Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2018 г

11 класс

1. Для некоторого острого угла x выполнено равенство $\sin 2x = \frac{7}{9}$. Вычислите значение выражения $\sin x + \cos x$. Ответ не должен содержать корней и степеней с дробным показателем.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Решение.

Первый способ. Положим $t = \sin x + \cos x$. Поскольку x – острый угол, то $t > 0$. Тогда $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x = 1 + \frac{7}{9} = \frac{16}{9}$. Отсюда с учётом положительности t получаем, что $t = \frac{4}{3}$.

Второй способ. Из основного тригонометрического тождества имеем $\cos 2x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Если $\cos 2x = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, то из формул понижения степени получаем

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{9-4\sqrt{2}}{18} = \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}\right)^2, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{9+4\sqrt{2}}{18} = \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}}\right)^2.$$

Отсюда с учётом положительности $\sin x$ и $\cos x$ получаем равенство

$$\sin x + \cos x = \frac{2\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3}.$$

Если $\cos 2x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, то аналогично получаем $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{9+4\sqrt{2}}{18} = \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}}\right)^2$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{9-4\sqrt{2}}{18} = \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}\right)^2$, $\sin x + \cos x = \frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3}$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Если при решении первым способом в ответ включены числа $\frac{4}{3}$ и $-\frac{4}{3}$ – 5 баллов.

Если при решении вторым способом в ответ включены числа $\frac{4}{3}$ и $-\frac{4}{3}$ – оценка снижается на 2 балла.

Если при решении вторым способом не рассмотрен случай отрицательности $\cos 2x$ – оценка снижается на 2 балла.

Если при решении вторым способом в ответ наряду с числом $\frac{4}{3}$ включено одно из чисел $\frac{\sqrt{2}}{3}$ или $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (или оба этих числа) – оценка снижается на 2 балла.

---

2. Из городов Алексеевск и Борисовск навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и проехали весь путь между городами не останавливаясь с постоянными скоростями. Известно, что встретились они через 40 минут после отправления, а автомобиль, выехавший из Алексеевска, проехал весь путь между городами на 39 минут быстрее, чем второй автомобиль. Найдите время, затраченное на весь путь каждым автомобилем.

Ответ: 65 минут и 104 минуты.

Решение. Пусть x км/мин и y км/мин – скорости первого (выехавшего из Алексеевска) и второго автомобиля соответственно, t мин – время, потраченное первым автомобилем на путь между городами. Тогда второй автомобиль затратил на этот путь $t + 39$ мин. Обозначим через A и B точки, из которых выехали первый и второй автомобили соответственно, через C обозначим точку встречи. Отрезок AC первый автомобиль проезжает за 40 мин, а второй автомобиль – за $(t + 39) - 40$ мин, что составляет $t - 1$ мин. Следовательно, $\frac{x}{y} = \frac{t-1}{40}$. Отрезок BC первый автомобиль проезжает за $t - 40$ мин, а второй – за 40 мин, следовательно, $\frac{x}{y} = \frac{40}{t-40}$. Получаем уравнение $\frac{t-1}{40} = \frac{40}{t-40}$, которое равносильно квадратному уравнению

$$t^2 - 41t - 1560 = 0.$$

Решая его, находим корни: $t_1 = 65$, $t_2 = -24$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, следовательно, первый автомобиль тратит на путь между городами 65 мин, а второй тратит $65 + 39 = 104$ мин.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Задача обоснованно сведена к уравнению $t^2 - 41t - 1560 = 0$ или к аналогичному верному квадратному уравнению с другой неизвестной, при этом уравнение не решено или решено неверно – 3 балла.

Получен верный ответ без обоснования – 0 баллов.

