Всероссийская олимпиада школьников по математике,

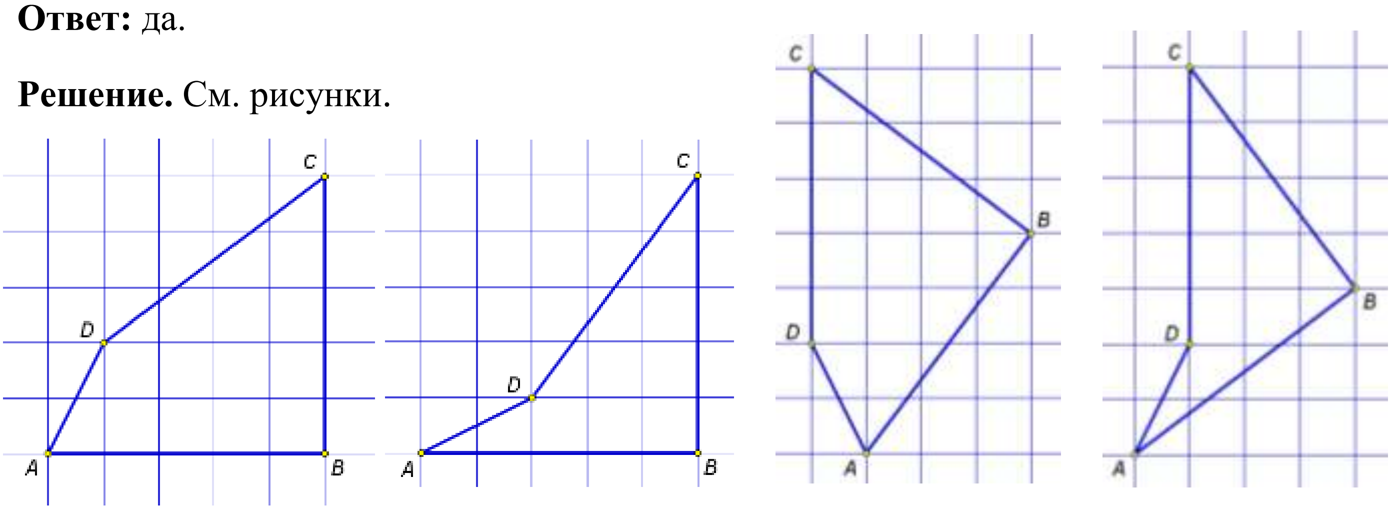
муниципальный этап, 2018 г

9 класс

1. На клетчатой бумаге нарисован четырёхугольник, все вершины которого лежат в вершинах клеток со стороной 1. Известно, что каждая из трёх его сторон имеет длину 5. Может ли четвёртая его сторона иметь длину $\sqrt{5}$?

Ответ: да.

Решение. См. рисунки.



Критерии.

Получен верный пример – 7 баллов.
Возможны и другие примеры, необходимо проверить выполнение условий задачи.

---

2. Мальчик, отправляясь на теплоходе от пристани A до пристани B, расположенной ниже по течению, бросил в реку бутылку с запиской. Путь от A до B теплоход проходит за 4 часа, а обратный путь он проходит за 5 часов. За какое время бутылка доплывёт до пристани B? Собственная скорость катера и скорость течения постоянны.

Ответ: за 40 часов.

Решение.
Пусть x км/ч и y км/ч – собственная скорость теплохода и скорость течения соответственно. Тогда $x+y$ км/ч и $x-y$ км/ч – скорости теплохода по течению и против течения соответственно. Поскольку время, затраченное теплоходом на путь по течению, равно 4 ч, то пройденный путь составляет $4(x+y)$ км. С другой стороны, так как время на обратный путь равно 5 ч, то этот путь составляет $5(x-y)$ км. Получаем равенство $4(x+y)=5(x-y)$, откуда находим $x=9y$. Следовательно, путь между пристанями равен $4(9y+y)=40y$ км, а поскольку бутылка плывёт со скоростью y км/ч, то она затратит на этот путь 40 ч.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.
Получен верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Верный ответ получен для конкретного числового значения расстояния между пристанями, собственной скорости теплохода или скорости течения – 2 балла.

