Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2018 г

8 класс

1. Имеется 12 карточек, на которых написаны числа 1, 2, …, 12 (на каждой карточке по одному числу). Можно ли разложить эти карточки на четыре кучки по три карточки так, что в каждой кучке одно число равно сумме двух других?

Ответ: да, например, (1,9,10), (2,4,6), (3,8,11), (5,7,12). Возможны и другие варианты.

Критерии.

Приведён верный пример – 7 баллов.

---

2. От пристани A к пристани B в 12:00 вниз по течению реки отправляются катер и плот. Катер, дойдя до пристани B в 13:00, сразу же разворачивается и плывёт обратно. В котором часу катер встретится с плотом? Собственная скорость катера и скорость течения постоянны.

Ответ: в 14:00

Решение. Пусть x км/ч и y км/ч – собственная скорость катера и скорость течения соответственно. Тогда $x+y$ км/ч и $x-y$ км/ч – скорости катера по течению и против течения соответственно. Поскольку время, затраченное катером на путь между пристанями, равно 1 ч, то расстояние между пристанями равно $x+y$ км. За 1 ч плот, плывущий со скоростью y км/ч, проплывёт путь, равный y км, следовательно, в тот момент, когда катер отправится обратно с пристани B, расстояние между катером и плотом будет равно x км. Скорость сближения катера с плотом будет равна сумме скоростей катера против течения и плота, что составляет x км/ч. Следовательно, время, через которое они встретятся после отплытия катера с пристани B, составляет $x : x = 1$ ч. Отсюда получаем, что они встретятся в 14:00.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.
Получен верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.
Получен верный ответ, но вместо переменных использованы конкретные значения скоростей катера и плота – 2 балла.

---

3. Школьник пришёл в магазин канцтоваров. Он подсчитал, что если на все имеющиеся у него деньги он купит карандаши по 5 рублей за штуку, у него останется 1 рубль, а если он купит ручки по 7 рублей за штуку, то у него останется 2 рубля. Сколько рублей у него останется, если он на все деньги купит тетради по 35 рублей за штуку?

Ответ: 16.

Решение.

Первый способ. Пусть n рублей было у школьника и пусть он мог бы купить на эти деньги x карандашей или y ручек. Тогда $n = 5x + 1 = 7y + 2$. Отсюда получаем $5x = 7y + 1$ или $5(x - y) = 2y + 1$. Отсюда следует, что $2y + 1$ кратно 5. Любое натуральное число y может давать при делении на 5 в остатке числа $0, 1, 2, 3$ или 4, т.е. $y = 5k + r$, где k, r – целые неотрицательные, $r \leq 4$.

Если $y = 5k$, то $2y + 1 = 10k + 1$ не кратно 5.

Если $y = 5k + 1$, то $2y + 1 = 10k + 3$ не кратно 5.

Если $y = 5k + 2$, то $2y + 1 = 10k + 5$ кратно 5.

Если $y = 5k + 3$, то $2y + 1 = 10k + 7$ не кратно 5.

Если $y = 5k + 4$, то $2y + 1 = 10k + 9$ не кратно 5.

Следовательно, единственно возможный случай – $y = 5k + 2$. Отсюда получаем, что $n = 7y + 2 = 35k + 16$, следовательно, на эти деньги можно купить k тетрадей и останется 16 рублей.

Второй способ. Пусть n рублей было у школьника и пусть он мог бы купить на эти деньги k тетрадей и осталось бы m рублей, где $0 \leq m \leq 34$. Тогда $n = 35k + m$. Поскольку n при делении на 5 должно давать в остатке 1 и при делении на 7 давать в остатке 2, а число 35 делится на 5 и на 7, то число m должно при делении на 5 должно давать в остатке 1, а при делении на 7 давать в остатке 2. Найдём все числа, не превосходящие 34, которые при делении на 5 дают в остатке 1: это 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31. Найдём все числа, не превосходящие 34, которые при делении на 7 дают в остатке 2: это 2, 9, 16, 23, 30. Только одно число присутствует в этих двух множествах – число 16. Следовательно, $m = 16$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Число 16 найдено после получения перебором числа 51 как наименьшего количества рублей у школьника, которое больше 35 и при делении на 5 даёт остаток 1, а при делении на 7 даёт остаток 2, – 2 балла.

Число 16 найдено перебором как наименьшее количество рублей у школьника, которое при делении на 5 даёт остаток 1, а при делении на 7 даёт остаток 2, – 0 баллов.

