Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2017 г

8 класс

1. На столе «орлом» вверх лежат 2017 монет. Андрей перевернул 600 монет, затем Борис перевернул 717 монет, потом Владимир перевернул 800 монет. В результате все монеты на столе стали лежать «решкой» вверх. Сколько монет были перевёрнуты по три раза?

Ответ: 50.

Решение.

Если бы какая-нибудь монета не была перевёрнута или была перевёрнута ровно 2 раза, то она лежала бы «орлом» вверх, следовательно, каждая монета была перевёрнута либо 1 раз, либо 3 раза. Пусть количество монет, перевёрнутых 3 раза, равно x. Тогда среди монет, перевёрнутых Андреем, Борисом и Владимиром, число монет, перевёрнутых ровно 1 раз, составляет $600-x$, $717-x$ и $800-x$ соответственно. Тогда количество всех монет, перевёрнутых ровно 1 раз, равно $(600-x)+(717-x)+(800-x)=2117-3x$. Прибавив к этому количеству x, мы получим количество всех монет на столе, т.е. $2117-3x+x=2017$. Отсюда получаем $x=50$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Получен верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

---

2. На Острове Рыцарей и Лжецов живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причём все жители острова знают про каждого островитянина, кем он является. Однажды на остров приехал турист и на общем собрании жителей острова каждый житель сообщил приехавшему, кем является каждый из остальных жителей. Слово «лжец» было произнесено 11200 раз. Когда в следующий раз приехал другой турист, один из жителей острова не пришёл на подобное собрание, на котором каждый житель сообщил приехавшему, кем является каждый из остальных <u>присутствующих</u> жителей. В этом случае слово «лжец» было сказано 11060 раз. Сколько жителей на этом острове?

Ответ: 150.

Решение.

Пусть x – количество рыцарей, y – количество лжецов. На первом собрании каждый рыцарь назвал каждого лжеца лжецом, поэтому рыцари произнесли слово «лжец» xy раз; каждый лжец назвал лжецом каждого рыцаря, поэтому лжецы произнесли слово «лжец» также xy раз. Таким образом, на первом собрании слово «лжец» было произнесено $2xy$ раз, что равно 11200. Отсюда получаем, что $xy=5600$.

Далее возможны 2 случая.

Первый случай. Если на втором собрании отсутствовал лжец, то на этом собрании количество лжецов равно $y-1$, следовательно, слово «лжец» было произнесено $2x(y-1)$ раз, что равно 11060. Отсюда получаем, что $x(y-1)=5530$ или $xy-x=5530$. Так как $xy=5600$, то можем записать равенство $5600 - x = 5530$, следовательно, $x = 70$. Тогда $y = \frac{5600}{70} = 80$, а всего на острове $70 + 80 = 150$ жителей.

Второй случай. Если на втором собрании отсутствовал рыцарь, то на этом собрании слово «лжец» было произнесено $2(x-1)y$ раз, что равно 11060. Аналогично рассуждая, получаем, что $y = 70$, $x = 80$, а количество жителей равно 150.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Рассмотрен только один из двух случаев и получен верный ответ – 5 баллов.

Верно составлены оба уравнения в одном из случаев, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 3 балла.

Верно составлены уравнения в обоих случаях, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 4 балла.

----

3. На круговой дорожке стадиона, имеющей длину 400 м, на расстоянии 100 м друг от друга находятся два бегуна (все расстояния измеряются вдоль окружности). Они одновременно стартуют, двигаясь по меньшей из двух дуг навстречу друг другу с постоянными скоростями. Через 10 секунд они встретились и продолжили бежать в тех же направлениях с теми же скоростями. К тому моменту, когда бегуны встретились во второй раз, первый пробежал на 100 м больше, чем второй. Найдите скорости бегунов.

Ответ: 6 м/с и 4 м/с (или 21,6 км/ч и 14,4 км/ч).

Решение.