---

3. У Коли есть по 100 монет каждого из трёх видов: достоинством в 1 рубль, 2 рубля и 5 рублей. Он хочет купить книгу стоимостью 100 рублей. Сколькими способами он сможет набрать необходимую сумму для покупки (без сдачи)?

Ответ: 541.

Решение. Если Коля берёт для покупки чётное количество $2n$ пятирублёвых монет, где $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$, то ему останется набрать одно- и двухрублёвыми монетами сумму в $100 - 10n$ рублей. Он сможет сделать это $51 - 5n$ способами, взяв k двухрублёвых монет, где $k = 0, 1, 2, \ldots, 50 - 5n$, при этом остальную недостающую сумму набрав однорублёвыми монетами. Таким образом, если в наборе присутствует чётное количество пятирублёвых монет, то таких наборов будет

$$(51 - 5 \cdot 0) + (51 - 5 \cdot 1) + \ldots + (51 - 5 \cdot 10) = 1 + 6 + 11 + \ldots + 51 = 286.$$

Если Коля берёт для покупки нечётное количество $2n + 1$ пятирублёвых монет, где $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$, то ему останется набрать одно- и двухрублёвыми монетами сумму в $95 - 10n$ рублей. Он сможет сделать это $48 - 5n$ способами, взяв k двухрублёвых монет, где $k = 0, 1, 2, \ldots, 47 - 5n$, при этом остальную недостающую сумму набрав однорублёвыми монетами. Таким образом, если в наборе присутствует нечётное количество пятирублёвых монет, то таких наборов будет

$(48 - 5 \cdot 0) + (48 - 5 \cdot 1) + \ldots + (48 - 5 \cdot 9) = 3 + 8 + 13 + \ldots + 48 = 255.$

Следовательно, всего имеется $286 + 255 = 541$ способов набрать нужную сумму.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Использован верный алгоритм подсчёта способов, совпадающий с авторским или аналогичный, при этом получен неверный ответ из-за неправильного суммирования членов арифметических прогрессий, – от 1 до 3 баллов.

---

4. Два простых (возможно, совпадающих) числа p и q обладают следующим свойством: $5p + 1$ делится на q, а $5q + 1$ делится на p. Найдите все такие пары p и q и докажите, что других нет.

Ответ: $p = 2$ и $q = 11$ или $p = 11$ и $q = 2$.

Решение. Будем для определённости считать, что $p \leq q$. Равенство чисел p и q невозможно, так как в противном случае $5p + 1 \vdots p$, откуда следует, что $1 \vdots p$, получаем противоречие. Следовательно, $p < q$. Найдётся такое натуральное n, что $5p + 1 = nq$, но $5p + 1 < 5q$, следовательно, $n < 5$, т.е. $n \leq 4$. Поскольку число $5q + 1$ кратно p, то и число $5nq + n = n(5q + 1)$ кратно p, а так как $nq = 5p + 1$, то $5(5p + 1) + n = 25p + n + 5$ кратно p, следовательно, $n + 5$ кратно p. Отсюда следует, что $p \leq n + 5 \leq 9$. Теперь достаточно проверить в качестве p простые числа 2, 3, 5, 7. При $p = 2$ число $5p + 1 = 11$ кратно q, следовательно, $q = 11$. При $p = 3$ получаем, что число $5p + 1 = 16 = 2^4$ кратно q, следовательно, $q = 2$, что противоречит предположению $p < q$. При $p = 5$ получаем, что $5p + 1 = 26 = 2 \cdot 13$ кратно q, но $q > 2$, следовательно, $q = 13$. Но тогда $5q + 1 = 66$ не кратно 5, следовательно, $p \neq 5$. При $p = 7$ имеем $5p + 1 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ кратно q, следовательно, $q = 2$ или $q = 3$, что противоречит предположению $p < q$. Таким образом, единственная подходящая пара p и q – это 2 и 11.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верный пример получен подбором без обоснования – 0 баллов.

Найдены числа 2 и 11 и кроме них в ответ ошибочно включены пары из чисел 1 и 1, 1 и 2, 1 и 3, полученные из неверного предположения, что 1 – простое число; при этом полностью доказано, что других пар быть не может – 5 баллов.

---

5. В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов $\angle ABC$ и $\angle BCD$ пересекаются в точке F на основании AD, причём $\angle ADC = 30°$ и $\angle BFC = 45°$. Докажите, что $CD = AB + BC$.

