

Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2016 г,

11 класс

1. Угол x удовлетворяет равенству $\sin 2x = \frac{1}{3}$. Вычислите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.
2. У Оли есть 7 карточек разных цветов, на каждой из которых написано натуральное число. Оля берёт всевозможные комбинации из трёх карточек, считает сумму написанных на этих трёх карточках чисел и записывает результат в тетрадку. Когда Оля перебрала все возможные комбинации из трёх карточек, у неё в тетрадке было записано 35 чисел, среди которых оказались только числа 2016 и 2017. Какой набор из семи чисел был написан на карточках?
3. Каждое утро в одно и то же время Петя выбегает из дома на пробежку по одному и тому же маршруту с одной и той же постоянной скоростью. Одновременно с Петей по тому же маршруту на пробежку из дома выбегает Вася и бежит навстречу Пете с одной и той же постоянной скоростью. Пробежав некоторое расстояние, Петя останавливается отдохнуть, и через 12 минут после остановки мимо отдыхающего Пети пробегает Вася. Однажды Петя сделал остановку на 6 минут позже, чем обычно, поэтому встретил Васю через 1 минуту после остановки, а на следующий день сделал остановку в обычное для себя время, но бежал при этом на 3 км/ч быстрее, чем обычно, поэтому встретил Васю через 6 минут после остановки. Какое расстояние обычно пробегает Петя до остановки, если длина маршрута между домами Пети и Васи равна 11 км 200 м?
4. На окружности ω выбрана точка A . Окружность ω_1 с центром в точке A пересекает окружность ω в точках B и C (радиус окружности ω_1 меньше радиуса окружности ω). Окружность ω_2 с центром в точке C пересекает окружность ω_1 в точках B и E . Докажите, что прямая CE касается окружности ω .
5. Натуральные числа x , y и z удовлетворяют равенству
$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 2016.$$
Найдите наименьшее значение суммы $x + y + z$.

Все ответы необходимо обосновать!