Всероссийская олимпиада школьников по математике,

муниципальный этап, 2016 г,

10 класс

1. Назовём натуральное двузначное число *интересным*, если оно делится без остатка на произведение своих цифр. Найдите все интересные числа и докажите, что других таких чисел нет.

Ответ: 11, 12, 15, 24, 36.

Решение.

Пусть искомое интересное число имеет вид $\overline{ab} = 10a + b$, где a и b – целые числа, такие, что $1 \leq a, b \leq 9$. Число b ненулевое, поскольку иначе произведение цифр интересного числа равнялось бы 0, а деление на 0 невозможно. Тогда существует натуральное число k такое, что $10a + b = kab$. Запишем это равенство в эквивалентной форме:

$$a(kb - 10) = b. \qquad (1)$$

Если $b = 1$, то $a = 1$ и $kb - 10 = 1$, т.е. $k = 11$. Получаем $\overline{ab} = 11$ – первое интересное число.

Если $b = 2$, то $a(2k - 10) = 2$, т.е. $a(k - 5) = 1$, следовательно, $a = 1$, $k = 6$, $\overline{ab} = 12$ – ещё одно интересное число.

Далее рассматриваем случаи, когда $b \geq 3$.

Заметим, что $kb - 10 \geq 1$ (иначе правая часть равенства (1) неположительна), т.е.

$$kb \geq 11. \qquad (2)$$

С другой стороны, $kb - 10 \leq b$ (иначе правая часть равенства (1) больше b), т.е.

$$b(k - 1) \leq 10. \qquad (3)$$

Так как $b \geq 3$, то из неравенства (3) получаем, что $k - 1 \leq \frac{10}{3}$, т.е. $k \leq 4$. Поскольку $b \leq 9$, то из неравенства (2) получаем, что $k \geq 2$. Из неравенств (2) и (3) получаем, что

$$\frac{11}{k} \leq b \leq \frac{10}{k-1}. \qquad (4)$$

Осталось рассмотреть случаи, когда $k = 2$, $k = 3$ и $k = 4$.

Если $k = 2$, то из равенства (1) получаем $a(2b - 10) = b$, т.е. $2a(b - 5) = b$. Левая часть равенства чётная, следовательно, b тоже чётно. Кроме того, чтобы левая часть была положительна, должно быть $b \geq 6$. Если $b = 6$, то $a = \frac{b}{2b-10} = 3$, следовательно, $\overline{ab} = 36$ – ещё одно интересное число. Если $b = 8$, то $2a(b - 5) = 6a$ кратно 3, а 8 не кратно 3, противоречие.

Если $k = 3$, то из равенства (1) получаем $a(3b - 10) = b$. Из неравенства (4) следует, что $3\frac{2}{3} \leq b \leq 5$, т.е. $b = 4$ или $b = 5$. Если $b = 4$, то $a = \frac{b}{3b-10} = 2$, следовательно,

$\overline{ab} = 24$ – ещё одно интересное число. Если $b = 5$, то $a = \frac{b}{3b-10} = 1$, следовательно, $\overline{ab} = 15$ – ещё одно интересное число.
Если $k = 4$, то из равенства (1) получаем $a(4b - 10) = b$. Из неравенства (4) следует, что $2{,}75 \le b \le 3\frac{1}{3}$, т.е. $b = 3$. Тогда $a = \frac{b}{4b-10} = 1{,}5$, получили противоречие.
Таким образом, все интересные числа – это 11, 12, 15, 24, 36.

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Получено уравнение (1) и произведён перебор всех возможных значений b от 1 до 9 со всеми вариантами разложения числа b на множители – 7 баллов.

Верный ответ получен перебором всех двузначных чисел, что продемонстрировано в решении, – 7 баллов.

Верный ответ без обоснования – 1 балл.

Произведён перебор всех двузначных чисел, что продемонстрировано в решении, при этом найдено 4 интересных числа и в ответ не включены лишние числа – 1 балл.

В решении говорится о том, что был проведён полный перебор всех двузначных чисел, но этот перебор не продемонстрирован или продемонстрирован не полностью, при этом получен верный ответ – 1 балл.

В результате перебора всех двухзначных чисел (либо вообще без обоснования) найдено менее 4 интересных чисел и/или в ответ включены лишние числа – 0 баллов.

