Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2017 г

10 класс

1. Даны три различные ненулевые цифры. Из них составляются все возможные трёхзначные, двузначные и однозначные натуральные числа (ни в одном числе нет повторяющихся цифр). На какую цифру может оканчиваться сумма всех составленных чисел? Найдите все варианты и докажите, что других вариантов нет.

Ответ. 5 или 0.

Решение. Пусть a, b и c – данные цифры. Зафиксируем некоторую цифру, например, a, и найдём, сколько раз она встречается среди составленных чисел в разряде единиц. С последней цифрой a составлено 2 трёхзначных числа: bca и cba, два двузначных числа: ba и ca и одно однозначное: a. Таким образом, цифра a встретилась в разряде единиц 5 раз. Аналогично получаем, что цифры b и c также встретились по 5 раз в разряде единиц. Последняя цифра суммы всех составленных чисел будет совпадать с последней цифрой числа $5a + 5b + 5c = 5(a + b + c)$. Так это число кратно пяти, то оно оканчивается на 0 (если $a + b + c$ чётно) или на 5 (если $a + b + c$ нечётно). В качестве первого примера можно взять $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, в качестве второго – $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$.

Замечание. Несложно доказать, что найденная сумма будет равна $245(a + b + c)$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ (доказано, что последняя цифра суммы совпадает с последней цифрой выражения $5(a + b + c)$ или что сумма равна $245(a + b + c)$) – 7 баллов.

В решении выписаны все составленные числа в буквенном виде и просуммированы их поразрядные записи, в результате получен верный ответ (оба варианта) – 7 баллов.

Рассуждения в целом верные и проведены в общем виде, но пропущен один из вариантов ответа – 4 балла.

Все рассуждения в решении проведены для конкретного набора цифр – 0 баллов.

За отсутствие примеров ввиду их очевидности баллы не снижаются, если указано, как последняя цифра зависит от чётности числа $a + b + c$.

--

2. Из деревень Антоновка и Богдановка навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и проехали весь путь между деревнями не останавливаясь с постоянными скоростями. Известно, что после их встречи первый прибывает в Богдановку через 36 минут, а второй прибывает в Антоновку через 49 минут. Найдите время, потраченное автомобилями на путь до места встречи.

Ответ: 42 минуты.

Решение. Пусть x км/мин и y км/мин – скорости первого и второго автомобиля соответственно, t мин – время, потраченное автомобилями на путь до места встречи. Обозначим через A и B точки, из которых выехали первый и второй автомобили соответственно, через C обозначим точку встречи. Отрезок AC первый автомобиль проезжает за t мин, а второй автомобиль – за 49 мин, следовательно, $AC = tx$ и $AC = 49y$. Отрезок BC первый автомобиль проезжает за 36 мин, а второй автомобиль – за

t мин, следовательно, $BC = 36x$ и $BC = ty$. Получаем два уравнения: $tx = 49y$ и $36x = ty$. Из первого находим, что отношение скоростей первого и второго автомобилей $\frac{x}{y}$ равно $\frac{49}{t}$, а из второго то же самое отношение равно $\frac{t}{36}$, следовательно, приходим к уравнению $\frac{49}{t} = \frac{t}{36}$. Решая его, получаем $t^2 = 36 \cdot 49$, следовательно, учитывая положительность неизвестной t, имеем $t = 6 \cdot 7 = 42$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Получен верный ответ без обоснования – 0 баллов.

---

3. К числу a справа приписали двузначное число b (a и b – натуральные). Получилось число, которое делится нацело на произведение чисел a и b. Найдите все такие пары (a, b).

Ответ: (17,34), (13,52), (3,15), (7,35), (1,10), (1,20), (2,40), (3,60), (1,25), (1,50).

Решение. Получившееся после приписывания число можно записать в виде $100a + b$, а так как оно кратно произведению ab, то найдётся натуральное число n, для которого выполнено равенство

$$100a + b = nab. \qquad (1)$$

Отсюда получаем равенство $b = a(nb - 100)$, т.е. b кратно a. Следовательно, найдётся такое натуральное k, что $b = ka$. Подставив ka вместо b в равенство (1) и поделив обе его части на a, получим равенство $100 + k = ank$ или

$$100 = k(an - 1), \qquad (2)$$

т.е. k является делителем числа 100. Заметим, что так как b – двузначное, то $k \neq 100$. Если $k = 1$, то $a = b$ и из равенства (1) получаем, что $nb = 101$, а так как b – двузначное, а 101 – простое, то получаем противоречие. Тогда для числа k возможны следующие варианты: $k = 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50$.

