой четверти Андрей получал только пятёрки, и к концу учебного года пятёрок во всём дневнике снова стало 90%. Во сколько раз увеличилось количество пятёрок в дневнике у Андрея с конца первой четверти?

Ответ: в 11.

Решение. Пусть к концу первой четверти у Андрея было x четвёрок, тогда пятёрок было $9x$, а количество всех оценок составляло $10x$. Пусть во второй четверти Андрей получил y пятёрок, тогда четвёрок он получил $2y$, а всего оценок за вторую четверть он получил $3y$. К концу второй четверти у Андрея было всего $10x + 3y$ оценок, из которых $9x + y$ пятёрок. Так как 56% составляют $\frac{14}{25}$, то по условию можем составить уравнение:

$$9x + y = \frac{14}{25}(10x + 3y).$$

Выразив y, получим $y = 5x$. Таким образом, к концу второй четверти у Андрея было всего $25x$ оценок, из которых $14x$ пятёрок. Пусть за две оставшиеся четверти Андрей получил z пятёрок. Тогда за весь год он получил всего $25x + z$ оценок, из которых $14x + z$ пятёрок. Так как 90% составляют $\frac{9}{10}$, то по условию можем составить ещё одно уравнение:

$$14x + z = \frac{9}{10}(25x + z),$$

откуда получаем $z = 85x$. Таким образом, всего пятёрок за год у Андрея было $14x + 85x = 99x$, что в 11 раз больше количества пятёрок в первой четверти.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно составлены оба уравнения (при этом они могут отличаться от приведённых в решении, если использованы другие неизвестные), но получен неверный ответ из-за арифметической ошибки – 3-4 балла.

---

3. На столе «орлом» вверх лежат 2017 монет. Андрей перевернул 600 монет, затем Борис перевернул 700 монет, потом Владимир перевернул 800 монет. Докажите, что после последнего переворачивания хотя бы одна монета на столе лежит «орлом» вверх.

Решение. Проведём доказательство методом от противного. Предположим, что после последнего переворачивания все монеты лежат «решкой» вверх. Если бы какая-нибудь монета не была перевёрнута или была перевёрнута ровно 2 раза, то она лежала бы «орлом» вверх. Следовательно, каждая монета была перевёрнута либо 1 раз, либо 3 раза. Пусть количество монет, перевёрнутых 3 раза, равно x. Тогда среди монет, перевёрнутых Андреем, Борисом и Владимиром, число монет, перевёрнутых ровно 1 раз, составляет $600 - x$, $700 - x$ и $800 - x$ соответственно. Тогда количество всех монет, перевёрнутых ровно 1 раз, равно $(600 - x) + (700 - x) + (800 - x) = 2100 - 3x$. Прибавив к этому количеству x, мы получим количество всех монет на столе, т.е. $2100 - 3x + x = 2017$. Отсюда получаем $2x = 83$, $x = 41{,}5$. Это противоречит тому, что x – целое число, следовательно, хотя бы одна монета на столе лежит «орлом» вверх.

Критерии.

Проведено полное доказательство – 7 баллов.

В решении используется формула включений-исключений без доказательства и доказывается, что в случае отсутствия монет, лежащих «орлом» вверх, разность суммы количеств монет, перевёрнутых Андреем, Борисом и Владимиром, и количества всех монет должна быть чётной – 7 баллов.

---

4. Натуральное число назовём *современным*, если в его десятичной записи присутствует комбинация цифр 2, 0, 1, 7 (цифры расположены именно в таком порядке и между ними нет других цифр). Например, числа 720178 и 532017 – современные. Сколько существует шестизначных современных чисел, делящихся нацело на 3?