---

4. Однажды к Шерлоку Холмсу и доктору Ватсону пришёл посетитель с просьбой помочь вернуть похищенную вещь. Будучи наслышанным об их блестящих логических способностях, он решил проверить, правда ли это. На вопрос детективов «Когда была совершена кража?» посетитель ответил, что не скажет, и написал следующие даты: 1 сентября, 3 сентября, 2 октября, 3 октября, 6 октября, 1 ноября, 2 ноября, 4 ноября, 4 декабря, 5 декабря.

«Кражу совершили в один из этих дней», – сказал посетитель, после чего он шепнул на ухо Холмсу название месяца, а Ватсону – только число (без месяца), в которое произошла кража.

«Можете ли вы назвать дату совершения кражи?», – обратился посетитель к сыщикам.

«Я ещё не знаю, – ответил Холмс, – но точно знаю, что и Ватсон не догадался».

«Сначала я тоже не знал, но после ваших слов, Холмс, уже знаю», – заявил Ватсон.

«Ну, теперь и я знаю», – сказал Холмс.

Когда была совершена кража?

Ответ: 3 сентября.

Решение.

После первого ответа Холмса мы можем исключить из рассмотрения октябрь и декабрь. Действительно, пусть кража была в один из этих двух месяцев, в которых есть уникальные 6-е и 5-е число (встретившиеся ровно 1 раз в списке). Тогда Холмс не мог бы быть уверен в незнании Ватсона, поскольку тому могли сообщить 5-е или 6-е число, после чего Ватсон уже знал бы точную дату преступления.

После ответа Холмса Ватсон понимает, что остаются только варианты с сентябрём и ноябрём. Раз Ватсон догадался о дате преступления, то число, которое ему сообщили, встретилось в этих месяцах только один раз, значит, это не первое число. Остаются 3 варианта: 3 сентября, 2 ноября, 4 ноября.

После ответа Ватсона Холмс понимает, что остаются только эти 3 варианта, но он знает месяц и догадывается о дате кражи. Это может быть только в случае 3 сентября, так как если бы Холмсу сообщили месяц ноябрь, то у него было бы 2 варианта: 2 и 4 ноября, и он не мог бы по имеющимся данным однозначно определить дату.

Таким образом, правильный ответ: 3 сентября.

Критерии.

Правильный ответ без решения или с неверным решением – 0 баллов.

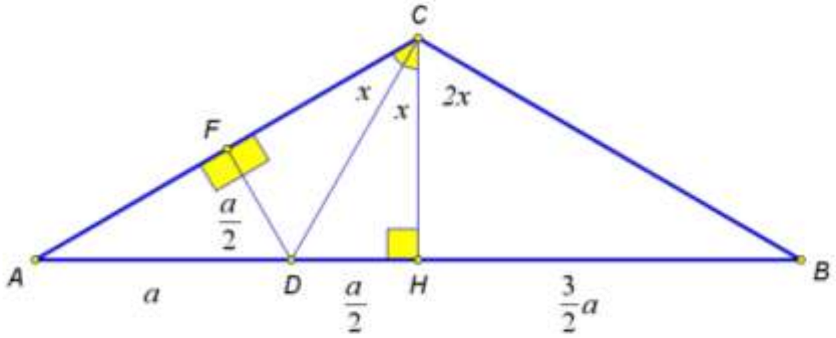
Чтобы решение можно было считать верным, в нём должны присутствовать 3 этапа в следующем порядке: исключение октября и декабря, исключение 1-го числа, исключение ноября.

---

5. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AB выбрана такая точка D, что $BD = 2AD$ и $\angle BCD = 3\angle ACD$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = \angle B = 30°$, $\angle C = 120°$.

Решение.



Положим $\angle ACD = x$, $AD = a$, тогда $\angle BCD = 3x$, $\angle ACB = 4x$, $BD = 2a$, $AB = 3a$. Проведём высоту CH. Так как треугольник ABC равнобедренный, то она является биссектрисой и медианой, следовательно, $\angle ACH = \frac{1}{2}\angle BCD = 2x$, $\angle DCH = \angle ACH - \angle ACD = x$, $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}a$, $DH = AH - AD = \frac{a}{2}$. Проведём высоту DF в треугольнике ADC. Треугольники CDH и CDF равны по гипотенузе и острому углу (CD – общая, $\angle DCH = \angle DCF$), следовательно, $DF = DH = \frac{a}{2}$. Рассмотрим треугольник ADF. Он прямоугольный и его катет FD равен половине гипотенузы AD, следовательно, $\angle DAF = 30°$. Отсюда получаем, что $\angle A = \angle B = 30°$, $\angle C = 120°$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.
Верный ответ без обоснования – 0 баллов.