Решение. Пусть E – точка пересечения прямых AB и CD. Покажем, что точка E и прямая AD расположены по разные стороны от прямой BC. Для этого достаточно проверить, что $\angle ABC + \angle DCB > 180°$. Действительно,

$$\angle ABC + \angle DCB = 2\angle FBC + 2\angle FCB = 2(180° - \angle BFC) = 360° - 90° = 270° > 180°.$$

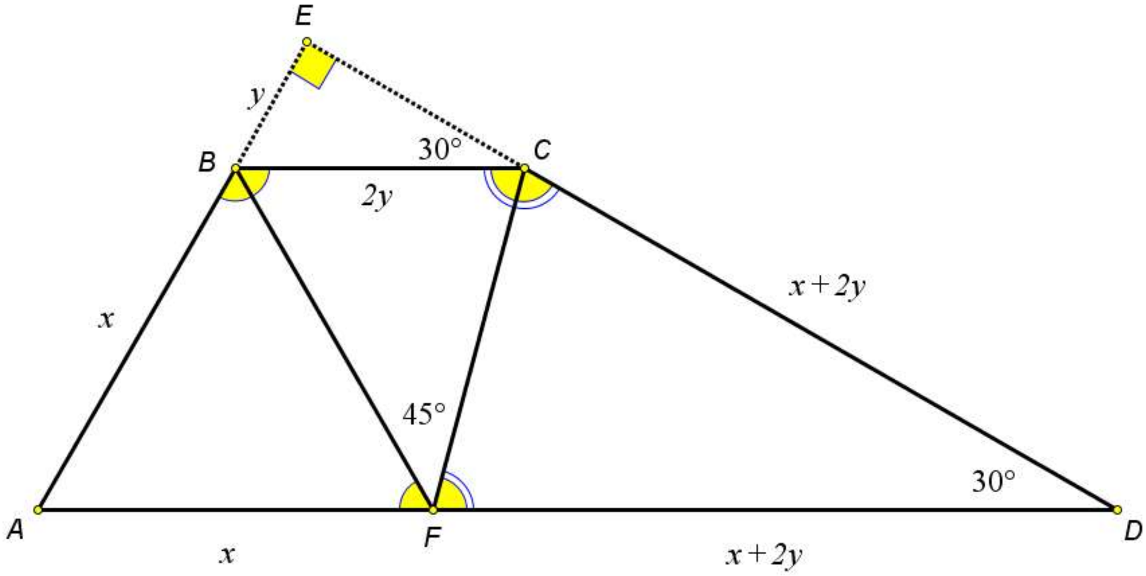
Отсюда следует, что $\angle BEC$ – прямой. В самом деле,

$$\angle BEC = 180° - \angle CBE - \angle BCE = 180° - (180° - \angle ABC) - (180° - \angle DCB) =$$

$$= \angle ABC + \angle DCB - 180° = 270° - 180° = 90°.$$

Таким образом, треугольник AED – прямоугольный, следовательно, напротив угла $\angle ADE = 30°$ лежит катет AE, равный половине гипотенузы. Положим $x = AB$, $y = BE$. Тогда $AD = 2AE = 2(x + y)$. Поскольку углы $\angle ADC$ и $\angle BCE$ равны как соответственные при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей CD, то

$\angle BCE = 30°$, следовательно, $BC = 2BE = 2y$. Углы $\angle AFB$ и $\angle FBC$ равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей BF, при этом $\angle FBC = \angle FBA$, следовательно, $\angle AFB = \angle FBA$. Отсюда следует, что треугольник ABF равнобедренный, т.е. $AF = AB = x$. Аналогично, $\angle DFC = \angle FCB$ и $\angle FCB = \angle FCD$, следовательно, $\angle DFC = \angle FCD$ и $CD = DF = AD - AF = 2(x + y) - x = x + 2y$. Таким образом, $AB + BC = x + 2y = CD$, что и требовалось доказать.



Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

Трапеция достроена до треугольника и доказано, что он прямоугольный, при этом дальнейшее решение отсутствует, не доведено до конца или неверно – 2 балла.

За отсутствие проверки того, что точка E и прямая AD расположены по разные стороны от прямой BC, баллы не снижаются.