Пусть скорости бегунов составляют x м/с и y м/с. Пока они бежали до момента первой встречи, расстояние между ними уменьшалось со скоростью $x + y$ м/с, а поскольку за первые 10 секунд оно уменьшилось со 100 м до нуля, то эта скорость равна $100 : 10 = 10$ м/с. Таким образом, получаем уравнение $x + y = 10$. Сумма расстояний, пройденных бегунами с момента первой встречи до момента второй встречи, равна длине дорожки и составляет 400 м, а поскольку скорость изменения расстояния между бегунами равна 10 м/с, то время, прошедшее между первой и второй встречами, равно $400 : 10 = 40$ с. С момента старта до момента второй встречи прошло $10 + 40 = 50$ с. За это время первый бегун пробежал путь, равный $50x$ м, а второй пробежал путь, равный $50y$ м. Поскольку разность этих путей по условию равна 100 м, то можем составить ещё одно уравнение $50x - 50y = 100$. Поделив обе его части на 50, получим равенство $x - y = 2$. Пришли к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 2, \end{cases}$$

решив которую методом алгебраического сложения, получим $x = 6$, $y = 4$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный ответ получен без обоснования – 0 баллов.

Получена верная система двух уравнений с двумя неизвестными (или эквивалентное уравнение с одним неизвестным), но при этом ответ неверен из-за вычислительной ошибки – 4 балла.

----

4. На бумаге написаны три различных натуральных числа, не делящихся на 3, причём их сумма также не делится на 3. Петя и Вася делают ходы по очереди. За один ход можно написать рядом с написанными числами ещё одно число, которое уже было написано. Выигрывает тот игрок, после чьего хода сумма всех написанных чисел будет делиться на 3. Первый ход делает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш при правильной игре?

Ответ: Петя.

Решение. Пусть a, b и c – три написанных вначале числа. Каждое из них при делении на 3 даёт остаток 1 или 2, но так как сумма $a+b+c$ не кратна трём, то эти три остатка не могут быть одинаковыми. Таким образом, возможны два случая:

1) два числа дают остаток 1 и одно – остаток 2;

2) два числа дают остаток 2 и одно – остаток 1.

Если Петя первым ходом выберет число, остаток которого при делении на 3 встретился один раз среди всех трёх остатков (т.е. в первом случае это число с остатком 2, а во втором – число с остатком 1) и напишет его, то среди четырёх написанных чисел два числа будут давать остаток 1 при делении на 3 и два числа будут давать остаток 2. Тогда сумма всех четырёх чисел будет делиться на 3 и Петя выиграет первым же ходом.

Критерии.

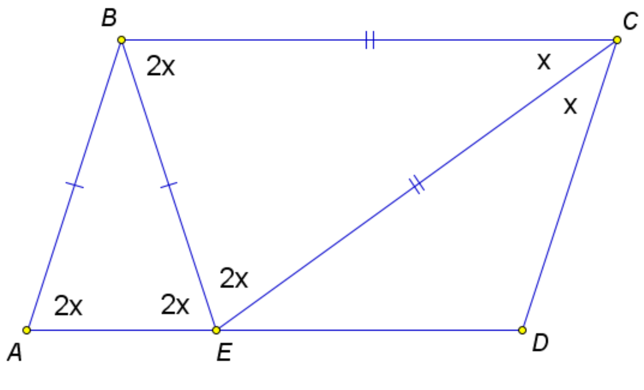
Описана верная стратегия для общего случая – 7 баллов.

Приведён пример хода с конкретными числами – 0 баллов.

----

5. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD выбрана точка E так, что $BE=AB$, $CE=BC$ и CE – биссектриса угла $\angle BCD$. Найдите углы параллелограмма.

Ответ: $\angle A=\angle C=72°$, $\angle B=\angle D=108°$.



Решение. Пусть $\angle DCE=x$, тогда $\angle BCE=x$, так как CE – биссектриса угла $\angle BCD$, следовательно, $\angle BCD=2x$. Углы $\angle BAD$ и $\angle BCD$ равны как противоположные, следовательно, $\angle BAD=2x$, но так как треугольник ABE равнобедренный, то $\angle BEA=\angle BAE=2x$. Поскольку углы $\angle CBE$ и $\angle BEA$ являются накрест лежащими при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей BE, то эти углы равны, т.е. $\angle CBE=2x$; а так как треугольник

BCE – равнобедренный, то $\angle CEB = \angle CBE = 2x$. Сумма всех углов в треугольнике равна $180°$, следовательно, $\angle CEB + \angle CBE + \angle BCE = 180°$. Получаем уравнение $2x + 2x + x = 180°$, т.е. $x = \frac{180°}{5} = 36°$. Тогда $\angle A = \angle C = 2x = 72°$, $\angle B = \angle D = 180° - \angle A = 108°$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно составлено уравнение (при этом оно может отличаться от приведённого в решении, если использована другая неизвестная), но получен неверный ответ из-за арифметической ошибки – 4 балла.