Получено уравнение (1) или эквивалентное ему и выполнен перебор значений a, b или k, при этом в результате вычислительной ошибки пропущено интересное число и не приведено лишних либо найдены 5 интересных чисел и одно лишнее – 1–3 балла.

----

2. Биссектриса первого и третьего координатных углов пересекает в двух точках параболу с уравнением $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – некоторые числа. Докажите, что если $b \ge 0{,}5$, то ось абсцисс также пересекает эту параболу.

Решение. Так как биссектриса первого и третьего координатных углов имеет уравнение $y = x$, то из условия задачи следует, что система уравнений $\begin{cases} y = x, \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ имеет два решения, следовательно, уравнение $ax^2 + bx + c = x$ имеет два решения. Запишем это уравнение в виде $ax^2 + (b-1)x + c = 0$. Поскольку оно имеет 2 корня, то его дискриминант положителен: $(b-1)^2 - 4ac > 0$, т.е. $b^2 - 2b + 1 - 4ac > 0$. Последнее неравенство равносильно $b^2 - 4ac > 2b - 1$. Но так как $b \geq 0{,}5$, то верно неравенство $2b - 1 \geq 0$. Следовательно, $b^2 - 4ac > 0$, т.е. дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ положителен, значит, оно имеет 2 корня. Это означает, что ось абсцисс пересекает параболу с уравнением $y = ax^2 + bx + c$ в двух точках.

Критерии.

Приведено полное доказательство – 7 баллов.

Вместо общего случая рассмотрена парабола с конкретными числовыми коэффициентами и для неё проверено условие пересечения с осью абсцисс – 0 баллов.

----

3. Коля вышел из дома и пошёл в школу, а спустя 16 минут вслед за ним выбежала его бабушка, обнаружившая, что внук забыл взять с собой приготовленные ею пирожки. На расстоянии 1 км 400 м от дома бабушка догнала внука и отдала ему пирожки. Если бы бабушка бежала на 12 км/ч быстрее, то встреча с внуком произошла бы на 9 минут раньше. Найдите скорости внука и бабушки.

Ответ: скорость Коли 3 км/ч, скорость бабушки 7 км/ч.

Решение.

Пусть x км/ч и y км/ч – скорости Коли и бабушки соответственно, тогда скорость бабушки после увеличения на 12 км/ч будет равна $y + 12$ км/ч. Поскольку минута равна одной шестидесятой часа, то 16 минут составляют $\frac{4}{15}$ часа, а 9 минут равны $\frac{3}{20}$ часа, при этом 1 км 400 м составляют $\frac{7}{5}$ км. Так как время равно частному пути и скорости, то время, затраченное внуком и бабушкой на путь до места встречи, составляет $\frac{7}{5x}$ ч и $\frac{7}{5y}$ ч соответственно. Так как по условию бабушка потратила на путь до места встречи на $\frac{4}{15}$ ч меньше, чем Коля, то приходим к уравнению $\frac{7}{5x} - \frac{7}{5y} = \frac{4}{15}$. Так как по условию во втором случае Коля и бабушка потратят на путь до места встречи на $\frac{3}{20}$ ч меньше, чем в первом, то время, потраченное Колей и бабушкой, составит $\frac{7}{5x} - \frac{3}{20}$ ч и $\frac{7}{5y} - \frac{3}{20}$ ч соответственно. Пути, пройденные Колей и бабушкой до места встречи, равны $x\left(\frac{7}{5x} - \frac{3}{20}\right)$ км и $(y + 12)\left(\frac{7}{5y} - \frac{3}{20}\right)$ км соответственно. Так как до места встречи Коля и бабушка прошли одинаковые пути, то получаем уравнение $x\left(\frac{7}{5x} - \frac{3}{20}\right) = (y + 12)\left(\frac{7}{5y} - \frac{3}{20}\right)$, которое после раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и умножения на общий знаменатель примет вид

$$y^2 - xy + 12y - 112 = 0.$$

Имеем систему уравнений

$$\frac{7}{5x} - \frac{7}{5y} = \frac{4}{15}, \qquad (1)$$

$$y^2 - xy + 12y - 112 = 0. \qquad (2)$$

Выразим из уравнения (1) неизвестную x:

$$x = \frac{21y}{4y+21}. \qquad (3)$$

Подставив найденное выражение в уравнение (2), после раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и сокращения получим уравнение

$$y^3 + 12y^2 - 49y - 588 = 0. \qquad (4)$$

Сгруппируем в этом уравнении первое слагаемое со вторым, третье с четвёртым и вынесем общие множители, после этого уравнение примет вид

$$y^2(y + 12) - 49(y + 12) = 0.$$

Вынесем общий множитель $(y + 12)$ за скобки, получим уравнение

$$(y + 12)(y^2 - 49) = 0,$$

которое равносильно уравнению $(y + 12)\,(y - 7)(y + 7) = 0$.