Ответ: 93

Решение. Пусть N – шестизначное современное число, кратное трём. Тогда сумма всех его цифр должна быть кратна трём. Обозначим две цифры, входящие в запись числа N помимо цифр 2,0,1,7, через a и b, причём цифра a расположена в числе N левее, чем b. Сумма цифр числа N равна $2 + 0 + 1 + 7 + a + b = 10 + a + b$. Поскольку 10 при делении на 3 даёт остаток 1, то сумма $a + b$ при делении на 3 должна давать остаток 2. Если $a = 0$, то возможен лишь один вариант расположения a и b в N: $2017ab$. В этом случае b может равняться 2, 5 или 8, итого 3 варианта для $a = 0$. Пусть $a > 0$, тогда возможны 3 варианта расположения a и b в N: $ab2017$, $a2017b$ и $2017ab$.

Если $a = 1$, 4 или 7, то b также может равняться 1, 4 или 7; если $a = 2$, 5 или 8, то b может равняться 0, 3, 6 или 9; если $a = 3$, 6 или 9, то b может равняться 2, 5 или 8. Таким образом, мы получаем, что количество пар (a, b), где $a > 0$ и сумма $a + b$ даёт остаток 2 при делении на 3, равно $3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 30$, а так как каждую такую пару можно расположить в записи числа N тремя способами, то количество таких чисел N, для которых $a > 0$, равно 90. Учитывая три варианта числа N для $a = 0$, окончательно получаем, что искомое количество равно 93.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Рассуждения в целом верные, но не учтён тот факт, что число не может

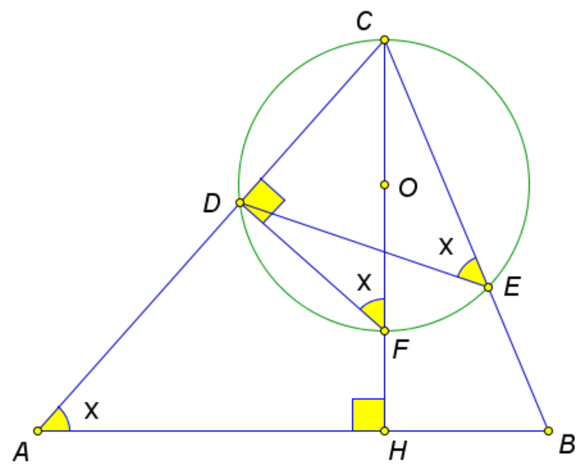
начинаться с цифры 0, из-за чего получен неверный ответ 99 – 3 балла.

Получен другой ответ, отличающийся от чисел 99 и 93 – 0 баллов.

---

5. В треугольнике ABC на высоте CH (H лежит на отрезке AB) выбрана точка O и проведена окружность с центром в точке O, проходящая через вершину C и пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что четырёхугольник $ABED$ является вписанным.

Решение.



Обозначим проведённую окружность через S. Пусть F – точка пересечения этой окружности с лучом CH, отличная от точки C. Обозначим за x величину угла $\angle BAC$. Поскольку CF – диаметр окружности S, то угол $\angle CDF$ – прямой как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Треугольники ACH и FCD подобны по двум углам ($\angle AHC = \angle CDF = 90°$, $\angle ACH$ – общий), следовательно, $\angle CFD = \angle CAH = x$. Углы $\angle CFD$ и $\angle CED$ вписаны в окружность и опираются на одну дугу CD, следовательно, они равны, т.е. $\angle CED = x$. Отсюда следует, что $\angle BED = 180° - x$, таким образом, имеем равенство $\angle BAD + \angle BED = x + (180° - x) = 180°$, следовательно, четырёхугольник $ABED$ – вписанный.

Критерии.

Проведено полное доказательство – 7 баллов.

Доказано, что $\angle CFD = \angle CAH$ или $\angle CFE = \angle CBH$, при этом дальнейшие рассуждения отсутствуют, неверны или решение не закончено – 2 балла.

Доказано, что $\angle CED = \angle CAH$ или $\angle CDE = \angle CBH$, при этом дальнейшие рассуждения отсутствуют, неверны или решение не закончено – 4 балла.