Если $k = 2$, то $b = 2a$. Из (2) получаем, что $an - 1 = 50$, т.е. $an = 51$, откуда следует, что a – делитель числа $51 = 3 \cdot 17$. Но так как $2a$ – двузначное число, то a не равно 1, 3 и 51, т.е. $a = 17$. Тогда $b = 34$.

Если $k = 4$, то $b = 4a$. Из (2) получаем, что $an - 1 = 25$, т.е. $an = 26$, откуда следует, что a – делитель числа $26 = 2 \cdot 13$. Но так как $4a$ – двузначное число, то a не равно 1, 2 и 26, т.е. $a = 13$. Тогда $b = 52$.

Если $k = 5$, то $b = 5a$. Из (2) получаем, что $an - 1 = 20$, т.е. $an = 21$, откуда следует, что a – делитель числа $21 = 3 \cdot 7$. Но так как $5a$ – двузначное число, то a не равно 1 и 21. Следовательно, либо $a = 3$ и $b = 15$, либо $a = 7$ и $b = 35$.

Если $k = 10$, то $b = 10a$. Из (2) получаем, что $an - 1 = 10$, т.е. $an = 11$, откуда следует, что a – делитель простого числа 11. Но так как $10a$ – двузначное число, то a не равно 11, следовательно, $a = 1$ и $b = 10$.

Если $k = 20$, то $b = 20a$. Из (2) получаем, что $an - 1 = 5$, т.е. $an = 6$, откуда следует, что a – делитель числа $6 = 2 \cdot 3$. Но так как $20a$ – двузначное число, то a не равно 6. Следовательно, либо $a = 1$ и $b = 20$, либо $a = 2$ и $b = 40$, либо $a = 3$ и $b = 60$.

Если $k = 25$, то $b = 25a$. Из (2) получаем, что $an - 1 = 4$, т.е. $an = 5$, откуда следует, что a – делитель простого числа 5. Но так как $25a$ – двузначное число, то a не равно 5. Следовательно, $a = 1$ и $b = 25$.

Если $k = 50$, то $b = 50a$. Из (2) получаем, что $an - 1 = 2$, т.е. $an = 3$, откуда следует, что a – делитель простого числа 3. Но так как $50a$ – двузначное число, то a не равно 3. Следовательно, $a = 1$ и $b = 50$.

Критерии.

Для удобства формулирования критериев будем называть пары (17,34) и (13,52) «особыми», а остальные пары «простыми».

Обоснованно получен правильный ответ – 7 баллов.

Доказано, что b кратно a и задача сведена к решению уравнения (2), но получены не все пары (a, b) – от 2 до 6 баллов. При этом за каждую пропущенную простую пару из 7 баллов вычитается по 1 баллу, а за каждую пропущенную особую – по 2 балла (при этом суммарно вычитается не более 5 баллов).

В решении отсутствует переход к уравнению (2) или равносильному ему, при этом:

найдено подбором не более одной пары (a, b) – 0 баллов;

найдены подбором 2, 3 или 4 пары (a, b) – 1 балл;

найдены подбором 5, 6, 7 или 8 пар (a, b) – 2 балла;

найдены подбором все 10 пар (a, b) – 3 балла.

Найдены 4 простые пары исходя из предположения, что $a = 1$, перебором в качестве b всех двузначных делителей числа 100 – 2 балла.

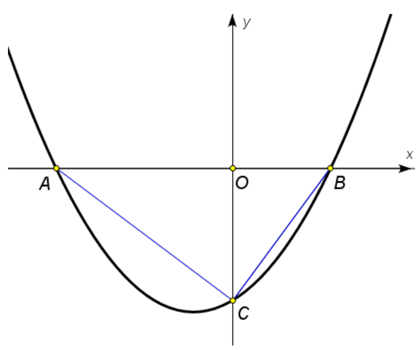
Наличие иных достижений в решении, отсутствующих в перечисленных выше критериях, при отсутствии перехода к уравнению (2) или равносильному ему – суммарно не более 2 баллов.

Наличие лишней пары в решении приравнивается к отсутствию одной из простых пар.

---

4. Парабола с уравнением $y = x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в точках A и B, а ось ординат в точке C, при этом угол $\angle ACB$ – прямой. Найдите q.