Следовательно, уравнение имеет три корня:

$y_1 = -12 < 0$ – не удовлетворяет условию задачи;

$y_2 = -7 < 0$ – не удовлетворяет условию задачи;

$y_3 = 7 > 0$ – удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, скорость бабушки равна 7 км/ч. Подставив найденное значение неизвестной y в равенство (3), получим значение скорости Коли: $x = 3$ (км/ч).

Критерии.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Решение сведено к рассмотрению уравнений (1) и (2), но не доведено до конца или получено неверное решение – 2 балла.

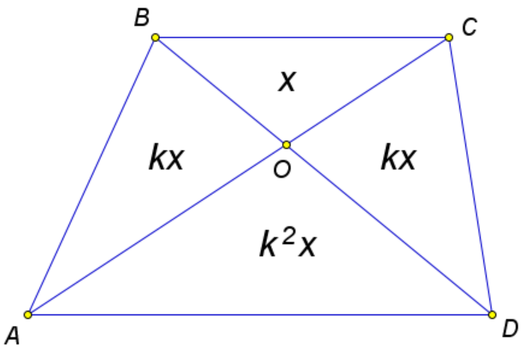
Получено уравнение (4), но не решено или решено неверно – 4 балла.

Решение в целом верное, получен верный ответ, но при решении уравнения (4) потерян один из корней – 6 баллов.

----

4. Диагонали трапеции разбивают её на 4 треугольника с целыми площадями. Наименьшая из площадей этих треугольников равна квадрату натурального числа. Докажите, что площадь трапеции также равна квадрату натурального числа.

Решение.



Пусть $ABCD$ – трапеция из условия задачи с основаниями BC и AD $(BC < AD)$, O – точка пересечения диагоналей, $k = \frac{AD}{BC}$ $(k > 1)$. Треугольники AOD и COB подобны по двум углам, следовательно, $\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} = \frac{AD}{BC} = k$. Пусть x – площадь треугольника COB, y – площадь трапеции. Треугольники COB и AOB имеют общую высоту, следовательно, их площади относятся как основания, т.е. $\frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \frac{AO}{OC} = k$. Следовательно, $S_{AOB} = kx$. Аналогично доказывается, что площадь треугольника COD находится по формуле $S_{COD} = kx$. Треугольники AOD и COD также имеют общую высоту, поэтому их площади также относятся как основания, т.е. $\frac{S_{AOD}}{S_{COD}} = \frac{AO}{OC} = k$. Следовательно, $S_{AOD} = kS_{COD} = k^2x$. Так как площадь трапеции равна сумме площадей перечисленных четырёх треугольников, то имеем равенство

$$y = x + kx + kx + k^2x = x(1 + 2k + k^2) = x(k + 1)^2.$$

Поскольку x – наименьшая из площадей треугольников, то $x = n^2$ для некоторого натурального числа n. Тогда $y = n^2(k + 1)^2$. Так как площади всех треугольников – целые числа, то k – рациональное число, а площадь трапеции – целое. Тогда $k + 1$ – рациональное число, и произведение целого n и рационального $k+1$ тоже рационально. Таким образом, $y = \left(n(k + 1)\right)^2$, где $n(k + 1)$ – рациональное, т.е. целое число y равно квадрату рационального, следовательно, оно равно квадрату натурального.

Критерии.

Проведено полное доказательство – 7 баллов.