----

3. Парабола с уравнением $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в точках A и B, ось ординат в точке C, а её вершина находится в точке F. Пусть K и M – точки пересечения прямых AC и BC с осью симметрии параболы. Докажите, что F – середина отрезка KM.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – абсциссы точек A и B, тогда эти числа являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и по теореме Виета имеем равенства $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Ордината точки C равна c, следовательно, уравнения прямых AC и BC имеют вид $y = -\frac{c}{x_1}x + c$ и $y = -\frac{c}{x_2}x + c$ соответственно. Точка F имеет координаты $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, где $D = b^2 - 4ac$, а ось симметрии параболы имеет уравнение $x = -\frac{b}{2a}$. Подставив выражение $-\frac{b}{2a}$ вместо x в уравнения прямых AC и BC, получим ординаты точек K и M: $K\left(-\frac{b}{2a}, \frac{bc}{2ax_1} + c\right)$, $M\left(-\frac{b}{2a}, \frac{bc}{2ax_2} + c\right)$. Теперь достаточно доказать, что $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{bc}{2ax_1} + c\right) + \left(\frac{bc}{2ax_2} + c\right)\right) = -\frac{D}{4a}$. Действительно, $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{bc}{2ax_1} + c\right) + \left(\frac{bc}{2ax_2} + c\right)\right) =$

$$= \frac{bc}{4a}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) + c = \frac{bc(x_1+x_2)}{4ax_1x_2} + c = \frac{bc(-b:a)}{4a(c:a)} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}.$$

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

---

4. Два простых (возможно, совпадающих) числа p и q обладают следующим свойством: $3p + 1$ делится на $q - 2$, а $3q + 1$ делится на $p - 2$. Найдите все такие пары p и q и докажите, что других нет.

Ответ: $(p, q) \in \{(3,3), (3,7), (7,3), (7,13), (13,7)\}$.

Решение. Будем для определённости считать, что $p \leq q$. Из условия задачи следует, что $p, q \geq 3$. Найдётся такое натуральное n, что выполнено равенство

$$3p + 1 = n(q - 2). \qquad (1)$$

Рассмотрим случай, когда $q \geq 11$. Тогда $q \geq 9$, что равносильно неравенству $4(q-2) \geq 3q + 1$. Тогда $4(q-2) \geq 3q + 1 \geq 3p + 1 = n(q-2)$, следовательно, $4(q-2) \geq n(q-2)$, откуда следует, что $n \leq 4$. Поскольку $3q + 1$ кратно $p - 2$, то и $3nq + n = n(3q + 1)$ кратно p, а так как $nq = 3p + 2n + 1$ из равенства (1), то $3(3p + 2n + 1) + n = 9p + 7n + 3$ кратно $p - 2$, т.е. $9(p-2) + 7n + 21$ кратно $p - 2$. Отсюда получаем, что $7n + 21$ кратно $p - 2$, где n может принимать значения не больше 4. Будем искать числа p в виде $d + 2$, где d – нечётный делитель числа $7n + 21$.

Если $n = 1$, то $7n + 21 = 28$. Его нечётные делители: 1 и 7.

Если $n = 2$, то $7n + 21 = 35$. Его нечётные делители: 1, 5, 7 и 35.

Если $n = 3$, то $7n + 21 = 42$. Его нечётные делители: 1, 3, 7 и 21.

Если $n = 4$, то $7n + 21 = 49$. Его нечётные делители: 1, 7 и 49.

Добавляя 2 к перечисленным делителям, получаем только 5 потенциально возможных значений p: 3, 5, 7, 23 и 37. Если же $q < 11$, т.е. $q \leq 7$, то при условии $p \leq q$ нужно проверить значения p, равные 3, 5 и 7.

Если $p = 3$, то из условия $3p + 1 \,\vdots\, (q - 2)$ следует, что $q - 2$ – нечётный делитель числа 10, следовательно, $q - 2$ может равняться 1 или 5. Следовательно, q может равняться 3 или 7. Второму условию пары чисел $(3,3)$ и $(3,7)$ также удовлетворяют.

Если $p = 5$, то из условия $3p + 1 \,\vdots\, (q - 2)$ следует, что $q - 2$ – нечётный делитель числа 16 и $q - 2 \geq 3$; получаем противоречие, поскольку таких делителей нет.

Если $p = 7$, то из условия $3p + 1 \,\vdots\, (q - 2)$ следует, что $q - 2$ – нечётный делитель числа 22 и $q - 2 \geq 5$, следовательно, $q - 2 = 11$ и $q = 13$. Второму условию эта пара чисел также удовлетворяет.