Ответ: -1.



Решение. Заметим, что ветви параболы направлены вверх, точки A и B расположены по разные стороны от начала координат O (иначе угол ACB будет острым), точка C расположена ниже оси Ox (иначе точки A и B были бы расположены по одну сторону от точки O). Будем считать, что A лежит левее B. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, причём $x_1 < x_2$. По теореме Виета имеем равенства $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$. Поскольку высота, проведённая из вершины прямого угла, равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу, то для треугольника ABC имеет место равенство $OC^2 = OA \cdot OB$. Но так как абсциссы точек A и B равны x_1 и x_2 соответственно, а ордината точки C равна q, то $OA = -x_1$, $OB = x_2$, $OC = -q$, следовательно, можем записать уравнение $q^2 = -x_1x_2$, т.е. $q^2 = -q$, что равносильно $q(q+1)$ =0. Так как $q \neq 0$, то $q = -1$.

Замечание. Проверка того, что при $q = -1$ и произвольном p угол ACB будет прямым, не обязательна, поскольку в условии уже утверждается наличие такого треугольника, а -1 – единственно возможное значение q.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ получен без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

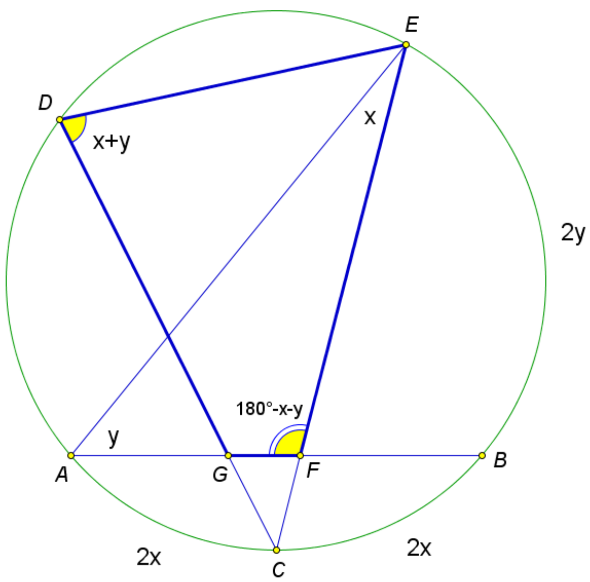
Верный ответ получен верными рассуждениями для частного случая, когда p – фиксированное число, например, для $p = 0$ – 1 балл.

Решение в целом верное, но в ответ включён лишний корень $q = 0$ – 5 баллов.

При верном решении за проведённую проверку того, что значение $q = -1$ удовлетворяет условию задачи, баллы не снижаются.

---

5. На окружности отмечены пять различных точек A, B, C, D, E так, что C – середина меньшей дуги AB, а точки D и E лежат на большей дуге AB. Пусть G и F – точки пересечения прямых CD и CE соответственно с хордой AB. Докажите, что четырёхугольник $DEFG$ – вписанный.



Решение. Будем считать, что точки расположены на окружности в порядке A, D, E, B, C, если двигаться от точки A по часовой стрелке. Обозначим через x и y величины углов AEC и BAE соответственно. Так как вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, то градусная мера дуги AC равна $2x$, а так как дуга BC равна дуге AC, то $\breve{BC} = 2x$. Аналогично, $\breve{BE} = 2y$. Тогда $\breve{CE} = \breve{CB} + \breve{BE} = 2x + 2y$, а так как вписанный угол CDE опирается на дугу CE, то $\angle CDE = x + y$. Рассмотрим треугольник AEF. Так как сумма его углов равна $180°$, то $\angle AFE = 180° - \angle AEF - \angle EAF = 180° - x - y$. Тогда сумма противоположных углов четырёхугольника $DEFG$ равна $\angle GDE + \angle GFE = \angle CDE + \angle AFE = (x + y) + (180° - x - y) = 180°$, следовательно, данный четырёхугольник вписанный.

Критерии.

Проведено полное доказательство – 7 баллов.

Выражены все углы треугольника AEF (или BDG), при этом дальнейшие рассуждения отсутствуют, неверны или решение не закончено – 1 балл.

Доказано, что $\angle BFE = \angle EDC$ или $\angle AGD = \angle CED$, при этом дальнейшие рассуждения отсутствуют, неверны или решение не закончено – 4 балла.