Получена формула $y = x(1 + 2k + k^2)$ или эквивалентная ей – 3 балла

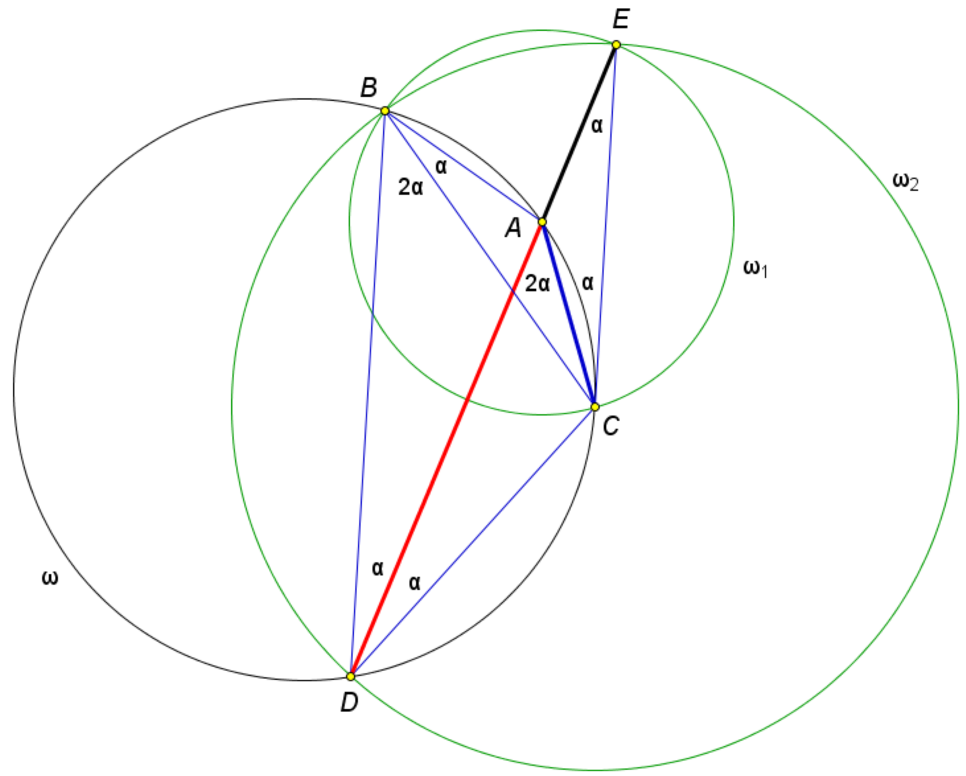
Получена формула $y = \left(n(k + 1)\right)^2$ и делается вывод, что y является квадратом натурального числа без упоминания рациональности числа $n(k + 1)$, – 4 балла.

----

5. На окружности ω выбрана точка A. Окружность ω_1 с центром в точке A пересекает окружность ω в точках B и C (радиус окружности ω_1 меньше радиуса окружности ω). Окружность ω_2 с центром в точке C пересекает окружность ω в точках B и D. Пусть E – ещё одна точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что точки A, D и E лежат на одной прямой.

Решение.

Пусть $\angle BDA = \alpha$. Так как $AB = AC$, то дуги AB и AC окружности ω равны, следовательно, на них опираются равные вписанные углы. Поэтому $\angle ADC = \angle BDA = \alpha$, следовательно, $\angle BDC = \angle ADC + \angle BDA = 2\alpha$. Так как $BC = CD$, то $\angle CBD = \angle BDC = 2\alpha$. Углы $\angle DBC$ и $\angle DAC$ являются вписанными в окружность ω и опираются на одну дугу CD, следовательно, $\angle DAC = \angle DBC = 2\alpha$. Равнобедренные треугольники ABC и AEC равны по трём сторонам, следовательно, $\angle ACE = \angle AEC = \angle ABC = \angle ADC = \alpha$ (углы $\angle ABC$ и $\angle ADC$ вписаны в окружность ω и опираются на одну дугу AC). Тогда $\angle CAE = 180^0 - 2\angle AEC = 180^0 - 2\alpha$ и $\angle EAD = \angle CAE + \angle DAC = 180^0 - 2\alpha + 2\alpha = 180^0$, следовательно, точки A, D и E лежат на одной прямой.



Критерии.

Проведено полное доказательство – 7 баллов.

Доказано, что $\angle DAC = 2\alpha$ или $\angle DBC = 2\alpha$, – 3 балла.

Доказано, что $\angle ACE = \angle AEC = \angle ABC$, – 1 балл.

Доказаны оба предыдущих пункта – 4 балла.