Если $p = 23$, то из условия $3p + 1 \,\vdots\, (q - 2)$ следует, что $q - 2$ – нечётный делитель числа 70 и $q - 2 \geq 21$, следовательно, $q - 2 = 35$ и $q = 37$. Но $3q + 1 = 112$ не кратно 21, получаем противоречие.

Если $p = 37$, то из условия $3p + 1 \,\vdots\, (q - 2)$ следует, что $q - 2$ – нечётный делитель числа 112 и $q - 2 \geq 35$; получаем противоречие, поскольку таких делителей нет.

Таким образом, для p и q с учётом перестановок получаем следующие возможные варианты: $(3,3), (3,7), (7,3), (7,13), (13,7)$.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

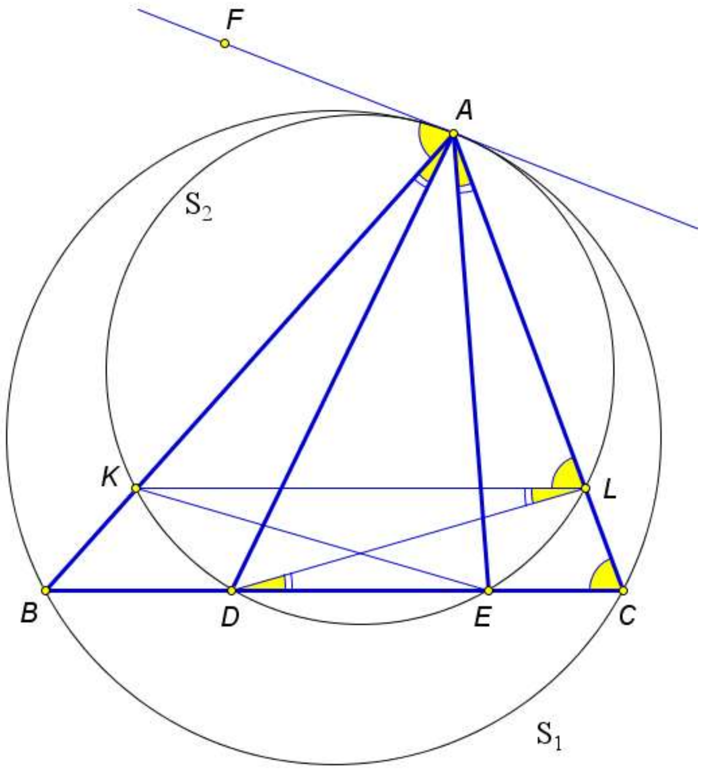
Верный пример получен подбором без обоснования – 0 баллов.

Найдены все пары, перечисленные в ответе, и кроме них в ответ ошибочно включены пары из чисел 1 и 1, 1 и 3, полученные из неверного предположения, что 1 – простое число; при этом полностью доказано, что других пар быть не может – 5 баллов.

---

5. Окружности S_1 и S_2 касаются внутренним образом в точке A (S_2 лежит внутри S_1). Хорда BC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точках D и E (D лежит на отрезке BE). Докажите, что углы $\angle BAD$ и $\angle CAE$ равны.

Решение.



Пусть FA – общая касательная к окружностям S_1 и S_2 (точки C и F лежат по разные стороны от прямой AB), K и L – точки пересечения окружности S_2 с отрезками AB и AC соответственно. По теореме об угле между касательной и хордой и теореме о вписанном угле имеем равенства $\angle FAK = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AK} = \angle ALK$ и $\angle FAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \angle ACB$, откуда следует равенство $\angle ALK = \angle ACB$. Поскольку эти углы являются соответственными при пересечении прямых KL и BC секущей AC, то прямые KL и BC параллельны. Углы $\angle KLD$ и $\angle EDL$ равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых KL и BC секущей DL. Углы $\angle KAD$ и $\angle KLD$ равны как вписанные в окружность S_2, опирающиеся на одну дугу KD. Аналогично, равны углы $\angle EDL$ и $\angle EAL$, следовательно, $\angle KAD = \angle EAL$, что и требовалось доказать.

Критерии.

Получено верное решение – 7 баллов.

Доказано, что прямые BC и KL параллельны, при этом дальнейшие продвижения отсутствуют – 2 балла.